بسم الله الرحمن الرحيم

توجيهي علمي / المستوى الرابع

" التكامل غير المحدود "

قاعدة :

$$\int P\,dس = P\,س + جـ$$

عدد ثابت

جـ ← ثابت التكامل

مثال جد $\int ٦\,dس$

الحل $\int ٦\,dس = ٦س + جـ$

مثال جد $\int \pi\sqrt{P}\,dس$ ، P : عدد ثابت

الحل $\int \pi\sqrt{P} = \pi\sqrt{P}\,س + جـ$

مثال جد $\int \frac{دع}{١٥}$

الحل $\int \frac{دع}{١٥} = \frac{ع}{١٥} + جـ$

قاعدة :

$$\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ \quad ، ن \neq -١$$

مثال : جد $\int س^{٢} \, دس$.

الحل : $\int س^{٢} \, دس = \frac{س^{٢+١}}{٢+١} + جـ = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

مثال : $\int \sqrt[٤]{س^{٢}} \, دس$

الحل : $\int س^{\frac{١}{٤}} \, دس = \frac{س^{\frac{١}{٤}+١}}{\frac{١}{٤}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٥}{٤}}}{\frac{٥}{٤}} + جـ$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٥} س^{\frac{٥}{٤}} + جـ$$

مثال : جد $\int \frac{س^{٢} \sqrt{س}}{س} \, دس$

الحل : $\int \frac{س^{٢} \sqrt{س}}{س} \, دس = \int س \sqrt{س} \, دس$

$$= \int س \times س^{\frac{١}{٢}} \, دس$$

$$= \int س^{\frac{٣}{٢}} \, دس$$

$$= \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$$

* ملاحظة : لا بدّ لك من مراجعة قوانين الأسس

قاعدة :

$\int p\, f(x)\, dx = p \int f(x)\, dx$

حيث p عدد ثابت

مثال: جد $\int \pi^2 x\, dx$

الحل $\int \pi^2 x\, dx = \pi^2 \int x\, dx$

$= \pi^2 \left(\frac{x^2}{2}\right) + ج$

$= \frac{\pi^2}{2} x^2 + ج$

قاعدة :

$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))\, dx$

$= \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\, dx$

مثال: جد $\int (x^2 + \sqrt{x} + 3)\, dx$

الحل: $\int (x^2 + \sqrt{x} + 3)\, dx = \int x^2\, dx + \int \sqrt{x}\, dx + \int 3\, dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3x + ج$

قاعدة :

$\int$ جا س دس = − جتا س + جـ

$\int$ جتا س دس = جا س + جـ

$\int$ قا^2 س دس = ظا س + جـ

$\int$ قتا^2 س دس = − ظتا س + جـ

$\int$ قا س ظا س دس = قا س + جـ

$\int$ قتا س ظتا س دس = − قتا س + جـ

ملاحظة (اذا) كانت الزاوية خطية على الصورة (أ س + ب)

نقسم على معامل س عند التكامل (أي ان)

$\int$ جا(أ س + ب) دس = $\frac{-1}{أ}$ جتا(أ س + ب) + جـ

كذلك $\int$ (أ س + ب)^{ن} دس = $\frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{ن+1} \times \frac{1}{أ}$

مثال: جد $\int 3 جا^3 س \, دس$

الحل: $\int 3 جا^2 س \, دس = 3 \times \frac{1}{3} \times -جتا^3 س + ج$

$= -جتا^3 س + ج$

في تكاملات الاقترانات المثلثية سنتابع إلى المتطابقات:

$جا^2 س + جتا^2 س = 1$

$1 + ظا^2 س = قا^2 س$ كذلك $1 + ظتا^2 س = قتا^2 س$

$جا 2س = 2 جا س جتا س$

$جتا 2س = 1 - 2 جا^2 س$

$جتا 2س = 2 جتا^2 س - 1$

$جتا 2س = جتا^2 س - جا^2 س$

$جا^2 س = \frac{1}{2}(1 - جتا 2س)$

$جتا^2 س = \frac{1}{2}(1 + جتا 2س)$

$جا س جتا ص = \frac{1}{2}[جا(س-ص) + جا(س+ص)]$

$جتا س جتا ص = \frac{1}{2}[جتا(س-ص) + جتا(س+ص)]$

$$\text{جا}س \text{جا}ص = \frac{1}{2}\left[\text{جتا}(س-ص) - \text{جتا}(س+ص)\right]$$

" أمثلة متنوعة على قواعد التكامل غير المحدود "

مثال جد $\int \left(\sqrt{س}(\sqrt{س} + \frac{7}{\sqrt{س}}\right) د س$

الحل
$$= \int \left(\sqrt{س} \times \sqrt{س} + \sqrt{س} \times \frac{7}{\sqrt{س}}\right) د س$$
$$= \int (س + 7) د س = \frac{س^2}{2} + 7س + ج$$

مثال $\int \frac{12س^6 - 5}{س^6} د س$

الحل:
$$\int \frac{12س^6}{س^6} - \frac{5}{س^6} د س$$
$$= \int 12 - 5س^{-6} د س = 12س - \frac{5س^{-6+1}}{-6+1} + ج$$
$$= 12س - \frac{5س^{-5}}{-5} + ج$$
$$= 12س + \frac{1}{س^5} + ج$$

مثال: $\int س^{٥} \sqrt{س^{٣}+١}\, د س$

الحل: $\int س \times (س^{٣}+١)^{\frac{٣}{٥}}\, د س$

$= \int س^{\frac{٨}{٥}}\, د س = \frac{٥}{١٣} س^{\frac{١٣}{٥}} + ج$

مثال: $\int \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١}\, د س$

الحل: $\int \frac{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}{(\sqrt{س} - ١)}\, د س$

$= \int (\sqrt{س} + ١)\, د س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س + ج$

مثال: $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}\, د س$

الحل: $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} \times \frac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١)}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$ المرافق التكعيبي

$= \int \frac{(س - ١)(\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١)}{(س - ١)}\, د س$

$= \int س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١\, د س$

$\leftarrow \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + س + جـ$

مثال: جد $\int س^{10} \left(\frac{5}{س} - \frac{2}{س^2} \right)^5 دس$

الحل: $\int س^{10} \left(\frac{5س - 2}{س^2} \right)^5 دس$ (توحيد مقامات)

$= \int س^{10} \frac{(5س - 2)^5}{(س^2)^5} دس = \int \frac{س^{10} (5س - 2)^5}{س^{10}} دس$

$= \frac{1}{5} \frac{(5س - 2)^6}{6} + جـ = \frac{1}{30} (5س - 2)^6 + جـ$

مثال: $\int \frac{12س - 18}{\sqrt{8س - 12}} دس$

الحل: $\int \frac{6(2س - 3)}{\sqrt{4(2س - 3)}} دس = \int \frac{6}{2} \frac{(2س - 3)}{(2س - 3)^{\frac{1}{2}}}$

$= \int 3 (2س - 3)^{\frac{1}{2}} دس$

$= 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (2س - 3)^{\frac{3}{2}} + جـ$

$= (2س - 3)^{\frac{3}{2}} + جـ$

* لاحظ هنا لا نستطيع أن نكامل مباشرة لأن المقام عبارة عن مجموع حدين *

مثال: جد $\int \frac{دس}{1+جاس}$

الحل: $\int \frac{دس}{1+جاس} \times \frac{1-جاس}{1-جاس}$ (المرافق)

$= \int \frac{1-جاس}{1-جا^2س} دس = \int \frac{1-جاس}{جتا^2س} دس + ج$

$= \int \frac{1}{جتا^2س} - \frac{جاس}{جتا^2س} دس$

$= \int قا^2س - \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس} دس$

$= \int (قا^2س - ظاس قاس) دس$

$= ظاس - قاس + ج$

مثال: $\int \frac{جتا2س}{جا^2س جتا^2س} دس$

الحل: المطابقة $جتا2س = جتا^2س - جا^2س$

$\int \frac{جتا^2س - جا^2س}{جا^2س جتا^2س} دس$

$= \int \frac{جتا^2س}{جا^2س جتا^2س} - \frac{جا^2س}{جا^2س جتا^2س} دس$

$$= \int \left(\frac{1}{\text{حا}^2 س} - \frac{1}{\text{حتا}^2 س} \right) \text{د}س$$

$$= \int (\text{قتا}^2 س - \text{ما}^2 س) \text{د}س$$

$$= - \text{ظتا} س - \text{ظا} س + \text{جـ}$$

مثال

$$\int \frac{1 - \text{حا}^2 س}{\text{حا}^2 \frac{س}{2} \text{حتا}^2 \frac{س}{2}} \text{د}س$$

الحل: المطابقة $\text{حا}^2 س = 2 \text{حا} س \text{حتا} س$

$$\text{حا} س = 2 \text{حا} \frac{س}{2} \text{حتا} \frac{س}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{حا} س = \text{حا} \frac{س}{2} \text{حتا} \frac{س}{2}$$

$$\frac{1}{4} \text{حا}^2 س = \text{حا}^2 \frac{س}{2} \text{حتا}^2 \frac{س}{2}$$

$$\therefore \int \frac{1 - \text{حا}^2 س}{\frac{1}{4} \text{حا}^2 س} \text{د}س$$

$$= \int \left(\frac{4}{\text{حا}^2 س} - \frac{4 \text{حا}^2 س}{\text{حا}^2 س} \right) \text{د}س$$

$$= \int (4 \text{قتا}^2 س - 4) \text{د}س$$

$$= -4 (\text{ظتا} س + س) + \text{جـ}$$

مثال: $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x-\cos x}\,dx$

في البسط

الحل: المتطابقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

والمتطابقة $\cos 2x=2\sin x\cos x$

$$\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}\,dx$$

$$=\int \frac{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin x-\cos x}$$

البسط عبارة عن مفكوك $(\sin x-\cos x)^2$

$$=\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}=\int \sin x-\cos x\,dx$$

$$=-\cos x-\sin x+c$$

مثال: $\int \sin^4 x\,dx$

الحل: المتطابقة $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$\sin^4 x=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

لـ نفك المربع

$$\int \frac{1}{4}(1-2\cos 2s+\cos^2 2s)$$

$$\leftarrow = \frac{1}{2}(1+\cos 4s)$$

$$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2s+\frac{1}{2}(1+\cos 4s))\,ds$$

$$= \int \frac{1}{4}(1-2\cos 2s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4s)\,ds$$

$$= \frac{1}{4}(s-\frac{2}{2}\sin 2s+\frac{1}{2}s+\frac{1}{8}\sin 4s)+c$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}s-\sin 2s+\frac{1}{8}\sin 4s)+c$$

مثال: جد $\int \sin 2s \cos 3s\,ds$

الحل: المطابقة $\sin 2s\cos 3s = \frac{1}{2}[\sin(2s-3s)+\sin(2s+3s)]$

$$\int \frac{1}{2}[\sin(-s)+\sin 5s]\,ds$$

$$= \frac{1}{2}[\cos s-\frac{1}{5}\cos 5s]+c$$

تلخيص

- عند وجود $\text{ظا}^2 س$ ، $\text{ظتا}^2 س$ يمكن استخدام

$$\text{ظتا}^2 س = \text{قتا}^2 س - ١$$
$$\text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س - ١$$

- عند وجود $\frac{١}{١ \pm \text{جا} س}$ أو $\frac{١}{١ \pm \text{جتا} س}$

اضرب بالمرافق.

- عند وجود (حا٥س جتا٤س) أو (حا٥س حا٤س)

أو (جتا٥س جتا٤س)

استخدم $\text{حا}٥س \text{جتا}٤س = \frac{١}{٢}[\text{حا}(٥س - ٤س) + \text{حا}(٥س + ٤س)]$

ومثيلاتها.

- عند وجود $\text{جا}^2 س$ ، $\text{جتا}^2 س$

$\text{جا}^4 س$ ، $\text{جتا}^4 س$

القوة زوجية

استخدم

$$\text{جا}^2 س = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س)$$
$$\text{جتا}^2 س = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢س)$$

امثلة اضافية على تكامل الاقترانات المثلثية:

مثال: $\int (\text{جا}س + \text{جتا}س)^2 \, دس$.

الحل: $\int (\text{جا}^2 س + 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س + \text{جتا}^2 س) \, دس$

نفك المربع.

$\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$ ، $2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س = \text{جا}2س$

$\therefore \int (1 + \text{جا}2س) \, دس = س - \frac{1}{2}\text{جتا}2س + ج$

مثال: $\int \text{جتا}^2 س \, \text{جا}^2 س \, دس$

الحل: المتطابقة $\text{جا}2س = 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س$

$\frac{1}{2}\text{جا}2س = \text{جا}س\,\text{جتا}س$

$\frac{1}{4}\text{جا}^2 2س = \text{جا}^2 س\,\text{جتا}^2 س$

$\therefore \int \frac{1}{4}\text{جا}^2 2س \, دس = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}4س) \, دس$

$= \frac{1}{8}(س - \frac{1}{4}\text{جا}4س) + ج$

مثال: $\int \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{\text{جتا}^2 س + 2\,\text{جتا}س + 1} \, دس$

الحل: $\frac{(1 - \text{جتا}س)(1 + \text{جتا}س)}{(\text{جتا}س + 1)(\text{جتا}س + 1)}$ ... تحليل (بسط ومقام)

$= \left\{ \frac{1 - \text{ظتا}\, س}{\text{ظتا}\, س + 1} \right\}$ د س نضرب بمراعاة المقام $\left(\frac{1 - \text{ظتا}\, س}{1 - \text{ظتا}\, س} \right)$

$= \left\{ \frac{(1 - \text{ظتا}\, س)^2}{1 - \text{ظتا}^2 س} \right\}$

$= \frac{1 - 2\,\text{ظتا}\, س + \text{ظتا}^2 س}{\text{جا}^2 س}$

$= \left\{ \frac{1}{\text{جا}^2 س} - \frac{2\,\text{ظتا}\, س}{\text{جا}\, س \times \text{جا}\, س} + \frac{\text{ظتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \right\}$ د س

$= \left\{ \text{قتا}^2 س - 2\,\text{ظتا}\, س\, \text{قتا}\, س + \text{ظتا}^2 س \right\}$

$= \left\{ \text{قتا}^2 س - 2\,\text{ظتا}\, س\, \text{قتا}\, س + \text{قتا}^2 س - 1 \right\}$

$= -2\,\text{ظتا}\, س + 2\,\text{قتا}\, س - س + ج$

تمرين: جد $\left\{ \frac{1 + \text{ظتا}^2 س\, \text{جا}^2 س + \text{ظتا}^4 س - \text{جا}^2 س}{\text{ظتا}^2 س} \right\}$

الإجابة: $2س + ج$