الرياضيات الصف التاسع

ملخص الوحدة السادسة

الهندسة الإحداثية

فهرس الوحدة	رقم الصفحة
(٦ – ١) : المسافة بين نقطتين	٢
(٦ – ٢) : إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة	٥
(٦ – ٣) : معادلة الخط المستقيم	٨
(٦ – ٤) : معادلة الدائرة	١١
أسئلة مقترحة شاملة	١٨

إذا ما طمحت إلى غايـــــة لبست المنى وخلعتُ الحذر

ومن لا يحب صعود الجبال يعش أبد الدهـــر بين الحفر

إعداد : المعلمة سلسبيل الخطيب

(٦ - ١) المسافة بين نقطتين

إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة ، حيث أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ،ص٢)

فإن المسافة بين أ ، ب أو طول القطعة أب يعطى بالقانون التالي :

$$أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مثال

جد طول القطعة المستقيمة (أ ب) إذا علمت أنّ أ (٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) .

الحل :

أ (٢ ، ٣) ==> س١ = ٢ ، ص١ = ٣ ، ب (١ ، ٠) ==> س٢ = ١ ، ص٢ = ٠

اكتب القانون : $أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

عوض القيم : $أ\,ب = \sqrt{(١ - ٢)^٢ + (٠ - ٣)^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{١٠}$

مثال

جد طول قطردائرة إذا كانت جـ (١ ، ٢) ، د (-٣ ، ٠) هما طرفي قطر فيها .

الحل :

قطر الدائرة :هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة مرورا بالمركز ، اذن لحساب طول قطر دائرة نحسب المسافة بين طرفي القطر

القانون جـ د $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$= \sqrt{(-٣ - ١)^٢ + (٠ - ٢)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٢٠}$

اشتراك
سلسبيل الخطيب

مثال

جد البعد بين النقطتين جـ (أ ، ب) ، د (أ + ٦ ، ب -٣)

الحل :

جـ د $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢} = \sqrt{((أ + ٦) - أ)) + ((ب - ٣) - ب)}$

$= \sqrt{(٦)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤٥}$

مـثـال

إذا كانت أ (٢، ٥) ، ب (٥، ٣) جـ (٠ ،٤) تمثل رؤوس المثلث أ ب جـ ، ما أطوال أضلاعه .

الـحـل :

أطوال الاضلاع هـي المسافة بين كل رأسين في المثلث ، إذن :

قانون المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٢)^٢}$ = $\sqrt{١٣}$

أ جـ = $\sqrt{(٢ - ٠)^٢ + (٥ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{(٢)^٢ + (١)^٢}$ = $\sqrt{٥}$

ب جـ = $\sqrt{(٥ - ٠)^٢ + (٣ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{(٥)^٢ + (-١)^٢}$ = $\sqrt{٢٦}$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مـثـال

إذا علمت أنّ (أ ل) قطر في دائرة حيث أ(س ، ٦) ، ل(١ ، ٦) وطول نصف قطرهـا يساوي ٦,٥ وحدة ، جد قيمة س.

الـحـل :

طول نصف القطر = ٦,٥ ==> طول القطر أ ل = ٦,٥ × ٢ = ١٣

طول أ ل = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = ١٣

١٣ = $\sqrt{(١ - س)^٢ + (٦ - ٦)^٢}$

١٣ = $\sqrt{(١ - س)^٢}$ الآن ربّع الطرفين ينتج :

١٦٩ = $(١ - س)^٢$

١٦٩ = ١ - ٢س + $س^٢$ ==> $س^٢$ - ٢س + ١ - ١٦٩ = ٠

$س^٢$ - ٢س - ١٦٨ = ٠ ، الآن حلل العبارة التربيعية ينتج :

(س - ١٤) (س + ١٢) = ٠

إما س - ١٤ = ٠ ومنها س = ١٤ أو س + ١٢ = ٠ ومنها س = - ١٢

لكن الطول لا يكون سالباً لذا نأخذ الإجابة الموجبة س = ١٤

أنا مُـصـمـم على بلوغ الهـدف ،، فإمّا أن أنـجـح ... وإمّا ... أن أنـجـح ♥

مثـال

إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها يساوي $\sqrt{٢}$ وحدة ، وكانت : أ (١، ٣) ، ب (٢ ، ك) ، جد قيمة الثابت ك .

الحـل :

$أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\sqrt{٢} = \sqrt{(٢ - ١)^٢ + (ك - ٣)^٢}$ (ربع الطرفين للتخلص من الجذر)

$٢ = ١ + (ك - ٣)^٢$ (اطرح ١ من الطرفين)

$١ = (ك - ٣)^٢$ (خذ الجذر التربيعي للطرفين للتخلص من التربيع)

$ك - ٣ = \pm ١$ ==> اذن هناك حلان

إما $ك - ٣ = ١$ ==> $ك = ١ + ٣$ ==> $ك = ٤$

أو $ك - ٣ = -١$ ==> $ك = ٢$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مثـال

إذا كانت النقط س (٢، ١) ، ص (٥ ، ٥) ، ع (-٢ ، ٤) تمثل رؤوس مثلث ، فأثبت أنّهُ متطابق الضلعين .

الحـل :

جد أطوال أضلاع المثلث ، إذا تساوى ضلعين فيه فيكون المثلث متطابق الضلعين أي "متساوي الساقين"

$س ص = \sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (١ - ٥)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة .

$س ع = \sqrt{(٢ - (-٢))^٢ + (١ - ٤)^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة .

$ص ع = \sqrt{(٥ - (-٢))^٢ + (٥ - ٤)^٢} = \sqrt{(٧)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة.

∴ س ص = س ع (المثلث متطابق الضلعين)

دَبَبْتَ لِلْمَجْدِ وَالسَّاعُونَ قَدْ بَلَغُوا ... جَهْدَ النُّفُوسِ وَأَلْقَوْا دُونَـهُ الأُزُرَا

فَكَابَدُوا الْمَجْدَ حَتَّى مَلَّ أَكْثَرُهُم ... وَعَانَقَ الْمَجْدَ مَنْ أَوْفَى وَمَنْ صَبَرَا

لا تَحْسَبَنَ الْمَجْدَ تَمْرًا أَنْتَ آكِلُهُ ... لَنْ تَبْلُغَ الْمَجْدَ حَتَّى تَلْعَقَ الصَّبِرَا

(٦ – ٢) إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ، فإنّ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما :

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} \ ، \ \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

مثـال

جد احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٣ ، -٤) ، ب (-٥ ، ٨)

الحـل :

اكتب القانون

نقطة المنتصف $= \left(\frac{س_1 + س_2}{2} \ ، \ \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

عوض القيم $= \left(\frac{3 + (-5)}{2} \ ، \ \frac{-4 + 8}{2} \right) = (-1 ، 2)$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مثـال

إذا كانت ل (س ، ٤) ، وكانت ك (٢ ، ص) وكانت هـ (١ ، ٠) تقع منتصف ل ك ، جد قيم س ، ص

الحـل :

نقطة المنتصف $= \left(\frac{س_1 + س_2}{2} \ ، \ \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$ ، إذن :

هـ $(1 ، 0) = \left(\frac{س + 2}{2} \ ، \ \frac{4 + ص}{2} \right)$

$\frac{س + 2}{2} = 1$ ==> وبالضرب التبادلي ينتج س + ٢ = ١ × ٢ ومنها س = ٠

كذلك ٠ = $\frac{ص + 4}{2}$ وبالضرب التبادلي ينتج ص + ٤ = ٠ ومنها ص = - ٤

مثـال

إذا كانت النقاط أ (٠ ، ٠) ، ب (٢ ، ٥) جـ (-١ ، ١) رؤوس مثلث وكانت د ، هـ ، و منتصفات الاضلاع أب ، ب جـ ، أ جـ ، على التوالي جد محيط المثلث د هـ و .

الحـل :

أولاً : جد احداثيات د : منتصف (أب) ، هـ : منتصف (ب جـ) ، و : منتصف (أ جـ)

د = ($\frac{٠+٢}{٢}$ ، $\frac{٥+٠}{٢}$) = (١ ، ٢,٥)

هـ = ($\frac{٢+(-١)}{٢}$ ، $\frac{٥+١}{٢}$) = (٣ ، ٠,٥)

و = ($\frac{٠+(-١)}{٢}$ ، $\frac{٠+١}{٢}$) = (- ٠,٥ ، ٠,٥)

ثانيا : جد أطوال القطع د و ، دهـ ، وهـ من قانون المسافة بين نقطتين :

قانون المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

د هـ = $\sqrt{(٣ - ٢,٥)^٢ + (١ - ٠,٥)^٢}$ = $\sqrt{٠,٥}$

د و = $\sqrt{(-١ - ٠,٥)^٢ + (٠,٥ - ٢,٥)^٢}$ = $\sqrt{٦,٢٥}$

وهـ = $\sqrt{(-٠,٥ - ٠,٥)^٢ + (٣ - ٠,٥)^٢}$ = $\sqrt{٧,٢٥}$

اذن محيط المثلث = $\sqrt{٠,٥}$ + $\sqrt{٦,٢٥}$ + $\sqrt{٧,٢٥}$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مثـال

إذا كانت أ (٢ ، ٦) و كانت جـ (٣ ، ٥) تمثل منتصف أ ب ، فما احداثيات النقطة ب ؟

الـحل :

جـ (٣ ، ٥) هي منتصف القطعة أ ب ، إذن نفرض النقطة ب هي (س، ص)

إحداثيات جـ = ($\frac{س+٢}{٢}$ ، $\frac{ص+٦}{٢}$)

(٣ ، ٥) = ($\frac{س+٢}{٢}$ ، $\frac{ص+٦}{٢}$)

$\frac{س+٢}{٢}$ = ٣ <== <== س = ٤

$\frac{ص+٦}{٢}$ = ٥ <== <== ص = ٤ إذن النقطة ب (٤ ، ٤)

مثـال

إذا علمت أنّ أب قطر في دائرة حيث أ (-٣ ، ٢) ، ب (٧ ، -٥) فجد ما يلي :

أ) احداثيي مركز الدائرة . ب) طول نصف قطر الدائرة .

الـحل :

أ) مركز الدائرة هو نقطة منتصف القطر أ ب

م = ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$) = ($\frac{-٣ + ٧}{٢}$ ، $\frac{٢ + (-٥)}{٢}$) = (٢ ، - ١,٥)

ب) طول نصف قطر الدائرة = طول القطر ÷ ٢

القطر = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

القطر = $\sqrt{(-٣ - ٧)^٢ + (٢ - (-٥))^٢}$ = $\sqrt{١٤٩}$ ==> نصف القطر = $\frac{\sqrt{١٤٩}}{٢}$

مـثـال

إذا كانت أ (١ ، ١) ، ب (٣ ، ١) ، ج (٣ ، ٣) ، د (١ ، ٣) رؤوس مربع وكانت هـ ، و ، ز ، ح ، منتصفات الاضلاع أب ، ب جـ ، جـ د ، أ د على الترتيب ، فما مساحة المربع هـ و ز ح ؟

الـحـل :

إحداثيا النقطة هـ (منتصف أ ب) = ($\frac{١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ١}{٢}$) = (٢ ، ١)

إحداثيا النقطة و (منتصف ب جـ) = ($\frac{٣ + ٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ٣}{٢}$) = (٣ ، ٢)

الآن جد طول القطعة المستقيمة هـ و وهي أحد أضلاع المربع المطلوب إيجاد مساحته

هـ و = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = $\sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (٢ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٢}$

∴ مساحة المربع = (الضلع)^٢ = ($\sqrt{٢}$)^٢ = ٢ وحدة مربعة .

مـثـال

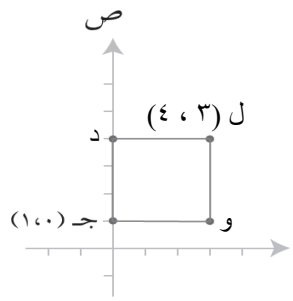
رسم مربع بحيث كان أحد أضلاعه منطبقاً على محور الصادات ، إذا علمت أنّ مركز المربع هو ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) وأحد الرؤوس هو (٣ ، ٤) جد إحداثيي باقي الرؤوس

الـحـل :

افرض ل (٣ ، ٤) أحد الرؤوس والرأس المقابل له جـ (س ، ص) فيكون مركز المربع (م) هو نقطة منتصف القطر حيث ل جـ ، إنّ :

إحداثيات م = ($\frac{٣ + س}{٢}$ ، $\frac{٤ + ص}{٢}$)

($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) = ($\frac{٣ + س}{٢}$ ، $\frac{٤ + ص}{٢}$)



==> $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣ + س}{٢}$ <== ٣ = ٣ + س ومنها س = ٠

==> $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٤ + ص}{٢}$ <== ٥ = ٤ + ص ومنها ص = ١

إذن النقطة جـ (٠ ، ١) وهو الرأس الثاني يقع على المحور الصادي ،

انظر الشكل >> لاحظ أن طول ضلع المربع ٣ وحدات ، لـــــذا الرأس الثالث د (٠ ، ٤) يقع على المحور الصادي والرأس الرابع و (٣ ، ١)

(٦ – ٣) معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي :

$$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$$

إذن لإيجاد معادلة خط مستقيم يلزمنا معرفة ميل هذا المستقيم م والتي تجدها من العلاقة

$$م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$ ، ويلزم معرفة نقطة تقع على المستقيم .

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٧) ؟

الحـل :

يلزم معرفة الميل ونقطة تقع على المستقيم ، يمكنك إيجاد الميل من النقطتين أ ، ب

أما النقطة التي تقع على المستقيم فأمامك خيارين هما النقطتين أ ، ب اللتين يمر بهما المستقيم ، تختار أياً منهما ستعطي نفس النتيجة .

الميل $م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٧ - ٥}{٤ - ٣} = ٢$

اكتب معادلة الخط المستقيم ، واختر نقطة واقعة عليه ولتكن النقطة (٣ ، ٥)

$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$ص - ٥ = ٢ (س - ٣)$ هنا فك القوس ، إذن $ص - ٥ = ٢س - ٦$

الآن اجعل ص موضوع القانون (أي اجعلها وحدها في الشق الأيمن من المعادلة)

إذن : $ص = ٢س - ٦ + ٥$ ==> $ص = ٢س - ١$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله - ٥ ، ويمر بنقطة الاصل ؟

الحـل :

نقطة الاصل (٠ ، ٠) ، الميل = - ٥

معادلة الخط المستقيم : $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$ ==> $ص - ٠ = -٥(س - ٠)$ ==> ص = - ٥ س .

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مـثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله = - ١ ويمر بالنقطة (-٣ ، ٢)

الـحـل :

هنا الميل معلوم والنقطة معلومة إذن عوض فقط في معادلة الخط المستقيم

المعادلة : ص - ص١ = م (س - س١)

عوض مكان س١ = - ٣ ، ص١ = ٢ ، م = - ١

ص ـ ٢ = - ١ (س ـ (-٣)) ==> ص - ٢ = - ١(س + ٣)

فك القوس ورتب المعادلة ، إذن : ص - ٢ = - س - ٣ ==> ص = - س - ١

مـثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بنقطة تقاطع المستقيم ٢س + ٣ ص = ٦ مع محور السينات ؟

الـحـل :

عندما يقطع مستقيم محور السينات تكون ص = ٠ ، إذن عوضها في معادلة المستقيم لتجد قيمة س ==>

٢س + ٣ص = ٦ ==> ٢س + ٣ × ٠ = ٦

ومنها ينتج ٢س = ٦ إذن س = ٣ والنقطة هي (٣ ، ٠)

المعادلة : ص ـ ص١ = م (س ـ س١) ==> ص - ٠ = ٣ (س - ٣) ==> ص = ٣س - ٩

مـثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله -٢ ، و مقطعه السيني ٣

الـحـل :

المقطع السيني ٣

أي النقطة (٣ ، ٠) والميل = -٢

عندما يُعطى المقطع السيني تكون

ص = صفر

س هو المقطع المُعطى فى السؤال

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٠ = - ٢ (س - ٣) ==> ص = - ٢ س + ٦

الحياة مليئة بالحجارة ،، فلا تتعثر بها ،، بل اجمعها وأبنِ بها سلمًا تصعد به نحو النجاح .

مثـال

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله = $\frac{1}{2}$ ، ومقطعه الصادي = - ٤

الحـل :

عندما يُعطى المقطع الصادي تكون

س = صفر

ص هو المقطع المُعطى في السؤال

مقطعه الصادي = -٤

إذن النقطة (٠ ، -٤) والميل م = $\frac{1}{2}$

اكتب معادلة الخط المستقيم : ص - ص١ = م (س - س١)

ص - -٤ = $\frac{1}{2}$ (س - ٠) ==> ص + ٤ = $\frac{1}{2}$ س

وبجعل ص موضوعا للقانون تصبح المعادلة ص = $\frac{1}{2}$ س - ٤

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مثـال

مستقيم ميله = ٣ ، ويمر بالنقطتين (أ ، ٧) ، (١ ، ٢ أ) جد قيمة أ

الحـل :

من قانون الميل : م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

عوض مكان الميل = ٣ ومكان كل من س١ = أ ، س٢ = ١ ، ص١= ٧ ، ص٢ = ٢ أ

٣ = $\frac{٢ أ - ٧}{١ - أ}$ بالضرب التبادلي ينتج : ٣ - ٣ أ = ٢ أ - ٧

أعد ترتيب الحدود ٣ + ٧ = ٢أ + ٣أ ينتج ١٠ = ٥ أ ومنها أ = ٥

مثـال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ٣ ص = ٧ ، ٣ س ـ ٢ ص = ٤

الحـل :

نجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س - ٢ص = ٤

وذلك بطريقة الحذف :

(٢س + ٣ص = ٧) × ٣ ==> ٦س + ٩ص = ٢١

(٣س - ٢ص = ٤) × -٢ ==> -٦س + ٤ص = - ٨

بجمع المعادلتين ينتج ١٣ص = ١٣ ، وتكون ص = ١

ولحساب س عوض مكان ص = ١ في أي من المعادلتين ٢س + ٣ × ١ = ٧

٢س + ٣ = ٧ وبحل المعادلة ينتج س = ٢

اذن النقطة (٢ ، ١) تحقق المستقيم المطلوب كتابة معادلته ، والميل = ٢ ، إذن :

ص ـ ص١ = م (س ـ س١) ==> ص - ١ = ٢ (س - ٢)

==> ص - ١ = ٢س - ٤ ==> ص = ٢س - ٣

مثال

جد معادلة الخط المستقيم الذي مقطعه السيني = ٣ ، والصادي = ٥

اشتراك

سلسبيل الخطيب

الحل :

المقطع السيني = ٣ ==> النقطة (٣ ،٠)

المقطع الصادي = ٥ ==> النقطة (٠ ، ٥)

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ٥}{٣ - ٠} = \frac{-٥}{٣}$

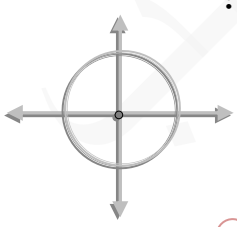
معادلة الخط المستقيم : ص - ص١ = م (س - س١) ولتكن النقطة (٣ ، ٠)

إذن : ص - ٠ = $\frac{-٥}{٣}$ (س - ٣) ==> ص = $\frac{-٥}{٣}$ س + $\frac{١٥}{٣}$

(٦ – ٤) معادلة الدائرة

>> **معادلة الدائرة** هي علاقة بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لأي نقطة على الدائرة ، وكل زوج مرتب يُحقق هذه المعادلة يُمثل نقطة على الدائرة .

>> **أولاً : معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وطول نصف قطرها ر هي :**



$$س^٢ + ص^٢ = ر^٢$$

مثال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٣٦$

الحل :

المعادلة على الصورة : $س^٢ + ص^٢ = ر^٢$

إذن المركز هو (٠ ، ٠) ، ونصف القطر (ر) = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مـثـال

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها = ٤

الـحـل :

بما أن مركزها نقطة الأصل إذن معادلتها هي : $س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}$

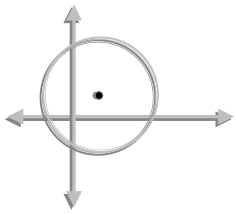
الآن عوض نصف القطر المعطى في المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤^{٢}$

أي : $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

>> ثانياً : معادلة الدائرة التي مركزها ل (د ، هـ) ونصف قطرها ر هي :



$$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$$

وتُسمى هذه الصورة بالصورة القياسية .

مـثـال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) ووطول نصف قطرها ٦

الـحـل :

لاحظ المركز هنا (٣ ، ٤) وهو يُناظر المركز (د ، هـ) في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة :

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$ ، $ر = ٦$

==> المعادلة : هي $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٣٦$

مـثـال

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها و (٢ ، -٢) ، وطول نصف قطرها = ٥

الـحـل :

المركز (٢ ، -٢) = (د ، هـ) ، $ر = ٥$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة : $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

عوض القيم في المعادلة ==> $(س - ٢)^{٢} + (ص - (-٢))^{٢} = ٢٥$

<== $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$

>> ثالثاً : الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^{٢} + ص^{٢} + أ\ س + ب\ ص + جـ = ٠$$

ويُمكن إيجاد المركز وطول نصف قطر الدائرة من المعادلة حيث :

المركز = (د ، هـ) = (- $\frac{١}{٢}$ معامل س ، - $\frac{١}{٢}$ معامل ص)

نصف القطر (ر) = $\sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ}$ ، بشرط $د^{٢} + هـ^{٢} - جـ > ٠$

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مـثـال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٨ ص + ١٦ = ٠$

الـحـل :

بمقارنة معادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٨ ص + ١٦ = ٠$

بالمعادلة (الصورة العامة) $س^{٢} + ص^{٢} + أ\ س + ب\ ص + جـ = ٠$ تجد :

د = - $\frac{١}{٢}$ معامل س = - $\frac{١}{٢}$ × ٤ = - ٢ ، إذن د = -٢

هـ = - $\frac{١}{٢}$ معامل ص = - $\frac{١}{٢}$ × ٨ = - ٤ ، إذن هـ = -٤

اذن المركز (د ، هـ) = (- ٢ ، - ٤)

$د^{٢} + هـ^{٢} - جـ = ٤ + ١٦ - ١٦ >$ صفر ، إذن : ر = $\sqrt{٢^{٢} + ٤^{٢} - ١٦}$ = ٢

مـثـال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها : $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ١٠ص = - ٥$

الـحـل :

نعيد كتابة المعادلة لتصبح كالصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ١٠ص + ٥ = ٠$

المركز : (د ، هـ)

بمقارنة معادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ١٠ص + ٥ = ٠$

بالمعادلة $س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = ٠$ تجد :

د = $-\frac{١}{٢}$ معامل س = $-\frac{١}{٢} \times -٨ = ٤$ ، إذن د = ٤

هـ = $-\frac{١}{٢}$ معامل ص = $-\frac{١}{٢} \times ١٠ = -٥$ ، إذن هـ = -٥

المركز (د ، هـ) = (٤ ، -٥)

نصف القطر : ر = $\sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ} = \sqrt{١٦ + ٢٥ - ٥} = \sqrt{٣٦} = ٦$

>> أمثلة منوعة على الحالات الثلاث:

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها م (-٤ ، ٢) وطول نصف قطرها ٧ ؟

الحل :

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

$(س + ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٧^{٢}$ <== $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤٩$

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (١ ، ٥) وتمس محور السينات

الحل :

في حالة كانت الدائرة تمس محور السينات يكون نصف القطر = القيمة المطلقة للإحداثي الصادي من النقطة (١ ، ٥) التي تمثل المركز <== ر = ٥

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

∴ المعادلة هي : $(س - ١)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٥$

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (-٣ ، -٤) وتمس محور الصادات

الحل :

في حالة كانت الدائرة تمس محور الصادات يكون نصف القطر = القيمة المطلقة للإحداثي السيني من النقطة (-٣ ، -٤) التي تمثل المركز <== ر = | ٣ | = ٣

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

اشتراك
سلسبيل الخطيب

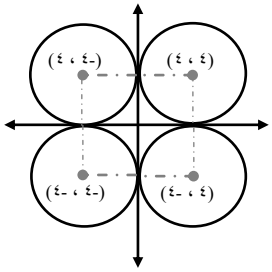
$\Leftarrow\!=$ $(س - (-٣))^{٢} + (ص - (-٤))^{٢} = ٢٣$

∴ المعادلة : $(س + ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩$

مثـال

ما معادلة الدائرة التي تمس محوري السينات والصادات ،علما بأن طول نصف قطرها ٤ وحدات ، جد جميع الحلول الممكنة

الحـل :



الحل الاول : م (٤ ، ٤) ، ر = ٤ : $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

الحل الثاني : م (-٤ ، ٤) ، ر = ٤ : $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

الحل الثالث : م (-٤ ، -٤) ، ر = ٤ : $(س + ٤)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٦$

الحل الرابع : م (٤ ، -٤) ، ر = ٤ : $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٦$

مثـال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦$ ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٥ س - ٢ = ٠$

الحـل :

أ) المركز (٠ ، ٠) ، نصف القطر (ر) $= \sqrt{٣٦} = ٦$

ب) الصورة العامة : $س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = ٠$

د $= -$ معامل س $\times \frac{١}{٢} = -٥ \times \frac{١}{٢} \Leftarrow\!=$ د $= ٢,٥$

هـ $= -$ معامل ص $\times \frac{١}{٢} = -٠ \times \frac{١}{٢} \Leftarrow\!=$ هـ $= ٠$

المركز (د ، هـ) $= (٢,٥ ، ٠)$

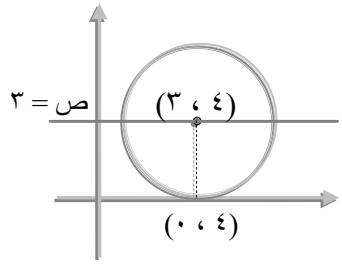
نصف القطر $= \sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ} = \sqrt{(٢,٥)^{٢} + (٠)^{٢} - (-٢)} \approx ٢,٨٧$

والعلمُ يجلو العمى عن قلب صاحبه كما يُجلي سواد الظلمةِ القمرُ

مـثـال

جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم ص = ٣ وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

الـحـل :



المركز (٤ ، ٣) انظر الشكل ==>

ر = الإحداثي الصادي = ٣

المعادلة (س - ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩

مـثـال

أي المعادلات التالية تمثل معادلة دائرة

أ) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ـ ٤ص + ١ = ٠

ب) س^{٢} + ص^{٢} ـ ٦س + ٢ص + ١٥ = ٠

ج) س^{٢} + ص^{٢} + ٨س + ٦ص + ٢٥ = ٠

الـحـل :

تذكر أن ر = $\sqrt{\text{د}^{٢} + \text{هـ}^{٢} - \text{جـ}}$ ، حيثُ د^{٢} + هـ^{٢} - جـ > صفر

إذن ،، جد قيم د ، هـ ، جـ ،، فإذا كان د^{٢} + هـ^{٢} - جـ > صفر ، تكون المعادلة معادلة دائرة ، إذن :

أ) د = - $\frac{١}{٢}$ معامل س = - $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١ـ ، إذن د = ١ـ

هـ = - $\frac{١}{٢}$ معامل ص = - $\frac{١}{٢}$ × ٤ ـ = ٢ ، إذن هـ = ٢

اذن د^{٢} + هـ^{٢} - جـ = ١ + ٤ ـ ١ = ٤ > ٠ اذن هذه معادلة دائرة ✓

ب) د = - $\frac{١}{٢}$ معامل س = - $\frac{١}{٢}$ × ٦ ـ = ٣ ، إذن د = ٣

هـ = - $\frac{١}{٢}$ معامل ص = - $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١ـ ، إذن هـ = ١ـ

اذن د^{٢} + هـ^{٢} ـ جـ = ٩ + ١ ـ ١٥ = ٥ ـ < ٠ اذن هذه ليست معادلة دائرة ×

ج) د = - $\frac{١}{٢}$ معامل س = - $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ـ ، إذن د = ٤ـ

هـ = - $\frac{١}{٢}$ معامل ص = - $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ـ ، إذن هـ = ٣ـ

اذن د^{٢} + هـ^{٢} - جـ = ١٦ + ٩ ـ ٢٥ = ٠ ، اذن هذه نقطة وليست معادلة دائرة

مـثـال

إذا كانت (س -١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩ ، معادلة دائرة صنف النقاط الآتية بالنسبة للدائرة :

أ) (٤ ، ٢) ب) (٠ ، ٠) جـ) (٧ ، ٣)

الـحـل :

عوّض النقاط في المعادلة

أ) (٤ - ١)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢} ≟ ٩ << (٣)^{٢} + ٠ = ٩ ، إذن تقع النقطة أ (على الدائرة)

ب) (٠ - ١)^{٢} + (٠ - ٢)^{٢} ≟ ٩ << ١ + ٤ > ٩ ، إذن تقع النقطة ب (داخل الدائرة)

جـ) (٧ - ١)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢} ≟ ٩ << ٣٦ + ١ < ٩ ، إذن تقع النقطة جـ (خارج الدائرة)

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> أسئلة مقترحة شاملة للوحدة

السؤال الأول :

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة

(١) طول قطر الدائرة التي معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤ يساوي

أ) ٨ (ب) ١٦ ج) ٤ د) ٦٤

(٢) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (- ٦ ، - ٨) ب (٢ ، ٤) هما

(أ) (-٢ ، - ٢) ب) (- ٤ ، - ٤) ج) (- ٢ ، ٢) د) (٣ ، ٢)

(٣) طول القطعة المستقيمة س ص حيث س (٠ ، ٠) ، ص (- ٣ ، ٤) يساوي

أ) ٢٥ ب) ١٦ (ج) ٥ د) ٧

(٤) إحدى النقاط المذكورة أدناه تقع على الدائرة التي معادلتها س^{٢} + ص^{٢}= ٢٥

أ) (- ٤ ، ٢) (ب) (- ٣ ، ٤) ج) (٤ ، ٠) د) (٥ ، ٣)

(٥) معادلة الدائرة التي مركزها (٢- ، ٥) وطول نصف قطرها ٢

(أ) (س +٢)^{٢}+ (ص - ٥)^{٢} = ٤ ب) (س + ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢

ج) (س - ٢)^{٢}+ (ص - ٥)^{٢} = ٢ د) (س - ٢)^{٢}+ (ص - ٥)^{٢} = ٤

اشتراك

سلسبيل الخطيب

السؤال الثاني

إذا كانت أ (- ١، ٣) ، ب (١ ، ٧) ، جـ (٥ ، ٥)

أ) جد احداثيي النقطة د بحيث تكون النقطة د منتصف أجـ

ب) جد معادلة المستقيم ب د

الحل :

أ) د = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$ = $\left(\frac{-1 + 5}{2} ، \frac{3 + 5}{2}\right)$ = (٢ ، ٤)

ب) جد ميل ب د ==> م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{٤ - ٧}{٢ - ١}$ = - ٣

المعادلة : ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$) والنقطة (٢ ، ٤)

ص ـ ٤ = - ٣ (س - ٢) ==> ص - ٤ = - ٣س + ٦

بإعادة ترتيب المعادلة تصبح ص = - ٣س + ١٠

اشتراك

سلسبيل الخطيب

السؤال الثالث

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

أ) ٢س^2 + ٢ص^2 - ١٢س = ١٤

ب) س^2 + ص^2 = ٧

الحل :

أ) اقسم على ٢ ليصبح معامل س ، ص = ١

س^2 + ص^2 - ٦س = ٧ (رتب المعادلة) ==> س^2 + ص^2 - ٦س - ٧ = ٠

بمقارنة المعادلة بالصورة العامة : س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + جـ = ٠

د = - $\frac{1}{2}$ معامل س = - $\frac{1}{2}$ × - ٦ ==> د = ٣

هـ = - $\frac{1}{2}$ معامل ص = - $\frac{1}{2}$ × ٠ ==> هـ = ٠

م (د ، هـ) = (٣ ، ٠)

ر = $\sqrt{د^2 + هـ^2 - جـ}$ = $\sqrt{(3)^2 + ٠^2 - (-7)}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

ب) س^2 + ص^2 = ٧ ، م (٠ ، ٠) ، ر = $\sqrt{٧}$

السؤال الرابع

المثلث أ ب جـ فيه أ (٣ ، ١) ، ب (- ١ ، ٠) ، جد احداثيي جـ إذا علمت أنّ ميل أجـ = - ٢ ، ميل ب جـ = ١

الحل :

افرض جـ (س ، ص)

ميل (أ جـ) : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٣}$ = - ٢ <== - ٢ (س - ٣) = ص - ١

وبفك القوس ينتج : - ٢س + ٦ = ص - ١ <== - ٢س + ٧ = ص ... (١)

ميل (ب جـ) : $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - - ١}$ = ١ <== $\frac{\text{ص}}{\text{س} + ١}$ = ١

اشتراك
سلسبيل الخطيب

بالضرب التبادلي ينتج : س + ١ = ص ... (٢)

استخدم الحذف لحل المعادلتين ، إذن :

- ٢س + ٧ = ص / × - ١ <== ٢س - ٧ = - ص

س + ١ = ص <== س + ١ = ص

٣س - ٦ = ٠ ومنه س = ٢

جد ص بالتعويض في إحدى المعادلتين ولتكن س + ١ = ص

<== ٢ + ١ = ص ==> ص = ٣ ، إذن جـ (٢، ٣)

السؤال الخامس

جد احداثيي المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(٢س - ٤)^{٢} + (٢ص + ٦)^{٢} = ١٦$

الحل :

$(٢س - ٤)^{٢} + (٢ص + ٦)^{٢} = ١٦$

$٤س^{٢} - ١٦س + ١٦ + ٤ص^{٢} + ٢٤ص + ٣٦ = ١٦$ (بفك الأقواس)

$٤س^{٢} - ١٦س + ٤ص^{٢} + ٢٤ص + ٣٦ = ٠$ (بنقل ١٦ إلى الجهة اليسرى)

$٤س^{٢} + ٤ص^{٢} - ١٦س + ٢٤ص + ٣٦ = ٠$ (بترتيب المعادلة)

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص + ٩ = ٠$ (بالقسمة على ٤)

بمقارنة المعادلة بالصورة العامة : $س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + جـ = ٠$

د = - $\frac{١}{٢}$ معامل س = - $\frac{١}{٢}$ × -٤ = ٢ ، إذن د = ٢

هـ = $-\frac{1}{2}$ معامل ص = $-\frac{1}{2} \times ٦ = -٣$ ، إذن هـ = -٣

إذن المركز (د ، هـ) = (٢ ، - ٣)

ر = $\sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - جـ}$ = $\sqrt{(٢)^{٢} + (-٣)^{٢} - ٩}$ = ٢

السؤال السادس

إذا كانت أ (١، ١) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (١ + $\sqrt{٣}$ ، ٢) رؤوس مثلث

أ) أثبت أنّ المثلث متطابق الاضلاع .

ب) جد ارتفاع المثلث .

الحل :

أ) لإثبات أنّ المثلث متطابق الاضلاع نجد أطوال جميع الاضلاع من قانون المسافة بين نقطتين

أ ب = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$ = $\sqrt{(١ - ١)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

أ جـ = $\sqrt{(١ + \sqrt{٣} - ١)^{٢} + (٢ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{(\sqrt{٣})^{٢} + ١^{٢}}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

ب جـ = $\sqrt{(١ + \sqrt{٣} - ١)^{٢} + (٢ - ٣)^{٢}}$ = $\sqrt{(\sqrt{٣})^{٢} + (-١)^{٢}}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

∴ أ ب = أجـ = ب جـ = ٢ (المثلث متطابق الأضلاع)

ب) لإيجاد ارتفاع المثلث جد أولا احداثيات نقطة المنتصف لأحد الأضلاع وليكن أ ب

افرض نقطة المنتصف هـ = ($\frac{١ + ١}{٢}$ ، $\frac{٣ + ١}{٢}$) = (١ ، ٢)

ثم جد المسافة بين النقطة هـ ، والرأس المقابل جـ أي طول جـ هـ

جـ هـ = $\sqrt{(١ + \sqrt{٣} - ١)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{(\sqrt{٣})^{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ وهو يمثل ارتفاع المثلث

اشتراك

سلسبيل الخطيب

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق : المعلمة سلسبيل الخطيب

للاستفسار : واتسب فقط ٠٧٨٨٢٠٧٤٧٢