التكامـــل

الأدبـــــي

الفصل الدراسي الثانـي

٢٠١٩/٢٠٢٠

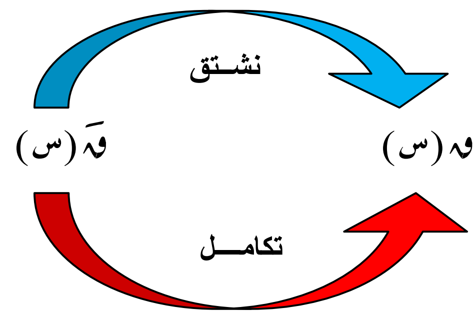
وَمَنْ لا يُحِبّ صُعُودَ الجِبَالِ　يَعِشْ أَبَدَ الدَّهْرِ بَيْنَ الحُفَر

إعداد المعلم : علـــي الطيــطي

٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

٠٧٧٦٢١٢١٣٠

التكامـــل الغير محدود :



تعلمنا بالفصل الأول كيف نجد المشتقة الأولى والآن سوف نتعلم عملية التكامل والتي هي عملية عكسية للتفاضل (للاقترانات المتصلة).

يعبر عن التكامل الغير محدود للاقتران $\text{قَ}(\text{س})$ بالنسبة للمتغير س بالصورة :

$$\int \text{قَ}(\text{س})\,\text{ءس}$$

حيث ءس : هو معامل التكامل

تعـــريف :

إذا كان ق متصلاً فإن :

١. $\int \text{قَ}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$

حيث جـ معامل التكامل.

٢. $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{ق}(\text{س})\right) = \text{ق}(\text{س})$.

بمعنى أن المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة لأنها عملية عكسية.

١. مشتقة $\left(\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}\right) = \text{ق}(\text{س})$

٢. $\text{ق}(\text{س}) = \int \text{قَ}(\text{س})\,\text{ءس}$

٣. $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}\right)$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \int (٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\,\text{ءس}$

فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٢ ؟

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٠$$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \int (\text{س}^{٣} + ٤\text{س})\,\text{ءس}$

فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ١ ؟

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{٣} + ٤\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥$$

مثال : إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \int (\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{ءس}$ فجد $\text{قَ}(٢)$ ؟

الحل :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣$$

$$\text{قَ}(٢) = ٧$$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\text{٢س}^{\text{٣}} + \text{س}\right)\text{ءس}$ فجد $\text{قَ}(\text{١})$ ؟

الحل :

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{٢س}^{\text{٣}} + \text{س}$

$\text{قَ}(\text{١}) = \text{٣}$

مثال : إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}^{\text{٤}} + \text{٨}$

فجد $\text{ق}(-\text{١})$ ؟

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٠}$

$\text{ق}(-\text{١}) = -\text{٤}$

مثال : إذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١}$

فجد $\text{ق}(\text{٢})$ ؟

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س}$

$\text{ق}(\text{٢}) = \text{٨}$

مثال : إذا كان

$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{٢س}$ فجد $\text{قَ}(\text{٢})$ ؟

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{٦س}$

$\text{قَ}(\text{٢}) = \text{١٢}$

مثال : إذا كان

$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٢س}^{\text{٢}}$ فجد $\text{قَ}(\text{١})$؟

الحل :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٤س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{١٢س} - \text{٤}$

$\text{قَ}(\text{١}) = \text{٨}$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \int \left(\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٥}\right)\text{ءس}$

فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = \text{١}$ ؟

الحل:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٥}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٩}$

قواعـــــــد التكامل الغير محدود :

قاعدة ١ :

$\int \text{أ ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ حيث أ عدد ثابت ، و جـ ثابت التكامل.

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \text{٤ءس} = \text{٤س} + \text{جـ}$

٢. $\int -\text{٨ءس} = -\text{٨س} + \text{جـ}$

٣. $\int \frac{\text{١}}{\text{٥}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}\,\text{س} + \text{جـ}$

٤. $\int \sqrt{\text{٧}}\,\text{ءس} = \sqrt{\text{٧}}\,\text{س} + \text{جـ}$

٥. $\int \pi\,\text{ءس} = \pi\,\text{س} + \text{جـ}$

٦. $\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س} + \text{جـ}$

٧. $\int \text{أ}^{\text{٢}}\,\text{ءس} = \text{أ}^{\text{٢}}\,\text{س} + \text{جـ}$

٨. $\int \text{٦٠ءس} = \text{٦٠س} + \text{جـ}$

٩. $\int \frac{-\text{٢}}{\text{٧}}\,\text{ءس} = \frac{-\text{٢}}{\text{٧}}\,\text{س} + \text{جـ}$

قاعدة ٢ :

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+\text{١}}}{\text{ن}+\text{١}} + \text{جـ} \text{ ، } \text{ن} \neq -\text{١}$$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \text{س}^{\text{٣}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{س}^{\text{٤}} + \text{جـ}$

٢. $\int \text{س ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ}$

٣. $\int \text{س}^{\text{٨}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}\,\text{س}^{\text{٩}} + \text{جـ}$

٤. $\int \text{س}^{\text{٧٥}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٧٦}}\,\text{س}^{\text{٧٦}} + \text{جـ}$

٥. $\int \text{س}^{\text{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{س}^{\text{٣}} + \text{جـ}$

٦. $\int \text{س}^{-\text{٤}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{-\text{٣}}\,\text{س}^{-\text{٣}} + \text{جـ}$

٧. $\int \text{س}^{-\text{٧}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{-\text{٦}}\,\text{س}^{-\text{٦}} + \text{جـ}$

٨. $\int \text{س}^{-\text{٢}}\,\text{ءس} = -\text{س}^{-\text{١}} + \text{جـ}$

٩. $\int \text{س}^{-\text{١١}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{-\text{١٠}}\,\text{س}^{-\text{١٠}} + \text{جـ}$

١٠. $\int \text{س}^{\text{٠،٤}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{-\text{٠،٦}}\,\text{س}^{-\text{٠،٦}} + \text{جـ}$

الأستــاذ : علــي الطيطي / رياضيــات - علمــي / أدبــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ / رياضيــات - علمــي / أدبــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \text{س}^{\frac{1}{5}} \, \text{ءس} = \frac{5}{6} \text{س}^{\frac{6}{5}} + \text{ج}$

٢. $\int \text{س}^{\frac{3}{2}} \, \text{ءس} = \frac{2}{5} \text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{ج}$

٣. $\int \text{س}^{\frac{1}{2}} \, \text{ءس} = \frac{2}{3} \text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$

٤. $\int \text{س}^{\frac{4}{7}} \, \text{ءس} = \frac{7}{11} \text{س}^{\frac{11}{7}} + \text{ج}$

٥. $\int \text{س}^{\frac{1}{4}} \, \text{ءس} = \frac{4}{5} \text{س}^{\frac{5}{4}} + \text{ج}$

٦. $\int \text{س}^{\frac{5}{3}} \, \text{ءس} = \frac{3}{8} \text{س}^{\frac{8}{3}} + \text{ج}$

٧. $\int \text{س}^{\frac{-2}{3}} \, \text{ءس} = 3 \, \text{س}^{\frac{1}{3}} + \text{ج}$

٨. $\int \text{س}^{\frac{-1}{2}} \, \text{ءس} = 2 \, \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

٩. $\int \text{س}^{\frac{-3}{4}} \, \text{ءس} = 4 \, \text{س}^{\frac{1}{4}} + \text{ج}$

١٠. $\int \text{س}^{\frac{-6}{5}} \, \text{ءس} = -5 \, \text{س}^{\frac{-1}{5}} + \text{ج}$

١١. $\int \text{س}^{\frac{2}{11}} \, \text{ءس} = \frac{11}{13} \text{س}^{\frac{13}{11}} + \text{ج}$

١٢. $\int \text{س}^{\frac{-2}{7}} \, \text{ءس} = \frac{7}{5} \text{س}^{\frac{5}{7}} + \text{ج}$

ملاحظـــــــة مهمة :

عند تكامل الجذور يجب أولاً تحويلها إلى الأسس ثم نكامل .

تذكر : $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

مثال : جد التكاملات التالية

١. $\int \sqrt[3]{\text{س}} \, \text{ءس}$

$= \int \text{س}^{\frac{1}{3}} \, \text{ءس}$

$= \frac{3}{4} \text{س}^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

٢. $\int \sqrt{\text{س}} \, \text{ءس} =$

$= \int \text{س}^{\frac{1}{2}} \, \text{ءس}$

$= \frac{2}{3} \text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$

٣. $\int \sqrt[5]{\text{س}} \, \text{ءس} =$

$= \int \text{س}^{\frac{1}{5}} \, \text{ءس}$

$= \frac{5}{6} \text{س}^{\frac{6}{5}} + \text{ج}$

قاعدة ٣ :

$$\int \text{جاس}\ \text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{جتاس}\ \text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$$

مثال : جد التكاملات التالية:

١. $\int \text{جتا س}\ \text{ء س} = \text{جا س} + \text{جـ}$

٢. $\int \text{جا س}\ \text{ء س} = -\text{جتا س} + \text{جـ}$

٣. $\int \text{قا}^{٢}\text{ س}\ \text{ء س} = \text{ظا س} + \text{جـ}$

تذكر أن :

١. $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

٢. $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$

لذلك عند وجود ظاس نستبدله بمتطابقته $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ثم نختصر ثم نكامل.

وعند وجود $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ تحول إلى $\text{قا}^{٢}\text{س}$ ثم نكامل .

مثال : جد $\int \text{جتا س ظا س}\ \text{ء س}$

الحل :

$$= \int \cancel{\text{جتاس}}\ \frac{\text{جا س}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{جا س}\ \text{ء س}$$

$$= -\text{جتاس} + \text{جـ}$$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}\ \text{ء س}$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{ س}\ \text{ء س}$$

$$= \text{ظاس} + \text{جـ}$$

٢. $\int \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}\ \text{ء س} =$

$$= \int ٥\ \text{قا}^{٢}\text{ س}\ \text{ء س}$$

$$= ٥\ \text{ظاس} + \text{جـ}$$

٣. $\int \frac{-١}{٣\ \text{جتا}^{٢}\text{ س}}\ \text{ء س} =$

$$= \int \frac{-١}{٣}\ \text{قا}^{٢}\text{ س}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{-١}{٣}\ \text{ظاس} + \text{جـ}$$

خصائص التكامل الغير محدود :

$\int أ\,ق(س)\,ءس = أ \times \int ق(س)\,ءس$ أي أن العدد الثابت المضروب بالتكامل لا يؤثر على التكامل.

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int ٥س^{٤}\,ءس = س^{٥} + جـ$

٢. $\int ٢س^{-٧}\,ءس = \frac{١}{-٣}\,س^{-٦} + جـ$

٣. $\int -٣س^{٤}\,ءس = \frac{-٣}{٥}\,س^{٥} + جـ$

٤. $\int \frac{١}{٣}\,س^{٢}\,ءس = \frac{١}{٩}\,س^{٣} + جـ$

٥. $\int -٢س^{-٣}\,ءس = س^{-٢} + جـ$

٦. $\int ٢س^{\frac{١}{٣}}\,ءس = \frac{٣}{٢}\,س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٧. $\int \frac{٢}{٣}\,س^{\frac{٢}{٣}}\,ءس = \frac{٢}{٥}\,س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

٨. $\int -٧س^{\frac{٢}{٥}}\,ءس = -٥س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

٩. $\int ٥س^{\frac{٧}{٢}}\,ءس = \frac{١٠}{٩}\,س^{\frac{٩}{٢}} + جـ$

خصائص التكامل الغير محدود :

$\int (ق(س) \pm هـ(س))\,ءس = \int ق(س)\,ءس \pm \int هـ(س)\,ءس$

أي أن التكامل يوزع على الجمع والطرح فقط ولا يوزع على الضرب والقسمة والأسس.

حرام رياضياً

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int (٣س^{٢} + ٥س - ٢)\,ءس$

$= س^{٣} + \frac{٥}{٢}\,س^{٢} - ٢س + جـ$

٢. $\int (س^{-٥} - س + ٧)\,ءس$

$= \frac{١}{-٤}\,س^{-٤} - \frac{١}{٢}\,س^{٢} + ٧س + جـ$

٣. $\int (\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س})\,ءس$

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٣}})\,ءس$

$= \frac{٢}{٣}\,س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٣}{٤}\,س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \left(٦س^{٢} + ٤س^{٣} + ١ \right) ءس$

$= ٢س^{٣} + س^{٤} + س + جـ$

٢. $\int \left(٤جاس + س^{-٤} + قا^{٢}س \right) ءس$

$= -٤جتاس + \frac{١}{-٣} س^{-٣} + ظاس + جـ$

٣. $\int \left(٥جتاس + ٣س^{٢} + \sqrt{٣} \right) ءس$

$= ٥جاس + س^{٣} + \sqrt{٣}س + جـ$

٤. $\int \left(\frac{١}{جتا^{٢}س} + \sqrt[٥]{س} + ٧ \right) ءس$

$= \int \left(قا^{٢}س + س^{\frac{١}{٥}} + ٧ \right) ءس$

$= ظاس + \frac{٥}{٦} س^{\frac{٦}{٥}} + ٧س + جـ$

٥. $\int \left(\frac{٤}{جتا^{٢}س} + جتاس ظاس \right) ءس$

$= \int \left(٤قا^{٢}س + جتاس \frac{جاس}{جتاس} \right) ءس$

$= ظاس + \frac{٥}{٦} س^{\frac{٦}{٥}} + ٧س + جـ$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \left(\sqrt{س} + ٤س^{-٥} + ٢س \right) ءس$

$= \int \left(س^{\frac{١}{٢}} + ٤س^{-٥} + ٢س \right) ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - س^{-٥} + س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٢. $\int \left(س^{٣} + س^{٤} - ١ \right) ءس$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٥} س^{٥} - س + جـ$

٣. $\int \left(٤جاس - س^{٧} + ٢ \right) ءس$

$= -٤جتاس + \frac{١}{٨} س^{٨} + ٢س + جـ$

٤. $\int \left(٢قا^{٢}س + ٣س - ٥ \right) ءس$

$= ٢ظاس + \frac{٣}{٢} س^{٢} - ٥س + جـ$

٥. $\int \left(٣جتاس + ٣جاس \right) ءس$

$= ٣جاس - ٣جتاس + جـ$

مشـــكلة الضــرب

لا يجوز التكامل في حالة الضرب لذلك يجب أولاً أن نقوم بعملية الضرب (فك الأقواس) ثم نقوم بعملية التكامل .

تذكر

في الضرب تجمع الأسس

$$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$$

مثال : جد $\int 3س\left(س^{2} - 2\right) ءس$

الحل:

$$= \int \left(3س^{3} - 6س\right) ءس$$

$$= \frac{3}{4} س^{4} + 3س^{2} + جـ$$

مثال :

جد $\int \left(س^{2} - 1\right)\left(س + 4\right) ءس$

الحل:

$$= \int \left(س^{3} + 4س^{2} - س - 4\right) ءس$$

$$= \frac{س^{4}}{4} + \frac{س^{3}}{12} - \frac{س^{2}}{2} - 4س + جـ$$

مثال :

جد $\int \left(2س^{3} - س\right)\left(3 - س\right) ءس$

الحل:

$$= \int \left(6س^{3} - 2س^{4} - 3س + س^{2}\right) ءس$$

$$= \frac{6س^{4}}{4} - \frac{2س^{5}}{5} - \frac{3س^{2}}{2} + \frac{س^{3}}{3} + جـ$$

مثال : جد $\int \left(س^{2} - 3\right)^{2} ءس$

الحل:

$$= \int \left(س^{2} - 3\right)\left(س^{2} - 3\right) ءس$$

$$= \int \left(س^{4} - 6س^{2} + 9\right) ءس$$

$$= \frac{س^{4}}{4} - 2س^{3} + 9س + جـ$$

مثال : جد $\int \left(3س\sqrt{س}\right) ءس$

الحل: $= \int \left(3س \times س^{\frac{1}{2}}\right) ءس$

$$= \int \left(3س^{\frac{3}{2}}\right) ءس$$

$$= \frac{6}{5} س^{\frac{5}{2}} + جـ$$

مثال : جد

$$\int \left(\text{٤ جتا س قا س} + \text{س} \sqrt[٣]{\text{س}} \right) \text{ء س}$$

الحل:

$$= \int \left(\text{٤} \cancel{\text{جتا س}} \times \frac{\text{١}}{\cancel{\text{جتا س}}} + \text{س} \times \text{س}^{\frac{١}{٣}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{٤} + \text{س}^{\frac{٤}{٣}} \right) \text{ءس}$$

$$= \text{٤ س} + \frac{\text{٣}}{\text{٧}} \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$$

مثال : جد

$$\int \left(\text{٢س} \sqrt{\text{س}^{٥}} - \text{٣ س} \right) \text{ء س}$$

الحل:

$$= \int \left(\text{٢س} \times \text{س}^{\frac{٥}{٢}} - \text{٣ س} \right) \text{ء س}$$

$$= \int \left(\text{٢س}^{\frac{٧}{٢}} - \text{٣ س} \right) \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{٨}}{\text{٩}} \text{س}^{\frac{٩}{٢}} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

مثال :

جد $\int \left(\text{٢ جتا س} - \text{قا س جتا س} \right) \text{ء س}$

الحل:

$$= \int \left(\text{٢ جتا س} - \frac{\text{١}}{\cancel{\text{جتا س}}} \times \cancel{\text{جتا س}} \right) \text{ء س}$$

$$= \text{٢ جا س} + \text{س} + \text{جـ}$$

مثال : جد

$$\int \sqrt{\text{س}} \left(\text{٣س}^{٢} - \sqrt[٣]{\text{س}} \right) \text{ء س}$$

الحل:

$$= \int \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \left(\text{٣س}^{٢} - \text{س}^{\frac{١}{٣}} \right) \text{ء س}$$

$$= \int \left(\text{٣س}^{\frac{٥}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٦}} \right) \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{٦}}{\text{٧}} \text{س}^{\frac{٧}{٢}} - \frac{\text{٦}}{\text{٧}} \text{س}^{\frac{٧}{٦}} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int س^{٢}\left(٤س + \sqrt[٣]{س}\right) ءس$

الحل:

$$= \int \left(س^{٢} \times ٤س + س^{٢} \times س^{\frac{١}{٣}}\right) ءس$$

$$= \int \left(٤س^{٣} - ٣س^{\frac{٧}{٣}}\right) ءس$$

$$= س^{٤} - \frac{٩}{١٠} س^{\frac{١٠}{٣}} + ج$$

مثال : جد

$$\int \sqrt[٤]{س}\left(س^{٣} - ٢س^{\frac{١}{٢}}\right) ءس$$

الحل:

$$= \int س^{\frac{١}{٤}}\left(س^{٣} - ٢س^{\frac{١}{٢}}\right) ءس$$

$$= \int \left(س^{\frac{١}{٤}} \times س^{٣} - س^{\frac{١}{٤}} \times ٢س^{\frac{١}{٢}}\right) ءس$$

$$= \int \left(س^{\frac{١٣}{٤}} - ٢س^{\frac{٣}{٤}}\right) ءس$$

$$= \frac{٤}{١٧} س^{\frac{١٧}{٤}} - \frac{٨}{٧} س^{\frac{٧}{٤}} + ج$$

تدريب :

جد التكاملات التالية :

$$\int \sqrt[٥]{س}\left(١ + ٢س^{٣}\right) ءس$$

$$\int \left(١ + ٤س^{٢}\right)^{٢} ءس$$

$$\int س^{٣}\left(٥س + ٢س^{-٤}\right) ءس$$

$$\int \sqrt[٣]{س}\left(٢س + ٥\right) ءس$$

$$\int \left(س + ٤\right)\left(س - ٢س^{٣}\right) ءس$$

$$\int س^{٤}\left(س + ٨س^{-٤}\right) ءس$$

$$\int س\left(\sqrt{س} + س + ٤\right) ءس$$

$$\int \left(٣س \times \sqrt[٤]{س}\right) ءس$$

$$\int س^{٣}\left(٣س^{٢} - ٧س\right) ءس$$

مشـــكلة القســـــمة

لا يجوز التكامل في حالة القسمة لذلك يجب أولاً أن نقوم بعملية تجهيز ثم نقوم بعملية التكامل .

كـــوارث

تذكر خواص الأسس

١. $\text{س}^{\text{م}} \times \text{س}^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م}+\text{ن}}$

٢. $\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$

٣. $\frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{-\text{ن}}$

٤. $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

مثال : جد $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}} \, \text{ءس}$

الحل :

$$= \int \text{س}^{-٣} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{١}{\text{س}^{-٥}} \, \text{ءس}$

الحل :

$$= \int \text{س}^{٥} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{-٤}{\text{س}^{٧}} \, \text{ءس}$

الحل :

$$= \int -٤ \, \text{س}^{-٧} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣} \, \text{س}^{-٦} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{٣}{٢ \, \text{س}^{-٢}} \, \text{ءس}$

الحل :

$$= \int \frac{٣}{٢} \, \text{س}^{٢} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \, \text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{٦}{٥ \, \text{س}^{-١}} \, \text{ءس}$

الحل :

$$= \int \frac{٦}{٥} \, \text{س} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{٣}{٥} \, \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

الأستــــاذ : علـــــي الطيـــطي / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣
رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ /

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٨}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٧}}{\text{س}^{-٣}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٧}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{٣}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{-٥}}{\text{س}^{-٣}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{-٥}}{\text{س}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{-٢} + ٥\text{س}}{\text{س}^{٣}} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{٢\text{س}^{٣} + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{٥س^{٤} + س\ جاس}{س}\ ءس$

مثال : جد $\int \frac{س\ جتاس + \sqrt{س}}{س}\ ءس$

مثال : جد $\int \frac{٢س^{٢} + ٣س\ قا^{٢}\ س}{س}\ ءس$

مثال : جد $\int \frac{٢\sqrt{س}\ جاس + ٥\sqrt{س}\ قا^{٢}\ س}{\sqrt{س}}\ ءس$

رياضيـات - علمـي / أدبـي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س} + ٢} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{٢\text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}{\text{س} + ٥} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{٢} - ١}{٤\text{س} - ٤} \, \text{ء س}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{2} + 5\text{س} + 4}{\text{س} + 1}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{2} - 6\text{س} + 9}{\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{16 - \text{س}^{2}}{\text{س} - 4}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{2} - 4}{2\text{س} - 4}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{3} - 1}{2\text{س} - 2}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{2} - \text{س} - 2}{\text{س} + 1}\,\text{ءس}$

الأستـــاذ : علـــي الطيطي / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ /

رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

لإيجاد قاعـــدة الاقتـــران ق :

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان قَ(س) = ٢س – ١ ، وكان ق(٢) = ٥ ، فجد قاعدة الاقتران ق ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، وكان ق(١) = ٣ ، فجد ق(٣) ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان قَ(س) = ٦س – ٨س^{٣} + ٥ ، وكان ق(–١) = ٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان قَ(س) = ٢س(٣س + ٢) ، وكان ق(٠) = ٢ ، فجد ق(١) ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$ق'(س) = \frac{س^{٢} + ٦س + ٨س^{٣}}{س}$ ، $س \neq ٠$

وكان $ق(١) = ١٢$ ، فجد قاعدة الاقتران ق ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$ق'(س) = \frac{٤س^{٣} - س}{س}$ ، $س \neq ٠$ وكان

$ق(٠) = ٢$ ، فجد قاعدة الاقتران ق ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$ل'(س) = ٦س^{٢} + ٦س^{٣} - ٢س$ ، فجد

$ل(٣) - ل(١)$ ؟

مثال : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$ق'(س) = ١٢س^{٣}$ ، فجد $ق(٢) - ق(٠)$ ؟

التكامــــــل المحدود :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{قَ}(\text{س})\,\text{ءس} = \Big[\text{ق}(\text{س})\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$$

تعويض الحد العلوي

تعويض الحد السفلي

مثال : جد $\int_{1}^{2} 3\text{س}^{2}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int_{0}^{1} (6\text{س} - 2)\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int_{-2}^{1} (6\text{س}^{3} - 4\text{س})\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int_{-2}^{2} (3\text{س} - 2)(\text{س} + 1)\,\text{ءس}$

الأستـــاذ : علـــي الطيـطي / رياضيــات - علمــي / أدبــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣
رياضيــات - علمــي / أدبــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

مثال : جد $\int_{1}^{8} \frac{2}{\sqrt[3]{\text{س}}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^2 + 7\text{س} + 12}{\text{س} + 4} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int_{4}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{\text{س}^2} \right) \text{ءس}$

مثال : جد $\int_{1}^{2} 2\text{س} \left(6 - 3\text{س}^2 \right) \text{ءس}$

مثال : إذا كان ق(−١) = ٣ ، ق(٢) = ٥ ، فجد قيمة $\int_{-1}^{2}$ ٤ قَ(س) ءس ؟

مثال : إذا كان ق(١) = ٤ ، ق(٣) = −٧ ، فجد قيمة $\int_{1}^{3}$ $\frac{\text{قَ(س)}}{٥}$ ءس ؟

مثال : إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [١،٥] ، وكان قَ(س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) − ق(١) ؟

مثال : إذا كان $\int_{5}^{2}$ قَ(س)ءس = ١٣ ، وكان ق(٥) = −١٧ ، فجد قيمة ق(٢) ؟

ملاحظــــــــة مهمة :

مشتقة التكامل المحدود = صفر

مثال : إذا كان $\text{ص} = \int_{٥}^{٧} \left(٣\text{س}^{٥} + ٥ \right) \text{ءس}$

فجد قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{-٢}^{٣} \frac{١}{\text{س}^{٤}} \text{ءس}$

فجد قيمة $\text{قَ}(\text{س})$ ؟

مثال : إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \int_{٢}^{٤} \text{س}^{٥} \text{ءس} + \int (٧ - ٢\text{س}) \text{ءس}$$

فجد قيمة $\text{قَ}(٢)$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{١}^{\text{ب}} ٦\text{س} \, \text{ءس} = ٩$ ، فجد قيمة الثابت ب ؟

مثال : إذا كان $\int_{-١}^{\text{ك}} ٤ \, \text{ءس} = ٢٠$ ، فجد قيمة الثابت ك ؟

خصائص التكامـــــــل المحدود :

أولاً الخصائص الخطية

١. $\int_{أ}^{ب} ل\,ق(س)\,ءس = ل \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$

حيث ل : عدد ثابت أي أن العدد الثابت المضروب باقتران لا يؤثر على التكامل.

٢. $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س)\right) ءس$

$= \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس$

التكامل المحدود يوزع على الجمع والطرح فقط

مثال : إذا كان

$\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = ٧$

فجد قيمة $\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + هـ(س)\right) ءس$ ؟

مثال : إذا كان

$\int_{٢}^{٥} ع(س)\,ءس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٥} ل(س)\,ءس = -٤$

فجد قيمة $\int_{٢}^{٥} \left(٣ع(س) + \frac{ل(س)}{٢}\right) ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,ءس = ٤$ ،

فجد قيمة $\int_{٠}^{٣} \left(٢ق(س) + ٦س\right) ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س)\,ءس = ٢$ ، $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,ءس = ٥$ فجد قيمة $\int_{١}^{٢} (٤ق(س) + هـ(س) - ٣)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان

$\int_{٠}^{٤} \frac{ع(س)}{٢}\,ءس = ٣$ ، $\int_{٠}^{٤} ٢ل(س)\,ءس = ٦$

فجد $\int_{٠}^{٤} (ع(س) + ل(س) + ٦س)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٣$

$\int_{١}^{٣} (٣ق(س) + هـ(س))\,ءس = ١٠$ فجد

قيمة $\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{-١}^{٢} ل(س)\,ءس = ٥$

$\int_{-١}^{٢} (٢ل(س) - ع(س))\,ءس = ١٤$ فجد

قيمة $\int_{-١}^{٢} ع(س)\,ءس$ ؟

الأستـــاذ : علـــي الطيـطي / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

ثانياً خصائص التكامل المحدود

$$\int_{ب}^{ب} ق(س)\,ءس = ٠$$

إذا تشابهت حدود التكامل فان ناتج التكامل يكون صفراً.

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس$$

إذا قلبنا حدود التكامل فإننا نعكس إشارة التكامل.

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int_{٤}^{٤} \left(س^{٣} - ٧س - ٤\right) ءس =$

٢. $\int_{-٢}^{-٢} \left(\frac{س^{٣} - \sqrt{س}}{٣س}\right) ءس =$

مثال :

إذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس = ٦$ ، فجد :

١. $\int_{٤}^{١} ق(س)\,ءس =$

٢. $\int_{٤}^{١} ٢ق(س)\,ءس =$

مثال : إذا كان $\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,ءس = -١٢$ ، فجد

$\int_{٣}^{١} ق(س)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان

$\int_{-٢}^{١} ٢ق(س)\,ءس = ٦$ ، $\int_{١}^{-٢} \frac{هـ(س)}{٣} ءس = ١$

فجد $\int_{-٢}^{١} \left(ق(س) + هـ(س)\right) ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{4}^{1} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 6$ ، فجد

$\int_{1}^{4} \left(\text{ق}(\text{س}) - 6\text{س}\right)\text{ءس}$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{0}^{3} \left(1 - 3\text{ق}(\text{س})\right)\text{ءس} = 5$ ،

فجد $\int_{3}^{0} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ؟

مثال :

إذا كان $\int_{ب+٢}^{ب^٢-٤} ق(س)\,ءس = ٠$، فجد الثابت ب ؟

مثال :

إذا كان $\int_{٣ك-٣}^{٦-ك} ق(س)\,ءس = ٠$، فجد الثابت ك ؟

مثال :

إذا كان $\int_{١}^{ب} (٢س - ١)\,ءس = ٠$، فجد الثابت ب ؟

مثال :

إذا كان $\int_{٠}^{ك} (٢س - ٣)\,ءس = ٦$، فجد الثابت ك ؟

مثال : إذا كان $\int_{-١}^{٣} ٢ب \, ءس = ١٢$ ، فجد الثابت ب ؟

مثال : إذا كان $\int_{٠}^{٣} (بس^{٢} + ٢) \, ءس = -٢١$ ، فجد الثابت ب ؟

مثال : إذا كان $\int_{٢}^{ب} (١ - ٤س) \, ءس = ٥ب$ ، فجد الثابت ب ؟

مثال : إذا كان $\int_{١}^{٢} (٦س - ٢) \, ءس = ب$ ، فجد الثابت ب ؟

خاصيـــة الإضـــافة

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

ولا يشترط أن تكون جـ بين أ و ب

مثال : إذا كان

$\int_{١}^{٢} ق(س)\,ءس = ٥$ ، $\int_{٢}^{٦} ق(س)\,ءس = ٤$ ،

جد قيمة $\int_{١}^{٦} ٢ق(س)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان

$\int_{٣}^{٠} ق(س)\,ءس = ٤$ ، $\int_{١}^{٠} ٢ق(س)\,ءس = -٦$

جد قيمة $\int_{١}^{٣} (ق(س) - ٢س)\,ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{-1}^{2} \frac{\text{ق}(\text{س})}{3}\,\text{دس} = 1$ ، $\int_{-1}^{3} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 10$

، فجد قيمة $\int_{2}^{3} \left(\text{ق}(\text{س}) - 2\text{س}\right)\text{دس}$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{0}^{2} \left(\text{ق}(\text{س}) - 3\right)\text{دس} = 11$ ، $\int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 7$ ، فجد $\int_{0}^{4} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟

التكامـــــــل بالتعويض :

ويستخدم هذا التكامل لإيجاد تكامل ضرب أو قسمة اقترانيين أحدهما مشتقة الآخر .

الخطـــــوات :

١. نفرض أن ص = الاقتران الذي عليه أس
٢. نجد المشتقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ومنها نجد قيمة ءس

حيث تكون $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{المشتقة}}$

٣. نعوض بالتكامل بدل المفروض ص وقيمة ءس الجديدة.
٤. نختصر إن وجدت اختصارات بحيث يبقى التكامل بدلالة ص فقط .
٥. نكامل بقواعد التكامل بالنسبة لـ ص.
٦. نستبدل قيمة ص بعد التكامل ما تساويه من الفرض بحيث يكون الناتج بدلالة س.

حالات على صورة تكامل بالتعويض :

- $\int \text{(مشتقة الاقتران)} \times \text{(اقتران)}^{\text{ن}} \, \text{دس}$
- $\int \frac{\text{مشتقة اقتران}}{\text{(اقتران)}^{\text{ن}}} \, \text{دس}$
- $\int \text{(مشتقة الاقتران)} \times \sqrt{\text{اقتران}} \, \text{دس}$
- $\int \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\sqrt{\text{الاقتران}}} \, \text{دس}$
- $\int \text{(مشتقة الزاوية)} \times \text{جا (الزاوية)} \, \text{دس}$

مثال : جد $\int (\text{٣س}^{٢} + ٢)(\text{س}^{٣} + \text{٢س})^{٤} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \text{٢س}(\text{س}^{٢} + ١)^{٧} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \text{س}^{2}\left(\text{س}^{3}+5\right)^{-7}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \left(4\text{س}-3\right)\left(2\text{س}^{2}-3\text{س}+1\right)^{3}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int 5\text{س}^{2}\sqrt{\text{س}^{3}-3}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int 2\text{س}^{3}\left(\text{س}^{4}-1\right)^{8}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int (س - ٢)(س^{٢} - ٤س)^{٣}\ ءس$

مثال : جد $\int س^{٢}\sqrt[٤]{٥ + س^{٣}}\ ءس$

مثال : جد $\int (٥ - ٢س)(س^{٢} - ٥س + ١)^{-٢}\ ءس$

مثال : جد $\int (٣ - س)(س^{٢} - ٦س)^{٤}\ ءس$

رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

مثال : جد $\int \frac{\text{٢س} + ٣}{\sqrt[3]{\text{س}^{٢} + \text{٣س} - ٣}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{٦س} - ٩}{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٣س} - ١}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{٣س}^{٢} - ٥}{\left(\text{س}^{٣} - \text{٥س} + ٤\right)^{-٤}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{١ + \text{٤س}^{٣}}{\left(\text{س}^{٤} + \text{س} + ٥\right)^{٣}} \, \text{ءس}$

مثال : جد $\int \text{س}^{2}\,\text{جتا}\left(2\text{س}^{3}-2\right)\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^{2}}{\text{جتا}^{2}\left(\text{س}^{3}+1\right)}\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \text{س}\,\text{قا}^{2}\left(1-\text{س}^{2}\right)\,\text{ءس}$

مثال : جد $\int \left(4\text{س}+6\right)\left(\text{س}^{2}+3\text{س}\right)^{\frac{1}{5}}\,\text{ءس}$

ملاحظـــــــة مهمة :

في حالة كان الاقتران خطي فإن مشتقته عدد ثابت والعدد الثابت لا يؤثر على التكامل.

$$\int (أس + ب)^{ن} \, ءس = \frac{١}{أ} \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١} + جـ$$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int (٢س + ٣)^{٧} \, ءس =$

٢. $\int (٦س - ١)^{٣} \, ءس =$

٣. $\int (٢ - ٤س)^{٥} \, ءس =$

٤. $\int ٣(٢ - س)^{-٣} \, ءس =$

٥. $\int ٢(٣ - ٧س)^{٦} \, ءس =$

٦. $\int ٢(س + ٨)^{٤} \, ءس =$

٧. $\int (٣س - ٥)^{-٤} \, ءس =$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \sqrt[٣]{٤س + ٢} \, ءس =$

٢. $\int \sqrt{١ - ٢س} \, ءس =$

٣. $\int \sqrt[٥]{(٢س + ٢)^{٢}} \, ءس =$

٤. $\int \sqrt[٤]{١ - ٤س} \, ءس =$

٥. $\int \sqrt[٤]{(٥ - س)^{٣}} \, ءس =$

بشكل عـــــام:

$\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})+\text{جـ}$

$\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})+\text{جـ}$

$\int \text{قا}^{2}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})+\text{جـ}$

مثال : جد التكاملات التالية :

١. $\int \text{جا}(٤\text{س}+٢)\,\text{ءس} =$

٢. $\int \text{جتا}(٢\text{س}-٧)\,\text{ءس} =$

٣. $\int \text{قا}^{2}(٥-\text{س})\,\text{ءس} =$

٤. $\int \text{جتا}(١-٤\text{س})\,\text{ءس} =$

٥. $\int ٤\,\text{جا}(\text{س}-٣)\,\text{ءس} =$

٦. $\int \text{قا}^{2}(٣\text{س}+١)\,\text{ءس} =$

٧. $\int ٢\,\text{جا}(٢\text{س}+٢)\,\text{ءس} =$

ملاحظـــــــة مهمة :

إذا كان التكامل محدود يفضل تغيير حدود التكامل وذلك بإيجاد قيم ص التي تقابل س من الفرض.

مثال : جد $\int_{٠}^{٤} ٢\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}\,\text{ءس}$ ؟

مثال : جد

$$\int_{1}^{-1} (٤س - ١)\sqrt[3]{س - ٢س^{٢} - ١}\, ءس \quad ؟$$

مثال : جد $$\int_{1}^{2} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\, ءس \quad ؟$$

مثال : إذا كان $ق(١) = ٤$ ، $ق(٩) = ١٠$ ،

فجد $\int_{٠}^{٢} ٣س^{٢}\, قَ(س^{٣} + ١)\, ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{٥}^{١} ق(س)\, ءس = ٦$ ، فجد

$\int_{٠}^{-٢} ٤س\, ق(س^{٢} + ١)\, ءس$ ؟

مثال : إذا كان $ق(٣) = -٢$ ، $ق(٢٩) = ٥$

، فجد $\int_{-١}^{٣} ٦س\, قَ(س^{٢} + ٢)\, ءس$ ؟

مثال : إذا كان $\int_{٢٥}^{-١} ق(س)\, ءس = -١٢$ ، فجد

$\int_{١}^{٣} س^{٢}\, ق(س^{٣} - ٢)\, ءس$ ؟

تطبيقـــــات هندســـية :

تذكر أن ميل المماس هو المشتقة الأولى، لذلك لإيجاد قاعدة الاقتران ق نكامل المشتقة للحصول على قاعدة الاقتران ونجد ثابت التكامل جـ عن طريق نقطة تمر بالمنحنى.

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق هو ق َ(س) = ٣س^{٢} − ٨س ، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (−١،٣) ؟

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) يعطى بالقاعدة ق َ(س) = ٦س − ١ ، فجد ق(٢) ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠،٨) ؟

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) يعطى بالقاعدة ق َ(س) = ٦ $\sqrt[3]{\text{٢س} - ١}$ ، فجد ق(١٤) ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠،٥) ؟

الأستـــاذ : علــــي الطيطـي / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) يعطى بالقاعدة

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق

علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠،٤) ؟

مثال : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) يعطى بالقاعدة

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤س^{٢} - ٣س}{س}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق

علماً بأن ق(١) = ٣ ؟

الأستـــاذ : علـــي الطيطـي / رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ رياضيـــات - علمـــي / أدبـــي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

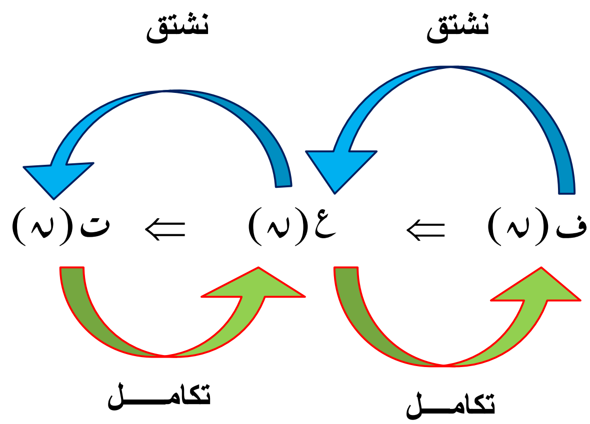
تطبيقـــــات فيزيائية :

تذكر أن:

ف(ن) = اقتران المسافة = موقع الجسم

ع(ن) = السرعة = مشتقة المسافة

ت(ن) = التسارع = مشتقة السرعة



أي أن :

$\int$ ع(ن) ءن = ف(ن) + جـ

لإيجاد موقع الجسيم نكامل السرعة تكامل غير محدود ونجد الثابت جـ .

$\int$ ت(ن) ءن = ع(ن) + جـ

لإيجاد سرعة الجسيم نكامل التسارع تكامل غير محدود ونجد الثابت جـ.

ولو أعطانا بالسؤال التسارع وطلب موقع الجسيم هنا نجد التكامل مرتين الاولى لايجاد السرعة والثانية لايجاد موقع الجسيم.

مثال :

يتحرك جسيم على خط مستقيم وكانت سرعته تعطى بالعلاقة ع(ن) = (٢ن – ٥)م/ث حيث ن :الزمن بالثواني ، فجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ ؟

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة ع(ن) = (٦(١ − ٢ن))^{٢} م/ث، فجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ ؟

مثال : تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن تسارعها بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة هو ت(ن) = (٦ن^{٢} − ٢ن) م/ث^{٢} ، فجد سرعة النقطة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة ، علماً بأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث ؟

مثال : تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن تسارعها بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة هو $ت(ن) = (٦ن^{٢} + ٤)$ م/ث^{٢} ،وكان موقعها الابتدائي $ف(٠) = ٢$ وكانت سرعتها الابتدائية $ع(٠) = ٤$ م/ث فجد :

١. سرعة النقطة بعد ثانية واحدة .
٢. موقع الجسيم بعد ثانيتين .

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن تسارعه بعد مرور (ن) ثانية لحظة الانطلاق هو $ت(ن) = ٤٨(١ - ٢ن)^{٣}$ م/ث^{٢} ،وكان موقعه الابتدائي $ف(٠) = ٢$ وكانت سرعته الابتدائية $ع(٠) = ٤$ م/ث فجد موقع الجسيم بعد ثانيتين ؟

المســـــاحة :

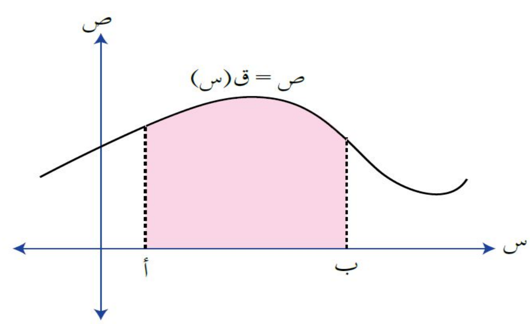
مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ص = ق(س) ومحور السينات على الفترة [أ،ب] تعطى بالقاعدة :

المســاحة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ء}\text{س}$

حالات المســـاحة

الحالة الأولى : إذا كان ق(س) ≥ ٠ لكل س في الفترة [أ،ب] ، فإن |ق(س)| = ق(س) لكل س في الفترة [أ،ب] وتكون

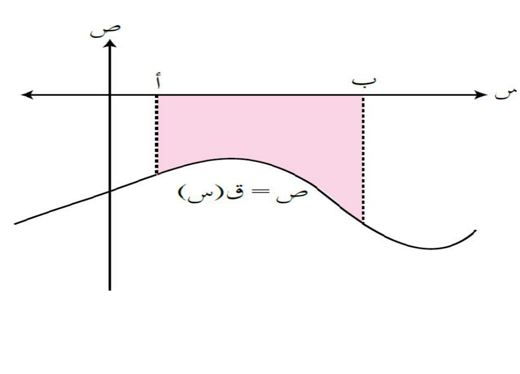
المساحة المطلوبة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س}$



الحالة الثانية :

إذا كان ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [أ،ب] ، فإن |ق(س)| = −ق(س) لكل س في الفترة [أ،ب] وتكون

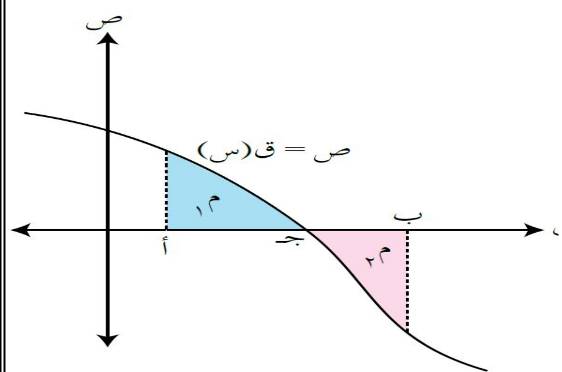
المساحة المطلوبة = $-\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س}$



الحالة الثالثة :

إذا كان ق(س) ≥ ٠ لكل س في الفترة [أ،جـ] ، ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [جـ،ب] ، فإن المساحة المطلوبة = مساحة $م_1$ + مساحة $م_2$

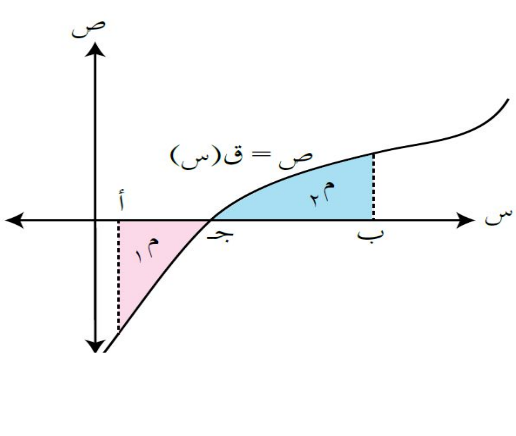
$$= \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} -\text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س}$$



الحالة الرابعة :

إذا كان ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [أ،جـ] ، ق(س) ≥ ٠ لكل س في الفترة [جـ،ب] ، فإن المساحة المطلوبة = مساحة $م_1$ + مساحة $م_2$

$$= -\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س}$$



الأستـــاذ : علـــي الطيـطـي / رياضيــات - علمـي / أدبـي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ / رياضيــات - علمـي / أدبـي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

خطـــــوات إيجاد المســـــاحة :

المساحة المغلقة المحصورة بين اقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

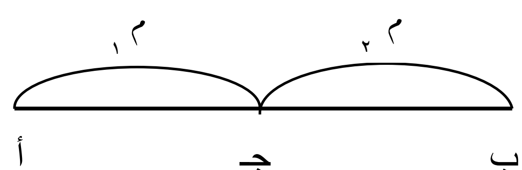
١. نجد نقاط تقاطع الاقتران ق مع محور السينات (إن وجدت) وذلك بمساواة الاقتران بالصفر ق(س) = ٠

٢. نجد قيم س من حل المعادلة الناتجة.

٣. إذا لم تقع قيم س داخل الفترة المطلوبة نجد المساحة بالتكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [أ،ب]، حيث

$$\text{المساحة} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس}$$

٤. إذا وقعت قيم س داخل الفترة المطلوبة فنقسم المساحة :



المساحة المطلوبة = مساحة م١ + مساحة م٢

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس}$$

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ − س ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٠ ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س – ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ،س = ٥ ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ – ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ،س = ٣ ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٤س ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٥ ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٦ − ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ ؟

المساحة المغلقة المحصورة بين اقتران $ق(س)$ ومحور السينات :

الخطـــــوات :

١. نجد نقاط تقاطع الاقتران ق مع محور السينات وذلك بمساواة الاقتران بالصفر $ق(س) = ٠$

٢. نجد التكامل المحدود للاقتران ق وتكون حدود التكامل هي قيم س الناتجة .

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٣س$ ومحور السينات ؟

مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٤$ ومحور السينات ؟

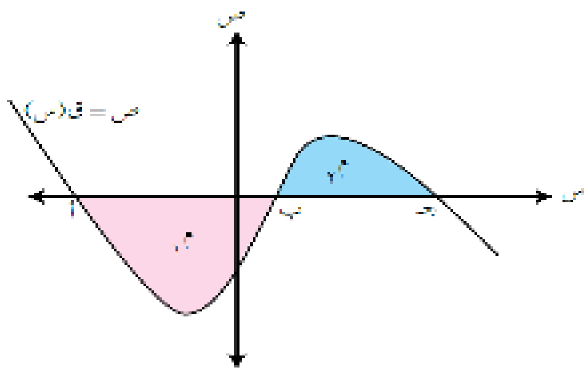
مثـــال : جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - س - ٢$ ومحور السينات ؟

ملاحظـــــــة مهمة :

المساحة دائماً موجبة لكن التكامل : تحت محور السينات سالب وفوق محور السينات موجب.

مثـــال :

من الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، إذا كانت $م_1$ = ٨ وحدات مربعة ، $م_2$ = ٥ وحدات مربعة :



فجد :

١. $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} =$

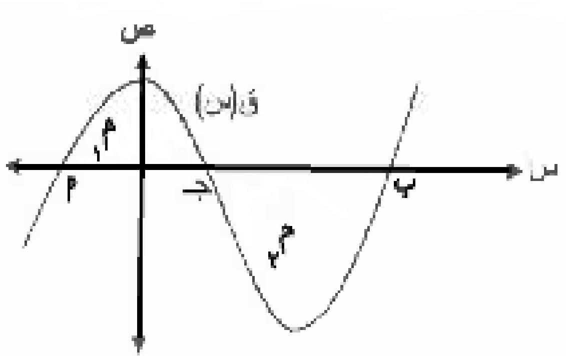
٢. $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} =$

٣. $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} =$

٤. مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ،ب]

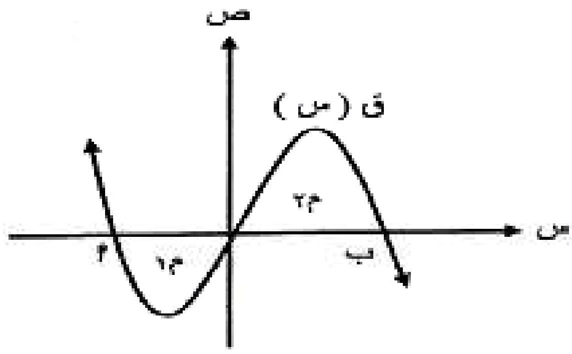
مثـــال : من الشكل التالي الذي يمثل المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ،ب] ، إذا كانت $م_1$ = ٦ وحدات مربعة ،

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} ٢\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -٦$، فجد $م_2$ ؟

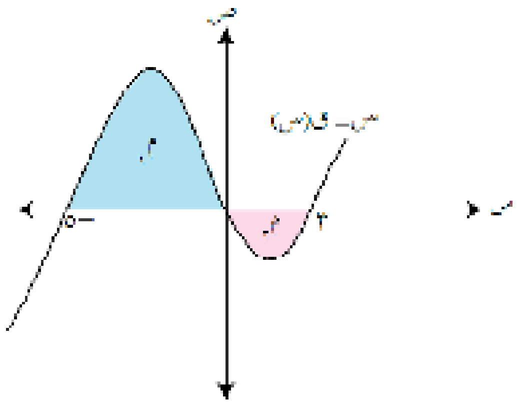


الأستـــاذ : علـــي الطيطي / رياضيـات - علمـي / أدبـي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣ / رياضيـات - علمـي / أدبـي / ٠٧٨٩٩١٩٢٩٣

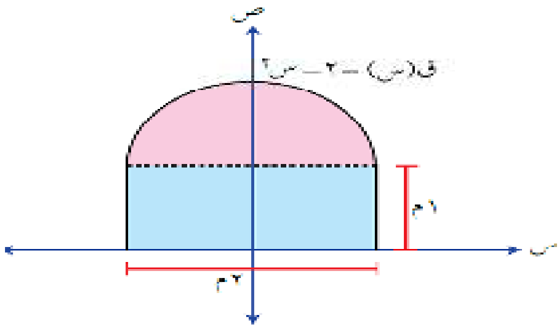
مثـــال : من الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، إذا كانت $م_١ = ٤$ وحدات مربعة ، $م_٢ = ٧$ وحدات مربعة فجد $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس$ ؟



مثـــال : من الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، إذا كانت $م_١ = ١١$ وحدات مربعة $م_٢ = ٥$ وحدات مربعة فجد $\int_{-٥}^{٣} ٢ق(س) ءس$ ؟



مثـــال : نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته ٢ م ، وارتفاعه ١ م، يعلوه منحنى يعطى بالقاعدة ص = ق(س) = ٢ – س ^{٢} ، إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر الواحد منه خمسة دنانير ، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة كما في الشكل ؟



مثـــال : الشكل التالي يمثل الواجهة الأمامية أحد المباني ، مدخل المبنى يمثله منحنى الاقتران ق(س) = ٢ – $\frac{١}{٢}$س ^{٢} ، ما تكلفة إنشاء باب زجاجي للمدخل إذا علمت أن سعر الوحدة المربعة منه (٦٠) ديناراً ؟