ستوديو الرياضيات – الأستاذ: عمار البوايزة

نقدم مادة الفصل الثاني بكافة أفكارها وبشمولية تامة

لطلابنا الأعزاء في مرحلة التوجيهي

(العلمي والأدبي) وباقي الفروع

انضم الي مجموعتنا (ستوديو الرياضيات أونلاين)

على الفيسبوك لتحمّل أهم الملفات وتتابع أي جديد

ستوديو الرياضيات أ.عمار البوايزة	وحـــدة (التكـامل وتطبيقاته)	الأستـاذ عمـار البـوايزة
الرياضيـات	التكامل غير المحدود الجزء الثاني	الفرع : العلمي	رقم الصفحة (١)

المتطابقات المثلثية :

التكاملات الأساسية :

١) جـاس . دس = - جتـاس + جـ

٢) جتـاس . دس = جـاس + جـ

٣) قـا^{٢}س . دس = ظـاس + جـ

٤) قتـا^{٢}س . دس = - ظتـاس + جـ

٥) قـاس ظـاس . دس = قـاس + جـ

٦) قتـاس ظتـاس. دس = -قتـاس + جـ

التكاملات المثلثية للمتغير (أس + ب) :

١) جـا (أس + ب) . دس = $\frac{-\text{جتا(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

٢) جتا (أس + ب) . دس = $\frac{\text{جـا (أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

٣) قـا (أس + ب) . دس = $\frac{\text{ظـا(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

٤) قتـا (أس + ب) . دس = $\frac{-\text{ظتا(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

٥) قا(أس + ب) ظا(أس + ب). دس = $\frac{\text{قا(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

ـ ب). دس = $\frac{-\text{قتا(أس+ب)}}{\text{أ}}$ + جـ

على الطالب أن يعلم ما يأتي في هذا الجزء :

أولاً : يتم إجـراء جميع التكـاملات في هذا الجزء اعتمـاداً على قوانين التكاملات المثلثية بشكل **مباشر** إذا كان صورة التكامل المطلوب تكافيء القواعد السابقة.

ثانياً : يتم إجـراء التكاملات التي لا تطابق صورتها القواعد السابقة من اعتمـاداً على المتطابقات المثلثيـة فقط لكتابتها على شكل يمكن معه استخدام القواعد .

ثالثاً : حـل جميع التكاملات في هذا الجـزء لا يعتمد إلا على القواعد السابقة مع استخدام المتطابقات المثلثية في عمليات تبسيط صورة التكامل.

رابعاً : لن يتم استخدام أي من طـرق التكامل الشائعة مثل التعويض ، الأجزاء ، الكسور الجزئية ، او غيرها،

خامساً : الأسـاليب التي يمكن اتباعها في تبسيط صـورة التكامل للتمكن من تطبيق قواعد التكامل :

- المتطابقات المثلثية.
- الضرب بمرافق البسط أو المقام أو الاثنين معاً.
- تحليل المقادير المثلثية قياساً على كثيرات الحدود.
- التبسيـط والاختصـار.

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة
ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

ستوديو الرياضيات – أ.عمار البوايزة	وحـــدة (التكامل وتطبيقاته)	الأستاذ عمار البوايزة
الرياضيات	التكامل غير المحدود الجزء الثاني	الفرع : العلمي	رقم الصفحة (١)

المتطابقات المثلثية :

القوانين المثلثية الأساسية

(١) $جا هـ = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{س}{ل}$

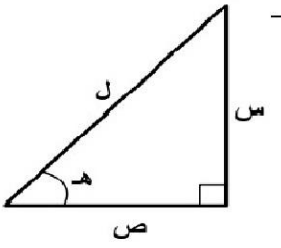
(٢) $جتا هـ = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{ص}{ل}$

(٣) $ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{س}{ص}$

(٤) $قا هـ = \frac{١}{جتا هـ} = \frac{ل}{ص}$

(٥) $قتا هـ = \frac{١}{جا هـ} = \frac{ل}{س}$

(٦) $ظتا هـ = \frac{جتا هـ}{جا هـ} = \frac{١}{ظا هـ}$



المتطابقات المثلثية الأساسية

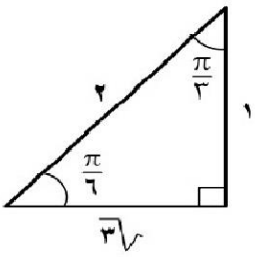
- $جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١$
- $ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ$
- $ظتا^{٢}هـ + ١ = قتا^{٢}هـ$

متطابقات سالب الزاوية

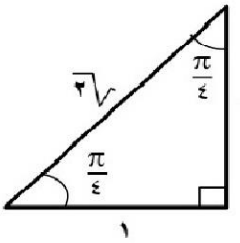
- $جا(-س) = -جاس$
- $جتا(-س) = جتاس$
- $ظا(-س) = -ظاس$

النسب المثلثيّة للزوايا ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

للزاويتين ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٣}$) نستخدم المثلث القائم الزاوية التالي ونطبق قوانين النسب المثلثية الأساسية.



للزاوية ($\frac{\pi}{٤}$) نستخدم المثلث القائم الزاوية التالي ونطبق قوانين النسب المثلثية الأساسية.



القوانين المثلثية للزوايا المحورية

إذا كانت س زاوية موجبة تقع في الربع الأول فإن :

- $جا(\pi - س) = جاس$
- $جتا(\pi - س) = -جتاس$
- $جا(\pi + س) = -جاس$
- $جتا(\pi + س) = -جتاس$
- $جا(\frac{\pi}{٢} - س) = جتاس$
- $جتا(\frac{\pi}{٢} - س) = جاس$
- $جا(\pi٢ - س) = -جاس$
- $جتا(\pi٢ - س) = جتاس$
- $جا(\pi٢ + س) = جاس$
- $جتا(\pi٢ + س) = جتاس$

ستوديو الرياضيات أ.عمار البوايزة	وحـــدة (التكـامل وتطبيقاته)		الأستـاذ عمـار البـوايزة
الرياضيـات	التكامل غير المحدود الجزء الثاني	الفرع : العلمي	رقم الصفحة (١)

المتطابقات المثلثية :

متطابقات ضعف الزاوية

- جـا(٢س) = ٢جاس جتاس
- جتـا(٢س) = جتـا^{٢}هـ – جـا^{٢}هـ
- جتـا(٢س) = ١ – ٢جـا^{٢}هـ
- جتـا(٢س) = ٢جتـا^{٢}هـ – ١
- $ظـا٢س = \frac{٢ ظـاس}{١ - ظـا^{٢}س}$

متطابقات الضرب على هيئة جمع أو طرح

- جـاس جتـاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س + ص) + جا(س – ص))
- جتـاس جتـاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س + ص) + جتـا(س – ص))
- جـاس جـاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س – ص) - جتا(س + ص))

متطابقات مجموع زاويتين أو الفرق بينهما

- جا (س + ص) = جاس جتاص + جتاس جاص
- جا (س – ص) = جاس جتاص – جتاس جاص
- جتا (س + ص) = جتاس جتاص – جاس جاص
- جتا (س – ص) = جتاس جتاص + جاس جاص
- $ظـا (س + ص) = \frac{ظـاس + ظـاص}{١ - ظـاس ظـاص}$
- $ظـا (س – ص) = \frac{ظـاس + ظـاص}{١ + ظـاس ظـاص}$

متطابقات المجموع والفرق كحاصل ضرب

- جاس + جاص = ٢جا $(\frac{س + ص}{٢})$ جتا $(\frac{س - ص}{٢})$
- جاس – جاص = ٢جتا $(\frac{س + ص}{٢})$ جـا $(\frac{س - ص}{٢})$
- جتاس + جتاص = ٢جتا $(\frac{س + ص}{٢})$ جتا $(\frac{س - ص}{٢})$
- جتاس – جتاص = –٢جـا $(\frac{س + ص}{٢})$ جـا $(\frac{س - ص}{٢})$

مع أطيب تحيات الأستاذ عمـار البـوايزة – خاص بـ ستوديو الرياضيات

الحالة الأولى: التكاملات المباشرة.
(وهي التكاملات التي نطبق عليها قواعد التكاملات المثلثية بدون استخدام منطابقات)

① $\int$ حا ٩س . دس = $-\frac{1}{9}$ جتا ٩س + جـ

② $\int$ قا٣س ظا٣س . دس
= $\frac{1}{3}$ قا٣س + جـ

③ $\int$ قاه س (قاه س + ظاه س) . دس
= $\int$ (قا^{٢}ه س + قاه س ظاه س) . دس
= $\int$ قا^{٢}ه س . دس + $\int$ قاه س ظاه س . دس
= $\frac{1}{5}$ ظاه س + $\frac{1}{5}$ قاه س + جـ

④ $\int$ ظتا (٢-س) قتا (٢-س) . دس
= $\frac{-\text{قتا}(٢-س)}{-1}$ + جـ
= قتا (٢-س) + جـ

⑤ $\int \frac{٦}{\text{جتا}^{٢}(١-\frac{س}{٤})}$. دس
= $\int$ ٦ قا^{٢} (١-$\frac{س}{٤}$) . دس
= ٦ × $\frac{\text{ظا}(١-\frac{س}{٤})}{-\frac{1}{4}}$ + جـ
= -٢٤ ظا (١-$\frac{س}{٤}$) + جـ

⑥ $\int$ (٣س - جتا $\frac{س}{٣}$) . دس
= $\int$ ٣س . دس - $\int$ جتا $\frac{س}{٣}$. دس
= $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} - $\frac{\text{حا}\frac{س}{٣}}{\frac{1}{3}}$ + جـ
= $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} - ٣ حا $\frac{س}{٣}$ + جـ

⑦ $\int \frac{\text{حا}^{٢}٢س - \text{جتا}^{٢}٢س}{\text{حا}^{٢}٢س \text{جتا}^{٢}٢س}$. دس
= $\int \frac{\text{حا}^{٢}٢س}{\text{حا}^{٢}٢س \text{جتا}^{٢}٢س}$ دس - $\int \frac{\text{جتا}^{٢}٢س}{\text{حا}^{٢}٢س \text{جتا}^{٢}٢س}$. دس
= $\int \frac{1}{\text{جتا}^{٢}٢س}$. دس - $\int \frac{1}{\text{حا}^{٢}٢س}$. دس
= $\int$ قا^{٢}٢س . دس - $\int$ قتا^{٢}٢س . دس
= $\frac{1}{2}$ ظا٢س + $\frac{1}{2}$ ظتا٢س + جـ

⑧ $\int$ (٤س + قتا^{٢} (١١-٢س)) . دس
= $\int$ ٤س . دس + $\int$ قتا^{٢} (١١-٢س) . دس
= $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ - $\frac{\text{ظتا}(١١-٢س)}{-٢}$ + جـ
= ٢س^{٢} + $\frac{1}{2}$ ظتا (١١-٢س) + جـ

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

⑨ $\int \frac{\text{حا}س}{\text{جتا}^2 س} \cdot \text{د}س = \int \frac{\text{حا}س}{\text{جتا}س} \times \frac{1}{\text{جتا}س} \text{د}س$

$= \int \text{ق}س \text{ظا}س \cdot \text{د}س = \text{ق}س + \text{جـ}$

⑩ $\int \left(\text{حا}٦س + \frac{٢٠}{\text{جتا}^2 ٢س}\right) \cdot \text{د}س$

$= \int \text{حا}٦س \cdot \text{د}س + \int \frac{٢٠}{\text{جتا}^2 ٢س} \cdot \text{د}س$

$= \int \text{حا}٦س \cdot \text{د}س + ٢٠ \int \text{ق}^2 ٢س \cdot \text{د}س$

$= -\frac{\text{جتا}٦س}{٦} + \frac{٢٠ \text{ظا}٢س}{٢} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٦} \text{جتا}٦س + ١٠ \text{ظا}٢س + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{\text{حا}^{\frac{1}{2}} س + \text{جتا}^{\frac{1}{2}} س \, \text{ق}^{\frac{1}{2}} س}{\text{حا}^{\frac{1}{2}} س} \cdot \text{د}س$

$= \int \left(\frac{\text{حا}^{\frac{1}{2}} س}{\text{حا}^{\frac{1}{2}} س} + \frac{\text{جتا}^{\frac{1}{2}} س \, \text{ق}^{\frac{1}{2}} س}{\text{حا}^{\frac{1}{2}} س}\right) \text{د}س$

$= \int (١ + \text{ق}^{\frac{1}{2}} س \text{ظتا}^{\frac{1}{2}} س) \cdot \text{د}س$

$= \int ١ \cdot \text{د}س + \int \text{ق}^{\frac{1}{2}} س \text{ظتا}^{\frac{1}{2}} س \cdot \text{د}س$

$= س - \frac{\text{ق}^{\frac{1}{2}} س}{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

$= س - ٢ \text{ق}^{\frac{1}{2}} س + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{س \, \text{حا}٨س - ٢ \text{حا}٨س}{|٨ - ٤س|} \cdot \text{د}س$

حيث $س \geq ٣$.

$= \int \frac{(س - ٢) \text{حا}٨س}{|٨ - ٤س|} \cdot \text{د}س$

$|٨ - ٤س| \leftarrow ٤س - ٨ \quad ٨ - ٤س$

$س = ٢ \quad$ سيسر $\quad س \geq ٣$

$= \int \frac{(س - ٢) \text{حا}٨س}{٤س - ٨} \cdot \text{د}س$

$= \int \frac{(س - ٢) \text{حا}٨س}{٤(س - ٢)} \cdot \text{د}س$

$= \int \frac{١}{٤} \text{حا}٨س \cdot \text{د}س$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{-\text{جتا}٨س}{٨} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣٢} \text{جتا}٨س + \text{جـ}$

⑬ $\int \frac{|٢س|^3 \, \text{ق}^2 ٤س}{س^3} \cdot \text{د}س$

$= \int \frac{١٨ |س|^3 \, \text{ق}^2 ٤س}{س^3} \cdot \text{د}س$

$= \begin{cases} \int \frac{٨ س^3}{س^3} \text{ق}^2 ٤س \cdot \text{د}س & ، س > ٠ \\ \int -\frac{٨ س^3}{س^3} \text{ق}^2 ٤س \cdot \text{د}س & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \int ٨ \text{ق}^2 ٤س \cdot \text{د}س & ، س > ٠ \\ \int -٨ \text{ق}^2 ٤س \cdot \text{د}س & ، س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} ٢ \text{ظا}٤س + \text{جـ} & ، س > ٠ \\ -٢ \text{ظا}٤س + \text{جـ} & ، س < ٠ \end{cases}$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

الحالة الثانية : التكاملات غير المباشرة
(وهي التكاملات التي تحتاج الى أساليب تبسيط معينة ليمكن الوصول الى صيغة ما نتمكن من خلالها من تطبيق قواعد التكاملات)

(١٤) $\int \frac{\text{وس}}{\text{ظاس} + \text{ظتاس}} = \int \frac{\text{وس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}$

$= \int \frac{\text{وس}}{\frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}}}$ (توحيد مقامات)

$= \int \frac{\text{وس}}{\frac{1}{\text{جاس جتاس}}}$ (متطابقة : $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$)

$= \int \text{جاس جتاس} \cdot \text{وس}$

(متطابقة : $\text{جا}2\text{س} = 2\,\text{جاس جتاس}$)

$= \int \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س} \cdot \text{وس} = -\frac{1}{4}\,\text{جتا}2\text{س} + \text{جـ}$

(١٥) $\int 14\,\text{جا}7\text{س}\,\text{جتا}7\text{س} \cdot \text{وس}$

(متطابقة : $\text{جا}2\text{س} = 2\,\text{جاس جتاس}$)
($\therefore \text{جا}14\text{س} = 2\,\text{جا}7\text{س}\,\text{جتا}7\text{س}$)

$= 7 \times 2\,\text{جا}7\text{س}\,\text{جتا}7\text{س} \cdot \text{وس}$

$= 7 \int \text{جا}14\text{س} \cdot \text{وس}$

$= 7 \times \frac{-\text{جتا}14\text{س}}{14} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{جتا}14\text{س} + \text{جـ}$

(١٦) $\int \frac{11 - 4\,\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \cdot \text{وس}$

$= \int \left(\frac{11}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{4\,\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\right) \text{وس}$

$= \int \frac{11}{\text{جتا}^2\text{س}} \cdot \text{وس} - 4 \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \cdot \text{وس}$

$= \int 11\,\text{قا}^2\text{س} \cdot \text{وس} - 4 \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{1}{\text{جتاس}} \cdot \text{وس}$

$= \int 11\,\text{قا}^2\text{س} \cdot \text{وس} - 4 \int \text{قاس ظاس} \cdot \text{وس}$

$= 11\,\text{ظاس} - 4\,\text{قاس} + \text{جـ}$

(١٧) $\int \text{جا}^2\text{س} \cdot \text{وس}$ (متطابقة : $\text{جتا}2\text{س} = 1 - 2\,\text{جا}^2\text{س}$)

$= \int \frac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{2} \cdot \text{وس}$ ($\therefore \frac{1 - \text{جتا}2\text{س}}{2} = \text{جا}^2\text{س}$)

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}\right) \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{1}{2} \cdot \text{وس} - \int \frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س} \cdot \text{وس}$

$= \frac{1}{2} \times \text{س} - \frac{1}{2} \times \frac{\text{جا}2\text{س}}{2} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\,\text{س} - \frac{1}{4}\,\text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

(١٨) $\int \text{جتا}^2 8\text{س} \cdot \text{وس}$ (متطابقة : $\text{جتا}2\text{س} = 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$)
($\therefore \text{جتا}^2 8\text{س} = \frac{\text{جتا}16\text{س} + 1}{2}$)

$= \int \frac{\text{جتا}16\text{س} + 1}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \text{جتا}16\text{س} \cdot \text{وس} + \frac{1}{2} \int \text{وس}$

$= \frac{1}{32}\,\text{جا}16\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{س} + \text{جـ}$

ستوديو الرياضيات .. أ.عمار البوايزة

(١٩) $\int (\text{حا}س + \text{جتا}س)^2 \cdot \text{د}س$

$= \int (\text{حا}^2 س + 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س + \text{جتا}^2 س) \cdot \text{د}س$

$= \int (2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س + \text{حا}^2 س + \text{جتا}^2 س) \cdot \text{د}س$

(متطابقة : $\text{حا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$)

$= \int (2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س + 1) \cdot \text{د}س$

(متطابقة : $\text{حا}2س = 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س$)

$= \int (\text{حا}2س + 1) \cdot \text{د}س$

$= -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2س + س + \text{جـ}$

(٢٠) $\int (\text{جتا}^2 5س - \text{حا}^2 5س) \cdot \text{د}س$

(متطابقة : $\text{جتا}2س = \text{جتا}^2 س - \text{حا}^2 س$)

$\Leftarrow \text{جتا}10س = \text{جتا}^2 5س - \text{حا}^2 5س$

$= \int \text{جتا}10س \cdot \text{د}س$

$= \frac{1}{10}\,\text{حا}10س + \text{جـ}$

(٢١) $\int (\text{حا}س - \text{جتا}س + 1)^2 \cdot \text{د}س$

(بفك التربيع)

$= \int [(\text{حا}س - \text{جتا}س) + 1]^2 \cdot \text{د}س$

$= \int ((\text{حا}س - \text{جتا}س)^2 + 2(\text{حا}س - \text{جتا}س) + 1) \text{د}س$

$= \int (\text{حا}^2 س - 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س + \text{جتا}^2 س + 2\,\text{حا}س - 2\,\text{جتا}س + 1) \text{د}س$

(متطابقة : $\text{حا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$)

$= \int (1 - 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س + 2\,\text{حا}س - 2\,\text{جتا}س + 1) \text{د}س$

(متطابقة : $\text{حا}2س = 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س$)

$= \int (2 - \text{حا}2س + 2\,\text{حا}س - 2\,\text{جتا}س) \cdot \text{د}س$

$= 2س + \frac{1}{2}\,\text{جتا}2س - 2\,\text{جتا}س - 2\,\text{حا}س + \text{جـ}$

(٢٢) $\int \text{حا}^2 س\,\text{جتا}^2 س \cdot \text{د}س$

$= \int (\text{حا}س\,\text{جتا}س)^2 \cdot \text{د}س$

(متطابقة : $\text{حا}2س = 2\,\text{حا}س\,\text{جتا}س$)

$= \int \left(\frac{\text{حا}2س}{2}\right)^2 \cdot \text{د}س$

$= \int \frac{1}{4}\,\text{حا}^2 2س \cdot \text{د}س$

(متطابقة : $\text{جتا}2س = 1 - 2\,\text{حا}^2 س$)

$\Leftarrow \text{حا}^2 س = \frac{1 - \text{جتا}2س}{2}$

$\Leftarrow \text{حا}^2 2س = \frac{1 - \text{جتا}4س}{2}$

$= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \text{جتا}4س}{2}\right) \cdot \text{د}س$

$= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\text{جتا}4س}{2}\right) \cdot \text{د}س$

$= \int \left(\frac{1}{8} - \frac{\text{جتا}4س}{8}\right) \cdot \text{د}س$

$= \frac{1}{8}س - \frac{1}{8} \times \frac{\text{حا}4س}{4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{8}س - \frac{1}{32}\,\text{حا}4س + \text{جـ}$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٢٣) $\int ظا^2 س \cdot د س$

(متطابقة : $ظا^2 س + 1 = قا^2 س$)

$\Leftarrow ظا^2 س = قا^2 س - 1$

$\therefore ظا^2 س = قا^2 س - 1$

$= \int (قا^2 س - 1) \cdot د س$

$= \int قا^2 س \cdot د س - \int 1 \cdot د س$

$= \frac{ظا 2س}{2} - س + جـ$

(٢٤) $\int (ظا^2 س + 6 - قا^2 س) د س$

(متطابقة : $ظا^2 س + 1 = قا^2 س$)

$\Leftarrow ظا^2 س - قا^2 س = -1$

$= \int (6 - 1) د س = \int 5 \cdot د س$

$= 5 س + جـ$

(٢٥) $\int (ظا س + قا س)^2 \cdot د س$

$= \int (ظا^2 س + 2 قا س ظا س + قا^2 س) د س$

(متطابقة : $ظا^2 س + 1 = قا^2 س$)

$= \int (قا^2 س - 1 + 2 قا س ظا س + قا^2 س) د س$

$= \int (2 قا^2 س + 2 قا س ظا س - 1) د س$

$= 2 ظا س + 2 قا س - س + جـ$

(٢٦) $\int \frac{1}{حا^2 3س \, تا^2 3س} \cdot د س$

$= \int \frac{1}{(حا 3س \, تا 3س)^2} \cdot د س$

(متطابقة : $حا 2س = 2 حا س \, تا س$)

$\Leftarrow حا 6س = 2 حا 3س \, تا 3س$

$= \int \frac{1}{(\frac{حا 6س}{2})^2} = \int \frac{4}{حا^2 6س} \cdot د س$

$= \int 4 \, تا^2 6س \cdot د س$

$= \frac{4 ظا 6س}{6} + حـ = \frac{2}{3} ظا 6س + جـ$

يمكن الحل بطريقة أخرى ضع بدلاً من (١)

$حا^2 3س + تا^2 3س = 1$ (وهي متطابقة)

$\Leftarrow \int \frac{1}{حا^2 3س \, تا^2 3س} د س = \int \frac{حا^2 3س + تا^2 3س}{حا^2 3س \, تا^2 3س} د س$

$= \int \frac{حا^2 3س}{حا^2 3س \, تا^2 3س} د س + \int \frac{تا^2 3س}{حا^2 3س \, تا^2 3س} د س$

$= \int \frac{د س}{تا^2 3س} + \int \frac{د س}{حا^2 3س}$

$= \int قا^2 3س \cdot د س + \int تا^2 3س \cdot د س$

$= \frac{1}{3} ظا 3س - \frac{1}{3} ظا 3س + جـ$

والناتجان بعد التبسيط يؤديان الى صيغة واحدة.

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٢٧) $\int$ حا^{٤}س . د س

= $\int$ حا^{٢}س حا^{٢}س . د س

(متطابقة : حتا٢س = ١ - ٢حا^{٢}س)

$\Leftarrow$ حا^{٢}س = $\frac{١ - \text{حتا}٢س}{٢}$

= $\int \left(\frac{١ - \text{حتا}٢س}{٢}\right)\left(\frac{١ - \text{حتا}٢س}{٢}\right)$ د س

= $\frac{١}{٤}\int (١ - \text{حتا}٢س)^{٢}$. د س

= $\frac{١}{٤}\int (١ - ٢\,\text{حتا}٢س + \text{حتا}^{٢}٢س)$. د س

(متطابقة : حتا٢س = ٢حا^{٢}س - ١)

$\Leftarrow$ $\frac{\text{حتا}٢س + ١}{٢}$ = حا^{٢}س

$\therefore$ $\frac{\text{حتا}٤س + ١}{٢}$ = حتا^{٢}٢س

= $\frac{١}{٤}\int \left(١ - ٢\,\text{حتا}٢س + \frac{\text{حتا}٤س + ١}{٢}\right)$. د س

= $\frac{١}{٤}\int \left(١ - ٢\,\text{حتا}٢س + \frac{١}{٢}\text{حتا}٤س + \frac{١}{٢}\right)$. د س

= $\frac{١}{٤}\int \left(\frac{٣}{٢} - ٢\,\text{حتا}٢س + \frac{١}{٢}\text{حتا}٤س\right)$. د س

= $\frac{١}{٤}\left(\frac{٣}{٢}س - \frac{٢\,\text{حا}٢س}{٢} + \frac{١}{٢}\times\frac{\text{حا}٤س}{٤}\right) + ج$

= $\frac{٣}{٨}س - \frac{\text{حا}٢س}{٤} + \frac{١}{٣٢}\text{حا}٤س + ج$

(٢٨) $\int$ حتا^{٤}س . د س

= $\int$ حتا^{٢}س . حتا^{٢}س . د س

(متطابقة : حتا٢س = ٢حتا^{٢}س - ١)

$\Leftarrow$ حتا^{٢}س = $\frac{١ + \text{حتا}٢س}{٢}$

ومن نفس المطابقة $\Leftarrow$ حتا^{٢}٢س = $\frac{\text{حتا}٤س + ١}{٢}$

$\therefore$ = $\int \left(\frac{\text{حتا}٢س + ١}{٢}\right)^{٢}$. د س

= $\frac{١}{٤}\int (\text{حتا}٢س + ١)^{٢}$. د س

= $\frac{١}{٤}\int (\text{حتا}^{٢}٢س + ٢\,\text{حتا}٢س + ١)$. د س

= $\frac{١}{٤}\int \left(\frac{\text{حتا}٤س + ١}{٢} + ٢\,\text{حتا}٢س + ١\right)$. د س

= $\frac{١}{٤}\int \left(\frac{١}{٢}\text{حتا}٤س + \frac{٣}{٢} + ٢\,\text{حتا}٢س\right)$. د س

= $\frac{١}{٤}\left(\frac{٣}{٢}س + \frac{٢\,\text{حا}٢س}{٢} + \frac{١}{٢}\times\frac{\text{حا}٤س}{٤}\right) + ج$

= $\frac{١}{٤}\left(\frac{٣}{٢}س + \text{حا}٢س + \frac{١}{٨}\text{حا}٤س\right) + ج$

= $\frac{٣}{٨}س + \frac{١}{٤}\text{حا}٢س + \frac{١}{٣٢}\text{حا}٤س + ج$

(٢٩) $\int$ (٢ - حاس)^{٢} . د س

= $\int (٤ - ٤\,\text{حاس} + \text{حا}^{٢}س)$. د س

(متطابقة : حتا٢س = ١ - ٢حا^{٢}س)

$\therefore$ حا^{٢}س = $\frac{١ - \text{حتا}٢س}{٢}$

= $\int \left(٤ - ٤\,\text{حاس} + \frac{١ - \text{حتا}٢س}{٢}\right)$ د س

= $\int \left(\frac{٩}{٢} - ٤\,\text{حاس} - \frac{١}{٢}\text{حتا}٢س\right)$. د س

= $\frac{٩}{٢}س + ٤\,\text{حتاس} - \frac{١}{٤}\text{حا}٢س + ج$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٣٠) $\int \frac{\text{ق}\theta - \text{ق}\theta}{\text{ظ}\theta + \text{ظ}\theta}\,d\theta$

$= \int \frac{\frac{1}{\text{ج}\theta} - \frac{1}{\text{جا}\theta}}{\frac{\text{جا}\theta}{\text{ج}\theta} + \frac{\text{ج}\theta}{\text{جا}\theta}}\,d\theta$

$= \int \frac{\frac{\text{جا}\theta - \text{ج}\theta}{\text{جا}\theta\,\text{ج}\theta}}{\frac{\text{جا}^2\theta + \text{ج}^2\theta}{\text{جا}\theta\,\text{ج}\theta}}\,d\theta$

$= \int \frac{\text{جا}\theta - \text{ج}\theta}{\text{جا}^2\theta + \text{ج}^2\theta}\,d\theta$

(مطابقة : $\text{جا}^2\theta + \text{ج}^2\theta = 1$)

$= \int (\text{جا}\theta - \text{ج}\theta)\,d\theta$

$= -\text{ج}\theta - \text{جا}\theta + \text{جـ}$

(٣١) $\int \frac{1 - \text{ظا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta}\,d\theta$

(مطابقة : $\text{ظا}^2\theta + 1 = \text{قا}^2\theta$)

$\therefore \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta - 1$

$= \int \frac{1 - (\text{قا}^2\theta - 1)}{\text{قا}^2\theta}\,d\theta$

$= \int \frac{2 - \text{قا}^2\theta}{\text{قا}^2\theta}\,d\theta$

$= \int \left(\frac{2}{\text{قا}^2\theta} - 1\right)d\theta$

$= \int (2\,\text{جتا}^2\theta - 1)\,d\theta$ ، $\text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{جتا}\theta = \frac{1}{\text{قا}\theta}$

(مطابقة : $\text{جتا}2\theta = 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$)

$= \int \text{جتا}2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\text{جا}2\theta + \text{جـ}$

(٣٢) $\int (\text{جا}^4\theta - \text{جتا}^4\theta)\,d\theta$

(نحلل فرق بين مربعين)

$= \int (\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta)(\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta)\,d\theta$

(مطابقة ؛ $\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$)

(مطابقة ؛ $\text{جتا}2\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta$)

$= \int -\text{جتا}2\theta \times 1\,d\theta$

$= -\int \text{جتا}2\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\,\text{جا}2\theta + \text{جـ}$

(٣٣) $\int \frac{5 - 2\,\text{جا}^3\theta}{\text{جا}^2\theta}\,d\theta$

$= \int \left(\frac{5}{\text{جا}^2\theta} - \frac{2\,\text{جا}^3\theta}{\text{جا}^2\theta}\right)d\theta$

$= \int (5\,\text{قا}^2\theta - 2\,\text{جا}\theta)\,d\theta$

$= 5\,\text{ظا}\theta + 2\,\text{جتا}\theta + \text{جـ}$

(٣٤) $\int \frac{4\theta\,\text{جا}\theta - 5\,\text{قا}\theta}{\text{جا}\theta}\,d\theta$

$= \int \left(\frac{4\theta\,\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta} - \frac{5\,\text{قا}\theta}{\text{جا}\theta}\right)d\theta$

$= \int (4\theta - 5\,\text{قا}\theta\,\text{ظا}\theta)\,d\theta$ ، $\text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta}$

$= \int (4\theta - 5\,\text{قا}^2\theta)\,d\theta$

$= 2\theta^2 + 5\,\text{ظا}\theta + \text{جـ}$

ستوديو الرياضيات .. أ.عمار البوايزة

(٣٥) $\int \frac{\text{جتا}^3 س - \text{جا}^3 س}{\text{جتا} س - \text{جا} س} \cdot د س$

(تحليل فرق بين مكعبين)

$= \int \frac{(\text{جتا} س - \text{جا} س)(\text{جتا}^2 س + \text{جا} س \text{جتا} س + \text{جا}^2 س)}{\text{جتا} س - \text{جا} س} \cdot د س$

$= \int (\text{جتا}^2 س + \text{جا} س \text{جتا} س + \text{جا}^2 س) \cdot د س$

(متطابقة ؛ $\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$)

$= \int (1 + \text{جا} س \text{جتا} س) \cdot د س$

(متطابقة : $\text{جا}2س = 2\text{جا} س \text{جتا} س$)

$= \int (1 + \frac{1}{2} \text{جا}2س) \cdot د س$

$= س - \frac{1}{4} \text{جتا}2س + ج$

(٣٦) $\int \frac{\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س}{(س+2)^5} \cdot د س$

(متطابقة ؛ $\text{ظا}^2 س + 1 = \text{قا}^2 س$)

$\Leftarrow 1 = \text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س$

$= \int \frac{1}{(س+2)^5} \cdot د س$

$= \int (س+2)^{-5} \cdot د س$

$= \frac{(س+2)^{-5+1}}{-5+1} + ج$

$= -\frac{1}{4} (س+2)^{-4} + ج$

$= \frac{-1}{4(س+2)^4} + ج$

(٣٧) $\int \frac{\sqrt{س+1}\ \text{قا}^2 س - س - 1}{\sqrt{س+1}} \cdot د س$

$= \int \frac{\sqrt{س+1}\ \text{قا}^2 س - (س+1)}{\sqrt{س+1}} \cdot د س$

$= \int \left(\frac{\sqrt{س+1}\ \text{قا}^2 س}{\sqrt{س+1}} - \frac{س+1}{\sqrt{س+1}} \right) \cdot د س$

$= \int (\text{قا}^2 س - \sqrt{س+1}) \cdot د س$

$= \int \text{قا}^2 س \cdot د س - \int (س+1)^{\frac{1}{2}} \cdot د س$

$= \text{ظا} س - \frac{(س+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

$= \text{ظا} س - \frac{2}{3} (س+1)^{\frac{3}{2}} + ج$

(٣٨) $\int \frac{\text{جا}^3 س + \text{جتا}^3 س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س} \cdot د س$

$= \int \frac{\text{جا}^3 س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س} \cdot د س + \int \frac{\text{جتا}^3 س}{\text{جا}^2 س \text{جتا}^2 س} \cdot د س$

$= \int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^2 س} \cdot د س + \int \frac{\text{جتا} س}{\text{جا}^2 س} \cdot د س$

$= \int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} \times \frac{1}{\text{جتا} س} \cdot د س + \int \frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س} \times \frac{1}{\text{جا} س} \cdot د س$

$= \int \text{ظا} س \text{قا} س \cdot د س + \int \text{قتا} س \text{ظتا} س \cdot د س$

$= \text{قا} س - \text{قتا} س + ج$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٣٩) $\int \frac{٢ قا^٤س + قا^٢س - ١}{قا^٢س + ١} \, د س$

$= \int \frac{قا^٤س + قا^٤س + قا^٢س - ١}{قا^٢س + ١} \, د س$

$= \int \frac{قا^٤س - ١ + قا^٤س + قا^٢س}{قا^٢س + ١} \, د س$

(تحليل $(قا^٤س - ١)$ فرق بين مربعين)

$= \int \frac{(قا^٢س - ١)(قا^٢س + ١) + قا^٢س (قا^٢س + ١)}{قا^٢س + ١} \, د س$

$= \int (قا^٢س - ١ + قا^٢س) \, . \, د س$

$= \int (٢ قا^٢س - ١) \, . \, د س$

$= ٢ ظا س - س + جـ$

---

(٤٠) $\int جتا ٢س \, جتا ٣س \, . \, د س$

مطابقة :

$جتا س \, جتا ص = \frac{١}{٢} (جتا(س+ص) + جتا(س-ص))$

$= \int \frac{١}{٢} (جتا ٥س + جتا(-س)) \, . \, د س$

$= \int \frac{١}{٢} جتا ٥س \, . \, د س + \int \frac{١}{٢} جتا س \, . \, د س$

(مطابقة : $جتا(-س) = جتا س$)

$= \int \frac{١}{٢} جتا ٥س \, . \, د س + \int \frac{١}{٢} جتا س \, . \, د س$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{جا ٥س}{٥} + \frac{١}{٢} جا س + جـ$

$= \frac{١}{١٠} جا ٥س + \frac{١}{٢} جا س + جـ$

---

(٤١) $\int جا ٢س \, جتا ٥س \, . \, د س$

(مطابقة : $جا س \, جتا ص = \frac{١}{٢} (جا(س+ص) + جا(س-ص))$

$= \int \frac{١}{٢} (جا ٧س + جا(-٣س)) \, . \, د س$

$= \int \frac{١}{٢} جا ٧س \, . \, د س + \int \frac{١}{٢} جا(-٣س) \, . \, د س$

(مطابقة : $جا(-س) = -جا س$)

$= \int \frac{١}{٢} جا ٧س \, . \, د س - \int \frac{١}{٢} جا ٣س \, . \, د س$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{-جتا ٧س}{٧} - \frac{١}{٢} \times \frac{-جتا ٣س}{٣} + جـ$

$= \frac{-١}{١٤} جتا ٧س + \frac{١}{٦} جتا ٣س + جـ$

---

(٤٢) $\int جا ٤س \, جا ٢س \, . \, د س$

(مطابقة : $جا س \, جا ص = \frac{١}{٢} (جتا(س-ص) - جتا(س+ص))$

$= \int \frac{١}{٢} (جتا ٢س - جتا ٦س) \, . \, د س$

$= \int \frac{١}{٢} جتا ٢س \, . \, د س - \int \frac{١}{٢} جتا ٦س \, . \, د س$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{جا ٢س}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{جا ٦س}{٦} + جـ$

$= \frac{١}{٤} جا ٢س - \frac{١}{١٢} جا ٦س + جـ$

---

(٤٣) $\int جا ٦س \, جا ٧س \, . \, د س$ (نفس المطابقة)

$= \int \frac{١}{٢} (جتا ٦س - جتا ٧س) \, . \, د س$

$= \int \frac{١}{٢} جتا ١٣س \, . \, د س - \int \frac{١}{٢} جتا س \, . \, د س$

(مطابقة : $جتا(-س) = جتا س$)

$= \int \frac{١}{٢} جتا ١٣س \, . \, د س - \int \frac{١}{٢} جتا س \, . \, د س$

$= \frac{١}{٢٦} جا ١٣س - \frac{١}{٢} جا س + جـ$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٤٤) $\int$ حا٧س حاه س حا٣س . دس .

نطبق المتطابقة :

حاس حاص = $\frac{1}{2}$ (حتا(س-ص) - حتا(س+ص))

على هذا الجزء .

$= \int$ حا٧س $\left(\frac{1}{2}\left(\text{حتا}\,2س - \text{حتا}\,8س\right)\right)$. دس

$= \int \left(\frac{1}{2}\right.$ حا٧س حتا٢س $- \frac{1}{2}$ حا٧س حتا٨س$\left.\right)$. دس

$= \frac{1}{2}\int$ حا٧س حتا٢س . دس $- \frac{1}{2}\int$ حا٧س حتا٨س . دس

(متطابقة : حاس حتاص =

$\frac{1}{2}$ (حا(س+ص) + حا(س-ص)))

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}$ (حا٩س + حا٥س) . دس

$- \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}$ (حا١٥س + حا-س) . دس

(متطابقة : حا-س = -حاس)

$= \frac{1}{4}\int$ حا٩س . دس $+ \frac{1}{4}\int$ حا٥س . دس

$- \frac{1}{4}\int$ حا١٥س $+ \frac{1}{4}\int$ حاس . دس

$= -\frac{1}{4}\frac{\text{حتا}\,9س}{9} - \frac{1}{4}\frac{\text{حتا}\,5س}{5}$

$+ \frac{1}{4}\frac{\text{حتا}\,15س}{15} - \frac{1}{4}$ حتاس + جـ

$= -\frac{1}{36}$ حتا٩س $- \frac{1}{20}$ حتا٥س

$+ \frac{1}{60}$ حتا١٥س $- \frac{1}{4}$ حتاس + جـ

(٤٥) $\int \frac{8}{1 - \text{حتا}\,2س}$. دس

(متطابقة : حتا٢س = ١ - ٢حا٢س)

$= \int \frac{8}{1 - (1 - 2\text{حا}^2س)}$. دس

$= \int \frac{8}{2\text{حا}^2س}$. دس $= \int \frac{4}{\text{حا}^2س}$. دس

$= \int 4\,\text{ق}^2س$. دس $= -4$ ظاس + جـ

(٤٦) $\int \frac{3 - 2\text{حتا}^2س}{1 - \text{حتا}\,2س}$. دس

(متطابقة : حتا٢س = ١ - ٢حا٢س)

$= \int \frac{3 - 2\text{حتا}^2س}{1 - (1 - 2\text{حا}^2س)}$. دس

$= \int \frac{3 - 2\text{حتا}^2س}{2\text{حا}^2س}$. دس

$= \int \left(\frac{3}{2\text{حا}^2س} - \frac{2\text{حتا}^2س}{2\text{حا}^2س}\right)$. دس

$= \int \left(\frac{3}{2}\,\text{ق}^2س - \text{ظا}^2س\right)$. دس

(متطابقة : ظا٢س + ١ = ق٢س)

$= \int \left(\frac{3}{2}\,\text{ق}^2س - (\text{ق}^2س - 1)\right)$. دس

$= \int \left(\frac{3}{2}\,\text{ق}^2س - \text{ق}^2س + 1\right)$. دس

$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{ق}^2س + 1\right)$. دس

$= \frac{1}{2}$ ظاس + س + جـ

ستوديو الرياضيات ... أ. عمار البوايزة

(٤٧) $\int \frac{\text{ط}\,3س}{\text{ط}\,س}\,.\,د س$

$= \int \frac{\text{ط}(س + 2س)}{\text{ط}\,س}\,.\,د س$

(مطابقة : $\text{ط}(س+ص) = \text{ط}\,س\,\text{ط}\,ص - \text{ح}\,س\,\text{ح}\,ص$)

$= \int \frac{\text{ط}\,س\,\text{ط}\,2س - \text{ح}\,س\,\text{ح}\,2س}{\text{ط}\,س}\,.\,د س$

$= \int \left(\frac{\text{ط}\,س\,\text{ط}\,2س}{\text{ط}\,س} - \frac{\text{ح}\,س\,\text{ح}\,2س}{\text{ط}\,س}\right).د س$

$= \int (\text{ط}\,2س - \frac{\text{ح}\,س \times 2\,\text{ح}\,س\,\text{ط}\,س}{\text{ط}\,س}).د س$

(مطابقة : $\text{ح}\,2س = 2\,\text{ح}\,س\,\text{ط}\,س$)

$= \int (\text{ط}^2 2س - 2\,\text{ح}^2 س)\,.\,د س$

$= \int \text{ط}^2 2س\,.\,د س - \int 2\,\text{ح}^2 س\,.\,د س$

(مطابقة : $\text{ط}^2 2س = 1 - 2\,\text{ح}^2 س$)

$\Leftarrow 2\,\text{ح}^2 س = 1 - \text{ط}^2 2س$

$= \int \text{ط}^2 2س\,.\,د س - \int (1 - \text{ط}^2 2س)\,د س$

$= \int \text{ط}^2 2س\,.\,د س - \int 1\,.\,د س + \int \text{ط}^2 2س\,.\,د س$

$= 2\int \text{ط}^2 2س\,.\,د س - \int 1\,.\,د س$

$= \text{ظ}\,2س - س + جـ$

(٤٨) $\int \frac{\text{ح}\,6س}{\text{ح}\,2س}\,.\,د س$

(مطابقة : $\text{ح}(س+ص)$)

$= \text{ح}\,س\,\text{ط}\,ص + \text{ط}\,س\,\text{ح}\,ص$)

$= \int \frac{\text{ح}(4س + 2س)}{\text{ح}\,2س}\,.\,د س$

$= \int \frac{\text{ح}\,4س\,\text{ط}\,2س + \text{ط}\,4س\,\text{ح}\,2س}{\text{ح}\,2س}\,.\,د س$

(مطابقة : $\text{ح}\,2س = 2\,\text{ح}\,س\,\text{ط}\,س$)

$\therefore \text{ح}\,4س = 2\,\text{ح}\,2س\,\text{ط}\,2س$

$= \int \frac{2\,\text{ح}\,2س\,\text{ط}\,2س\,\text{ط}\,2س + \text{ط}\,4س\,\text{ح}\,2س}{\text{ح}\,2س}\,.\,د س$

$= \int (2\,\text{ط}^2 2س + \text{ط}\,4س)\,.\,د س$

(مطابقة : $\text{ط}\,2س = 2\,\text{ط}^2 س - 1$)

$\Leftarrow \text{ط}\,4س = 2\,\text{ط}^2 2س - 1$

$\therefore \text{ط}\,4س + 1 = 2\,\text{ط}^2 2س$

$= \int (\text{ط}\,4س + 1 + \text{ط}\,4س)\,.\,د س$

$= \int (2\,\text{ط}\,4س + 1)\,.\,د س$

$= 2\int \text{ط}\,4س\,.\,د س + \int 1\,.\,د س$

$= 2 \times \frac{\text{ح}\,4س}{4} + س + جـ$

$= \frac{1}{2}\,\text{ح}\,4س + س + جـ$

ستوديو الرياضيات .. أ.عمار البوايزة

(٤٩) $\int \frac{\text{وس}}{\text{حتاس}-1}$ (الضرب بمرافق المقام)

$= \int \frac{\text{وس}}{\text{حتاس}-1} \times \frac{\text{حتاس}+1}{\text{حتاس}+1}$

$= \int \frac{(\text{حتاس}+1)}{\text{حتا}^2\text{س}-1} \cdot \text{وس}$

(متطابقة: $\text{حا}^2\text{س}+\text{حتا}^2\text{س}=1$)

$\leftarrow \text{حتا}^2\text{س}-1 = -\text{حا}^2\text{س}$

$= \int \frac{\text{حتاس}+1}{-\text{حا}^2\text{س}} \cdot \text{وس}$

$= \int \left(\frac{\text{حتاس}}{-\text{حا}^2\text{س}} - \frac{1}{\text{حا}^2\text{س}}\right) \cdot \text{وس}$

$= \int (-\text{قاس ظاس} - \text{قا}^2\text{س})\,\text{وس}$

$= -\int \text{قاس ظاس}\,\text{وس} - \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{وس}$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

يمكن الحل بدون الضرب بالمرافق عن طريق متطابقة: $\text{حتا}2\text{س} = 1-2\text{حا}^2\text{س}$

$\therefore \text{حتاس} = 1-2\text{حا}^2\frac{\text{س}}{2}$

$\int \frac{\text{وس}}{\text{حتاس}-1} = \int \frac{\text{وس}}{1-2\text{حا}^2\frac{\text{س}}{2}-1}$

$= \int \frac{\text{وس}}{-2\text{حا}^2\frac{\text{س}}{2}} = -\frac{1}{2}\int \text{قا}^2\frac{\text{س}}{2} \cdot \text{وس}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}}{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}\frac{\text{س}}{2} + \text{جـ}$

(٥٠) $\int \frac{\text{وس}}{\text{حاس}-1}$ (الضرب بالمرافق)

$= \int \frac{1}{\text{حاس}-1} \times \frac{\text{حاس}+1}{\text{حاس}+1} \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{\text{حاس}+1}{\text{حا}^2\text{س}-1} \cdot \text{وس}$

(متطابقة: $\text{حا}^2\text{س}+\text{حتا}^2\text{س}=1$)

$= \int \frac{\text{حاس}+1}{-\text{حتا}^2\text{س}}\,\text{وس} = \int \left(\frac{\text{حاس}}{-\text{حتا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{حتا}^2\text{س}}\right)\text{وس}$

$= \int (-\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}) \cdot \text{وس}$

$= -\text{قاس} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

(٥١) $\int \frac{\text{حتا}2\text{س}-1}{\text{حتا}2\text{س}+1}\,\text{وس}$ (الضرب بمرافق المقام)

$= \int \frac{\text{حتا}2\text{س}-1}{\text{حتا}2\text{س}+1} \times \frac{\text{حتا}2\text{س}-1}{\text{حتا}2\text{س}-1} \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{(\text{حتا}2\text{س}-1)^2}{\text{حتا}^2 2\text{س}-1} \cdot \text{وس}$

(متطابقة: $\text{حا}^2\text{س}+\text{حتا}^2\text{س}=1$)

$= \int \frac{\text{حتا}^2 2\text{س} - 2\text{حتا}2\text{س} + 1}{-\text{حا}^2 2\text{س}} \cdot \text{وس}$

$= \int \left(\frac{\text{حتا}^2 2\text{س}}{-\text{حا}^2 2\text{س}} + \frac{2\text{حتا}2\text{س}}{\text{حا}^2 2\text{س}} - \frac{1}{\text{حا}^2 2\text{س}}\right) \cdot \text{وس}$

$= \int (-\text{ظتا}^2 2\text{س} + 2\,\text{قتا}2\text{س}\,\text{ظتا}2\text{س} - \text{قتا}^2 2\text{س}) \cdot \text{وس}$

(متطابقة: $\text{ظتا}^2 2\text{س} + 1 = \text{قتا}^2 2\text{س}$)

$= \int (1 - 2\,\text{قتا}^2 2\text{س} + 2\,\text{قتا}2\text{س}\,\text{ظتا}2\text{س}) \cdot \text{وس}$

$= \text{س} + \text{ظتا}2\text{س} - \text{قتا}2\text{س} + \text{جـ}$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٥٢) $\int \frac{\text{وس}}{\text{ظاس} + \text{ظتاس} + \text{قاس} + \text{قتاس}}$

$= \int \frac{\text{وس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \frac{1}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{جاس}}}$

$= \int \frac{\text{وس}}{\frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس جتاس}} + \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس جتاس}}}$

(متطابقة : $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$)

$= \int \frac{\text{وس}}{\frac{1 + \text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس جتاس}}}$

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}}{1 + \text{جاس} + \text{جتاس}} \cdot \text{وس}$

(بالضرب بمرافق المقام)

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}}{1 + \text{جاس} + \text{جتاس}} \times \frac{1 - (\text{جاس} + \text{جتاس})}{1 - (\text{جاس} + \text{جتاس})} \text{وس}$

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}(1 - (\text{جاس} + \text{جتاس}))}{1 - (\text{جاس} + \text{جتاس})^2} \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}(1 - \text{جاس} - \text{جتاس})}{1 - (\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س})} \cdot \text{وس}$

(متطابقة : $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$)

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}(1 - \text{جاس} - \text{جتاس})}{1 - (1 + 2\,\text{جاس جتاس})} \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{\text{جاس جتاس}(1 - \text{جاس} - \text{جتاس})}{-2\,\text{جاس جتاس}} \cdot \text{وس}$

$= -\frac{1}{2} \int (1 - \text{جاس} - \text{جتاس}) \cdot \text{وس}$

$= -\frac{1}{2} \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جاس} + \frac{1}{2}\text{جتاس}) \cdot \text{وس}$

$= -\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{2}\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{جاس} + \text{جـ}$

---

(٥٣) $\int \frac{\text{قاس} - 1}{\text{قاس} + 1} \cdot \text{وس}$ (الضرب بمرافق المقام)

$= \int \frac{\text{قاس} - 1}{\text{قاس} + 1} \times \frac{\text{قاس} - 1}{\text{قاس} - 1} \cdot \text{وس}$

$= \int \frac{(\text{قاس} - 1)^2}{\text{قا}^2\text{س} - 1} \cdot \text{وس}$ (متطابقة : $\text{ظا}^2\text{س} + 1 = \text{قا}^2\text{س}$)

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س} - 2\,\text{قاس} + 1}{\text{ظا}^2\text{س}} \cdot \text{وس}$

$= \int (\frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س}} - \frac{2\,\text{قاس}}{\text{ظا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{ظا}^2\text{س}}) \cdot \text{وس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظتا}^2\text{س} - 2\,\text{قاس}\,\text{ظتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س}) \cdot \text{وس}$

($\text{ظتا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{ظا}^2\text{س}}$)

$= \int (\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{2}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس}} + \text{ظتا}^2\text{س}) \cdot \text{وس}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} - \frac{2}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \text{قتا}^2\text{س} - 1) \cdot \text{وس}$

$= \int (2\,\text{قتا}^2\text{س} - 2\,\text{قتاس}\,\text{ظتاس} - 1) \cdot \text{وس}$

$= -2\,\text{ظتاس} + 2\,\text{قتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

(٥٤) $\int \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot dx$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(متطابقة : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$= \int \sqrt{\cos^2 x}\cdot dx$

$= \int |\cos x|\cdot dx$

$\cos x$ موجب في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$

$= \int \cos x\cdot dx = \sin x + c$

$= \int |\sin x + \cos x|\cdot dx$

في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$ فإن كلاً من $\sin x$ ، $\cos x$ موجبين

$\Leftarrow (\sin x + \cos x)$ موجب .

$= \int (\sin x + \cos x)\cdot dx$

$= -\cos x + \sin x + c$

---

(٥٥) $\int \sqrt{1-\cos^4 x}\cdot dx$ ، $0 < x < \frac{\pi}{4}$

(متطابقة : $\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x$)

$\Leftarrow \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x$

$= \int \sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}\cdot dx$

$= \int \sqrt{2\sin^2 x}\cdot dx = \int \sqrt{2}|\sin x|\cdot dx$

$\sin x$ موجب في الفترة $(0, \frac{\pi}{4})$

$= \int \sqrt{2}\sin x\cdot dx = \sqrt{2}\,\frac{-\cos 2x}{2} + c$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + c$

---

(٥٦) $\int \sqrt{\sin 2x + 1}\cdot dx$ ، $0 < x < \frac{\pi}{4}$

(متطابقة : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$= \int \sqrt{\sin 2x + \sin^2 x + \cos^2 x}\cdot dx$

(متطابقة : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

$= \int \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\cdot dx$

$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\cdot dx$

ستوديو الرياضيات .. أ. عمار البوايزة

ستوديو
الرياضيات
أ.عمار البوايزة