الإجابة النموذجية

نموذج الامتحان التجريبي

رقم ((٣))

رياضيات – العلمي

٢٠٢٠ – الفصل الأول – م٣

الأستاذ: عمار البوايزة

ستوديو الرياضيات	الإجابة النموذجية نموذج الامتحان التجريبي (٣) للثانوية العامة		الأستاذ عمار البوايزة
المادة	الفصل الأول ٢٠٢٠	الفرع	رقم الصفحة
الرياضيات	المستوى الثالث	العلمي	(١)

السؤال الأول : فرع (أ) :

نغير تعريف كلاً من الإقترانين ق ، هـ

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{\sqrt{(س-٣)^٢}} & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ ١ & ، ٤ < س \leq ٦ \\ ٠ & ، ٦ < س \leq ٨ \end{cases} = \begin{cases} \frac{٣-س}{|س-٣|} & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ ١ & ، ٤ < س \leq ٦ \\ ٠ & ، ٦ < س \leq ٨ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ١ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ ١ & ، ٤ < س \leq ٦ \\ ٠ & ، ٦ < س \leq ٨ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٩هـا(س-٣)}{س^٤-٣س} & ، س < ٣ \\ -٣ & ، س = ٣ \\ ٣-س^٢ & ، س > ٣ \end{cases}$$

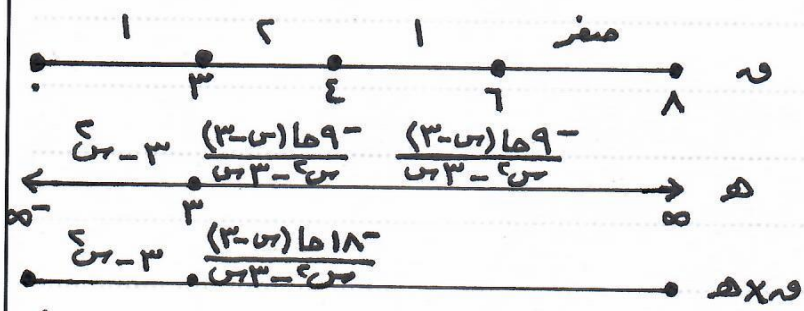
(أ) اتصال ق عندما س = ٣

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ١ ⇐ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣

⇐ نجد قاعدة الإقتران ق(س) × هـ(س)

ستوديو الرياضيات عمار البوايزة



(يكفي هنا قاعدة ق×ه حول س=٣)

$\lim_{س\to -3^-} (ق \times ه)(س) = \lim_{س\to 3} (3-س^2) = (3)-(3)^2 = -6$ (كثير حدود)

$\lim_{س\to +3^+} (ق \times ه)(س) = \lim_{س\to 3} \frac{-18هـا(س-3)}{س(س-3)} = \lim_{س\to 3} \frac{-18}{س} \times \lim_{س\to 3} \frac{هـا(س-3)}{س-3}$

تعويض — امرض: ص = س-٣

$= \frac{-18}{3} \times \lim_{ص\to 0} \frac{هـا ص}{ص}$ ← (من نظرية $\lim_{س\to 0} \frac{هـا س}{س} = 1$)

$= -6 \times 1 = -6$

$\therefore \lim_{س\to 3} (ق \times ه)(س) = -6$ ، $(ق \times ه)(3) = ق(3) \times ه(3)$

$= 2 \times -3 = -6$

بما أنّ $\lim_{س\to 3} (ق \times ه)(س) = (ق \times ه)(3)$ ∴ ق×ه متصل عند س = ٣ ※

(٢) عند الأطراف س = ٠ فإنه $\lim_{س\to 0^+} ق(س) = ق(0) = 1$ (ق متصل من جهة اليمين عند س = ٠)

س = ٨ فإنه $\lim_{س\to 8^-} ق(س) = ق(8) =$ صفر

(ق متصل من جهة اليسار عند س = ٨)

[اكتب نصاً]

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة

عند $س = ٣$ ⇐ $\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^+} ه(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٣} ه(س)$ غير موجودة ∴ ه غير متصل عند $س = ٣$

عند $س = ٤$ ⇐ $\lim_{س \to ٤^-} ه(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} ه(س)$ غير موجودة ∴ ه غير متصل عند $س = ٤$

عند $س = ٦$ ⇐ $\lim_{س \to ٦^-} ه(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٦^+} ه(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٦} ه(س)$ غير موجودة ∴ ه غير متصل عند $س = ٦$

ه(س) متصل على الفترات $(٠، ٣)$ ، $(٣، ٤)$ ، $(٤، ٦)$ ، $(٦، ٨)$

لأنه اقتران ثابت في جميع الحالات .

∴ ه(س) متصل على مجاله ما عدا عند النقاط $\{٣، ٤، ٦\}$

ملاحظات هامة :

① على الطالب أن ينتبه جيداً أنه إذا كان أحد الاقترانين غير متصل فلا يعني ذلك أن $ه \times هـ$ أو $ه \pm هـ$ أو $\frac{ه}{هـ}$ يكون غير متصل ، بل يجب ايجاد قاعدة الاقتران المطلوب سواء كان (ضرب / جمع / طرح / قسمة) ثم البحث في اتصاله .

② لا تنسى أن مجال الاقتران الناتج من الجمع أو الطرح أو القسمة أو الضرب هو ناتج تقاطع مجالي الاقترانين .

ستوديو الرياضيات أ عمار البوايزة

ستوديو الرياضيات	الإجابة النموذجية نموذج الامتحان التجريبي (٣) للثانوية العامة		الأستاذ عمار البوايزة
المادة	الفصل الأول ٢٠٢٠	الفرع	رقم الصفحة
الرياضيات	المستوى الثالث	العلمي	(٤)

السؤال الأول : فرع (ب) (١) :

العدد (-٢) ليس نقطة تشعب للصيغة الطلقة لكنه نقطة تشعب للإقتران أكبر عدد صحيح [س] ∴ نأخذ النهاية من جهتين.

$|س| \rightarrow$ س ، $-س$

$|س+1| \rightarrow$ $س+1$ ، $-س-1$ ، -1

$$[س] = \begin{cases} -3 & ، -3 \leq س < -2 \\ -2 & ، -2 \leq س < -1 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to -2^+} \frac{(|س|-1)^3 + [س] + 1}{(|س+1|)^3 + \frac{1}{2}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{(-س-1)^3 + -2 + 1}{(-س-1)^3 + \frac{1}{2}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{-(س+1)^3 - 1}{-(س+1)^3 + \frac{1}{2}س}$$ (بما أن ناتج المقوض $\frac{-}{-}$)

نفرض ص = س + 1 ، عندما س ← -2 فإن ص ← -1

∴ س = ص - 1

$$= \text{نهـا}_{ص \to -1} \frac{-ص^3 - 1}{-ص^3 + \frac{1}{2}(ص-1)}$$ (نضرب بـ $\frac{2}{2}$ للتبسيط)

$$= \text{نهـا}_{ص \to -1} \frac{-2ص^3 - 2}{-2ص^3 + ص - 1} = \text{نهـا}_{ص \to -1} \frac{-2(ص^3+1)}{-(2ص^3 - ص + 1)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to -1} \frac{2(ص+1)(ص^2 - ص + 1)}{(ص+1)(2ص^2 - 2ص + 1)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص \to -1} \frac{2(ص^2 - ص + 1)}{2ص^2 - 2ص + 1} = \frac{6}{5}$$

	-1	2	0	-1	1
$2ص^2 - 2ص + 1$	+	0	-	0	+

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to -2^-} \frac{(|س|-1)^3 + [س] + 1}{(|س+1|)^3 + \frac{1}{2}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{-(س+1)^3 - 2}{(-س-1)^3 + \frac{1}{2}س} = \frac{-1}{0} = \text{غير موجودة} \Leftarrow$$

النهاية المطلوبة غير موجودة

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة

ستوديو الرياضيات	الإجابة النموذجية نموذج الامتحان التجريبي (٣) للثانوية العامة		الأستاذ عمار البوايزة
المادة	الفصل الأول ٢٠٢٠	الفرع	رقم الصفحة
الرياضيات	المستوى الثالث	العلمي	(٥)

السؤال الأول : فرع (ب) (٢) :

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س + \text{ظا}س - ٢}{\text{ظا}س - ١}$$ (ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} + \frac{\text{ظا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} + \frac{\text{ظا}س - ١}{\frac{١}{\text{ظا}س} - ١}$$ ($\text{ظا}س = \frac{١}{\text{ظتا}س}$)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} + \frac{\text{ظا}س - ١}{\frac{١ - \text{ظا}س}{\text{ظا}س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} + \frac{\text{ظا}س(-(١ - \text{ظا}س))}{١ - \text{ظا}س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} - \text{ظا}س \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{٣}\,\text{حا}س - ١}{\text{ظا}س - ١} - \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \text{ظا}س$$ (نضرب بمرافق البسط)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(٢\,\text{حا}^{٢}س - ١)}{(\frac{\text{حتا}س}{\text{حا}س} - ١)(\sqrt{٣}\,\text{حا}س + ١)} - ١$$ ($\text{ظا}س = \frac{\text{حتا}س}{\text{حا}س}$)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-(\text{حتا}^{٢}س - \text{حا}^{٢}س)}{(\frac{\text{حتا}س - \text{حا}س}{\text{حا}س})(\sqrt{٣}\,\text{حا}س + ١)} - ١$$ ($\text{حتا}^{٢}س - \text{حا}^{٢}س = \text{حتا}٢س$, $\text{حتا}٢س = ١ - ٢\,\text{حا}^{٢}س$)

$$= \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\text{حا}س(\text{حتا}س + \text{حا}س)}{(\text{حتا}س - \text{حا}س)(\sqrt{٣}\,\text{حا}س + ١)} - ١$$

$$= \frac{-\text{حا}\frac{\pi}{4}(\text{حا}\frac{\pi}{4} + \text{حا}\frac{\pi}{4})}{\sqrt{٣}\,\text{حا}\frac{\pi}{4} + ١} - ١ = \frac{-٣}{٢}$$ (تعويض)

ستوديو الرياضيات

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة

ملاحظة : يمكن للطالب الحل بطريقة أخرى مع خلال كتابة
$\text{ظا}س = \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}$ في البسط ثم تبسيط المقدار في البسط
وكذلك كتابة $\text{ظتا}س = \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س}$ في المقام والتبسيط

السؤال الأول : فرع (ب) (٣) :

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(\text{جا}س + \text{جا}(٥-س))^{٢} - ٩\text{جا}س}{س - ١}$$ (نفك البسط كفرق بين مربعين)

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{((\text{جا}س + \text{جا}(٥-س)) - ٣\text{جا}س)((\text{جا}س + \text{جا}(٥-س)) + ٣\text{جا}س)}{س - ١}$$

يجوز التعويض في هذا المقدار أثناء الحل.

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٦(\text{جا}(٥-س) - ٢\text{جا}س)}{س - ١}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٦(\text{جا}(٥-س) - ٢\text{جا}س)}{س - ١} \times \frac{\text{جا}(٥-س) + ٢\text{جا}س}{\text{جا}(٥-س) + ٢\text{جا}س}$$ بتعويض

$$= ٦\ \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(٥-س) - ٤س}{٤(س-١)} = ٦\ \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{-٥(س-١)}{٤(س-١)}$$

$$= ٦ \times \frac{-٥}{٤} = \frac{-١٥}{٢}$$

* طريقة أخرى : يمكن للطالب فك التربيع في البسط ثم الضرب بالمرافق.

* طريقة أخرى : يمكن استخدام الفرض $ص = \text{جا}(٥-س)$ للتخلص من أحد الجذرين ثم استكمال الحل.

ستوديو الرياضيات أ.عمار البوايزة

السؤال الأول : فرع (هـ) :

① $\text{نهـا}_{س \to ٢^+} ([س+٢] - س) = \text{نهـا}_{س \to ٢} |٣س - ٤|$ ، $٢ \notin$ صـ

$|٣٢ - ٤| = ٢ - ٢ + ٢$

$|٣٢ - ٤| = ٢$

أو

$٣٢ - ٤ = ٢$ ✓ $٣٢ - ٤ = -٢$

$٣٢ = ٦$ $٣٢ = ٢$

$٢ = ٢$ ✓ $٢ = \frac{٢}{٣}$ مرفوض

الإجابة : (ب)

② $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{\sim(٨س^{٢} - ٤٠س)}{\sim(س^{٢} - ٢٥)} = \frac{١}{١٦}$

$\text{نهـا}_{س \to ٥} \sim\left(\frac{٨س^{٢} - ٤٠س}{س^{٢} - ٢٥}\right) = \frac{١}{١٦}$

$\text{نهـا}_{س \to ٥} \sim\left(\frac{٨س(س-٥)}{(س+٥)(س-٥)}\right) = \frac{١}{١٦}$

$\text{نهـا}_{س \to ٥} \sim\left(\frac{٨س}{س+٥}\right) = \frac{١}{١٦}$

$\sim(\frac{٤٠}{١٠}) = \frac{١}{٢^{٤}}$

$\sim ٤ = \sim^{-٢}$

∴ $\sim = -٢$

الإجابة : (ب)

③ نحل البسط فرق بين مربعين

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} \frac{هـ^{٢}(٣-س) - ٤}{س - ١} = \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(هـ(٣-س)-٢)(هـ(٣-س)+٢)}{س - ١}$

$= \text{نهـا}_{س \to ١^+} \frac{هـ(٣-س) + ٢}{١ - س} \times \text{نهـا}_{س \to ١^+} (هـ(٣-س) - ٢)$

نفرض ص = ٣ - س ⇐ عندما س ← ١+ فإن ص ← ٢-

$= \text{نهـا}_{ص \to ٢^-} \frac{هـ(ص) + ٢}{٣ - ص - ١} \times (هـ(٢) - ٢)$

[اكتب نصاً]

$= \text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(-٢)}{-(س - (-٢))} \times (-٤)$ حيث $\text{ه}(٢) = -٢$ معطى بالشكل

$= ٤ \text{ نهـا}_{س \to -٢} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(٢)}{س - ٢} = ٤ \text{ه}'(٢)$ = ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٠، ٠)$ ، $(٢، -٢)$

$= ٤ \times \frac{-٢ - ٠}{٢ - ٠} = -٤$

الإجابة : (ب)

④ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(\text{ظا}٢س - ٥س)^٢}{١ - \text{جتا}٢س} = \frac{١٨}{٢٥}$

جتا٢س = ١ - ٢ حا^{٢}س (متطابقة)

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(\text{ظا}٢س - ٥س)^٢}{١ - (١ - ٢\text{حا}^٢س)} = \frac{١٨}{٢٥}$

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(\text{ظا}٢س - ٥س)^٢}{٢\text{حا}^٢س} = \frac{١٨}{٢٥}$

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \left(\frac{\text{ظا}٢س - ٥س}{\text{حا}س}\right)^٢ = \frac{٣٦}{٢٥}$ ← بالقسمة على س

واستخدام نظرية $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا}س}{س}$

$\Leftarrow \left(\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س - ٥س}{\text{حا}س}\right)^٢ = \frac{٣٦}{٢٥}$

$\therefore \left(\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{\text{حا}س} - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٥س}{\text{حا}س}\right)^٢ = \frac{٣٦}{٢٥}$

$\Leftarrow \left(\frac{٢}{م} - ٥\right)^٢ = \frac{٣٦}{٢٥} \Leftarrow \left(\frac{-٣}{م}\right)^٢ = \frac{٣٦}{٢٥}$

$\therefore \frac{٩}{م^٢} = \frac{٣٦}{٢٥} \Leftarrow م^٢ = \frac{٢٥}{٤} \Leftarrow م = \frac{٥}{٢}$

الإجابة : (ﻫ)

السؤال الثاني : فرع (٢) :

(١) $ه(س) = \begin{cases} س^٢ - [س] & ، |س| \leq ١ \\ س^٣ - ٤|س| & ، |س| > ١ \end{cases} = \begin{cases} س^٢ - [س] & ، -١ \leq س \leq ١ \\ س^٣ - ٤|س| & ، س > ١ ، س < -١ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^٢ + ١ & ، -١ \leq س < ٠ \\ س^٢ & ، ٠ \leq س < ١ \\ \text{صفر} & ، س = ١ \\ س^٤ - ٤س & ، س > ١ \\ س^٤ + ٤س & ، س < -١ \end{cases}$

* اتصال ه عند $س = ١$

$نهـا_{س \to ١^+} ه(س) = نهـا_{س \to ١} (س^٤ - ٤س) = -٣$

$نهـا_{س \to ١^-} ه(س) = نهـا_{س \to ١} س^٢ = ١$

$\therefore نهـا_{س \to ١} ه(س)$ غير موجودة

لأن $نهـا_{س \to ١^+} ه(س) \neq نهـا_{س \to ١^-} ه(س)$

* $ه(١) =$ صفر

وبالتالي $ه(س)$ غير متصل عند $س = ١$ $\therefore$ ه غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

(٢) * $(ه \circ ق^٢ \pi س)'(\frac{١}{٤}) = ه'(ق^٢ \pi (\frac{١}{٤}))(ق^٢ \pi س)'(\frac{١}{٤})$

$= ه'(٢) \times (٢ ق \pi س \times \pi \times ق \pi س ظا \pi س)(\frac{١}{٤})$

$= ٢\pi \, ه'(٢) \times ق^٢ \frac{\pi}{٤} ظا \frac{\pi}{٤} = ٤\pi \, ه'(٢) = ١١٢\pi$

حيث خلال الفترة $ه'(س) = ٤س^٣ - ٤$ عندما $س > ١$

* عندما $س = ٠$ فإن $نهـا_{س \to ٠^+} ه(س) = ٠ \neq ١ = نهـا_{س \to ٠^-} ه(س)$ $\therefore نهـا_{س \to ٠} ه(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ه غير متصل عند $س = ٠$

$\Leftarrow ه'(٠)$ غير موجودة $\Leftarrow ه'(٠)$ غير موجودة

[اكتب نصاً]

السؤال الثاني : فرع (ب) :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}'(س) - \text{ق}(س) - س}{س - ٢} = ١٢ \quad ، \quad \text{ق}(٢) = -١$$

لاحظ أنه التعويض يعطي $(\frac{٠}{٠})$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}'(س) - \text{ق}(س) - س + ٢ - ٢}{س - ٢} = ١٢ \quad \begin{cases} \text{بجمع وطرح} \\ \text{٢ للبسط} \end{cases}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(\text{ق}'(س) - \text{ق}(س) - ٢) - (س - ٢)}{س - ٢} = ١٢ \quad \text{(توزع النهاية)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}'(س) - \text{ق}(س) - ٢}{س - ٢} - \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١٢$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(\text{ق}(س) + ١)(\text{ق}(س) - ٢)}{س - ٢} - ١ = ١٢$$

$$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}(س) + ١}{س - ٢} \times \text{نهـا}_{س \to ٢} (\text{ق}(س) - ٢) = ١٣ \quad ، \quad \text{ق}(٢) = -١$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٢)}{س - ٢} \times (\text{ق}(٢) - ٢) = ١٣$$

$$(-١ - ٢)\ \text{ق}'(٢) = ١٣ \Leftarrow \text{ق}'(٢) = \frac{-١٣}{٣}$$

السؤال الثاني : فرع (جـ) :

$$\text{ق}'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(س + هـ) - \text{ق}(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}٢(س + هـ)} - \sqrt{١ - \text{جتا}٢س}}{هـ}$$

(بالضرب بمرافق البسط)

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}٢(س + هـ)} - \sqrt{١ - \text{جتا}٢س}}{هـ} \times \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}٢(س + هـ)} + \sqrt{١ - \text{جتا}٢س}}{\sqrt{١ - \text{جتا}٢(س + هـ)} + \sqrt{١ - \text{جتا}٢س}}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(1 - جتا٢(س+هـ)) - (1 - جتا٢س)}{هـ \left(\sqrt{1 - جتا٢(س+هـ)} + \sqrt{1 - جتا٢س}\right)}$$

يمكنه التعويض

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جتا٢س - جتا٢(س+هـ)}{هـ \times \sqrt{2}\sqrt{1 - جتا٢س}}$$

(باستخدام متطابقة $جتاس - جتاص$)

$$= -2 \, حا\frac{س+س+هـ}{2} \, حا\frac{س-(س+هـ)}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - جتا٢س}} \lim_{هـ \to 0} \frac{-2 حا(٢س+هـ) \, حا(-\frac{هـ}{2})}{هـ}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - جتا٢س}} \lim_{هـ \to 0} \frac{حا(٢س+هـ) \, حا(-هـ)}{هـ}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - جتا٢س}} \times \lim_{هـ \to 0} حا(٢س+هـ) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{حا(-هـ)}{هـ}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - جتا٢س}} \times حا٢س \times -1 = \frac{حا٢س}{\sqrt{1 - جتا٢س}}$$

* ملاحظة : يمكن للطالب استخدام التعريف $و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$

السؤال الثاني : فرع (د) :

① معدل التغير في الفترة $[0 ، ٢]$ يساوي ٧

$$٧ = \frac{و(٢) - و(0)}{٢ - 0} \Leftarrow ٧ = \frac{٢^٢ - ٢٢ + ١ - ١}{٢}$$

$$\Leftarrow ٢^٢ + ٢٢ = ٢٧ \Leftarrow ٢^٢ - ٢٥ = 0$$

$$\therefore ٢(٢ - ٥) = 0 \leftarrow ٢ = 0 \text{ غير ممكنة}$$

$٢ = ٥$

الإجابة : (هـ)

[اكتب نصاً]

⇐ تابع السؤال الثاني : فرع (د) :

(٢) $(قـ \circ هـ)'(-١,٢) = ٦$

$قـ'(هـ(-١,٢)) \; هـ'(-١,٢) = ٦$ ، $هـ(-١,٢) = -٠,٥$ ، $هـ'(-١,٢) = ٢$

$٢ \; قـ'(-٠,٥) = ٦ \Leftarrow$ $قـ'(-٠,٥) = ٣$

$قـ(س) = -هـ(س)$ ، $-١ \leq س < ٠ \Leftarrow قـ'(س) = -هـ'(س)$

$\therefore قـ'(-٠,٥) = -هـ'(-٠,٥) \Leftarrow -٣ = هـ'(-٠,٥)$ الإجابة : (هـ)

(٣) نشتق الطرفين $قـ(س) \times ٢س \; قـ'(س^٢) + قـ'(س) \; قـ(س) = ٢س + ٣$

عندما $س = -١ \Leftarrow -٢ \; قـ(-١) \; قـ'(١) + قـ'(-١) \; قـ(١) = -٢ + ٣$

$قـ(-١) = ٣ \Leftarrow -٢ \times ٣ \; قـ'(١) + قـ'(-١) \; قـ(١) = ١$

$\therefore -٦ \; قـ'(١) + قـ'(-١) \; قـ(١) = ١$ .....(*)

نعوض في العلاقة الرئيسية $(س = -١) \Leftarrow قـ(-١) \; قـ(١) = ٠$

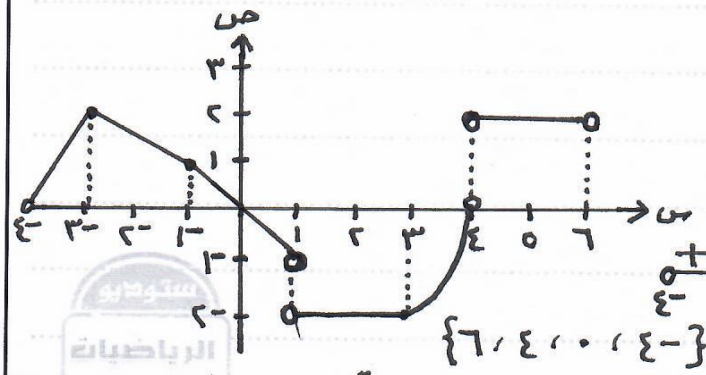
وبما أن $قـ(-١) = ٣ \Leftarrow قـ(١) = ٠$

نعوض في العلاقة (*) $\Leftarrow -٦ \; قـ'(١) + ٠ = ١ \Leftarrow قـ'(١) = -\frac{١}{٦}$

الإجابة : (ب)

السؤال الثالث : فرع (ب) :

(١) إشارة المشتقة الأولى لـ قـ



حيث النقاط الحرجة هي $\{-٤ ، ٠ ، ٤ ، ٦\}$

قـ متزايد على الفترات $[-٤ ، ٠]$ ، $[٤ ، ٦]$ ومتناقص على الفترة $[٠ ، ٤]$

[اكتب نصاً]

(٢) من خلال الشكل نجد اشارة $\text{ق}'$ (المشتقة الثانية)

يوجد نقطة انعطاف واحدة فقط عندما $س = -٣$ ، $\text{ق}'(-٣)$ غير موجودة بينما النقاط $\{١، ٣، ٤\}$ ليست نقاط إنعطاف ، رغم أنّ $\text{ق}'(١)$ غير موجودة ، $\text{ق}'(٤)$ غير موجودة ، $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة والسبب عدم تغير اتجاه التقعر حول هذه النقاط .

(٣) $ص = \text{ق}(س) - \text{ق}(٣س - س^٣)$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \text{ق}'(س) - (٣ - ٣س^٢)\ \text{ق}'(٣س - س^٣)$

$\left|\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}\right|_{س=٢} = \text{ق}'(٢) - (٣ - ٣(٢)^٢)\ \text{ق}'(٣ \times ٢ - (٢)^٣)$

$= \text{ق}'(٢) + ٩\ \text{ق}'(-٢)$

$= -٢ + \frac{٣}{٢} \times ٩ = \frac{٢٣}{٢}$

من الرسم : $\text{ق}'(٢) = -٢$

$\text{ق}'(-٢)$ تقع على المستقيم المار بالنقطتين $(-١، ١)$ ، $(-٣، ٢)$

$م = \frac{-١}{٢}$ ∴ معادلة ص $-١ = \frac{-١}{٢}(س + ١)$

$\therefore \text{ق}'(-٢) = \frac{٣}{٢}$

نشتق لإيجاد $\frac{\text{د}^٢ص}{\text{د}س^٢}$

$\Leftarrow \frac{\text{د}^٢ص}{\text{د}س^٢} = \text{ق}''(س) - \left((٣ - ٣س^٢)^٢\ \text{ق}''(٣س - س^٣) - ٦س\ \text{ق}'(٣س - س^٣)\right)$

$\left|\frac{\text{د}^٢ص}{\text{د}س^٢}\right|_{س=٢} = \text{ق}''(٢) - ((-٩)^٢\ \text{ق}''(-٢) - ١٢\ \text{ق}'(-٢))$

$= \text{صفر} - \left(٨١ \times \frac{-١}{٢} - ١٢ \times \frac{٣}{٢}\right)$

$= -\left(\frac{-٨١}{٢} - ١٨\right)$

$= \frac{١١٧}{٢}$

من الرسم : $\text{ق}''(٢) = \text{صفر}$

($\text{ق}''$ خط مستقيم // محور السينات)

$\text{ق}'(-٢)$ = ميل المستقيم المار بـ $(-١، ١)$ ، $(-٣، ٢)$

$= \frac{-١}{٢}$

(٤) $ل(س) = (ق'(س))^{٣}$

$ل'(س) = ٣(ق'(س))^{٢} \times ق''(س)$

$ل''(س) = ٣(ق'(س))^{٢} \times ق''(س) + ٦ ق'(س)(ق''(س))^{٢}$

* $ق'(س) > ٠$ في الفترة $(-٣، -١)$ كما يتضح من الرسم (موجبة)
* $(ق'(س))^{٢} > ٠$ في الفترة $(-٣، -١)$ لأنها مربعة (موجبة)
* $(ق''(س))^{٢} > ٠$ في الفترة $(-٣، -١)$ لأنها مربعة (موجبة)

$ق''(س) = -\frac{١}{٢}$ في الفترة $(-٣، -١)$ = ميل الخط المستقيم

$\Leftarrow ق''(س) =$ صفر (مشتقة ثابت) لكل $س \in (-٣، -١)$

وبالتالي $ل''(س) = ٣ \times$ موجب $\times$ صفر $+ ٦ \times$ موجب $\times$ موجب

$=$ موجب $\Leftarrow ل''(س) > ٠$ $\therefore$ ل مقعر لأعلى في

الفترة $(-٣، -١)$ ✻ وهو المطلوب.

(٥) * $ق'(-\frac{١}{٢})$ تقع على المستقيم المار بالنقطتين $(-١، ١)$، $(٠، ٠)$ $\therefore م = -١$

$\therefore$ معادلة $ص = -س$ $\therefore$ بالتعويض $ق'(-\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}$

* $ق''(٥) =$ صفر لأنها مشتقة $ق'$ وهو ثابت حول العدد (٥)

* $ق''(-٣) =$ $\leftarrow ق''_{+}(-٣) =$ ميل المستقيم المار بـ $(-٣، ٣)$، $(-١، ١)$

$= -\frac{١}{٢}$

$\leftarrow ق''_{-}(-٣) =$ ميل المستقيم المار بـ $(-٤، ٠)$، $(-٣، ٢)$

$= ٢$

$\therefore ق''_{-}(-٣) \neq ق''_{+}(-٣)$ $\therefore$ $ق''(-٣)$ غير موجودة

* $ق''(\frac{١}{٢}) =$ صفر لأنه $ق'(س)$ حول $س = \frac{١}{٢}$ ثابت، $ق''(س) = ٠$

ستوديو الرياضيات عمار البوايزة

السؤال الثالث ؛ فرع (ب) :

$$(ص+1)^{3} = (س-2)^{2}$$

$$3(ص+1)^{2}(ص') = 2(س-3)$$

$$3(ص+1)^{2} \times ص' + 6(ص+1)(ص')(ص') = 2$$

$$3(ص+1)^{2} ص' + 6(ص+1)\left(\frac{2(س-2)}{3(ص+1)^{2}}\right)^{2} = 2$$

لأنه $ص' = \frac{2(س-2)}{3(ص+1)^{2}}$

$$\Leftarrow 3(ص+1)^{2} ص' + 6(ص+1)\times\frac{4(س-2)^{2}}{9(ص+1)^{4}} = 2$$

$$3(ص+1)^{2} ص' + \frac{8(س-2)^{2}}{3(ص+1)^{3}} = 2 \quad \text{لأنه } (ص+1)^{3} = (س-2)^{2}$$

$$3(ص+1)^{2} ص' = 2 - \frac{8}{3} \Leftarrow 3(ص+1)^{2} ص' = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore ص' = \frac{-2}{9(ص+1)^{2}} \quad \text{وهو المطلوب .} \quad \#$$

السؤال الثالث ؛ فرع (جـ) :

① $\left(\frac{1}{ه\circ ه}\right)'(1) = \left(\frac{1}{ه(1)}\right)\left(\frac{1}{ه(1)}\right)' = ه'(1)\left(\frac{-ه'(1)}{(ه(1))^{2}}\right)\left(\frac{1}{ه(1)}\right)$

نشتق العلاقة الرئيسية :

$$ه(س)\,ه'(س) + (ه'(س))^{2} = 1$$

$$\Leftarrow ه(1)\,ه'(1) + (ه'(1))^{2} = 1$$

$$-3\,ه'(1) + \left(\frac{-1}{3}\right)^{2} = 1$$

$$\Leftarrow -3\,ه'(1) = \frac{8}{9} \quad \therefore ه'(1) = \frac{-8}{27}$$

من العلاقة الرئيسية

$ه(1)\,ه'(1) = 1$

$ه(1) = -3 \Leftarrow ه'(1) = \frac{-1}{3}$

$$\therefore \left(\frac{1}{ه\circ ه}\right)'(1) = ه'\left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{8}{27} \times (-3) = \frac{8}{3}$$

$$= 6 \times \frac{8}{3} = 16$$

الإجابة : (ب)

[اكتب نصاً]

السؤال الرابع : فرع (٢) :

(١) بما أن $هـ$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ فإنه $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = \lim_{س \to ١^+} هـ(س)$

$\therefore \lim_{س \to ١} (٥س + ب) = \lim_{س \to ١} (٢س^٢ + بس + ٤)$

$٥ + ب = ٢ + ب + ٤ \Leftarrow \boxed{٢ = ١}$

بما أنه $هـ$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ $\therefore هـ'(١) = هـ'_+(١) = هـ'_-(١)$

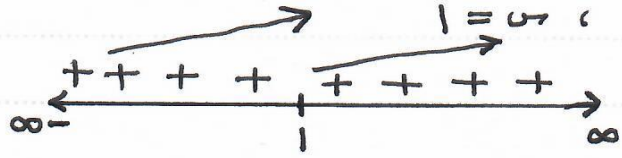
حيث $هـ'(س) = \begin{cases} ٢ + ب & ، س > ١ \\ ٥ & ، س < ١ \end{cases}$

$\therefore ٢ + ب = ٥$ وبما أنه $\boxed{٢ = ١}$ فإن $\boxed{ب = ٤}$

(٢) $هـ(س) = \begin{cases} ٥س + ٤ & ، س > ١ \\ ٥س + ٤ & ، س \leq ١ \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٥ & ، س > ١ \\ ٥ & ، س < ١ \\ ٥ & ، س = ١ \end{cases}$ $هـ'(س) \neq ٠$ لجميع قيم $س \in$ مجاله ح

$\therefore$ إشارة $هـ'$



لا يوجد للاقتران $هـ$ نقاط حرجة ، وهو متزايد على مجاله ح .

$\therefore$ لا يوجد نقاط قصوى (صغرى أو عظمى) للاقتران $هـ$.

[اكتب نصاً]

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة

السؤال الرابع : فرع (٢) :

(١) بما أن هـ قابلة للاشتقاق عند س = ١ فإن $\lim_{س \to 1^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to 1^+}$ هـ(س)

$\therefore \lim_{س \to 1}$ (٥س + ب) = $\lim_{س \to 1}$ (٢س² + بس + ٤)

٥ + ب = ٢ + ب + ٤ ⇐ [٢ = ١]

بما أنه هـ قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ هـ'(١)$^+$ = هـ'(١)$^-$

حيث هـ'(س) = { ٢ + ب ، س > ١ ؛ ٥ ، س < ١ }

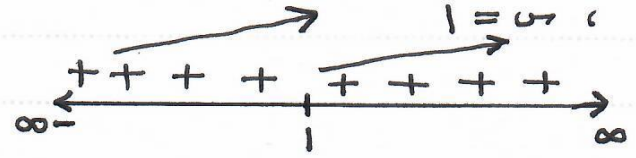
∴ ٢ + ب = ٥ وبما أنه [٢ = ١] فإن [ب = ٤]

(٢) هـ(س) = { ٥س + ٤ ، س > ١ ؛ ٥س + ٤ ، س ≤ ١ }

هـ'(س) = { ٥ ، س > ١ ؛ ٥ ، س < ١ ؛ ٥ ، س = ١ }

هـ'(س) ≠ ٠ لجميع قيم س ∈ مجاله ح

∴ إشارة هـ'



لا يوجد للاقتران هـ نقاط حرجة ، وهو متزايد على مجاله ح .

∴ لا يوجد نقاط قصوى (صغرى أو عظمى) للاقتران هـ .

السؤال الرابع : فرع (ب) :

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{٣(٢\text{س}-١)^{-٢} - ٢(٣\text{س}-١)}{(٢\text{س}-١)^{٢}} = \frac{-١}{(٢\text{س}-١)^{٢}}$$

لتكن نقطة التماس $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ⇐ ميل المماس = $\text{ه}'(\text{س}_١) = \frac{-١}{(٢\text{س}_١-١)^{٢}}$

ميل المستقيم $(\text{س} + ٩\text{ص} - ٢ = ٠)$ يساوي $\frac{-١}{٩}$

بما أن المماس // المستقيم ⇐ $\text{ه}'(\text{س}_١) = \frac{-١}{٩}$

$\therefore \frac{-١}{(٢\text{س}_١-١)^{٢}} = \frac{-١}{٩}$ ⇐ $(٢\text{س}_١-١)^{٢} = ٩$

$\therefore ٢\text{س}_١ - ١ = ٣$ أو $٢\text{س}_١ - ١ = -٣$

$٢\text{س}_١ = ٤$ $\quad$ $٢\text{س}_١ = -٢$

$\therefore \boxed{\text{س}_١ = ٢}$ $\quad$ $\boxed{\text{س}_١ = -١}$

⇐ النقاط التي يكون عندها المماس المنحنى // المستقيم $(\text{س} + ٩\text{ص} - ٢ = ٠)$ هي : $(٢ ، \text{ه}(٢)) = (٢ ، \frac{٥}{٣})$ ، $(-١ ، \text{ه}(-١)) = (-١ ، \frac{٤}{٣})$

* كلا المماسين ميلهما = ميل المستقيم = $\frac{-١}{٩}$ (لأنهما متوازيان)

$\therefore$ ميل العمودي على المماس عند كل نقطة = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = ٩$

$\therefore$ عند النقطة $(٢ ، \frac{٥}{٣})$

فإن معادلة العمودي على المماس هي : $\text{ص} - \frac{٥}{٣} = ٩(\text{س}-٢)$

$\therefore \text{ص} = ٩\text{س} - \frac{٤٩}{٣}$

وعند النقطة $(-١ ، \frac{٤}{٣})$

فإن معادلة العمودي على المماس هي : $\text{ص} - \frac{٤}{٣} = ٩(\text{س}+١)$

$\therefore \text{ص} = ٩\text{س} + \frac{٣١}{٣}$

ستوديو الرياضيات عمار البوايزة

السؤال الرابع : فرع (هـ) :

① ع(ن) = ف'(ن) = ٦ن² - ٢٤ن

⇐ ت(ن) = ع'(ن) = ١٢ن - ٢٤ ∴ عندما ينعدم التسارع فإن

ت(ن) = صفر ⇐ ١٢ن - ٢٤ = ٠ ⇐ ن = ٢

∴ المسافة عند انعدام التسارع = ف(٢)

= ٢(٢)³ - ١٢(٢)² + ٩٥ = ٦٣ م

الإجابة : (هـ)

② من خلال منحنى هـ(ن) المرسوم جانباً نحدد إشارة هـ، هـ'، هـ''

	أ	ك	هـ	ل
هـ	+	+	+	+
هـ'	−	+	+	−
هـ''	+	+	−	−

⇐ هـ(ن) × هـ'(ن) × هـ''(ن) < صفر في الفترة]ك، هـ[من بين الفترات المعطاة . ∴ الإجابة : (هـ)

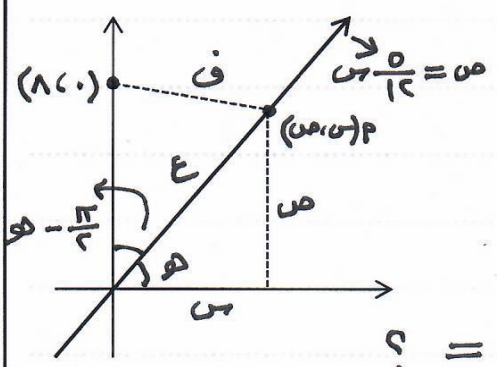
③ إشارة هـ'

	٥	٢	
هـ'	− − − −	+ + + +	

∴ النقطة (٢، -١) صغرى محلية ، ولا يمكن أن تكون مطلقة لأنه يوجد قيم ونقط أصغر منها .

∴ الإجابة : (ب)

السؤال الخامس : فرع (٢) :



لتكن النقطة المتحركة P(س، ص)

ف : المسافة بين النقطة P والنقطة (٨،٠)

ع : المسافة التي تقطعها النقطة P

ه : زاوية الميل

$\frac{د ع}{د ن}$ = ٢ سم/د المطلوب : $\frac{د ف}{د ن}$ | $_{ن=٢ د}$ = ؟

$ف^{٢} = ع^{٢} + (٨)^{٢} - ٢ \times ٨ \times ع$ جتا $(\frac{\pi}{٢} - ه)$ (قانون جيب التمام)

$= ع^{٢} + ٦٤ - ١٦ ع$ جاه (متطابقة: جتا$(\frac{\pi}{٢}-ه)$ = جاه)

بما أن $\frac{د ع}{د ن}$ = ٢ ⇐ ع = ٢ن

⇐ $ف^{٢} = (٢ن)^{٢} + ٦٤ - ١٦ \times ٢ن \times \frac{٥}{١٣}$

$ف^{٢} = ٤ن^{٢} + ٦٤ - \frac{١٦٠}{١٣} ن$

(نشتق) $٢ ف \frac{د ف}{د ن} = ٨ن - \frac{١٦٠}{١٣}$

عندما ن = ٢ ⇐ $ف^{٢} = ٤(٢)^{٢} + ٦٤ - \frac{٢ \times ١٦٠}{١٣}$

$= \frac{٧٢٠}{١٣}$

∴ ف = $\sqrt{\frac{٧٢٠}{١٣}}$

∴ $٢ \times \sqrt{\frac{٧٢٠}{١٣}} \times \frac{د ف}{د ن} = ٨ \times ٢ - \frac{١٦٠}{١٣}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٤٨}{١٣} \sqrt{\frac{١٣}{٧٢٠}}$ ⇐ $\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢}{\sqrt{٦٥}}$ سم/د

ظاه = ميل المستقيم = $\frac{٥}{١٢}$

$ظا^{٢}ه + ١ = قا^{٢}ه$

$(\frac{٥}{١٢})^{٢} + ١ = قا^{٢}ه$

∴ $قا^{٢}ه = \frac{١٦٩}{١٤٤}$

⇐ $قاه = \frac{١٣}{١٢}$

∴ $جاه = \frac{١٢}{١٣}$

∴ $جا^{٢}ه = ١ - جتا^{٢}ه$

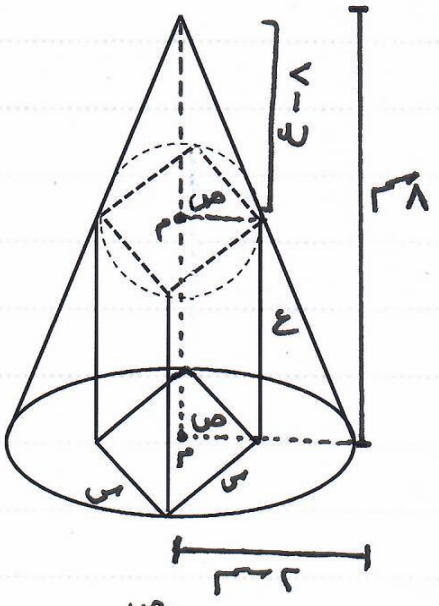
$= ١ - (\frac{١٢}{١٣})^{٢}$

$= \frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ $\boxed{جاه = \frac{٥}{١٣}}$

مع أطيب تحيات الأستاذ عمار البوايزة

السؤال الخامس : فرع (ب) :



نفرض ارتفاع متوازي المستطيلات = ع

قاعدة متوازي المستطيلات مكونه مربعة

نفرض أبعادها : س

∴ ه = حجم متوازي المستطيلات

$= س^2 \times س \times ع = س^2 ع$

$= س^2 (٨ - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} س)$

$= ٨ س^2 - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} س^3$

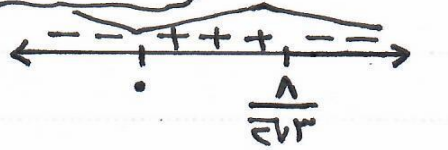
$ه' = ١٦ س - ٢\sqrt{٣} س^2$

$ه' = ٠ \Leftarrow ١٦ س - ٢\sqrt{٣} س^2 = ٠$

$\Leftarrow س (٨ - \sqrt{٣} س) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = \frac{٨}{\sqrt{٣}}$

اشارة ه'

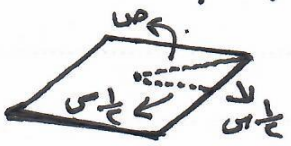


$\Leftarrow$ يوجد قيمة عظمى عندما $س = \frac{٨}{\sqrt{٣}}$

∴ حجم أكبر متوازي مستطيلات = $ه(\frac{٨}{\sqrt{٣}})$

$= ٨ (\frac{٨}{\sqrt{٣}})^2 - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} (\frac{٨}{\sqrt{٣}})^3$

$= \frac{(٨)^3}{١٨} - \frac{(٨)^3 \cancel{\sqrt{٣}}}{\cancel{\sqrt{٣}} \times ٢٧} = \frac{٢٥٦}{٢٧}$ سم^3



$ص^2 = (\frac{١}{٢})^2 س^2 + (\frac{١}{٢})^2 س^2$

$= \frac{١}{٢} س^2$ ∴ $ص = \frac{س}{\sqrt{٢}}$

(من نظرية فيثاغورس)

من تشابه المثلثات

$\frac{٨ - ع}{ص} = \frac{٨}{٢}$

∴ $٤ ص = ٨ - ع$

∴ $ع = ٨ - ٤ ص$

$ع = ٨ - \frac{٤ س}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow ع = ٨ - ٢\sqrt{٢} س$

[اكتب نصاً]

السؤال الخامس : فرع (ح) :

① $ه(س) = ٣س^٤ - ٦س$

$ه'(س) = ٦س - ٦ = ٠$

$\therefore ٦س = ٦ \therefore$ **س = ١**

ظل زاوية الانطلاق (هـ) = $ه'(١) \Leftarrow$ ظا هـ = -٣

من المتطابقة : $قا^٢هـ = ١ + ظا^٢هـ \Leftarrow قا^٢هـ = ١ + (-٣)^٢$

$\therefore قا^٢هـ = ١٠ \Leftarrow قاهـ = \sqrt{١٠}$ ومنها جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

الاجابة : (ب)

② $ه(س) = (ب-٣)س^٤ - ٨س + ٢$

$ه'(س) = ٢(ب-٣)س - ٨$

$ه'(س) = ٢(ب-٣)$

بكون $ه(س)$ متقعراً للأسفل عندما $ه'(س) < ٠$

$\Leftarrow ٢(ب-٣) < ٠ \Leftarrow ب < ٣ \therefore ب \in (-\infty ، ٣)$

الاجابة : (ح)

مع

أمنيات التوفيق والنجاح

الأستاذ : عمار البوايزة