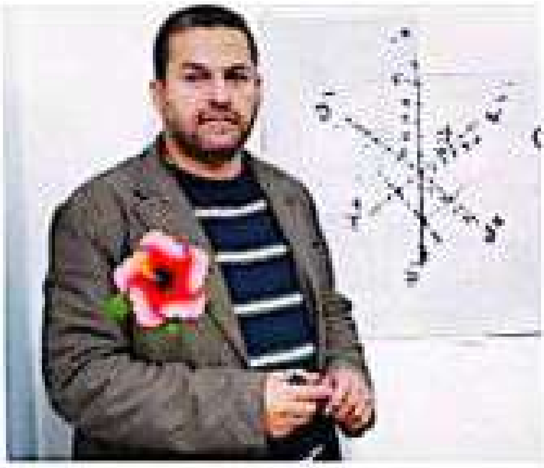
م (3)

الفرع العلمي

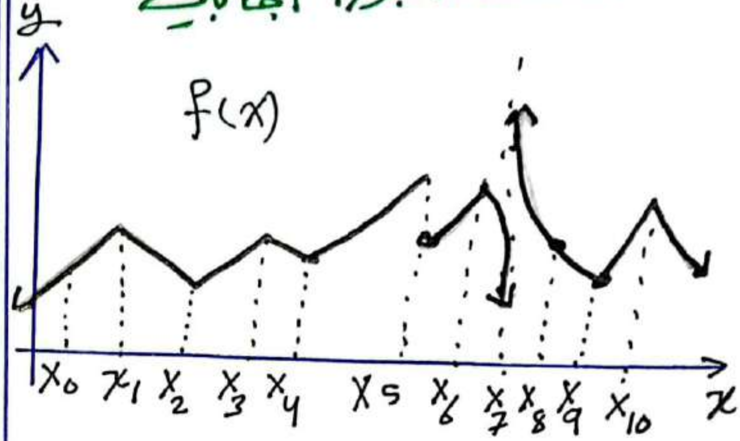
حل جميع أسئلة كتاب التمارين

الاشتقاق
مشتقة الضرب والقسمة
قاعدة السلسة
الاشتقاق الضمني
المعدلات المرتبطة
القيم القصوى والتقعر
تطبيقات القيم القصوى
الاعداد المركبة
العمليات على الاعداد المركبة
المحل الهندسي في المستوى المركب
رافت صافي
مدرسة سمر الثانوية للبنين
0785824464



الوحدة (1)　　**كتاب التمارين**　　الاشتقاق

① يبين الشكل المجاور منحنى $f(x)$ حدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق مبرراً إجابتي



الحل:

x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_6 و x_9 و x_{10}

وجود رأس حاد (زاوية)

حيث عندها متصل لكن مشتقة اليمين لا تساوي مشتقة اليسار

x_5 و x_7

عدم الاتصال، حيث الاتصال شرط ضروري

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي

② $f(x)=9e^x+\frac{1}{3\sqrt{x}}$

③ $f(x)=2e^x+\frac{1}{x^2}$

④ $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-\cos x$

الحل:

② الأفضل معالجة الجذر

$$f(x)=9e^x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=9e^x-\frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=9e^x-\frac{1}{6\sqrt[2]{x^3}}$$

③

$$f'(x)=2e^x+\frac{-1(2x)}{x^4}$$

$$=2e^x-\frac{2}{x^3}$$

④

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos x+\sin x$$

⑤ جد معادلة المماس لمنحنى $f(x)=2e^x+x$ عندما $x=2$

الحل:

$$x_1=2$$

$$y_1=f(2)=2e^2+2$$

$$f'(x)=2e^x+1$$

$$m=f'(2)=2e^2+1$$

معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-(2e^2+2)=(2e^2+1)(x-2)$$

بالتبسيط

$$y=(2e^2+1)x-2e^2$$

⑥ اثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران

$f(x) = 3x + \sin x + 2$

الحل: مماس أفقي ← $f' = 0$

$f'(x) = 3 + \cos x$

$3 + \cos x = 0$

$\cos x = -3$

هذه المعادلة ليس لها حل

لأن $-1 \le \cos x \le 1$

وعليه لا يوجد مماس افقيا

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3$ ، $t \ge 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

⑦ جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

⑧ جد الموقع (المواقع) التي يكون عنده الجسم في حالة سكون

الحل:

⑦

$v(t) = s'(t) = 6t - 3t^2$

$a(t) = v'(t) = 6 - 6t$

⑧ سكون تعني $V = 0$

$6t - 3t^2 = 0$

$t(6 - 3t) = 0$

$t = 0 \quad t = 2$

عند $t=0$ فإن $s(0) = 0 - 0 = 0$

عند $t=2$ فإن $s(2) = 12 - 8 = 4$

يكون في حالة سكون لحظيا عندما يكون في الموقعين $s = 0$ و $s = 4$

اذا كان $f(x) = \ln x^2$ حيث $x > 0$

اجب عن السؤالين :

⑨ جد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$

⑩ جد الاحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

الحل :

⑨ $f(x) = 2\ln x$

$x_1 = e^2$

$y_1 = 2\ln e^2 = 2(2) = 4$

$f' = \frac{2}{x}$

$m = f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$

$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2$

$y = \frac{2}{e^2}x + 2$

موازيا ← الميلان متساويين

$f'(x) = \frac{2}{x}$

لايجاد ميل المستقيم اجعل y موضوع قانون ثم اشتق او نشتق ضمنيا الدرس لاحقا!!

$6x - 2y + 5 = 0$

نقسم على (2) $2y = 6x + 5$

$y = 3x + \frac{5}{2} \rightarrow y' = 3$

نساوي الميلان

$\frac{3}{1} = \frac{2}{x} \rightarrow 3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

تذكير

1) $\ln xy = \ln x + \ln y$

2) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

3) $\ln x^n = n \ln x$

4) $e^{\ln f(x)} = f(x)$

5) $\ln 1 = 0$

6) $\ln e = 1$

7) $e^0 = 1$

8) $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

9) $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

10) $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

اذا كان $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

اجب عن السؤالين الاتيين

(11) جد ميل المماس لمنحني $f(x)$ عند $x = 0$

(12) جد معادلة المماس لمنحني $f(x)$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل: (11) $f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$

$$m = f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0$$
$$= 2(1) + 4(0)$$
$$= 2$$

(12) $x_1 = \frac{\pi}{2}$

$$y_1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2}$$
$$= 2(1) - 4(0)$$
$$= 2$$

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= 2(0) + 4(1)$$
$$= 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y - 2 = 4x - 2\pi$$
$$y = 4x - 2\pi + 2$$

انتهت الاسئلة

الوحدة (1) | كتاب التمارين | مشتقة الضرب والقسمة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

2) $f(x)=-\csc x-\sin x$

3) $f(x)=\dfrac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

4) $f(x)=x\cot x$

5) $f(x)=4x-x^2\tan x$

6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$

7) $f(x)=x\left(1-\dfrac{4}{x+3}\right)$

8) $f(x)=\dfrac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

9) $f(x)=(x+1)e^x$

الحل :

1) قاعدة القسمة

$$f'(x)=\frac{(x)(\cos x)-(\sin x)(1)}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

2)

$$f'(x)=-(-\csc x\cot x)-\cos x$$

$$f'(x)=\csc x\cot x-\cos x$$

3)

$$f'(x)=\frac{(x+\frac{c}{x})(1)-(x+c)(1-\frac{c}{x^2})}{(x+\frac{c}{x})^2}$$

$$=\frac{\cancel{x}+\frac{c}{x}-\cancel{x}+\frac{c}{x}-c+\frac{c^2}{x^2}}{(x+\frac{c}{x})^2}$$

$$=\frac{\frac{2c}{x}-c+\frac{c^2}{x^2}}{(x+\frac{c}{x})^2}$$

4)

$$f'=(x)(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)$$

$$=-x\csc^2 x+\cot x$$

5)

$$f'(x)=4-(x^2\sec^2 x+(\tan x)(2x))$$

$$=4-x^2\sec^2 x-2x\tan x$$

6)

$$f'=\frac{-(x^2)\sin x-(\cos x)(2x)}{x^4}$$

$$f'=\frac{-x\sin x-2\cos x}{x^3}$$

نختصر حيث نخرج x عامل مشترك من البسط

7) فك أقواس

$$f(x)=x-\frac{4x}{x+3}$$

$$f'(x)=1-\left(\frac{(x+3)(4)-4x}{(x+3)^2}\right)$$

$$=1-\frac{(4x+12-4x)}{(x+3)^2}$$

$$=1-\frac{12}{(x+3)^2}$$

$$f' = \frac{(2\cos x)(-3\cos x) - (3-3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$$

$$= \frac{-6\cos^2 x + 6\sin x - 6\sin^2 x}{4\cos^2 x}$$

$$= \frac{-6(\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x)}{4\cos^2 x}$$

$$= -6\frac{(1 - \sin x)}{4\cos^2 x}$$

$$= \frac{-3(1 - \sin x)}{2\cos^2 x}$$

نستطيع ان نضع مكانها $1 - \sin^2 x$ ثم نحلها فرق مربعين ونختصرها مع البسط

$$f'(x) = (x+1)e^x + (e^x)(1) \quad (9)$$

$$= xe^x + e^x + e^x$$

$$= xe^x + 2e^x \quad \text{عامل مشترك } (2)$$

$$= e^x(x+2)$$

جد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(15) $f(x) = x^2\cos x$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$

(16) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ و $(\pi, -1)$

الحل: (15)

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ و $y_1 = 0$

$$f'(x) = -x^2\sin x + 2x\cos x$$

$$m = f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} + 2\pi\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{\pi^2}{4}$$

$$y = \ldots x + \frac{\ldots}{8}$$

$x_1 = \pi$, $y_1 = -1$ (16)

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$m = f'(\pi) = \frac{(\cos\pi)(\cos\pi) - (1+\sin\pi)(-\sin\pi)}{(\cos\pi)^2}$$

$$= \frac{(-1)(-1) - (1+0)(0)}{(-1)^2} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 1(x - \pi)$$

$$y = x - \pi - 1$$

جد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي

(12) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

(13) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

(14) $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$

الحل: مماس أفقي

$m = 0$

$$f' = \frac{(x^2)(2) - (2x-1)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-2x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(-2x+2)}{x^4} = \frac{-2x+2}{x^3}$$

$f' = 0$ فقط نساوي البسط بالصفر

$$-2x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

عند $x = 1$ فان $y = f(1) = \frac{2-1}{1} = 1$

النقطة $(1, 1)$

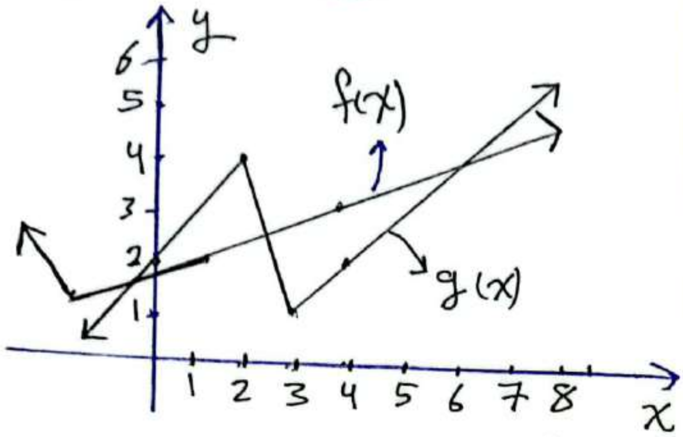
يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين f و g اذا كان

$u(x) = f(x)g(x)$

$v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

جد كلاً مما يأتي:

(15) $u'(1)$ (16) $v'(4)$



(15) الحل: $u'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$

نحتاج $f'(1)$ و $g'(1)$

$g'(1)$ نجد ميل المستقيم المار ب: $(0,2)$, $(1,3)$ $g'(1) = \frac{2-3}{0-1} = 1$	$f'(1)$ نجد ميل المستقيم المار ب $(4,3)$ و $(1,2)$ $f'(1) = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$

$u'(1) = (2)(1) + (3)(\frac{1}{3}) = 2 + 1 = 3$

(16) $v'(4) = \frac{g(4)f'(4) - f(4)g'(4)}{(g(4))^2}$

نحتاج $g'(4)$ و $f'(4)$

$g'(4)$ نجد ميل المستقيم المار ب $(6,4)$, $(3,1)$ $g'(4) = \frac{4-1}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$	$f'(4)$ نأخذ ميل المستقيم المار ب: $(4,3)$, $(1,2)$ $f'(4) = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$

$v'(4) = \frac{(2)(\frac{1}{3}) - 3(1)}{(2)^2} = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4} = \frac{-7}{12}$

(13)

$h'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$h'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

نضع $f' = 0$ حيث نأخذ فقط البسط

$2x = 0$

$x = 0$

عند $x = 0$ فإن $y = \frac{0}{0+1} = 0$

النقطة $(0, 0)$

(14)

$g(x) = \frac{8x - 16}{e^x}$

$g'(x) = \frac{\cancel{e^x}(8) - (8x-16)\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}}$

$= \frac{8 - 8x + 16}{e^x} = \frac{24 - 8x}{e^x}$

نضع $f' = 0$

$24 - 8x = 0$

$8x = 24$

$x = 3$

عند $x = 3$ فإن $g(3) = \frac{24-16}{e^3}$

$= \frac{8}{e^3}$

النقطة $(3, \frac{8}{e^3})$

(17) اذا كان $f(x)=x\sec x$

اثبت ان $f'(x)=\sec x(1+x\tan x)$

الحل:

$$f'(x)=x\sec x\tan x+\sec x$$
$$=\sec x(x\tan x+1)$$
$$=\sec x(1+x\tan x)$$

---

(18) اذا كان $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ حيث $x>0$

جد $f'(x)$ و $f''(x)$

الحل:

$$f'(x)=\frac{x(\frac{1}{x})-\ln x}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$f''(x)=\frac{x^2(\frac{-1}{x})-(1-\ln x)(2x)}{x^4}$$
$$f''(x)=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}$$
$$f''(x)=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4}$$

عامل مشترك x ونختصر مع المقام

$$f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

يمثل الاقتران $v(t)=\frac{10}{2t+15}$ حيث $t\geq 0$ السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، t بالقدم

(19) جد تسارع السيارة عندما $t=5$

(20) جد تسارع السيارة عندما $t=20$

---

(19)

$$a(t)=v'(t)=\frac{-10(2)}{(2t+15)^2}$$
$$a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}=\frac{-20}{(25)^2}\ ft/s^2$$

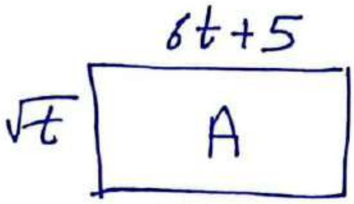
(20)

$$a(20)=\frac{-20}{(40+15)^2}=\frac{-20}{(55)^2}\ ft/s^2$$

---

(21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث t الزمن بالثواني والابعاد بالسنتيمترات. جد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة الى الزمن.

الحل:



$$A=\sqrt{t}(6t+5)$$
$$\frac{dA}{dt}=\sqrt{t}(6)+(6t+5)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$
$$=6\sqrt{t}+\frac{3t}{\sqrt{t}}+\frac{5}{2\sqrt{t}}$$
$$=6\sqrt{t}+\frac{6t+5}{2\sqrt{t}}$$
$$=\frac{12t+6t+5}{2\sqrt{t}}$$
$$\frac{18t+5}{2\sqrt{t}}\ cm^2/s$$

جد مشتقة كل اقتران

① $f(x) = 100e^{-0.1x}$

② $f(x) = \sin(x^2+1)$

③ $f(x) = \cos^2 x$

④ $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

⑤ $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

⑥ $f(x) = 2\cot^2(\pi x+2)$

⑦ $f(x) = \log 2x$

⑧ $f(x) = \ln(x^3+2)$

⑨ $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

⑩ $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

⑪ $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

⑫ $f(x) = 3^{\cot x}$

الحل:

① $f'(x) = (100)(-0.1)e^{-0.1x}$

$= -10e^{-0.1x}$

② $f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$

③ $f(x) = (\cos x)^2$

$f'(x) = -2\cos x \sin x$ «متطابقة»

$f'(x) = -\sin 2x$

④ $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

⑤ $f(x) = \log_3 x\sqrt{x-1} - \log_3 2$

$f(x) = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$

$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2(x-1)\ln 3} - 0$

⑥ $f(x) = 2\left(\cot(\pi x+2)\right)^2$

$f'(x) = \left(4\cot(\pi x+2)\right)\pi\left(-\csc^2(\pi x+2)\right)$

$f'(x) = -4\pi\cot(\pi x+2)\csc^2(\pi x+2)$

⑦ $f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$

⑧ $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$

⑨ $f'(x) = 2\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)\left(\frac{(x^3+2)(2x)-(x^2)(3x^2)}{(x^3+2)^2}\right)$

$= 2\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)\left(\frac{2x^4+4x-3x^4}{(x^3+2)^2}\right)$

$= \frac{2x^2}{(x^3+2)}\left(\frac{4x-x^4}{(x^3+2)^2}\right) = \frac{8x^3-2x^6}{(x^3+2)^3}$

الحل :

(13)

$x_1 = \frac{\pi}{2}$

$y_1 = 2\sin\frac{5\pi}{2} - 4\cos\frac{3\pi}{2}$

$= 2(1) - 4(0) = 2$

$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$

$m = 10\cos\frac{5\pi}{2} + 12\sin\frac{3\pi}{2}$

$= 10(0) + 12(-1) = -12$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -12(x - \frac{\pi}{2})$

$y = -12x + 6\pi + 2$

---

(14)

$x_1 = -1$

$y_1 = (1+2)^3 = 27$

$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+2)^2(2x)$

$m = 3(1+2)^2(-2)$

$= 27(-2) = -54$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 27 = -54(x+1)$

$y = -54x - 27$

---

(15)

$x_1 = \frac{\pi}{4}$

$y_1 = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

$\frac{dy}{dx} = 3\sec^2 3x$

$m = 3\sec^2\frac{3\pi}{4}$

$= 3(2) = 6$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 6(x - \frac{\pi}{4})$

$y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

(10) قاعدة الضرب

$f'(x) = (x^2)\left(\frac{-1}{2\sqrt{20-x}}\right) + \sqrt{20-x}\,(2x)$

$= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$

توحيد مقامات ثم تبسيط

$= \frac{4x(20-x) + -x^2}{2\sqrt{20-x}}$

$= \frac{80x - 4x^2 - x^2}{2\sqrt{20-x}} = \frac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$

---

(11) قاعدة القسمة

$f'(x) = \frac{(\cancel{e^{x^2}})(2\cos(2x+1)) - (\sin(2x+1))2x\cancel{e^{x^2}}}{(e^{x^2})^{\cancel{2}}}$

$f'(x) = \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

---

(12) $f'(x) = -(3^{\cot x})(\ln 3)\csc^2 x$

جد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند نقطة x المعطاة

(13) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

(14) $f(x) = (x^2+2)^3$ ، $x = -1$

(15) $f(x) = \tan 3x$ ، $x = \frac{\pi}{4}$

اذا كان $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$

اجب عن السؤالين :-

(16) اثبت ان $f'(x) = 3\cos^3 x$

(17) جد $f''(x)$

الحل :-

(16) $f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x$

$= 3\cos x(1 - \sin^2 x)$

$= 3\cos x \cos^2 x$

$= 3\cos^3 x$

---

(17) $f''(x) = -9\cos^2 x \sin x$

---

(18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$y = b\sin t$

$x = a\cos t$

حيث $0 \le t \le 2\pi$

جد المقطع y لمماس المنحنى

عند $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a ، b

الحل :-

نجد اولاً معادلة المماس عند

$t = \frac{\pi}{4}$

$x_1 = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$y_1 = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{-b}{a}\cot t$$

$m = \frac{-b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

الآن نجد المقطع y حيث نضع $x = 0$

$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a}\left(0 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, b$

اذا كان الاقتران $y = e^{ax}$

حيث a ثابت و $a > 0$

اجب عن السؤالين :-

(19) جد احداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ويكون ميل المماس عندها 1

(20) اثبت انه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة $x + y = k$ ثم جد قيمة الثابت k

الحل :-

(19) نجد الميل ونساويه بالعدد (1)

$y' = ae^{ax}$

$ae^{ax} = 1$

$e^{ax} = \frac{1}{a}$ لوغاريتم الطرفين

$\ln e^{ax} = \ln\frac{1}{a} \longrightarrow a^{-1}$

$ax = -\ln a$

$x = \frac{-\ln a}{a}$ نعوض لنجد y

$$y = e^{a(-\frac{\ln a}{a})}$$

$$y = e^{-\ln a} = e^{\ln a^{-1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

النقطة $p\left(-\frac{\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

---

(20) اجد الميل

$$\frac{dy}{dx} = a e^{ax}$$

عوض $x = -\frac{\ln a}{a}$

$$m = a e^{a(\frac{-\ln a}{a})}$$

$$= a e^{-\ln a}$$

$$= (a)\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

نكتب معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right)$$

$$y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a}$$

نرتب حسب ما هو طالب

$$y + x = \frac{1}{a} - \frac{\ln a}{a}$$

$$y + x = \underbrace{\frac{1 - \ln a}{a}}$$

هذه K

$$K = \frac{1 - \ln a}{a}$$

---

(21) اذا كان $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$

وكان $f(1) = 7$ ، $f'(1) = 4$

جد $h'(1)$

$$h'(x) = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$$

$$h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}} = \frac{3(4)}{2\sqrt{4 + 3(7)}}$$

$$= \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

---

(22) اذا كان الاقتران

$$f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

اثبت ان $f''(x) = 4f(x)$

الحل :

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4(\underbrace{e^{2x} + e^{-2x}}_{f(x)})$$

$$f''(x) = 4f(x)$$

(23) اذا كان $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$

اثبت ان $f''(x)+16f(x)=0$

نجد $f''(x)$

$$f'(x)=4\cos 4x-4\sin 4x$$

$$f''(x)=-16\sin 4x-16\cos 4x$$

$$f''(x)=-16(\sin 4x+\cos 4x)$$

$$f''(x)=-16\, f(x)$$

$$f''(x)+16f(x)=0$$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$$y=2\cos\theta$$

$$x=\sin^2\theta$$

حيث $0\le\theta\le 2\pi$

(24) جد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ

(25) جد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$

(26) جد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y

الحل :-

(24)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\cos\theta}=-\sec\theta$$

(25) نساوي الميل بالعدد $\sqrt{2}$ للتوصل الى معرفة x و y

$$\frac{dy}{dx}=-\sec\theta$$

$$\sqrt{2}=-\sec\theta$$

$\sec\theta=-\sqrt{2}$ الربع الثاني والثالث

$$\theta=\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

عند $\theta=\frac{3\pi}{4}$ فان

$$x=\sin^2\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

$$y=2\cos\frac{3\pi}{4}=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$$

عند $\theta=\frac{7\pi}{4}$ نحصل نفس النتيجة

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y+\sqrt{2}=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$$

$$y=\sqrt{2}\,x-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

ملاحظة

نستطيع ايجاد x و y دون ايجاد θ كما يلي

$$\sec\theta=-\sqrt{2}$$

$$\cos x=\frac{-1}{\sqrt{2}}\rightarrow y=2\cos\theta=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$$

$$x=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(26) المماس موازياً لمحور y

عندما الميل غير معرف

نهتم بإصفار المشتقة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$$

عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن

$$x = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$$

$$y = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

عند $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فإن

$$x = \sin^2\frac{3\pi}{2} = 1$$

$$y = 2\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

النقطة $(1,0)$

حل أسرع :-

بما أن $\cos\theta = 0$

فإن $y = 2\cos\theta = 0$

$$x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1$$

---

(27) يمثل الاقتران :-

$$v(t) = 15t\, e^{-0.05t^2}$$

السرعة المتجهة لسيارة تتحرك في مسار مستقيم حيث $0 \le t \le 10$ جد السرعة المتجهة عندما يكون تسارعها صفراً

الحل :-

نجد التسارع ونساويه بالصفر لمعرفة الزمن

$$a(t) = v'(t)$$
$$= (15t)(-0.1t\, e^{-0.05t^2}) + 15e^{-0.05t^2}$$

حيث $a = 0$

$$-1.5t^2 e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 0$$

$$e^{-0.05t^2}(-1.5t^2 + 15) = 0$$

$e^{-0.05t^2}$ مستحيل

$$-1.5t^2 = -15$$
$$t^2 = 10$$
$$t = \sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}\, e^{-0.05(10)}$$
$$= 15\sqrt{10}\, e^{-0.5}$$
$$= \frac{15\sqrt{10}}{e^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}\ m/s$$

ملاحظة: التبسيط ليس ضرورياً في حالة الأسئلة المقالية

جد $(fog)'(x)$ عند قيمة x المعطاه في كل مما يأتي:

(28) $f(u)=u^5+1,\ u=g(x)=\sqrt{x},\ x=1$

(29) $f(u)=u+\dfrac{1}{\cos^2 u},\ u=g(x)=\pi x,\ x=\frac{1}{4}$

الحل:-

(28)

اولا نشتق كل اقتران ثم نكتب القاعدة

$$f'(u)=5u^4,\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(fog)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

عوض $x=1$

$$(fog)'(1)=f'(g(1))\,g'(1)$$

$$=f'(1)\,\frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$=(5(1)^4)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

(29) $f(u)=u+\sec^2 u$ نشتق

$$f'(u)=1+2\sec^2 u\tan u$$

$$g'(x)=\pi$$

$$(fog)'\left(\tfrac{1}{4}\right)=f'\left(g\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)g'\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

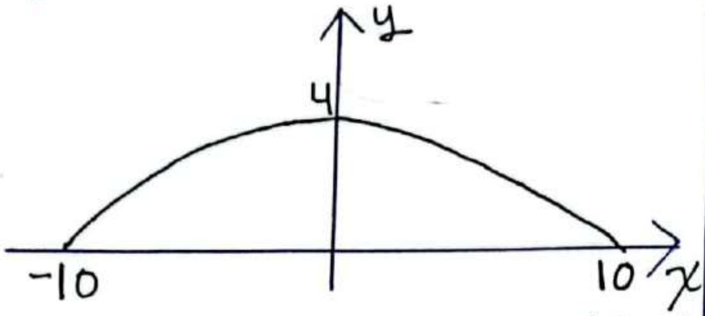
$$=f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\pi$$

$$=\left(1+2\sec^2\tfrac{\pi}{4}\tan\tfrac{\pi}{4}\right)(\pi)$$

$$=(1+2(2)(1))\pi$$

$$=5\pi$$

يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على احد الطرق ومنه تمثل الشكل x سطح الارض وتقاس جميع الاطوال بالسنتمترات



اذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي:

$$y=2+2\cos 2t$$

$$x=10\sin t$$

حيث $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

جد:

(30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t

(31) قيمة t عند اعلى نقطة على منحنى المطب

الحل:-

(30)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-4\sin 2t}{10\cos t}$$

نبسط من خلال استخدام متطابقة $\sin 2t$

$$m=\frac{-4(2\sin t\cancel{\cos t})}{10\cancel{\cos t}}$$

$$=\frac{-4}{5}\sin t$$

(31) يكون المماس عند اعلى نقطة في المنحنى المعطى ((أفقيا)) وعليه الميل صفراً

$$-\frac{4}{5}\sin t=0$$
$$\sin t=0$$
$\boxed{t=0}$ لأن $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

اعلى نقطة $(0,4)$ ← x ، y

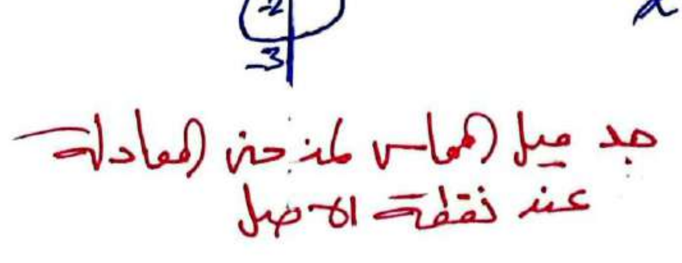
حل آخر

$$y=2+2\cos 2t$$
$$4=2+2\cos 2t$$
$$\cos 2t=1$$
$$2t=0,\ldots$$
$$t=0$$

وكذلك $x=10\sin t$
$$0=10\sin t$$
$$\sin t=0$$
$$\boxed{t=0}$$

(32) يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية

$$x=2\sin 2t$$
$$y=3\cos t$$
حيث $0\le t\le 2\pi$



جد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الاصل

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$

نحتاج الى معرفة t

نقطة الاصل $(0,0)$ ← x ، y

$$2\sin 2t=0$$
$$\sin 2t=0$$
$$2t=0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$$
$$t=0,\boxed{\frac{\pi}{2}},\pi,\boxed{\frac{3\pi}{2}},2\pi$$

$$3\cos t=0$$
$$\cos t=0$$
$$t=\boxed{\frac{\pi}{2}},\boxed{\frac{3\pi}{2}},\frac{5\pi}{2},\ldots$$

عند $t=\frac{\pi}{2}$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{-3\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos\pi}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

عند $t=\frac{3\pi}{2}$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{-3\sin\frac{3\pi}{2}}{4\cos 3\pi}=\frac{-3(-1)}{4(-1)}=-\frac{3}{4}$$

الوحدة(1) كتاب التمارين الضمني

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

① $x^3y^3=144$

② $xy=\sin(x+y)$

③ $y^4-y^2=10x-3$

④ $x\sin y-y\cos x=1$

⑤ $\cot y=x-y$

⑥ $\sqrt{xy}+x+y^2=0$

الحل :-

① $(x^3)(3y^2\frac{dy}{dx})+(y^3)(3x^2)=0$

$$3y^2x^3\frac{dy}{dx}=-3x^2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2y^3}{3y^2x^3}=-\frac{y}{x}$$

② $x\frac{dy}{dx}+y=(1+\frac{dy}{dx})\cos(x+y)$

$$x\frac{dy}{dx}+y=\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}-\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x-\cos(x+y))=\cos(x+y)-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$$

③ $4y^3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=10$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3-2y)=10$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10}{4y^3-2y}=\frac{5}{2y^3-y}$$

④

$$(x)\frac{dy}{dx}\cos y+\sin y+y\sin x-\cos x\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx}-\cos x\frac{dy}{dx}=-\sin y-y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}(x\cos y-\cos x)=-\sin y-y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin y-y\sin x}{x\cos y-\cos x}$$

⑤ $-\frac{dy}{dx}\csc^2 y=1-\frac{dy}{dx}$

$$-\frac{dy}{dx}\csc^2 y+\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}(-\csc^2 y+1)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\csc^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\cot^2 y}$$

$$=-\tan^2 y$$

(6)

$$\frac{\frac{x\,dy}{dx}+y}{2\sqrt{xy}}+1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

نوزع البسط على المقام

$$\frac{x\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{xy}}+\frac{y}{2\sqrt{xy}}+1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{x\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{xy}}+2y\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}}-1$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+2y\right)=\frac{-y}{2\sqrt{xy}}-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-y}{2\sqrt{xy}}-1}{\frac{x}{2\sqrt{xy}}+2y}$$

$$=\frac{\frac{-y-2\sqrt{xy}}{\cancel{2\sqrt{xy}}}}{\frac{x+4y\sqrt{xy}}{\cancel{2\sqrt{xy}}}}=-\frac{y+2\sqrt{xy}}{x+4y\sqrt{xy}}$$

جد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة

(7) $x^2+3xy+y^2=x+3y$ ، $(2,-1)$

(8) $xe^y+y\ln x=2$ ، $(1,\ln 2)$

(9) $4xy=9$ ، $(1,\frac{9}{4})$

(10) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ ، $(1,2)$

الحل: (7)

$x_1=2,\ y_1=-1$

نشتق

$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

نعوض $(2,-1)$:

$$4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

$$6\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}=1+3-4$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+1=0(x-2)$$

$$\boxed{y=-1}$$

(8)

$x_1=1,\ y_1=\ln 2$

نشتق

$$(x)\frac{dy}{dx}e^y+e^y+(y)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)\frac{dy}{dx}=0$$

نعوض $(1,\ln 2)$

$$\frac{dy}{dx}e^{\ln 2}+e^{\ln 2}+(\ln 2)(1)+(\ln 1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\frac{dy}{dx}+2+\ln 2=0$$

$$2\frac{dy}{dx}=-2-\ln 2$$ نقسم على 2

$$\frac{dy}{dx}=-1-\frac{\ln 2}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-\ln 2=\left(-1-\frac{\ln 2}{2}\right)(x-1)$$

$$y=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)x+1+\frac{3}{2}\ln 2$$

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلات

(11) $x^2y - 4x = 5$

(12) $x^2 + y^2 = 8$

(13) $y^2 = x^3$

الحل :-

(11)

$$(x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = 4 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2}$$

اشتق

لتسهيل المشتقة الثانية نوزع البسط على المقام

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{-2} - 2x^{-1}y$$

اشتق مرة أخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} - (2x^{-1})\frac{dy}{dx} + y(2x^{-2})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{x^3} - \frac{2}{x}\left(\frac{4}{x^2} - \frac{2y}{x}\right) + 2yx^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{x^3} - \frac{8}{x^3} + \frac{4y}{x^2} + \frac{2y}{x^2}$$

$$= \frac{-16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$$

---

(12) اشتق

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{-y + x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{\frac{-y^2-x^2}{y}}{y^2} = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$$

$$= \frac{-(y^2+x^2)}{y^3} = \frac{-8}{y^3}$$

(9) $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{9}{4}$

اشتق

$$(4x)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

عوض $(1, \frac{9}{4})$:-

$$4\frac{dy}{dx} + 9 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{9}{4} = \frac{-9}{4}(x-1)$$

$$y = \frac{-9}{4}x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{-9}{4}x + \frac{9}{2}$$

---

(10) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

اشتق

$$\frac{2x}{2} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{8} = 0$$

عوض $(1,2)$

$$1 + \frac{4\frac{dy}{dx}}{8} = 0$$

$$1 + \frac{\frac{dy}{dx}}{2} = 0$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{2} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -2(x-1)$$

$$y - 2 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 4$$

(13)

اشتق

$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$ اشتق

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y)(6x) - (3x^2)(2\frac{dy}{dx})}{4y^2}$$

$$= \frac{12yx - 6x^2(\frac{3x^2}{2y})}{4y^2}$$

$$= \frac{12yx - \frac{18x^4}{2y}}{4y^2}$$

$$= \frac{24y^2x - 18x^4}{(2y)(4y^2)}$$

$$= \frac{24y^2x - 18x^4}{8y^3}$$ عامل مشترك 2

$$= \frac{12y^2x - 9x^4}{4y^3}$$

(14) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$

الحل:

$$x = 2$$

$$y = 2^4 = 16$$

جد الميل

$$y = x^{x^2}$$

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$ اشتق

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x^2)(\frac{1}{x}) + (\ln x)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 2x\ln x)\,y$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 2x\ln x)\,x^{x^2}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = (2 + 4\ln 2)(2)^4$$

$$= 32 + 64\ln 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 16 = (32 + 64\ln 2)(x - 2)$$

(15) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة

$(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1,0)$

الحل:

$$x_1 = 1 ,\ y_1 = 0$$

جد الميل

$$3(x+y)^2(1 + \frac{dy}{dx}) = 2x + \frac{dy}{dx}$$

عوض $(1,0)$

$$3(1+0)^2(1 + \frac{dy}{dx}) = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3(1 + \frac{dy}{dx}) = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

(16) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $y = x(\ln x)^x$ عند $x = e$

الحل:

$$x_1 = e$$

$$y_1 = e(\ln e)^e = e(1)^e = e(1) = e$$

نجد الميل

$$y = x(\ln x)^x$$

$$\ln y = \ln x(\ln x)^x$$

$$\ln y = \ln x + \ln (\ln x)^x$$

$$\ln y = \ln x + x\ln(\ln x)$$ نشتق

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + (x)\left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right) + \ln(\ln x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right)y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right)x(\ln x)^x$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e} = \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{1} + \ln(\ln e)\right)e(\ln e)^e$$

$$= \left(\frac{1}{e} + 1 + 0\right)e = 1 + e$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - e = (1+e)(x - e)$$ نبسط

$$y = (1+e)x - e^2$$

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

(17) $y = (x-2)^{x+1}$

(18) $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

(19) $y = (\cos x)^x$

الحل:

(17) $y = (x-2)^{x+1}$

$$\ln y = \ln(x-2)^{x+1}$$

$$\ln y = (x+1)\ln(x-2)$$ نشتق

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x+1)\frac{1}{x-2} + \ln(x-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+1}{x-2} + \ln(x-2)\right)y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+1}{x-2} + \ln(x-2)\right)(x-2)^{x+1}$$

(18) $\ln y = \ln \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$\ln y = \ln x^{10} + \ln\sqrt{x^2+5} - \ln\sqrt[3]{8x^2+2}$$

$$\ln y = 10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(8x^2+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{3}\frac{16x}{8x^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{24x^2+6}\right)y$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} + \frac{16x}{24x^2+6}\right)$$ نعوض قيمة

$9x^2 - 9x^2 + 36x = 36$

$36x = 36$

$\boxed{x = 1}$

عند $x=1$ فان $9 + 4y^2 = 36$

$4y^2 = 27$

$y^2 = \frac{27}{4}$

$y = \pm \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{\pm\sqrt{(9)(3)}}{2}$

$= \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

عند $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ فان

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})} = \frac{-9}{4(\frac{3\sqrt{3}}{2})} = \frac{-9}{6\sqrt{3}}$

$y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{-9}{6\sqrt{3}}(x-1)$

عند $(1, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$ فان

$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,\frac{-3\sqrt{3}}{2})} = \frac{-9(1)}{4(\frac{-3\sqrt{3}}{2})}$

$= \frac{9}{6\sqrt{3}}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{6\sqrt{3}}(x-1)$

ملاحظة $\frac{9}{6\sqrt{3}}$ هي نفسها $\frac{\sqrt{3}}{2}$

يجوز التعويض $(4,0)$ بدل x_1, y_1 في معادلة المماس

(19) $y = (\cos x)^x$

$\ln y = \ln(\cos x)^x$

$\ln y = x \ln \cos x$ نشتق

$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln \cos x$

$\frac{dy}{dx} = (-x\tan x + \ln\cos x)\, y$

$= (-x\tan x + \ln\cos x)(\cos x)^x$

---

(20) جد معادلتي مماسي منحني العلاقة $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمران بالنقطة $(4,0)$

الحل: نفرض (x,y) نقطة التماس

نجد ميل العلاقة $\frac{2x}{4} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{9} = 1$

$\frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-x}{2}\right)\left(\frac{9}{2y}\right) = \frac{-9x}{4y}$

نجد الميل المار بـ (x,y) ، $(4,0)$

$\frac{y-0}{x-4} = \frac{y}{x-4}$

نساوي الميلان

$\frac{-9x}{4y} = \frac{y}{x-4}$

$4y^2 = -9x^2 + 36x$ —— (1)

نعود الى العلاقة $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

نضرب طرفي المعادلة بـ 36

$9x^2 + 4y^2 = 36$

نعوض بدل $4y^2$ من معادلة (1)

(21) جد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة $x^2+xy+y^2=7$ مع المحور x ثم اثبت ان مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان

الحل :

نضع $y=0$ ونعوض بالعلاقة

$$x^2+0+0=7$$

$$x=\pm\sqrt{7}$$

النقطتان $(\sqrt{7},0)$

$(-\sqrt{7},0)$

نجد الميل

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y-2x}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{7},0)}=\frac{0-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}+0}=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=-2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{7},0)}=\frac{0+2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}+0}=\frac{2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}}=-2$$

ميل المماسين متساويان وعليه فهذان المماسان متوازيان

ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية

① عندما يكون طول نصف قطره $12\ cm$

② عندما يكون حجمه $1435\ cm^3$ ((قرب اجابتك الى اقرب جزء من مئة))

③ اذا ملئ مدة $33.5\ s$

المعدل المعطى $\frac{dv}{dt} = 8\ cm^3/s$

① المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=12}$

العلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

نشتق ضمنياً

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$8 = 4\pi (12)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{4\pi(144)} = \frac{1}{72\pi}\ cm/s$

② المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{V=1435}$

هنا مشتقة r غير موجودة

$V = 1435$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1435$

$r^3 = (1435)\left(\frac{3}{4\pi}\right)$

$r = \sqrt[3]{\frac{4305}{4\pi}} \simeq 7\ cm$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ ((من فرع ①))

$8 = 4\pi(49)\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{196\pi} \simeq 0.01\ cm/s$

③ المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=33.5}$ بعد مضي

هنا نحتاج r حيث نجد الحجم اولاً

$V = (8)(33.5) = 268\ cm^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$268 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r^3 = (268)\left(\frac{3}{4\pi}\right) = \frac{210}{\pi}$

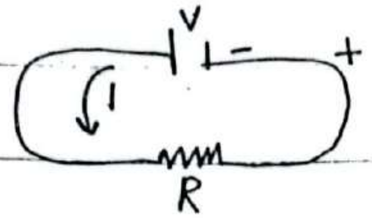
$r = \sqrt[3]{\frac{210}{\pi}} \simeq 4\ cm$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$8 = 4\pi(16)\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi}\ cm/s$

④ تمثل المعادلة $V=IR$ جهد الدارة الكهربائية (بالفولت) المبينة في الشكل المجاور حيث



I شدة التيار بالامبير ، و R المقاومة بالاوم . اذا كان جهد الدارة يزداد بمعدل 1 volt/sec وشدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3}$ amp/sec فجد معدل تغير R عندما $V=12$ و $I=2$

الحل :-

المعدل المعطى $\frac{dV}{dt}=1$ و $\frac{dI}{dt}=\frac{-1}{3}$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{\substack{I=2\\V=12}}$

العلاقة $V=IR$

اشتق $\frac{dv}{dt}=(I)\frac{dR}{dt}+(R)\frac{dI}{dt}$

نحتاج الى R $\longleftarrow$

عوض $V=IR$
$12=2R$
$R=6$

عوض $1=2\frac{dR}{dt}+(6)\left(\frac{-1}{3}\right)$

$$1=2\frac{dR}{dt}-2$$

$$2\frac{dR}{dt}=3$$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{3}{2}\ \Omega/sec$$

رأفت صايح

اذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين ، اجب عما يلي

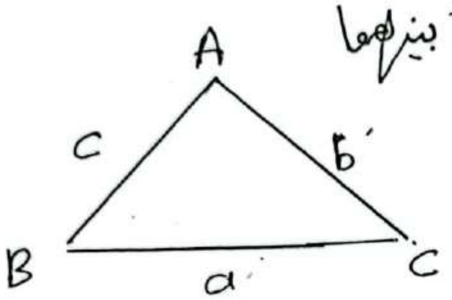
(5) اثبت ان مساحة المثلث تعطى بالمعادلة $A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$

(6) اذا كانت الزاوية θ تزداد بمعدل $\frac{1}{2}$ rad/min

جد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta=\frac{\pi}{6}$ علماً ان طول الضلعين المتطابقين ثابت

---

(5) نعلم سابقاً ان مساحة أي مثلث هو حاصل ضرب طول ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما



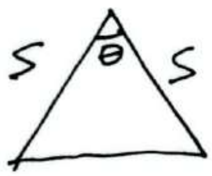
$$A=\frac{1}{2}ab\sin C$$

اذا كانت $C=\theta$ و $a=b=s$ فان

$$A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$$

---

(6) المعدل المعطى $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\,\text{rad/min}$



المعدل المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$

العلاقة $A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$ حيث s ثابت

نشتق $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}s^2\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$

عوض $\frac{dA}{dt}=\left(\frac{1}{2}s^2\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2}s^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}s^2\ \text{وحدة مربعة}/\text{min}$$

⑦ يتحرك جسم على منحنى $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ اذا كان معدل تغير الاحداثي x هو $3\ cm/s$ جد معدل تغير الاحداثي y عند $x=20$

المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = 3\ cm/s$

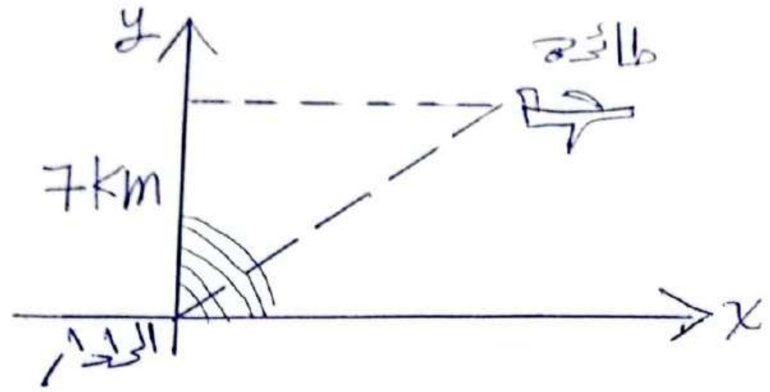
المعدل المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}$

العلاقة $y = \frac{10}{1+x^2}$

نشتق
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-10(2x)\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

عوض
$$= \frac{-20(20)(3)}{(1+400)^2} = \frac{-1200}{(401)^2}$$
$$\simeq -0.007\ cm/s$$

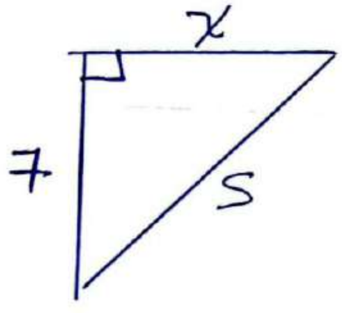
⑧ حلقت طائرة على ارتفاع 7 km ومرت في اثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما اصبح البعد بينهما وبين الرادار 10km رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة فكان 300km/h جد سرعة الطائرة في هذه اللحظة



$$\frac{ds}{dt} = 300 km/h$$ المعدل المعطى

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10}$$ المعدل المطلوب

فيثاغورس $$S^2 = (7)^2 + x^2$$ العلاقة



$$x^2 = S^2 - 49$$ نشتق

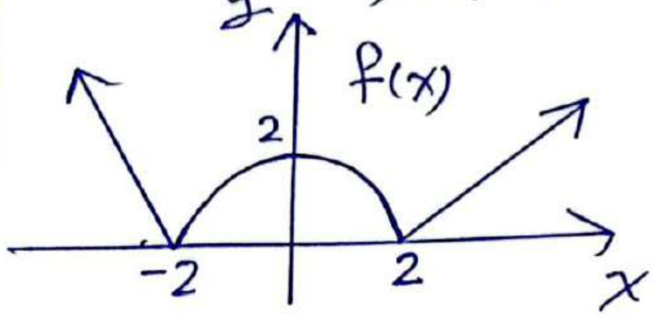
$$x = \sqrt{S^2 - 49}$$ نشتق

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{2}s\frac{ds}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{S^2-49}}$$ نعوض

$$= \frac{10(300)}{\sqrt{100-49}} = \frac{3000}{\sqrt{51}}$$

$$\simeq 420 \, km/h$$

① جد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (ان وجدت) للاقتران $f(x)$ الممثل بيانياً في الشكل المجاور



الحل :-

القيم الحرجة هي $x = -2 , 2 , 0$

$-2 , 2$ غير موجودة ، 0 مماس افقي

للاقتران قيمة صغرى محلية مطلقة عند $x = -2$ هي $f(-2) = 0$

$x = 2$ ، $f(2) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ وهي $f(0) = 2$

جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة

② $f(x) = 1 + \cos^2 x \, , \, [\frac{\pi}{4}, \pi]$

③ $f(x) = (x^2 - 4)^3 \, , \, [-2, 3]$

④ $f(x) = x - 2\sin x \, , \, [-2\pi, 2\pi]$

⑤ $f(x) = x\ln(x+3) \, , \, [0, 3]$

⑥ $f(x) = x + \frac{4}{x} \, , \, [-8, -1]$

⑦ $f(x) = 5e^{x} - e^{2x} \, , \, [-1, 2]$

الحل :-

② $f'(x) = -2\cos x \sin x$

نضع $f'(x) = 0$

$-2\cos x \sin x = 0$

$\cos x = 0$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0$ ، $x = 0, \pi$

القيم الحرجة هي $x = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$f(\pi) = 1 + \cos^2\pi = 1 + 1 = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = 2$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ وهي محلية

③ $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2(2x)$

نضع $f' = 0$

$6x(x^2 - 4)^2 = 0$

$x = 0$ ، $x = \pm 2$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = 2$

$f(0) = (0-4)^3 = -64$

$f(2) = (4-4)^3 = 0$

$f(-2) = (4-4)^3 = 0$

$f(3) = (9-4)^3 = 125$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ وهي $f(0) = -64$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ وهي $f(3) = 125$

$f(0) = 0 \ln 3 = 0$

$f(3) = 3 \ln 6$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ وهي $f(3) = 3\ln 6$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

---

(6) $f' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

$f'(x) = 0$ عند $x^2 - 4 = 0$

$x = 2$ ، -2

يهمل

$f'(x)$ غير موجودة عند $x = 0$ خارج المجال

القيم الحرجة هي -2

$f(-8) = -8 + \frac{4}{-8} = -8 - \frac{1}{2} = -\frac{17}{2}$

$f(-1) = -1 - 4 = -5$

$f(-2) = -2 - 2 = -4$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = -4$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -8$ وهي $f(-8) = -\frac{17}{2}$

---

(7) $f'(x) = 5e^x - 2e^{2x}$

نضع $f'(x) = 0$

$5e^x - 2e^{2x} = 0$

$e^x(5 - 2e^x) = 0$

$e^x \neq 0$

$5 - 2e^x = 0$

$e^x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \ln\frac{5}{2}$

القيم الحرجة هي $x = \ln\frac{5}{2}$

(4) $f'(x) = 1 - 2\cos x$

نضع $f'(x) = 0$

$1 - 2\cos x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{5\pi}{3}$

بسبب وجود فترة سالبة وخاصية عند $\cos x$ هنا نأخذ القيم السالبة

$f(-2\pi) = -2\pi - 2\sin(-2\pi) = -2\pi$

$f(2\pi) = 2\pi - 2\sin 2\pi = 2\pi$

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} - 2\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$

$f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{5\pi}{3}) = -\frac{5\pi}{3} - 2\sin(-\frac{5\pi}{3}) = -\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} - 5\pi}{3}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{5\pi}{3}$ وهي $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{3}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -\frac{5\pi}{3}$ وهي $f(-\frac{5\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3} - 5\pi}{3}$

---

(5) $f'(x) = x \frac{1}{x+3} + \ln(x+1)$

$f' > 0 \rightarrow = \frac{x}{x+3} + \ln(x+1)$

هنا $f'(x) \neq 0$ حيث موجب+موجب $\neq 0$

وكذلك عند $x = -3$ غير موجودة وهي خارج المجال

وعليه لا توجد قيم حرجة

$f(-1) = 5e^{-1} - e^{-2} = \frac{5}{e} - \frac{1}{e^2}$

$= \frac{5e-1}{e^2}$

$f(2) = 5e^2 - e^4$

$f(\ln\frac{5}{2}) = 5e^{\ln\frac{5}{2}} - e^{2\ln\frac{5}{2}}$

$= \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \ln\frac{5}{2}$ وهي $f(\ln\frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 2$ وهي $f(2) = 5e^2 - e^4$

جد فترات التزايد والتناقص، ثم جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي

(8) $f(x) = \sin x + \cos x$ ، $[0, 2\pi]$

(9) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

(10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$

(11) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$

(12) $f(x) = e^{-x^2}$

(13) $f(x) = 2^{x^2-3}$

الحل:

(8) $f' = \cos x - \sin x$

نضع $f' = 0$

نقسم على $\cos x$

$\cos x - \sin x = 0$

$1 - \tan x = 0$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

القيم الحرجة هي $x = \frac{\pi}{4}$ ، $x = \frac{5\pi}{4}$

f': 0 $+ + +$ $\frac{\pi}{4}$ $- - -$ $\frac{5\pi}{4}$ $+ + +$ 2π

$f(x)$ متزايد $[0, \frac{\pi}{4})$ و $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$

$f(x)$ متناقص $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{4}$ وهي $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{5\pi}{4}$ وهي $f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

---

(9) المجال: $R - \{5\}$

$f' = \frac{(x-5) - x}{(x-5)^2} = \frac{-5}{(x-5)^2}$

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x = 5$ خارج المجال

f': $-\infty$ $- - -$ 5 $- - -$ ∞

$f(x)$ متناقص $(-\infty, 5)$ و $(5, \infty)$

ولا توجد قيم قصوى محلية

(10) $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ المجال R جذر فردي

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{-2}{3}}(2x)$

$= \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

$f'(x)=0$ عند $2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x^2-1=0$

$x=\pm 1$

f': $-\infty$ − − − -1 − − − 0 + + + 1 + + + ∞

$f(x)$ متزايد $(0,\infty)$

$f(x)$ متناقص $(-\infty,0)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=0$

وهي $f(0)=-1$

---

(11) المجال R لأنه ما داخل اللوغاريتم موجب حيث المميز سالب

$f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$

$f'(x)=0$ عند $2x-3=0$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

القيم الحرجة هي $x=\frac{3}{2}$

f': $-\infty$ − − − $\frac{3}{2}$ + + ∞

$f(x)$ متزايد $(\frac{3}{2},\infty)$

$f(x)$ متناقص $(-\infty,\frac{3}{2})$

للاقتران قيمة صغرى محلية

عند $x=\frac{3}{2}$ وهي $f(\frac{3}{2})=\ln\frac{7}{4}$

---

(12) $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

نضع $f'=0$

$-2x\,e^{-x^2}=0$

$x=0$ $e^{-x^2}\neq 0$

القيم الحرجة هي $x=0$

f': $-\infty$ + + + 0 − − − ∞

$f(x)$ متزايد $(-\infty,0)$

$f(x)$ متناقص $(0,\infty)$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند

$x=0$ وهي $f(0)=1$

---

(13) $f'=(2x)(\ln 2)(2^{x^2-3})$

نضع $f'=0$

$(2x)(\ln 2)(2^{x^2-3})=0$

$x=0$ $2^{x^2-3}\neq 0$

القيم الحرجة هي $x=0$

f': $-\infty$ − − − 0 + + + ∞

$f(x)$ متزايد $(0,\infty)$

$f(x)$ متناقص $(-\infty,0)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند

$x=0$ وهي $f(0)=2^{-3}$

$=\frac{1}{8}$

جد فترات التقعر الى الاعلى والى الاسفل ونقاط الانعطاف (ان وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي

(14) $f(x)=4x^3-3x^2-6x+12$

(15) $f(x)=x^6-3x^4$

(16) $f(x)=(2+2x-x^2)^2$

(17) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

(18) $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

(19) $f(x)=2x-\tan x$ ، $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

الحل :-

(14) $f'(x)=12x^2-6x-6$

$f''(x)=24x-6$

نضع $f''=0$

$24x-6=0$

$24x=6$

$x=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

f'': $-\infty$ ‏ $- \; -$ ‏ $\frac{1}{4}$ ‏ $+ \; +$ ‏ ∞

$f(x)$ مقعر للاعلى $(\frac{1}{4},\infty)$

$f(x)$ مقعر للاسفل $(-\infty,\frac{1}{4})$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=\frac{1}{4}$ وهي $(\frac{1}{4},\frac{83}{8})$

(15) $f'(x)=6x^5-12x^3$

$f''(x)=30x^4-36x^2$

نضع $f''=0$

$30x^4-36x^2=0$

$6x^2(5x^2-6)=0$

$x=0$ ‏ ، ‏ $5x^2=6$

$x^2=\frac{6}{5}$

$x=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

f'': $-\infty$ ‏ $+ \; +$ ‏ $-\sqrt{\frac{6}{5}}$ ‏ $- \; -$ ‏ 0 ‏ $- \; -$ ‏ $\sqrt{\frac{6}{5}}$ ‏ $+ \; +$ ‏ ∞

$f(x)$ مقعر للاعلى $(\sqrt{\frac{6}{5}},\infty)$ و $(-\infty,-\sqrt{\frac{6}{5}})$

$f(x)$ مقعر للاسفل $(-\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}})$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند $x=\sqrt{\frac{6}{5}}$ ، $x=-\sqrt{\frac{6}{5}}$ وهي

$(\sqrt{\frac{6}{5}},\frac{-324}{125})$ ، $(-\sqrt{\frac{6}{5}},\frac{-324}{125})$

---

(16) $f'=2(2+2x-x^2)(2-2x)$

$f'=(4+4x-2x^2)(2-2x)$

$f''=(4+4x-2x^2)(-2)+(2-2x)(4-4x)$

$f''=-8-8x+4x^2+8-8x-8x+8x^2$

$f''=12x^2-24x$

نضع $f''=0$

$12x^2-24x=0$

$12x(x-2)=0$

$x=0$ ، $x=2$

f'': $-\infty$ ‏ $+ \; +$ ‏ 0 ‏ $- \; -$ ‏ 2 ‏ $+ \; +$ ‏ ∞

$f(x)$ مقعر للاعلى $(2,\infty)$ ، $(-\infty,0)$ ومقعر للاسفل $(0,2)$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند $x=0$ ، $x=2$

وهي $(0,4)$ ، $(2,4)$

(17)

$$f'(x)=(x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)+\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}$$ نوحد مقامات

$$f'(x)=\frac{-x^2+4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''=\frac{(\sqrt{4-x^2})(-4x)-(4-2x^2)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)}{4-x^2}$$

$$f''=\frac{-4x\sqrt{4-x^2}+\frac{4x-2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$ نوحد مقامات

$$f''=\frac{-4x(4-x^2)+4x-2x^3}{(4-x^2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$f''=\frac{-16x+4x^3+4x-2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''=\frac{2x^3-12x}{(4-x^2)(\sqrt{4-x^2})}$$

مجال $f(x)$ هو $[-2,2]$ نأخذ المنطقة الموجبة للجذر الزوجي

عند $f''(x)=0$

$2x^3-12x=0$

$2x(x^2-6)=0$

$x=0$ ، $x=\pm\sqrt{6}$ مهمل خارج المجال

f'': $+++$ على $(-2,0)$ ، $---$ على $(0,2)$

$f(x)$ مقعر للأعلى في $(-2,0)$

ومقعر للأسفل في $(0,2)$

للاقتران نقطة انعطاف عند $x=0$

وهي $(0,0)$

(18)

$$f'=2x+\frac{2x}{x^4}$$ المجال $R-\{0\}$

$$f'=2x+\frac{2}{x^3}$$

$$f''(x)=2-\frac{(2)(3x^2)}{x^6}=2-\frac{6}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x^4-6}{x^4}$$

$2x^4-6=0$ عند $f''(x)=0$

$x^4=3$

$x=\sqrt[4]{3}$ ، $-\sqrt[4]{3}$

f'': $++$ على $(-\infty,-\sqrt[4]{3})$ ، $---$ على $(-\sqrt[4]{3},0)$ و $(0,\sqrt[4]{3})$ ، $++$ على $(\sqrt[4]{3},\infty)$

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\infty,-\sqrt[4]{3})$ و $(\sqrt[4]{3},\infty)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(-\sqrt[4]{3},0)$ و $(0,\sqrt[4]{3})$

للاقتران نقط انعطاف عند $x=\sqrt[4]{3}$ و $-\sqrt[4]{3}$

وهما $(\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}})$ و $(-\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}})$

(19)

$$f'=2-\sec^2x$$

$$f''=-2\sec^2x\tan x$$

نضع $f''=0$

$-2\sec^2x\tan x=0$

$\sec^2x\neq0$ ، $\tan x=0$

$x=0$

f'': $+++$ على $(-\frac{\pi}{2},0)$ ، $---$ على $(0,\frac{\pi}{2})$

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\frac{\pi}{2},0)$ وللأسفل $(0,\frac{\pi}{2})$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=0$

وهي $(0,0)$

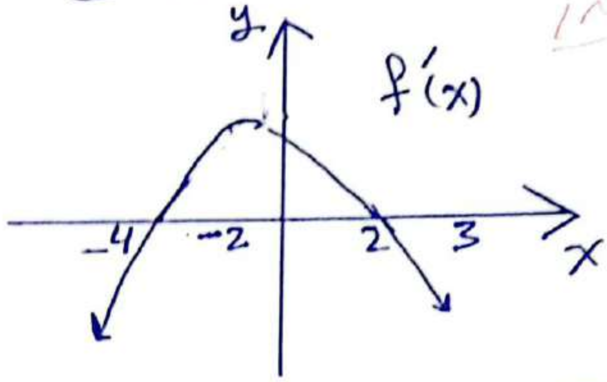
ملاحظة: لكل معادلة مثلثية الأفضل تحويلها بدلالة $\cos x / \sin x$

$$-2\sec^2x\tan x=\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\sin x}{\cos^3x}$$

اصفار البسط 0

اصفار المقام $\frac{\pi}{2}$

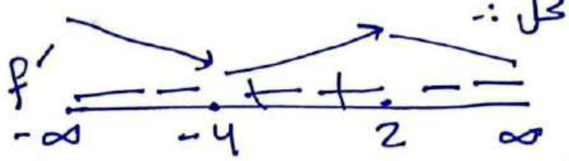
استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لايجاد كل مما يأتي



(20) قيم x التي تكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مبيناً نوعها

(21) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

الحل :



(20) للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=2$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=-4$

(21) $f(x)$ متزايد على $(-4,2)$

$f(x)$ متناقص على $(-\infty,-4)$ و $(2,\infty)$

جد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن)

(22) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ ، $[0,2\pi]$

(23) $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$

(24) $f(x)=(x^2-3)e^x$

الحل :

(22) $f'=2\cos x-2\sin 2x$

نضع $f'=0$

$$2\cos x-2\sin 2x=0$$
$$2\cos x-4\sin x\cos x=0$$
$$2\cos x(1-2\sin x)=0$$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$1-2\sin x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$

القيم الحرجة هي $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\frac{3\pi}{2}$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{5\pi}{6}$

$$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-2\sin\tfrac{\pi}{2}-4\cos\pi=-2+4=2>0$$
$$f''\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=-2\sin\tfrac{3\pi}{2}-4\cos 3\pi=2+4=6>0$$
$$f''\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=-2\sin\tfrac{\pi}{6}-4\cos\tfrac{\pi}{3}=-1-2=-3<0$$
$$f''\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\tfrac{5\pi}{6}-4\cos\tfrac{5\pi}{3}=-1-2=-3<0$$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2})=1$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{3\pi}{2}$ وهي $f(\frac{3\pi}{2})=-3$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{6}$ وهي $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{5\pi}{6}$ وهي $f(\frac{5\pi}{6})=\frac{3}{2}$

$f''(x)=(x^2-3)e^x+2xe^x+2xe^x+2e^x$

$f''(1)=-2e+2e+2e+2e=4e>0$

$f''(-3)=6e^{-3}-6e^{-3}-6e^{-3}+2e^{-3}=-4e^{-3}<0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=-3$

وهي $f(-3)=\frac{6}{e^3}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=1$

وهي $f(1)=-2e$

---

(25) اذا كان للاقتران $f(x)=ax^2+bx+c$

قيمة عظمى محلية عند النقطة (3، 12)

وقطع المحور y في النقطة (0، 1)

جد قيمة كل من الثوابت a و b و c

الحل :

$f'(3)=0$ ← (3، 12) عظمى محلية

$f(3)=12$

$f(0)=1$ ← $f(x)$ تمر بـ (0، 1)

$f'(x)=2ax+b$

$f'(3)=0$

$6a+b=0$ —— (1)

$f(3)=12$

$9a+3b+c=12$ —— (2)

$f(0)=1$

$\boxed{c=1}$

نعوض $c=1$ في معادلة (2) لتصبح

$9a+3b+1=12$

$9a+3b=11$ —— (3)

بحل المعادلتان (3) و (2) ينتج

$a=\frac{-11}{9}$ و $b=\frac{22}{3}$

---

(23) المجال $R-\{0\}$

$f'(x)=3x^2-\frac{48}{x^2}$

$f'(x)=\frac{3x^4-48}{x^2}$

عند $f'(x)=0$

$3x^4-48=0$

$x^4=16$

$x=2$ و -2

أس زوجي عند جذر الطرفين نوجد قيمتان

القيم الحرجة هي $x=2$ و $x=-2$

$f''(x)=6x+\frac{(48)(2x)}{x^4}$

$f''(x)=6x+\frac{96}{x^3}$

$f''(2)=12+\frac{96}{8}=12+12=24>0$

$f''(-2)=-12+\frac{96}{-8}=-12-12=-24<0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=2$

وهي $f(2)=32$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=-2$

وهي $f(-2)=-32$

---

(24) $f'(x)=(x^2-3)e^x+2xe^x$

نضع $f'=0$

$(x^2-3)e^x+2xe^x=0$

$e^x(x^2-3+2x)=0$

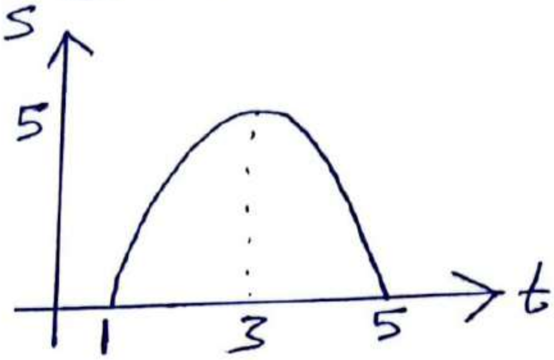
$e^x\neq 0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ و $x=1$

يمثل الاقتران $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني



(26) جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون

(27) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب

(28) ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

الحل:

(26) عند المماس الافقي $t = 3$

(27) $s(t)$ صاعد $+++$

$s(t)$ هابط $---$

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب $(1,3)$

يتحرك الجسم في الاتجاه السالب $(3,5)$

(28) نلاحظ منحنى $s(t)$ مقعر لأسفل وعليه سرعة الجسم تتناقص في $(1,5)$ ولا تتزايد

اذا كان الاقتران

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

اجب عن الاسئلة الثلاثة تباعاً

(29) اذا كان لمنحنى الاقتران f مماس افقي عند كل من $(-2,-73)$ والنقطة $(0,-9)$ جد قيمة كل من الثوابت a و b و c و d

(30) اذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي جد احداثيي هذه النقطة

(31) صنف كلاً من النقاط الثلاث الى صغرى محلية وعظمى محلية (ان امكن)

الحل:

(29) مماس أفقي عند

$f'(-2)=0$, $f(-2)=-73$ $\quad (-2,-73)$

$f'(0)=0$, $f(0)=-9$ $\quad (0,-9)$

$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0$$

$$\boxed{c = 0}$$

$$f'(-2) = 0$$

$$-96 + 12a - 4b = 0$$ نقسم على 4

$$3a - b = 24 \quad \text{—(1)}$$

$$f(0) = -9$$

$$\boxed{d = -9}$$

$f(-2) = -73$

$48 - 8a + 4b - 2c + d = -73$

نعوض مكان c و d

$48 - 8a + 4b - 9 = -73$

$-8a + 4b = -112$

$-2a + b = -28$ —— (2)

بحل المعادلتين (1) و (2) ينتج

$a = -4$ و $b = -36$

(30) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 - 9$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

نضع $f' = 0$

$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \quad /12$

$x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - x - 6) = 0$

$x(x-3)(x+2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -2$

في السؤال موجودة

وعليه عند $x=3$ لمنحنى $f(x)$ مماس أفقي محلي $(3, -198)$

(31) نستخدم اختبار المشتقة الثانية أو الأول

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$

$f''(0) = -72 < 0$

$f''(-2) = 144 + 48 - 72 = 120 > 0$

$f''(3) = 324 - 72 - 72 = 180 > 0$

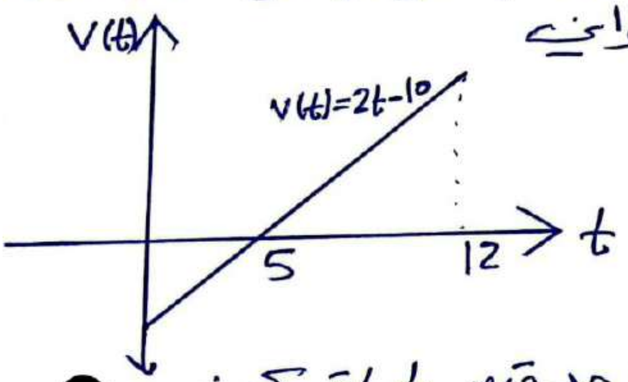
وعليه:

النقطة $(-2, -73)$ نقطة صغرى محلية

النقطة $(0, -9)$ نقطة عظمى محلية

النقطة $(3, -198)$ نقطة صغرى محلية

يمثل الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني



(32) حدد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون

(33) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب

(34) ما الفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

(32)

الحل :-

رسمة $v(t)$ نقاط التقاطع مع محور x
عندها الجسم في حالة سكون حيث $v(t)=0$
وعليه $t = 5$

---

(33) رسمة $v(t)$ فوق محور x
يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب
تحت محور x يتحرك الجسم في الاتجاه السالب
وعليه :-
يتحرك في الاتجاه الموجب في الفترة $(5,12)$
يتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(0,5)$

---

(34) رسمة $v(t)$ صاعد فهنا السرعة
تتزايد أما هابط فهنا السرعة
تتناقص وبما أنه متصاعد دائماً
وعليه السرعة تتزايد على الفترة $(0,12)$

---

(35) اذا كان للاقتران $f(x)=ax^3+bx^2+c$
قيمة قصوى محلية عند النقطة
$(2,11)$ ونقطة انعطاف عند
$(1,5)$ جد الثوابت a و b و c

الحل :-

$(2,11)$ قصوى محلية: $f'(2)=0$ ، $f(2)=11$

$(1,5)$ انعطاف $\leftarrow$ $f''(1)=0$ ، $f(1)=5$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$
$$f''(x)=6ax+2b$$

$$f''(1)=0$$
$$6a+2b=0$$
$$3a+b=0 \quad (1)$$

$$f(2)=11$$
$$8a+4b+c=11 \quad (2)$$

$$f'(2)=0$$
$$12a+4b=0$$
$$3a+b=0 \quad (1) \text{ مكرر}$$

$$f(1)=5$$
$$a+b+c=5 \quad (3)$$

نقوم بحل المعادلات حيث نأخذ معادلة (2) مع (3) ونطرح

$$7a+3b=6 \quad (4)$$

نحل معادلة (1) مع (4)

$$3a+b=0 \xrightarrow{\text{اضرب ب } 3} 9a+3b=0$$
$$7a+3b=6 \longrightarrow 7a+3b=6$$
$$2a=-6$$
$$\boxed{a=-3}$$

نعوض في (1) :-

$$-9+b=0$$
$$\boxed{b=9}$$

نعوض في (2)

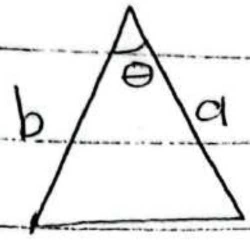
$$-24+36+c=11$$
$$\boxed{c=-1}$$

تطبيقات القيم القصوى

الوحدة (2)

1) اذا كانت a cm و b cm هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث وكانت الزاوية بينهما θ فاوجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

الحل:



العلاقة الاساسية

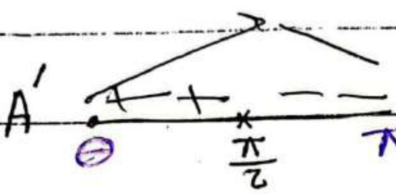
$A = \frac{1}{2}(a)(b)\sin\theta$ اشتق

$A' = \frac{1}{2}ab\cos\theta$ ضع $A' = 0$

$\frac{1}{2}ab\cos\theta = 0$

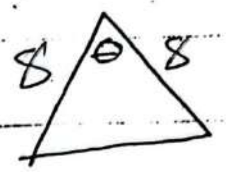
$\cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$



عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ تكون عندها مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تدريب: نحتاج الى قص لوح خشبي على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما 8 cm اذا كانت الزاوية θ متغيرة، جد قياس الزاوية θ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن



$\frac{\pi}{2}$

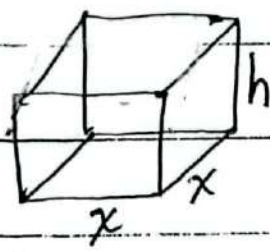
رافت ضاحي

كتاب التمارين

② ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ المرتفع المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات حجمه $500\ m^3$ وقاعدته مربعة الشكل ومفتوح من الأعلى جد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن

الحل:

الاقتران المطلوب



المساحة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$A = 4xh + x^2$$

x طول ضلع القاعدة
h الارتفاع
A مساحة سطح
V حجم

علاقة مساعدة ((قانون الحجم))

$$V = x^2 h$$
$$500 = x^2 h$$
$$\therefore h = \frac{500}{x^2}$$

$$A = 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) + x^2$$
$$A = \frac{2000}{x} + x^2$$
$$A' = \frac{-2000}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2000}{x^2}$$

نضع $A' = 0$

$$2x^3 - 2000 = 0$$
$$x^3 = 1000$$
$$x = 10$$

عند $x = 10$ صغرى والمساحة الصغرى أقل ما يمكن

$$h = \frac{500}{100} = 5$$

الأبعاد 5، 10، 10

رأفت ضباعين

يمثل الاقتران $S_1=\sin t$ والاقتران $S_2=\sin(t+\frac{\pi}{3})$ موقعي جسمين يتحركان في مسار مستقيم حيث S_1 و S_2 الموقعان بالأمتار و t الزمن بالثواني

3) جد قيمة (قيم) t التي يلتقي فيها الجسمين

4) جد أكبر مسافة بين الجسمين في الفترة الزمنية $0\le t\le 2\pi$

الحل:

(3)

$$S_1=S_2$$

$$S_1-S_2=0$$

متطابقة

$$\sin t-\sin(t+\frac{\pi}{3})=0$$

$$2\sin\left(\frac{t-t-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{t+t+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=0$$

$$2\sin\frac{-\pi}{6}\cos(t+\frac{\pi}{6})=0$$

$$-\cos(t+\frac{\pi}{6})=0$$

$$\cos(t+\frac{\pi}{6})=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+n\pi$$ اطرح $\frac{\pi}{6}$

$$t=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

حيث n عدد صحيح غير سالب

(4)

$$S=|S_2-S_1|$$

$$S=\left|\sin(t+\frac{\pi}{3})-\sin t\right|$$

$$S=\left|\cos(t+\frac{\pi}{6})\right|$$

$$S(t)=\pm\cos(t+\frac{\pi}{6})$$

$$S'(t)=\mp\sin(t+\frac{\pi}{6})$$

ضع $S'=0$

$$\sin(t+\frac{\pi}{6})=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\pi \text{ و } 2\pi$$

$$t=\frac{5\pi}{6} \text{ و } \frac{11\pi}{6}$$

$$S(0)=\left|\cos(0+\frac{\pi}{6})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S(\frac{5\pi}{6})=\left|\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6})\right|=1$$

$$S(\frac{11\pi}{6})=\left|\cos(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6})\right|=1$$

$$S(2\pi)=\left|\cos(2\pi+\frac{\pi}{6})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعليه أكبر مسافة بين الجسمين هي $1\ m$

رأفت صباح

$$S=\sin t-\sin(t+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

سلك طوله 24 cm يراد قصه الى قطعتين لصنع دائرة ومربع

5) حدد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع اصغر ما يمكن

6) حدد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع اكبر ما يمكن

الحل :-

الاقتران المطلوب

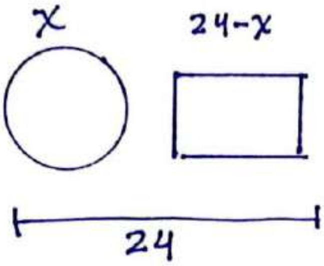
5) $A = A_1 + A_2$ حيث A مجموع مساحتي الدائرة والمربع

A_1 الدائرة

A_2 المربع

ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة x

وعليه المربع $24-x$



$C = 2\pi r$ (المحيط للدائرة)

$x = 2\pi r$

$r = \frac{x}{2\pi}$

$C = 4$ (طول الضلع) (المحيط للمربع)

$24-x = 4$ (طول الضلع)

طول الضلع $= \frac{24-x}{4}$

$A = \pi r^2 + L^2$ حيث L طول ضلع المربع

$A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-x}{4}\right)^2$

$A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(24-x)^2}{16}$

$A' = \frac{2x}{4\pi} + \frac{-2(24-x)}{16}$

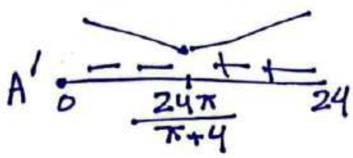
نضع $A' = 0$

$\frac{x}{2\pi} + \frac{x-24}{8} = 0$

$\frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - 3 = 0$

$x\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) = 3$

$x = \frac{3}{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}} = \frac{24\pi}{\pi+4}$



مجموع مساحتي الدائرة والمربع اصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولها مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}$ cm .

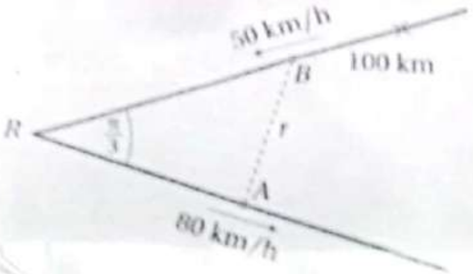
6) للحصول على اكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$

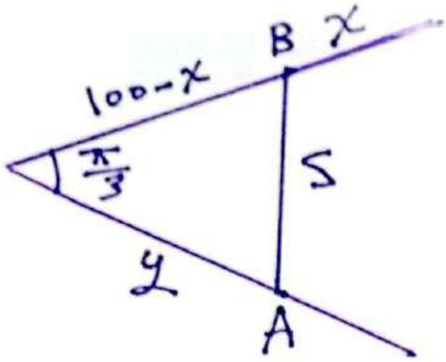
وعليه $A(0) = 36$

$A(24) = \frac{144}{\pi} \approx 45$

اذن للحصول على اكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة ولا نقطع للمربع شيئاً منه

7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة $80\ km/h$، وفي الوقت نفسه انطلقت السيّارة B بسرعة $50\ km/h$ على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة $100\ km$، فأجد أقصر مسافة مُمكنة بين السيّارتين.





الحل: الاقتران المطلوب

$$S^2 = y^2 + (100-x)^2 - 2y(100-x)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$S^2 = y^2 + (100-x) - y(100-x)$$

نحول x و y بدلالة الزمن

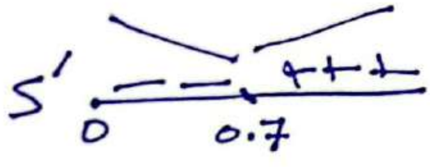
$$y = 80t \text{ ، } x = 50t$$

$$S^2 = (80t)^2 + (100-50t)^2 - 80t(100-50t)$$

$$S = \sqrt{(80t)^2 + (100-50t)^2 - 8000t + 4000t^2}$$

$$S' = \frac{12800t - 10000 + 5000t - 8000 + 8000t}{2\sqrt{(80t)^2 + (100-50t)^2 - 8000t + 4000t^2}}$$

عندما $S' = 0$:



$$12800t - 10000 + 5000t - 8000 + 8000t = 0$$

$$25800t = 18000$$

$$t = \frac{18000}{25800} \simeq 0.7$$

عند $t=0.7$ صغرى وعندها اقصر مسافة

$$S(0.7) = \sqrt{(80(0.7))^2 + (100-50(0.7))^2 - 8000(0.7) + 4000(0.7)^2}$$

$$\simeq 61\ KM$$

جد مفتقة الجذر الرئيسي في كل مما يأتي بدلالة i

① $\sqrt{-128}$ ② $\sqrt{-14}$ ③ $\sqrt{-81}$

④ $\sqrt{-125}$ ⑤ $3\sqrt{-32}$ ⑥ $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

الحل :-

① $\sqrt{-1\times 2\times 64} = \sqrt{-1}\sqrt{2}\sqrt{64} = 8i\sqrt{2}$

② $\sqrt{-1\times 14} = \sqrt{-1}\sqrt{14} = i\sqrt{14}$

③ $\sqrt{-1\times 81} = \sqrt{-1}\sqrt{81} = 9i$

④ $\sqrt{-1\times 25\times 5} = \sqrt{-1}\sqrt{25}\sqrt{5} = 5i\sqrt{5}$

⑤ $3\sqrt{-1\times 16\times 2} = 3\sqrt{-1}\sqrt{16}\sqrt{2} = (3)(i)(4)(\sqrt{2}) = 12i\sqrt{2}$

⑥ $\sqrt{\frac{-1\times 4\times 7}{9}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{4}\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{2i\sqrt{7}}{3}$

جد ناتج كل مما يأتي في ابسط صورة ، مفترضاً $\sqrt{-1} = i$

⑦ i^7 ⑧ i^{12} ⑨ i^{98} ⑩ i^{121}

الحل :-

⑦ $(i^4)(i)^3 = (1)(-i) = -i$ «الباقي 3» $7 \div 4$: $7 - 4 = 3$

⑧ $(i^4)^3 = (1)^3 = 1$ «الباقي صفراً»

⑨ $(i^4)^{24}(i)^2 = (1)(-1) = -1$ «الباقي 2» $98 \div 4 = 24$: $98 - 8 = 18$، $18 - 16 = 2$

⑩ $(i^4)^{30}(i)^1 = (1)(i) = i$ «الباقي 1» $121 \div 4 = 30$: $121 - 12 = 1$

راقت صافي

(11) املأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي :

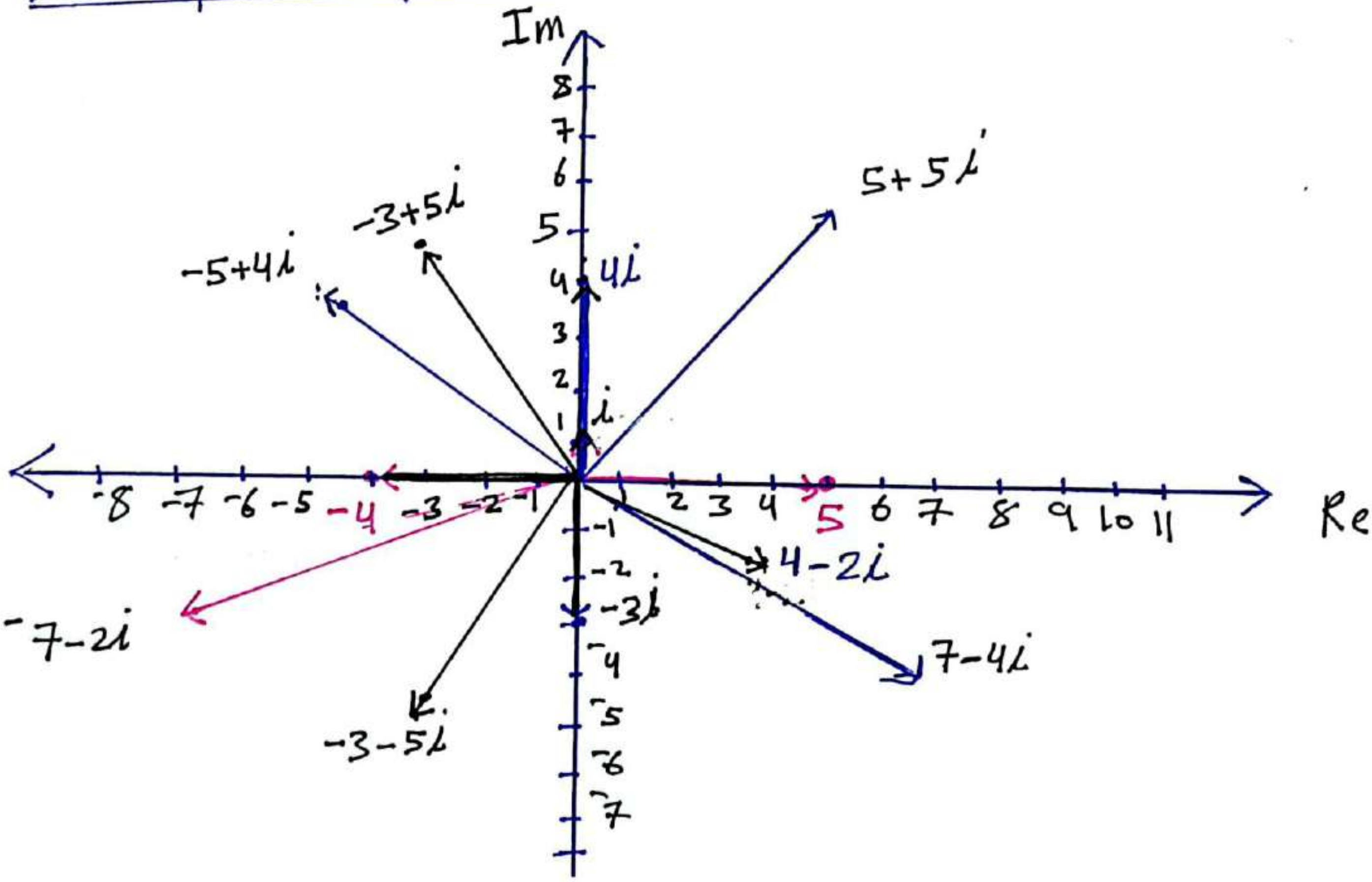
Z	$Re(Z)$	$Im(Z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

الحل :-

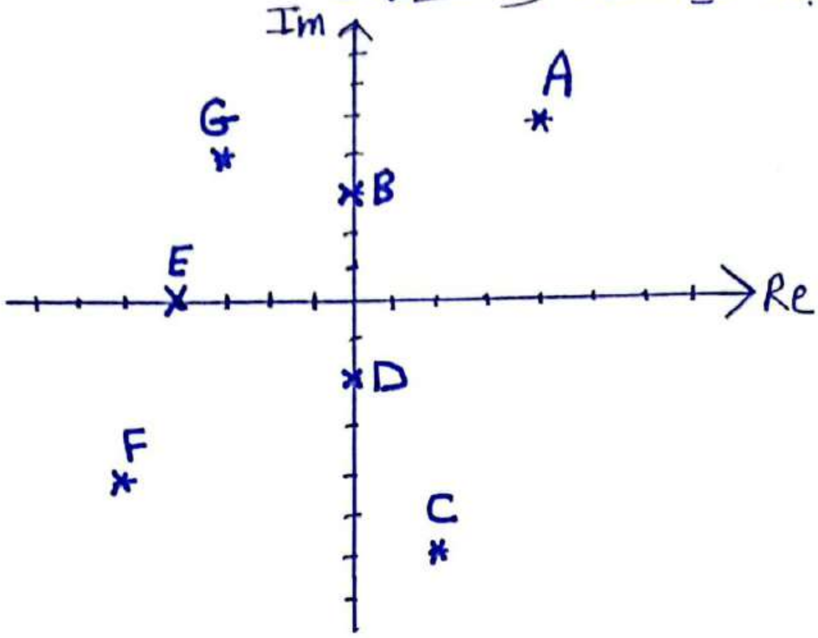
Z	$Re(Z)$	$Im(Z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

(12) امثل كلاً من الاعداد المركبة في مستوى المركب المجاور

(12) 5 (13) -4 (14) $4i$
(15) $-3i$ (16) $4-2i$ (17) $-3+5i$
(18) $-3-5i$ (19) i (20) $7-4i$
(21) $-5+4i$ (22) $-7-2i$ (23) $5+5i$



اكتب كلاً من الأعداد المركبة الممثلة بيانياً في المستوى المركب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته



الحل :-

الربع الأول

$A = 4 + 5i$

$|A| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

$Arg(A) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \simeq 0.90$ آلة حاسبة

على محور Im

$B = 3i$

$|B| = \sqrt{9 + 0} = 3$

$Arg(B) = \frac{\pi}{2}$

الرابع

$C = 2 - 6i$

$|c| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$Arg(c) = -\tan^{-1}\left(\frac{6}{2}\right) = \tan^{-1} 3 \simeq 1.25$

آلة حاسبة

على محور Im

$D = -2i$

$|D| = \sqrt{0 + 4} = 2$

$Arg(D) = -\frac{\pi}{2}$

محور Re

$E = -4$

$|E| = \sqrt{16 + 0} = 4$

$Arg(E) = \pi$

ربع ثالث

$F = -5 - 4i$

$|F| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \simeq -2.47$

آلة حاسبة

الربع الثاني

$G = -3 + 4i$

$|G| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\simeq 2.21$ آلة حاسبة

جد قيمة x وقيمة y الحقيقية اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة :

25) $(2x+1)+4i = 7 - i(y-3)$

26) $i(2x-4y)+x+3y = 26+32i$

25) الجزء الحقيقي

$2x+1=7$

$2x=6$

$\boxed{x=3}$

الجزء التخيلي

$4=-y+3$

$\boxed{y=-1}$

26) الحقيقي

$x+3y=26$

التخيلي

$2x-4y=32$

بحل المعادلتان بالحذف ينتج

$\boxed{x=20}$ و $\boxed{y=2}$

اكتب كلاً من الاعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية

27) 6

محور Re الموجب

$r=\sqrt{36+0}=6$

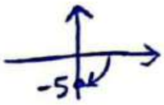
$\theta=0$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z=6(\cos 0+i\sin 0)$

28) $-5i$

محور Im السالب



$r=\sqrt{0+25}=5$

$\theta=-\frac{\pi}{2}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z=5(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$

29) $-2\sqrt{3}-2i$

ربع ثالث

$r=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

$\theta=-(\pi-\tan^{-1}(\frac{2}{2\sqrt{3}}))$

$=-(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{-5\pi}{6}$

$z=4(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6})$

30) $-1+i$

الربع الثاني

$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta=\pi-\tan^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$z=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

31) $4-2i$

الربع الرابع

$r=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

$\theta=-\tan^{-1}(\frac{2}{4})=-\tan^{-1}\frac{1}{2}\simeq-0.46$

$z=2\sqrt{5}(\cos-0.46+i\sin-0.46)$

32) $2+8i$

الربع الأول

$r=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$

$\theta=\tan^{-1}(\frac{8}{2})=\tan^{-1}(4)\simeq1.33$

$z=2\sqrt{17}(\cos1.33+i\sin1.33)$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية

(33) $6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(34) $12\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

(35) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(36) $3\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)$

الحل :-

لحل هذا النوع من الأسئلة ، اجد النسب المثلثية للزوايا ثم فك أقواس .

الحل :

(33) $z = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$

(34) $z = 12(-1+0) = -12 + 0i$

(35) $z = 8\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$

(36) $z = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

جد مرافق كل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعها في المستوى المركب نفسه

(37) $-1-i\sqrt{5}$ (38) $9-i$ (39) $2-8i$

(40) $-9i$ (41) 12 (42) $i-8$

الحل: المرافق هو تغير إشارة العدد التخيلي فقط

(37) $\bar{z}=-1+i\sqrt{5}$

(38) $\bar{z}=9+i$

(39) $\bar{z}=2+8i$

(40) $\bar{z}=9i$

(41) $\bar{z}=12$

(42) $\bar{z}=-i-8$

نرسم كما سابقاً

جد ناتج ما يأتي وثم اكتبه بالصورة القياسية

① $(6+8i)+(3-5i)$ ② $(-6-3i)-(-8+2i)$

③ $4i(7-3i)$ ④ $(8-6i)(8+6i)$

⑤ $(-2+2i\sqrt{3})^3$ ⑥ $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

الحل :

① $6+8i+3-5i=9+3i$

② $-6-3i+8-2i=2-5i$ ندخل السالب على القوس

③ $4i(7-3i)=28i-12i^2$

$=28i+12=12+28i$

④ $(8-6i)(8+6i)=(8)^2+(6)^2$ مترافقان

$=64+36=100$

على قانون فك التكعيب

⑤ $(-2+2i\sqrt{3})^3=(-2)^3+(3)(-2)(2i\sqrt{3})^2+3(2i\sqrt{3})(-2)^2+(2i\sqrt{3})^3$

$=-8+72+\cancel{24i\sqrt{3}}-\cancel{24i\sqrt{3}}$

$=64$

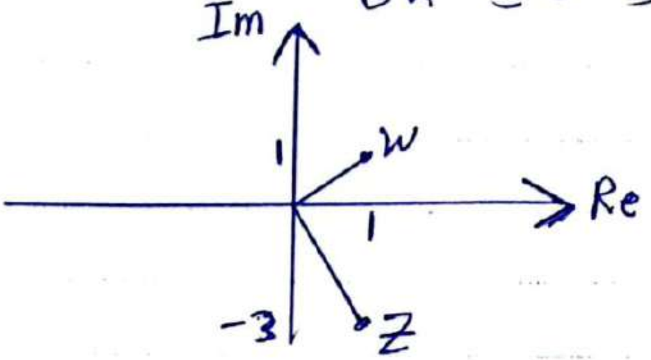
⑥ $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3i}=\dfrac{2-2i+i-i^2}{4-3i}=\dfrac{2-2i+i+1}{4-3i}$

$=\dfrac{3-i}{4-3i}\times\dfrac{4+3i}{4+3i}=\dfrac{12+9i-4i-3i^2}{16+9}$

$=\dfrac{12+9i-4i+3}{25}=\dfrac{15+5i}{25}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{i}{5}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٩

معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z و w أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً



(7) اكتب كلاً من العددين z و w بالصورة القياسية

(8) جد السعة والقياس لكل من العددين المركبين wz و $\frac{w}{z}$

(9) امثل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المركب

الحل:-

(7)

$$w = 1 + i$$
$$z = 1 - 3i$$

(8)

$$wz = (1+i)(1-3i) = 1 - 3i + i - 3i^2$$
$$= 1 - 3i + i + 3 = 4 - 2i$$ الربع الرابع

$$|wz| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

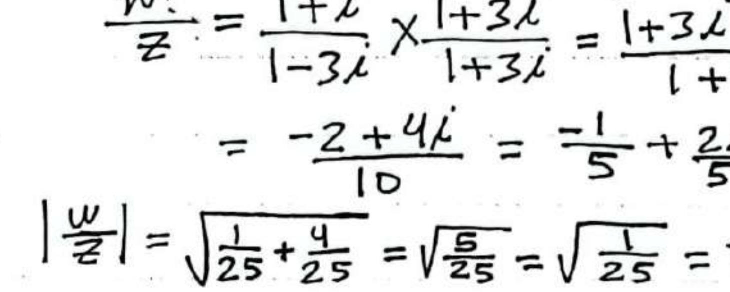
$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ آلة حاسبة
$$\simeq -0.46$$

$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+i+3i^2}{1+9} = \frac{1+3i+i-3}{10}$$
$$= \frac{-2+4i}{10} = \frac{-1}{5} + \frac{2i}{5}$$ الربع الثاني

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}}\right) = \pi - \tan^{-1} 2$$ آلة حاسبة
$$\simeq 2.03$$

(9)



راقتنا ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات • ٠٧٨٥٠٨٢٤٤٦٩٤

اذا كان $z = -3 + 3i\sqrt{3}$ وكان $Arg(w) = \frac{-\pi}{6}$ و $|w| = 18$

جد ناتج كل مما يأتي

(10) $Arg(z)$

(11) $|z|$

(12) $Arg(zw)$

(13) $|zw|$

الحل :-

(10)
$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$= \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$$
$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

(11) $|z| = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

(12)
$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{-\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

(13) $|zw| = |z||w| = (6)(18) = 108$

اوجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مركب مما يأتي

(14) $-15 + 8i$

(15) $-7 - 24i$

(16) $105 + 88i$

الحل :-

(14) $\sqrt{z} = x + iy$

$x^2 - y^2 = -15$ —(1)

$2xy = 8$ —(2)

بحل المعادلتان $x = \pm 1, y = \pm 4$

الجذران

$1 + 4i$

$-1 - 4i$

(15) $\sqrt{z} = x + iy$

$x^2 - y^2 = -7$ —(1)

$2xy = -24$ —(2)

بحل المعادلتان

$x = \pm 3, y = \pm 4$

الجذران

$3 - 4i$

$-3 + 4i$

(16) $\sqrt{z} = x + iy$

$x^2 - y^2 = 105$ —(1)

$2xy = 88$ —(2)

بحل المعادلتان

$x = \pm 11, y = \pm 4$

الجذران

$11 + 4i$

$-11 - 4i$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨١٥٨٣٤٤٦٩

(17) اذا كان $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ اكتب w بالصورة المثلثية
مبيناً ان $w^3=-1$

الحل :-

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\theta=Arg(w)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$w=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$w^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+(3)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{-9}{8}+\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8}i}-\cancel{\frac{3\sqrt{3}i}{8}}$$
$$=\frac{-8}{8}=-1$$

---

(18) اذا كان $Z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ ، $Z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
جد ما يأتي بالصورة المثلثية

(18) Z_1Z_2 (19) $Z_1\bar{Z}_1$ (20) Z_2^3 (21) $\frac{Z_2}{Z_1}$

الحل :-

(18) $$Z_1Z_2=(3)(2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$
$$=6\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

(19) $$\bar{Z}_1=3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$
$$=3\left(\cos\frac{-\pi}{5}+i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$$

نغير اشارة التخيلي
تكون اشارة الطرح
داخل القوس

$$Z_1\bar{Z}_1=(3)(3)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right)\right)$$
$$=9\left(\cos 0+i\sin 0\right)$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٩٤

(20) $Z_2 Z_2 = (2)(2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$Z_2^2 Z_2 = (4)(2)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

(21) $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\right)$

$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$

---

(22) اذا كان $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$ فما قيمة u علماً بأنها سالبة

الحل :-

$\frac{|u-9i|}{|3+i|} = 5$

$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{9+1}} = 5$ نربع الطرفين

$\frac{u^2+81}{10} = 25$ بتبادل

$u^2+81 = 250$

$u^2 = 169$

$u = \pm 13$

لكن u سالبة ومنه $u = 13$

(23) اذا كان $1+4i$ جذراً للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$

جد قيمة كل من العددين الحقيقيين a و b والجذرين الآخرين لهذه المعادلة

الحل :- $1+4i$ جذراً للمعادلة ← يحقق المعادلة

فك أقواس

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$1+(3)(1)(4i)^2+(3)(4i)(1)^2+(4i)^3+5(1+8i+16i^2)+a+4ai+b=0$$

$$1-48+12i-64i+5+40i-80+a+4ai+b=0$$

$$-122+a+b-12i+4ai=0$$

بالمقارنة

$$-122+a+b+i(4a-12)=0$$

$$4a-12=0 \quad / \quad -122+a+b=0$$

$$\boxed{a=3} \qquad -122+3+b=0$$

$$\boxed{b=119}$$

عليه المعادلة :-

$$x^3+5x^2+3x+119=0$$

$1+4i$ جذر وعليه $1-4i$ الجذر الآخر ونشكل معادلة التربيعية

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

$$x^2-2x+17=0$$

نجري قسمة طويلة :-

$$(x^3+5x^2+3x+119)\div(x^2-2x+17)=(x+7)$$

وعليه :-

$$x^3+5x^2+3x+119=(x+7)(x^2-2x+17)=0$$

$$x=-7 \qquad x=1-4i$$

$$x=1+4i$$

عليه الجذرين الآخرين -7 و $1-4i$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

24) جد قيمتي الجذر التربيعي $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

الحل:

$$\frac{362-153i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{724+1086i-306i-459i^2}{4+9}$$

$$= \frac{1183+780i}{13} = 91+60i$$

الآن نجد الجذر التربيعي للعدد $91+60i$

$$\sqrt{z} = x+iy$$

$$x^2-y^2 = 91 \quad —(1)$$

$$2xy = 60 \quad —(2)$$

بحل المعادلتان ينتج $x=\pm 10$ ، $y=\pm 3$

جذر العدد المركب $10+3i$ و $-10-3i$

---

(25) أثبت ان احد الجذرين التربيعيين للعدد $7+24i$ هو $4+3i$ ثم جد الجذر التربيعي الآخر.

الحل: نربع ← $(4+3i)^2 = 16+24i+9i^2$

$$= 16+24i-9$$

$$= 7+24i$$

الجذر الآخر $-4-3i$ ...

(26) أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$

الحل:

$$Arg(7+24i) = \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) \simeq 1.287$$

$$Arg(4+3i) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0.6435$$

$$2 \times Arg(4+3i) = Arg(7+24i)$$

(27) أثبت أن مقياس $7+24i$ يساوي مربع مقياس $4+3i$

الحل:

$$|7+24i| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$$

$$|4+3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

وعليه $|7+24i| = |4+3i|^2$

28) إذا كان $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1 - i$ جد قيمة العددين الحقيقيين

a و b

الحل:

$$\frac{a}{3+i} = \frac{a}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{3a - ai}{10} = \frac{3a}{10} - \frac{a}{10}i$$

$$\frac{b}{1+2i} = \frac{b}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{b-2bi}{5} = \frac{b}{5} - \frac{2b}{5}i$$

وعليه:

$$\frac{3a}{10} - \frac{a}{10}i + \frac{b}{5} - \frac{2b}{5}i = 1 - i$$

$$\frac{3a}{10} + \frac{b}{5} - i\left(\frac{a}{10} + \frac{2b}{5}\right) = 1 - i$$

الجزء الحقيقي: $\frac{3a}{10} + \frac{b}{5} = 1$

الجزء التخيلي: $\frac{a}{10} + \frac{2b}{5} = 1$

بحل المعادلتان

$$a = 2$$

$$b = 2$$

حل المعادلات الآتية

(29) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

(30) $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

الحل :-

(29)

الاصفار النسبية المحتملة هي $\pm 1, \pm 3, \pm 29, \dots$

بالتجريب نجد $z = -3$ تحقق المعادلة

وعليه $z+3$ أحد عوامل كثير الحدود

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z^2 - 14z + 29 \\
z+3 & 2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 \\
 & -2z^3 + 6z^2 \\
 & -14z^2 - 13z + 87 \\
 & -14z^2 - 42z \\
 & 29z + 87 \\
 & 29z + 87 \\
 & 0
\end{array}
$$

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z+3)(2z^2 - 14z + 29) = 0$

$z = -3$

$z = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4}$

$z = \frac{14 \pm 6i}{4}$

حلول المعادلة هي $-3, \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$

(30)

الحل :-

الاصفار النسبية $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

بالتجريب $z = -6$ تحقق المعادلة وعليه

$z+6$ أحد عوامل كثير الحدود

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2z + 2 \\
z+6 & z^3 + 4z^2 - 10z + 12 \\
 & -z^3 + 6z^2 \\
 & -2z^2 - 10z + 12 \\
 & -2z^2 - 12z \\
 & 2z + 12 \\
 & 2z + 12 \\
 & 0
\end{array}
$$

$z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = (z+6)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$z = -6$

$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$

$z = \frac{2 \pm 2i}{2}$

$= 1 \pm i$

الحلول هي $-6, 1+i, 1-i$

31) اذا كان $-2+i$ هو احد جذور المعادلة

$$z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$$

جد قيمة a وقيمة b ثم جد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة

الحل: $-2+i$ جذر ← يحقق المعادلة

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

نقوم بفك الاقواس ثم التبسيط ونقارن الجزء التخيلي والحقيقي بالصفر

ونستنتج: $a=2$, $b=2$

المعادلة تصبح $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$

$-2+i$ جذر وعليه $-2-i$ الجذر الاخر نشكل

معادلة تربيعية: $z^2+4z+5=0$

$$z^4+az^3+bz^2+10z+25=(z^2-2z+5)(z^2+4z+5)$$

الجذور

$1-2i$
$1+2i$

$-2+i$
$-2-i$

وعليه الجذور $1-2i$, $1+2i$, $-2+i$, $-2-i$

كتاب التمارين

جد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم امثله في المستوى المركب، جد معادلته الديكارتية

① $|z+5i|-3=1$ ② $|z-2+8i|=13$

③ $|z+4-3i|=7$ ④ $|z+3+5i|=|z-i|$

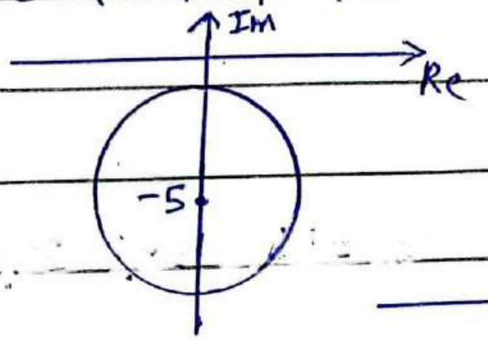
⑤ $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$ ⑥ $|6-2i-z|=|z+4i|$

الحل:

① $|z-(0-5i)|=4$

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-5)$ وطول نصف قطرها 4

المعادلة الديكارتية $x^2+(y+5)^2=16$

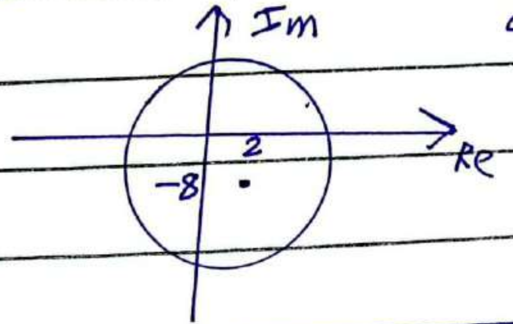


② $|z-(2-8i)|=13$

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة هو دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 13

المعادلة الديكارتية

$(x-2)^2+(y+8)^2=169$



③ $|z-(-4+3i)|=7$

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7

المعادلة الديكارتية

$(x+4)^2+(y-3)^2=49$

رأفت صباحي

④ $|Z-(-3-5i)| = |Z-(0+i)|$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (0,1) و(-3,-5)

$|Z+3+5i| = |Z-i|$

$|x+iy+3+5i| = |x+iy-i|$

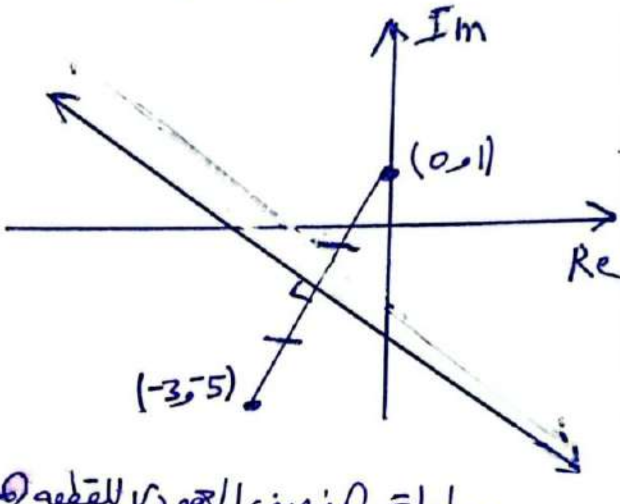
$|(x+3)+i(y+5)| = |x+i(y-1)|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}+10y+25 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+1$

$6x+12y+33=0$

$2x+4y+11=0$ معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة هي



⑤ $|Z+3i| = |Z-6i|$

ضرب تبادلي

هذه معادلة المحل الهندسي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (0,6) و(0,-3)

$|Z-(0-3i)| = |Z-(0+6i)|$

$|Z+3i| = |Z-6i|$

$|x+iy+3i| = |x+iy-6i|$

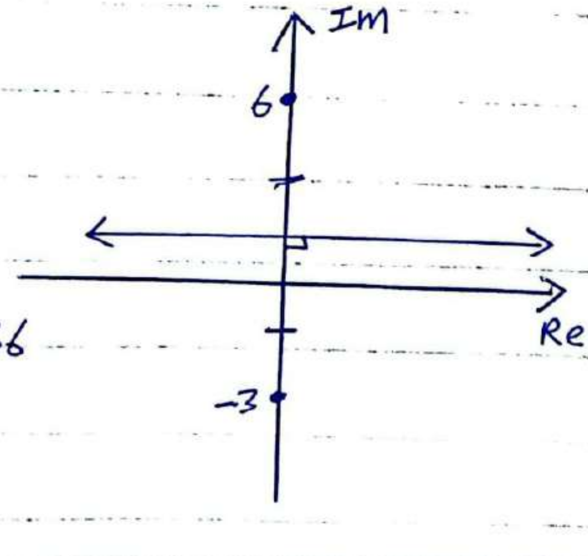
$|x+i(y+3)| = |x+i(y-6)|$

$\sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-6)^2}$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+6y+9 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-12y+36$

$18y-27=0$

$y=\frac{27}{18}=1.5$



رافت صالحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ $|-(z-6+2i)| = |z+4i|$ $\qquad |-1| = 1$

$|z-6+2i| = |z+4i|$

$|z-(6-2i)| = |z-(0-4i)|$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (0،-4)،(6،-2)

$|z-6+2i| = |z+4i|$

$|x+iy-6+2i| = |x+iy+4i|$

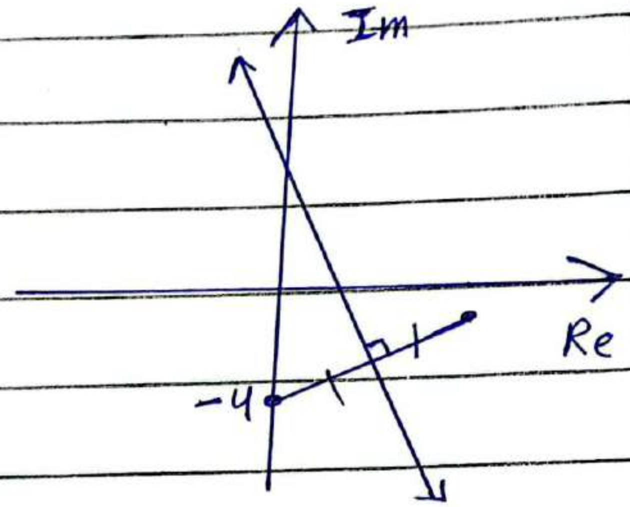
$|(x-6)+i(y+2)| = |x+i(y+4)|$

$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+(y+4)^2}$

$x^2-12x+36+y^2+4y+4 = x^2+y^2+8y+16$

$-12x-4y+24=0$ نقسم على -4

$3x+y-6=0$



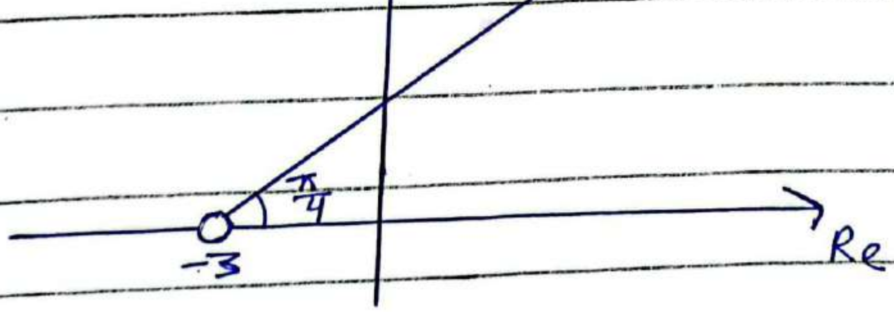
جد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم ارسمه في المستوى المركب

① $Arg(z+3)=\frac{\pi}{4}$ ② $Arg(z+3-2i)=\frac{2\pi}{3}$ ③ $Arg(z+2+2i)=\frac{-\pi}{4}$

الحل:

① $Arg(z-(-3+0i)) = \frac{\pi}{4}$

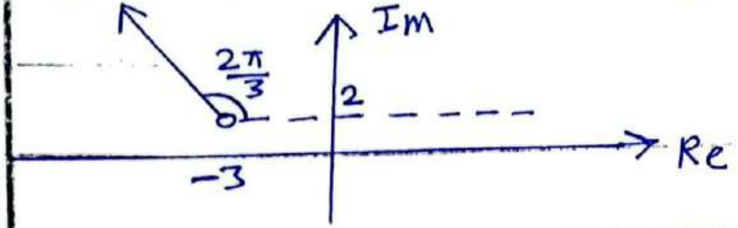
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة (-3،0) ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب



راقت صابح

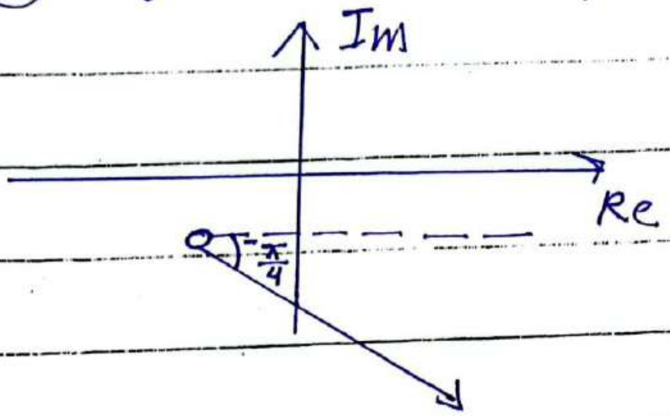
(8) $Arg(Z-(-3+2i)) = \frac{2\pi}{3}$

الحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة (3-و2) ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب



(9) $Arg(Z-(-2-2i)) = -\frac{\pi}{4}$

الحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة (-2و-2) ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب



مثل في المستوى المركب الحل الهندسي الذي تمثله كل متباينة مما يأتي

(10) $0 \le Arg(z-3i) \le \frac{3\pi}{4}$ (11) $|z-2i| > 2$ (12) $|z| \le 8$

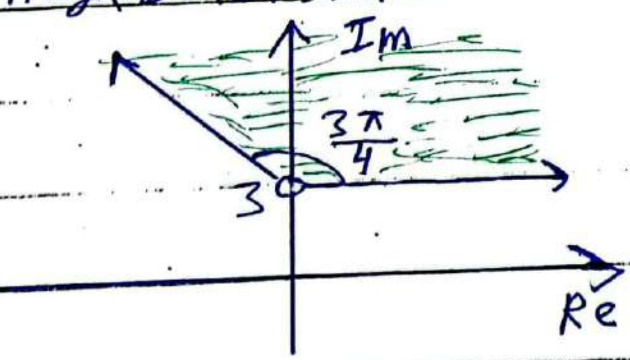
الحل:

(10) $Arg(Z-(0+3i)) = \frac{3\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة شعاع متصل يبدأ من النقطة (0و3) ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب

$Arg(Z-(0+3i)) = 0$

يمثل منحنى المعادلة شعاع متصل يبدأ من النقطة (0و3) ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها 0 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب

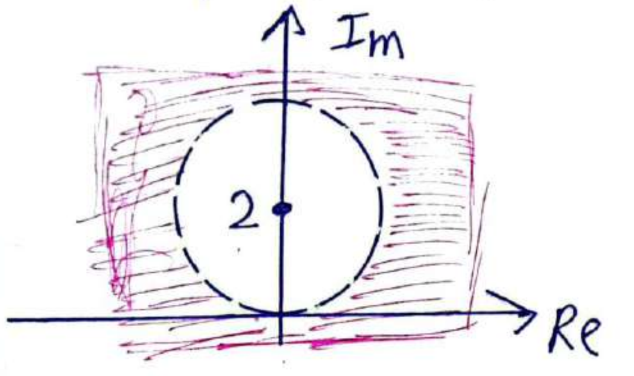


الحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل بينهما.

رافت صابح

⑪ $|z-2i| = 2$

$|z-(0+2i)| = 2$

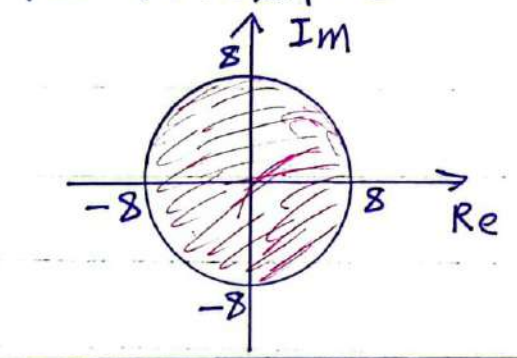


المحل الهندسي لهذه المتباينة
معادلة $|z-2i|=2$ هو
دائرة مركزها $(0,2)$ وطول
نصف قطرها 2 ، المنحنى
متقطع لعدم وجود مساواة
منطقة المحل الهندسي خارج
الدائرة لأن الأعداد المركبة التي
تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة
مسافة أكبر من طول نصف القطر

---

⑫ $|z| = 8$

$|z-(0+0i)| = 8$



المنحنى الحدودي لهذه المتباينة
معادلة $|z|=8$ وهو دائرة
مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 8
والمنحنى متصل لوجود مساواة ومنطقة
الحل داخل الدائرة وعلى محيطها لأن الأعداد
التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة
مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها

اذا كان $|z-5i| = 3$ أجب عن السؤالين

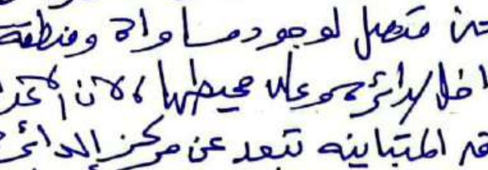
⑬ ارسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب

⑭ جد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة

الحل:

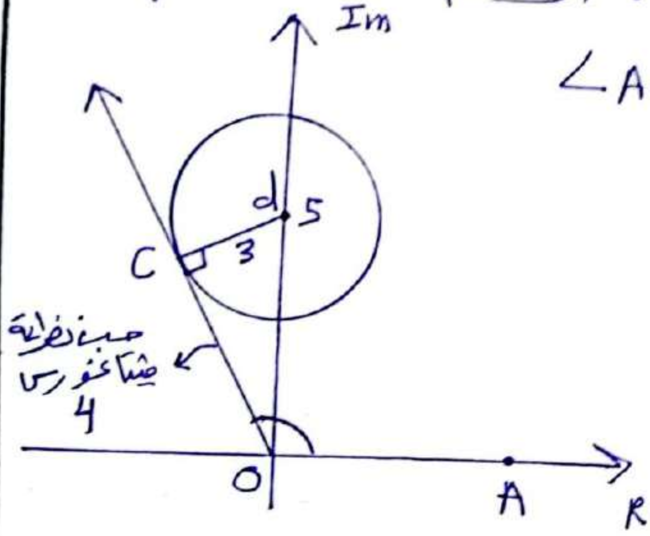
⑬ $|z-(0+5i)| = 3$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه
المعادلة هو دائرة مركزها $(0,5)$
وطول نصف قطرها 3



رأفت صباحي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

(14) الحل: سعة العدد المركب هو قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والمماس المرسوم من نقطة الأصل



المطلوب هو قياس الزاوية $\angle AOC$

لنأخذ المثلث OCd

$\tan\angle dOC = \frac{3}{4}$ آلة الحاسبة

$m\angle dOC = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$

وعليه $m\angle AOC = \frac{\pi}{2} + 0.64$

≈ 2.21

(15) مثل في المستوى المركب الحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z-1+i| \leq 1$ والمتباينة $-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < 0$

$|z-1+i| = 1$

$|z-(1-i)| = 1$

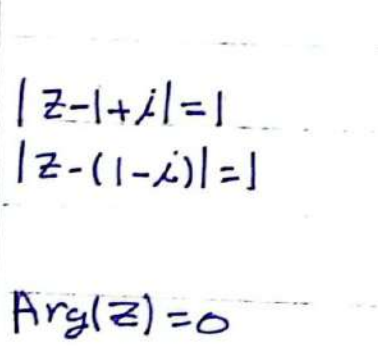
الحل:- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-1+i|=1$ هو دائرة (متصلة) مركزها $(1,-1)$ وطول نصف قطرها (1) ومنطقة الحل داخلها وعلى محيطها

$Arg(z) = 0$

يمثل منحنى المعادلة شعاع (متقطع) يبدأ من $(0,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي

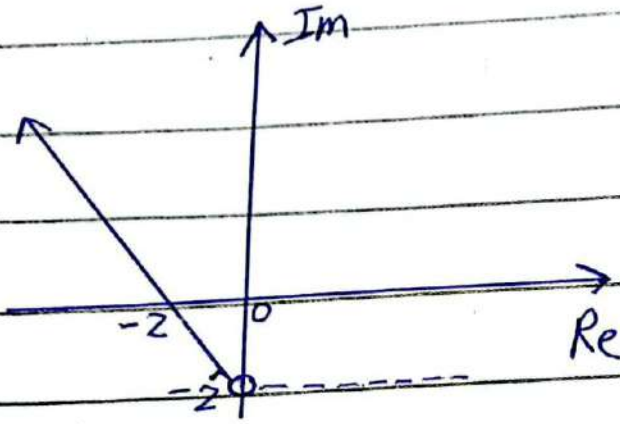
$Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

يمثل منحنى المعادلة شعاع (متقطع) يبدأ من $(0,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب



(16) اكتب بدلالة z معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط الممثلة في المستوى المركب المجاور

الحل :-



شعاع يبدأ من النقطة (0، -2) ويتجه شمالا ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي

$$Arg(z-(0-2i)) = \frac{3\pi}{4}$$

$$Arg(z+2i) = \frac{3\pi}{4}$$

لمعرفة الزاوية من الميل (0، -2) و (-2، 0)

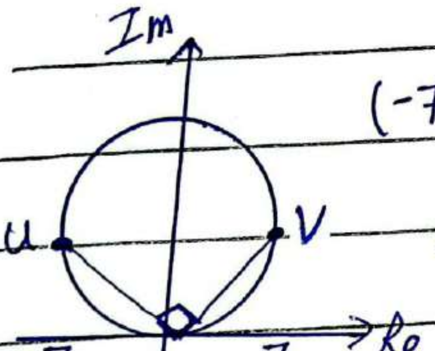
$m = \frac{0+2}{-2-0} = -1 = \tan\theta$

$\theta = 135°$

(17) اذا كان $u = -7+7i$ وكانت $v = 7+7i$ جد بصيغة $|z-z_1| = r$ معادلة لدائرة التي تمر بنقطة الأصل والنقطتان اللتين تمثلان العددين المركبين u و v

الحل :-

الدائرة تمر بالنقاط (0، 0) و (7، 7) و (-7، 7)



طريقة (1)

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ نعوض النقاط وحل المعادلات

طريقة (2)

$$Arg(v) = \tan^{-1}\frac{7}{7} = \frac{\pi}{4}$$

$$Arg(u) = \pi - \tan^{-1}\frac{7}{7} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

وعليه الزاوية بينهما $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ وهذه زاوية محيطية $\Leftarrow$ uv هو القطر

المركز هو احداثي منتصف طرفي القطر $\left(\frac{-7+7}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = (0,7)$

نصف القطر هو بعد المركز عن أي نقطة على الدائرة

$r = \sqrt{(7-0)^2+(7-7)^2} = 7$

$$|z-(0+7i)| = 7$$

$$|z-7i| = 7$$

رافت ضايف

(18) اذا كان $u=-1-i$ جد u^2 ثم مثل في المستوى المركب الحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z|<2$ والمتباينة $|z-u^2|<|z-u|$

الحل :-

نجد u^2 $(-1-i)^2=1+2i+i^2=2i$

$|z|<2$

$|z|=2$

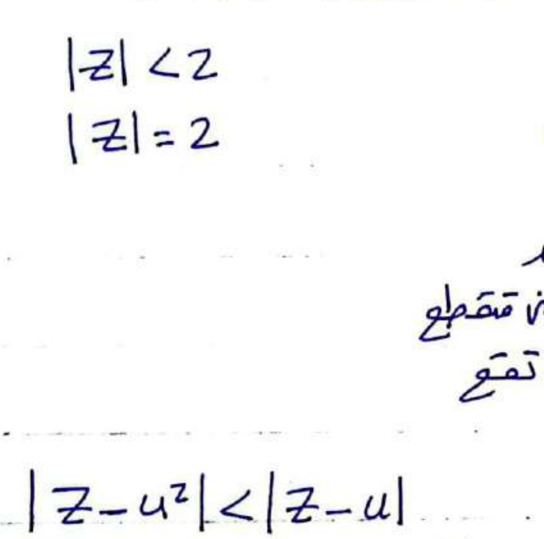
المنحني الحدودي لهذه المتباينة معادلة $|z|=2$ دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 2 وبما أنه لا توجد مساواه في رمز المتباينة، نرسم المنحني متقطع والاعداد المركبة التي تحقق المتباينة تقع داخل الدائرة.

$|z-u^2|<|z-u|$

$|z-2i|<|z-(-1-i)|$

$|z-(0+2i)|=|z-(-1-i)|$

المنحني الحدودي لهذه المتباينة معادلة $|z-2i|=|z-(-1-i)|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,2)$ و $(-1,-1)$ وبما أنه لا توجد مساواه في رمز المتباينة، المنحني متقطع



لمعرفة منطقة الحل، نختار $z=0$

$|z-2i| \overset{?}{<} |z+1+i|$

$|0-2i| < |0+1+i|$

$2<\sqrt{2}$ خاطئة

نظلل عكس نقطة الاصل.

((الافضل ايجاد معادلة المنصف ليكون الحل ادق))

رافت صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(19) مثل في المستوى المركب المعادلة $|z-3i|=13$

والمعادلة $Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$ ثم جد العدد المركب z الذي يحققهما معاً.

الحل:

$|z-3i|=13$

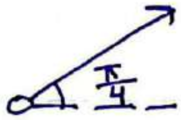
$|z-(0+3i)|=13$ دائرة مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها 13

المعادلة $(x-0)^2+(y-3)^2=169$ —— (1)

$Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$

$Arg(z-(4+0i))=\frac{\pi}{4}$

شعاع يبدأ بالنقطة $(4,0)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي



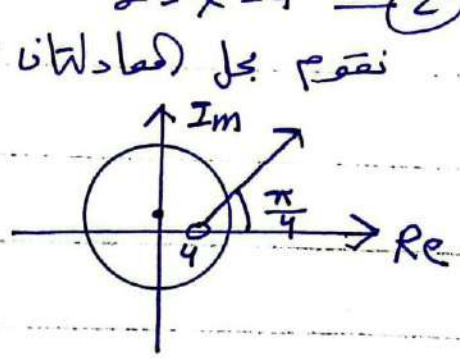
لإيجاد المعادلة، هنا يتوفر نقطة وزاوية $m=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=1(x-4)$

$y=x-4$ —— (2)

نقوم بحل المعادلتان، حيث نعوض $y=x-4$ في معادلة (1)



$x^2+(x-4-3)^2=169$

$x^2+x^2-14x+49=169$

$x^2-7x-60=0$

$(x+5)(x-12)=0$

$x=-5$, $x=12$

عند $x=-5$ فإن $y=-5-4=-9$

عند $x=12$ فإن $y=12-4=8$

العددان هما $z=12+8i$

$z=-5-9i$

من الرسم العدد $z=12+8i$

رأفت صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

20) مثل في المستوى المركب المعادلة $|z-3-2i|=5$ والمعادلة $|z-6i|=|z-7+i|$ ثم جد العدد بن المركبين اللذين يحققان المعادلتين معاً.

الحل :- الحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (3,2) وطول نصف قطرها 5

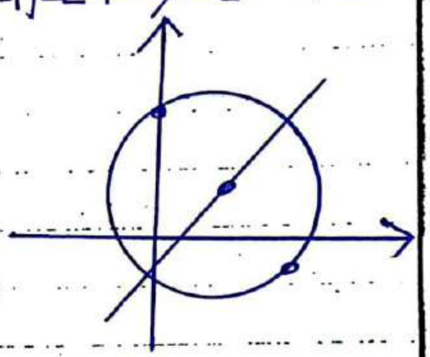
$$|z-3-2i|=5$$
$$|z-(3+2i)|=5$$

المعادلة :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25 \quad \text{——} \quad (1)$$

الحل الهندسي هو معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (0,6) , (7,-1)

$$|z-6i|=|z-7+i|$$
$$|z-(0+6i)|=|z-(7-i)|$$
$$|z-6i|=|z-7+i|$$
$$|x+iy-6i|=|x+iy-7+i|$$
$$|x+i(y-6)|=|(x-7)+i(y+1)|$$
$$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$$
$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-12y+36=\cancel{x^2}-14x+49+\cancel{y^2}+2y+1$$
$$-14y+14x-14=0$$
$$y=x-1 \quad \text{——} \quad (2)$$



نقوم بحل المعادلتان

عوضنا $y=x-1$ في معادلة الدائرة

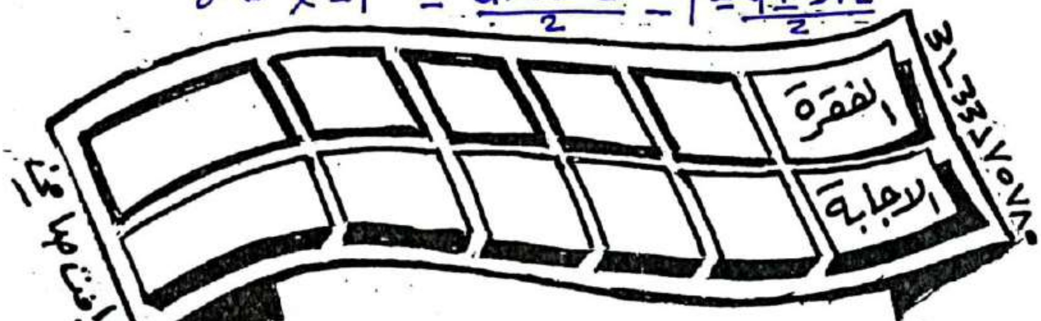
$$(x-3)^2+(x-3)^2=25$$
$$2(x-3)^2=25$$
$$2(x^2-6x+9)=25$$
$$2x^2-12x-7=0$$

القانون العام

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144+56}}{(2)(2)}=\frac{6\pm5\sqrt{2}}{2}=$$
$$y=x-1=\frac{6\pm5\sqrt{2}}{2}-1=\frac{4\pm5\sqrt{2}}{2}$$

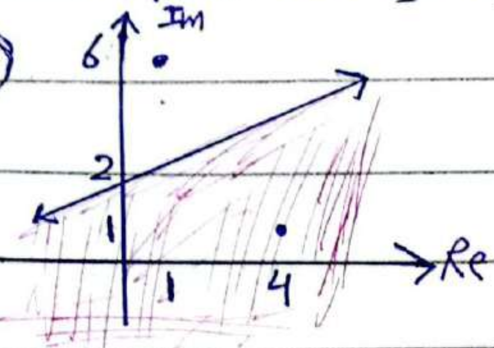
العددان

$$z_1=\frac{6+5\sqrt{2}}{2}+\frac{4+5\sqrt{2}}{2}i$$
$$z_2=\frac{6-5\sqrt{2}}{2}+\frac{4-5\sqrt{2}}{2}i$$



٤) اكتب بدلالة (Z) متباينة الحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :-

(21)



الحل :-

المنحني الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (4،1) و (1،6) ومعادلته $|Z-(4+i)|=|Z-(1+6i)|$

$|Z-4-i|=|Z-1-6i|$

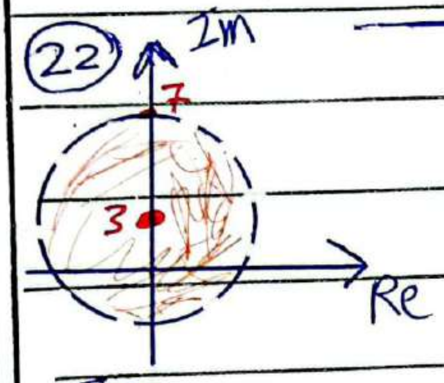
لمعرفة إشارة المتباينة، اختر نقطة داخل منطقة الحل ولتكن $Z=0$

المتباينة $|0-4-i| \; ? \; |0-1-6i|$ الخط متصل

$\sqrt{17} < \sqrt{37}$

$|Z-4-i| \leq |Z-1-6i|$

(22)



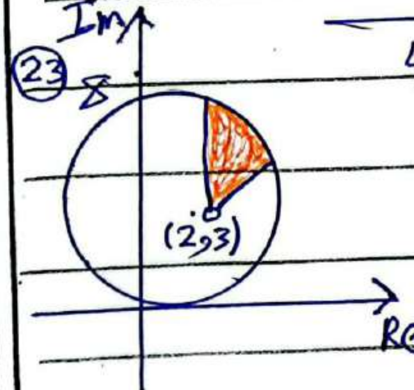
الحل :-

المنحني الحدودي هنا هو دائرة مركزها (0،3) وطول نصف قطرها 4 ومعادلتها $|Z-(0+3i)|=4$

$|Z-3i|=4$

المنطقة المظللة داخل الدائرة والمنحني متقطع $|Z-3i|<4$

(23)



(23) مركز الدائرة هو (1،4) وطول نصف قطرها 4 والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة ...

فالمتباينة $|Z-1-4i| \leq 4$

يوجد شعاعان متصلان منطلقان من نقطة (2،3) حيث السفلي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الافقي بينما العلوي يصنع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الافقي والتظليل المنطقة المحصورة

$\frac{\pi}{4} \leq Arg(Z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2}$

ملاحظة: تم حساب المركز ونصف القطر بناءً على الرسم المدرج أما الزاوية من خلال الميل

نظام المتباينات

$|Z-1-4i| \leq 4$ ، $\frac{\pi}{4} \leq Arg(Z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2}$

رافت صباحي