الشرح الوافي

في الرياضيات

الصف التاسع / الفصل الأول

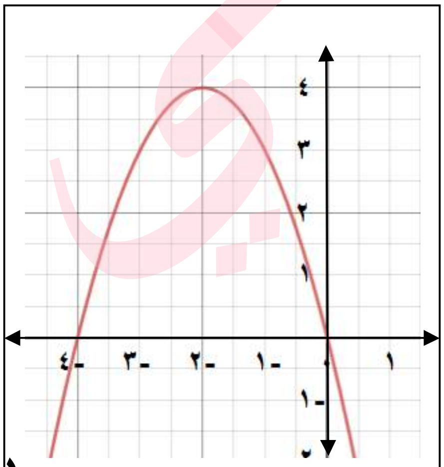
الوحدة الثالثة

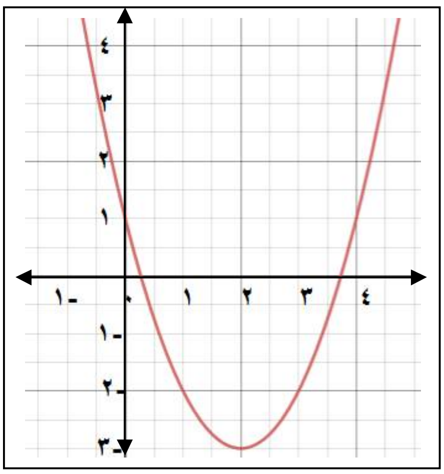
الاقتران التربيعي

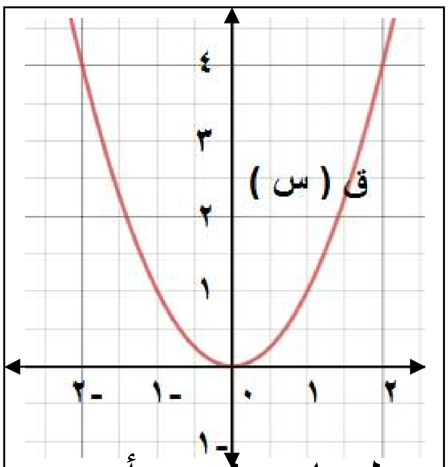
إعداد

الأستاذ : سليمان دلدوم أبو هبه

٠٧٩٥٠٠٠٥٧٣







الاقتران التربيعي

- **الصيغ التي يكتب بها الاقتران التربيعي**

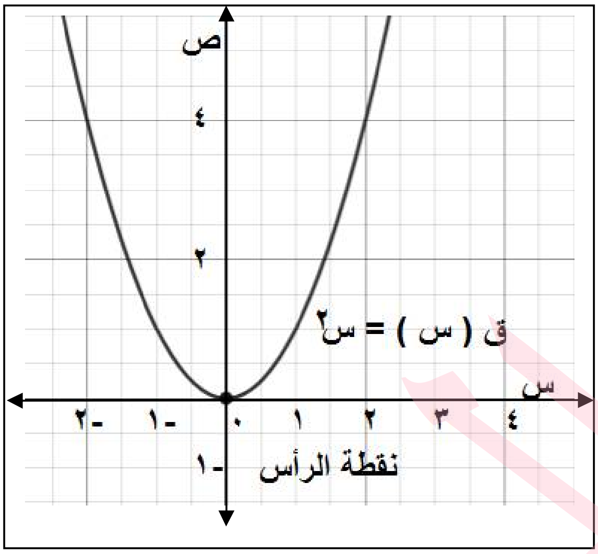
١) الصورة العامة : ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ← أ ≠ ٠

٢) الصورة القياسية : ق(س) = أ(س − د)^{٢} + هـ ← أ ≠ ٠

٣) ق(س) = أ(س − م)(س − ن) ← أ ≠ ٠ : م ، ن **الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات**

- **لكن في البداية لنتعرف على الاقتران الإمام** ق(س) = س^{٢}

يسمى الاقتران ق(س) = س^{٢} **بالاقتران الإمام للاقترانات التربيعية ، ومن ميزاته :**



١) منحنى الاقتران يمثل قطع مكافئ مفتوح للأعلى

٢) لا يوجد قيم سالبة لـ ص = ق(س)

٣) منحنى الاقتران متماثل حول محور السينات

فمثلاً عند س = ٢ ← ص = ٤

عند س = -٢ ← ص = ٤

٤) لمنحنى الاقتران نقطة مرجع أو نقطة رأس عند (٠ ، ٠)

٥) يمكن رسم منحنى الاقتران دون استخدام جدول

وسوف نتعرف لاحقا على أهمية الاقتران الإمام في رسم الاقترانات التربيعية

- **لاحظ في كل صيغ الاقتران التربيعي أن العامل المشترك بينها هو العدد الحقيقي** أ ≠ ٠

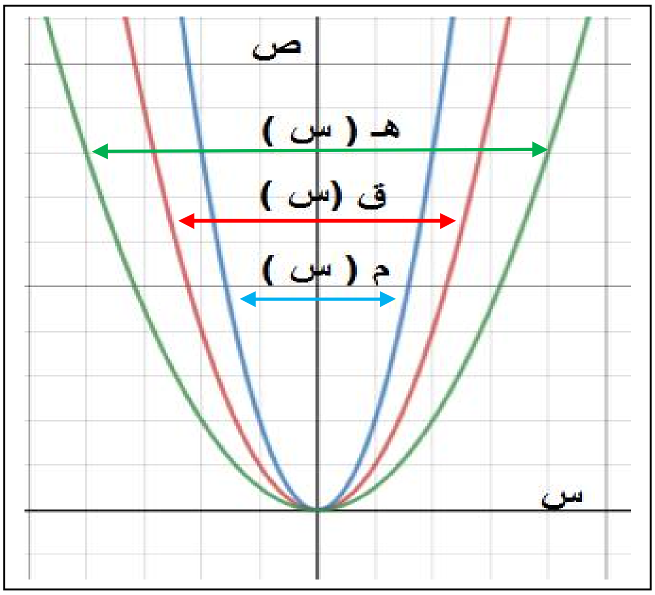
معامل س^{٢} (أ ≠ ٠) **، في كل الصيغ السابقة تتحكم في درجة توسع (تضيق) منحنى الاقتران التربيعي ، وكذلك متى يكون الاقتران مفتوح للأعلى أو للأسفل كما يلي :**

١) أ > ٠ **المنحنى مفتوح للأعلى**  ، أ < ٠ **المنحنى مفتوح للأسفل** 

٢) إذا كان −١ < أ < ١ ← (|أ| < ١) **، فإن منحنى الاقتران يكون أوسع من منحنى الاقتران الإمام** ق(س) = س^{٢} **(يوجد توسع في فتحة الاقتران ←——→)**

٣) إذا كان أ $<$ −١ أو أ $>$ ١ ← (|أ| $>$ ١)، فإن منحنى الاقتران يكون أضيق من منحنى الاقتران الإمام ن(س) = س^{٢} (يوجد تضيق في فتحة الاقتران ← →)

- **الشكل المجاور يبين توسع وتضيق الاقتران التربيعي بالنسبة للاقتران الإمام حيث :**



- ن(س) = س^{٢} الاقتران الإمام
- م(س) = أس^{٢} ← |أ| $>$ ١
- هـ(س) = أس^{٢} ← |أ| $<$ ١

لقد تم شرح الاقتران التربيعي بصوره المختلفة ، بحيث كان :

القسم الأول : مخصص لطلبة الصف التاسع حسب الكتاب المقرر (الصورة العامة)

القسم الثاني : مخصص لشرح الاقتران التربيعي بالصورة القياسية

القسم الثالث : مخصص لشرح الاقتران التربيعي بدلالة صفري الاقتران

القسم الرابع : مخصص لحل معادلات كسرية تؤول إلى معادلات تربيعية

القسم الأول الوحدة الثالثة :   الاقتران التربيعي

٣ ــ ١   الاقتران التربيعي ورسم منحناه

مراجعة :

- العلاقة : العلاقة من أ إلى ب : هي مجموعة الأزواج المرتبة (س،ص) التي مساقطها الأولى س تنتمي إلى المجموعة أ ، ومساقطها الثانية ص تنتمي إلى المجموعة ب .
- الاقتران : هو علاقة تربط بين مسقطيها س (المجال) و ص (المدى) ؛ بحيث يرتبط كل عن عنصر في المجال بصورة واحدة فقط في المدى .
- الاقتران الخطي : هو الاقتران الذي يكتب على الصورة ق(س) = أس + ب حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ٠ .

سؤال : أي من الاقترانات الآتية اقتران خطي ؟

أ) ق(س) = ٤س − ٧   ب) هـ(س) = ٢س − ٤   جـ) ل(س) = ٤س^{٢} + ٧س + ٢

الحل :

لاحظ أنه في الاقترانين ق(س) ، هـ(س) العبارة المرتبطة في كل اقتران عبارة خطية ، لذلك فإن الاقترانين اقترانيين خطيين ، بينما في الاقتران ل(س) العبارة المرتبطة في الاقتران عبارة تربيعية ، مثل هذا الاقتران يسمى اقتراناً تربيعياً .

<u>تعريف (١)</u>

إذا كان ق : ح ⟵ ح ، حيث ق(س) = أس^{٢} + بس+جـ ، وكانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران ق يسمى اقتراناً تربيعياً ، ويسمى العدد أ معامل س^{٢} ، ويسمى العدد ب معامل س ويسمى العدد جـ الحد المطلق ، وبتعبير عام تسمى أ ، ب ، جـ معاملات الاقتران التربيعي ق ، ومجال ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، ومداه مجموعة صور المجال .

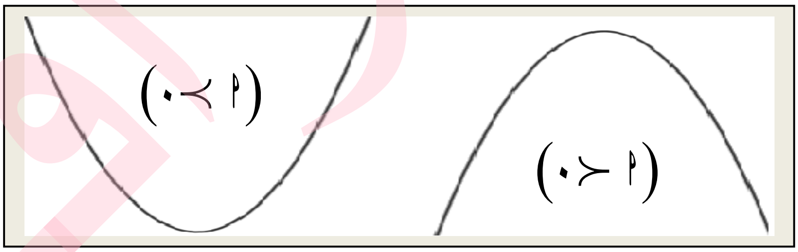
مثال (١) : شامل مثال (٣ – ١) + تدريب (٣ – ١)كتاب مدرسي ص٨٣

أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟ ثم اكتب معاملات الاقتران إذا كان تربيعي

الاقتران	تربيعي	ليس تربيعي	معامل $س^{٢}$	معامل س	الحد المطلق	السبب
$ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٧$	✓		١	٣	٧	
$هـ(س) = ٢س - س^{٢}$ $هـ(س) = -س^{٢} + ٢س$	✓		-١	٢	٠	
$ع(س) = س + ٤$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$ء(س) = ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ١$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$ق(س) = ٢س^{٢}$	✓		٢	٠	٠	
$هـ(س) = س^{\frac{١}{٢}} - س^{٢}، س \succ ٠$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$ل(س) = س^{٢} - ٥س + \frac{١}{٢}$	✓		١	-٥	$\frac{١}{٢}$	

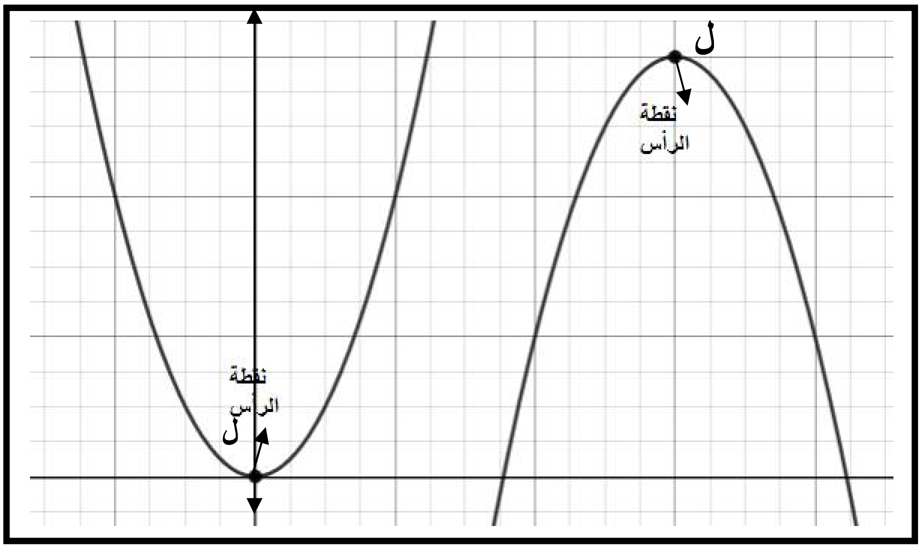
:: التمثيل البياني للاقتران التربيعي :

١) عند تمثيل منحنى الاقتران التربيعي بيانياً نحصل على أحد المنحنيات التالية :



مفتوح للأعلى مفتوح للأسفل

٢) من خلال تعريف (١) العدد الحقيقي أ (معامل $س^{٢}$) ، حيث أ ≠ ٠ ، إما أن يكون موجباً (أ ≻ ٠) ، أو سالباً (أ ≺ ٠) ، وأهمية إشارة معامل $س^{٢}$ أنها تحدد هل منحنى الاقتران ق مفتوح للأعلى أو للأسفل ٠ (الشكل أعلاه)



٣) في الشكل المجاور النقطة

ل تسمى رأس الاقتران

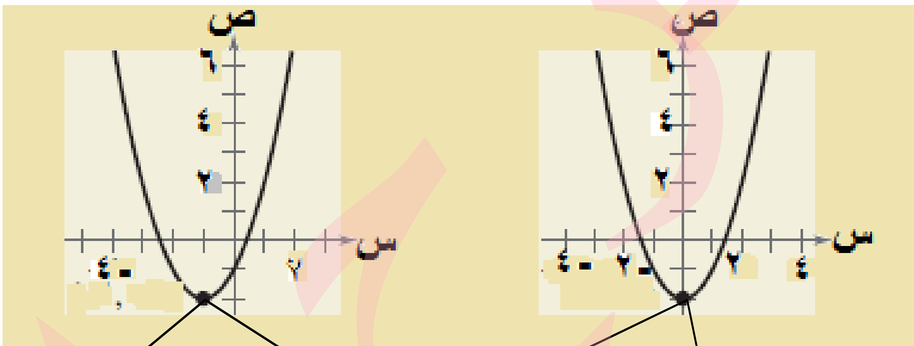
وإحداثيات هذه النقطة

$$\left(\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} \text{ ، } \text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} \right) \right)$$

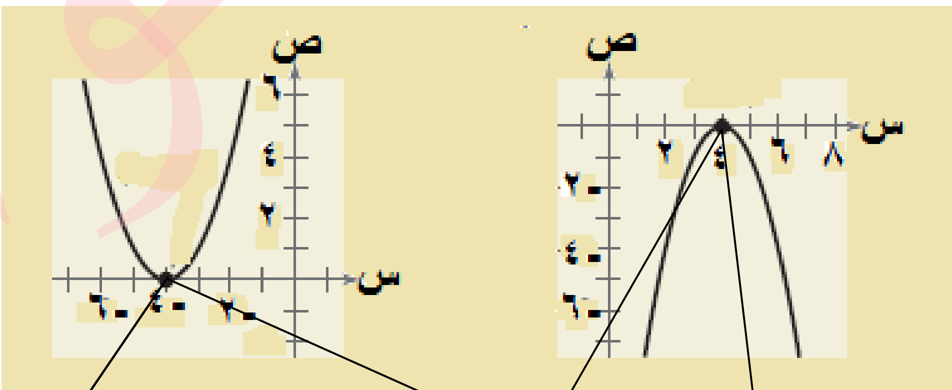
حيث أ معامل (س^2) ،

ب معامل (س)

مثال (٢) في الأشكال التالية اكتب إحداثيات نقطة رأس الاقتران :



الحل : (٠ ، -٢)   نقطة الرأس   (-١ ، -٢)



الحل : (٤ ، ٠)   نقطة الرأس   (-٤ ، ٠)

مثال (٣) : لكل من الاقترانات التربيعية التالية جد إحداثيات نقطة الرأس :

أ) $ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$ ب) $هـ(س) = -٢س^{٢} - ٦س$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$ د) $ق(س) = س^{٢} + ٣$

الحل : أ) $ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$

أ (معامل $س^{٢}$) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ق(-١)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$ق(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٣$$
$$= ٢ \times ١ + -٤ + ٣ = ٢ + -٤ + ٣ = ١$$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١ ، ١)$

ب) $هـ(س) = -٢س^{٢} - ٦س$

أ (معامل $س^{٢}$) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢ \times -٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = هـ\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$هـ\left(\frac{-٣}{٢}\right) = -٢\left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٢} - ٦\left(\frac{-٣}{٢}\right)$$
$$= -٢ \times \frac{٩}{٤} + \frac{١٨}{٢} = \frac{-٩}{٢} + \frac{١٨}{٢} = \frac{٩}{٢} = ٤و٥$$

إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١و٥ ، ٤و٥)$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$

الحل :

أ (معامل س ^٢^) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ل(-٢)$ نعوض في قاعدة الاقتران

$ل(-٢) = (-٢)^{٢} + ٤(-٢) - ١$
$= ٤ - ٨ - ١ = -٥$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، -٥)$

د) $ن(س) = س^{٢} + ٣$

الحل :

أ (معامل س ^٢^) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(٠)$ نعوض في قاعدة الاقتران

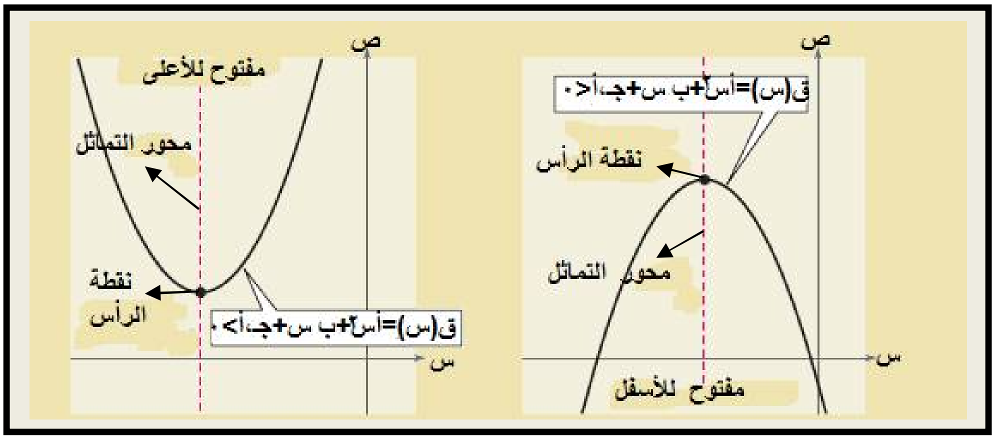
$ن(٠) = (٠)^{٢} + ٣$
$= ٠ + ٣ = ٣$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (٠ ، ٣)$

٤) محور التماثل : هو المستقيم المار بنقطة الرأس لمنحنى الاقتران موازياً لمحور الصادات ،

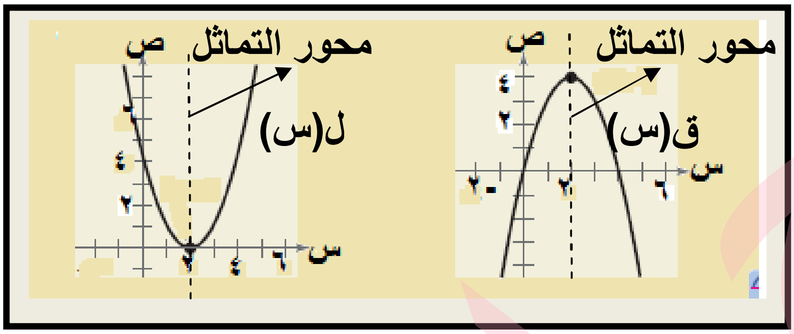
ومعادلته : س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، رمزاً ← $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$

الشكل المجاور يوضح موقع محور التماثل في منحنى الاقتران التربيعي



مثال (٤) :

في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل ، جد معادلة محور التماثل لكل منهما .



الحل :

- نقطة رأس منحنى الاقتران ق (س) : (٢ ، ٤) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :

  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$

- نقطة رأس منحنى الاقتران ل (س) : (٢ ، ٠) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :

  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$

مثال (٥) : في المثال (٣) : جد معادلة محور التماثل لكل اقتران :

الحل : أ) ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣

أ (معامل س^{٢}) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

- معادلة محور التماثل : ← $\boxed{س = -١}$

ب) $هـ(س) = -٢س^٢ - ٦س$

أ (معامل س^٢) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢ \times -٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = \frac{-٣}{٢}}$

جـ) $ل(س) = س^٢ + ٤س - ١$

أ (معامل س^٢) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = -٢}$
- د) $ن(س) = س^٢ + ٣$
- **أ (معامل س^٢) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣**
- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢ \times ١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = ٠}$

٥) القيمة الصغرى والعظمى للاقتران التربيعي

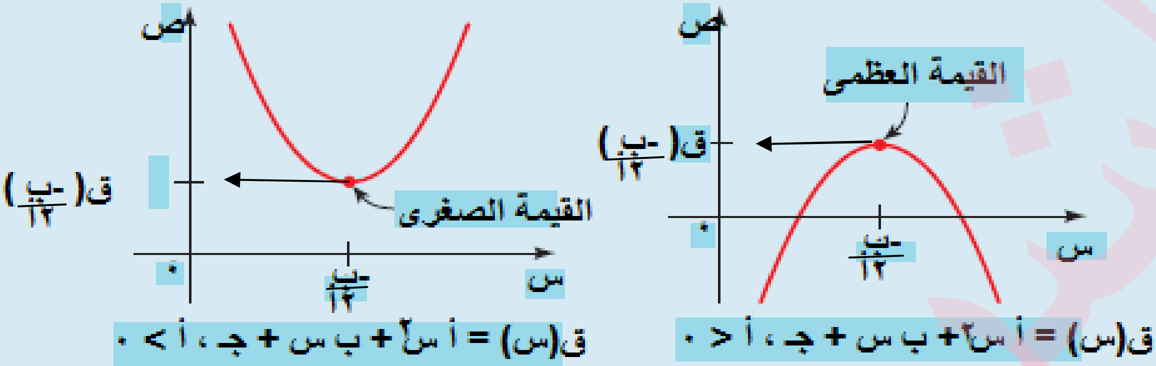
$ن(س) = أس^٢ + ب س + جـ$ ، **ونقطة رأسه** $\left(\frac{-ب}{أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **إذا كانت** $\boxed{أ \succ ٠}$ **، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند** $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ **وهي** $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- **إذا كانت** $\boxed{أ \prec ٠}$ **، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند** $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ **وهي** $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

لاحظ أن القيمة الصغرى والعظمى للاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

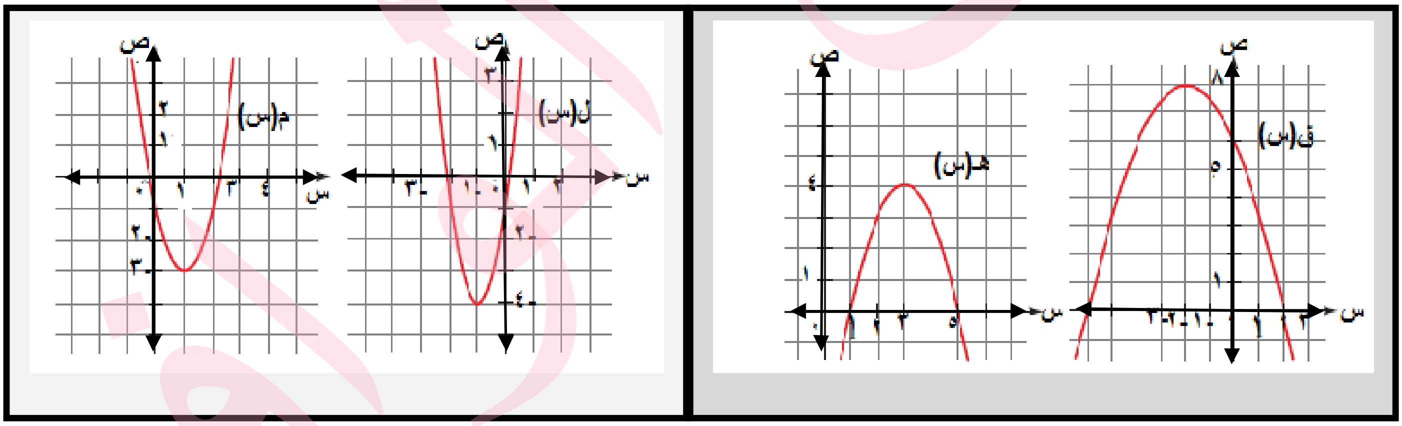
أنظر الشكل التالي :

- إذا كانت $أ > ٠$ ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- إذا كانت $أ < ٠$ ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$



مثال (٦) :

يبين الشكل منحنيات أربعة اقترانات تربيعية ، جد نقطة الرأس لكل اقتران ثم بين هل للاقتران قيمة عظمى أم صغرى ثم حدد هذه القيمة :



الحل :

- الاقتران ق (س) : نقطة الرأس (-٢ ، ٨) ، قيمة عظمى ومقدارها ٨
- الاقتران هـ (س) : نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، قيمة عظمى ومقدارها ٤
- الاقتران ل(س) : نقطة الرأس (-١ ، -٤) ، قيمة صغرى ومقدارها -٤
- الاقتران م (س) : نقطة الرأس (١ ، -٣) ، قيمة صغرى ومقدارها -٣

مثال (٧) :

جد القيمة العظمى أو الصغرى لكل من الاقترانات التربيعية التالية :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$ ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

جـ) $ل(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - ٦$ ء) $ك(س) = ٢س(٤ - س) + ٧$

الحل :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$

أ (معامل س^{٢}) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(-١)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$ن(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) - ١ \leftarrow ن(-١) = ٢ - ٤ - ١ = -٣$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١ ، -٣)$
- **وبما أن معامل س^{٢} أكبر من صفر** $\left(\boxed{أ > ٠}\right)$ **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ ، وهي -٣ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

نكتب الاقتران على الصورة العامة $هـ(س) = -س^{٢} - ٤س + ٣$

أ (معامل س^{٢}) = -١ ،، ب (معامل س) = -٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢\times-١} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس هـ $\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = $ هـ(-٢) نعوض في قاعدة الاقتران

هـ$(-٢) = -(-٢)^{٢} - ٤(-٢) + ٣ \leftarrow$ هـ$(-٢) = -٤ + ٨ + ٣ = ٧$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ}\right.$ ، هـ$\left.\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، ٧)$

- وبما أن معامل س ^{٢} أصغر من صفر $\left(\boxed{أ \prec ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = -٢ ، وهي ٧ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .

جـ) ل$(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - ٦$

أ (معامل س ^{٢}) = $\frac{١}{٢}$ ،، ب (معامل س) = ٢ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -٦

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ}\right.$ ، ل$\left.\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢ \times \frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{١} = -٢$

- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ل$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = $ ل(-٢) نعوض في قاعدة الاقتران

ل$(-٢) = \frac{١}{٢}(-٢)^{٢} + ٢(-٢) - ٦ \leftarrow$ ل$(-٢) = ٢ - ٤ - ٦ = -٨$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ}\right.$ ، ل$\left.\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، -٨)$

- وبما أن معامل س ^{٢} أكبر من صفر $\left(\boxed{أ \succ ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -٢ ، وهي - ٨ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .

د) ك(س) = ٢س(٤ − س) + ٧

نكتب الاقتران على الصورة العامة ك(س) = ٨س − ٢س^{٢} + ٧ ← $\boxed{\text{ك(س)} = -٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٧}$

أ (معامل س^{٢}) = -٢ ،، ب (معامل س) = ٨ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٧

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٨}{٢\times -٢} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** ك$\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)$ = ك(٢) **نعوض في قاعدة الاقتران**

ك(٢) = −٢(٢)^{٢} + ٨(٢) + ٧ ← ك(٢) = −٨ + ١٦ + ٧ = ١٥

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \text{ ، ك}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$ = (٢ ، ١٥)
- **وبما أن معامل س^{٢} أصغر من صفر** ($\boxed{\text{أ} < ٠}$) **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٢ ، وهي ١٥ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

٦) مجال ومدى الاقتران التربيعي

- **مجال الاقتران التربيعي هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، أو كفترة** $(-\infty \text{ ، } \infty)$.

أو هي مجموعة قيم س التي يمكن التعويض بها في قاعدة الاقتران ، وهي تمثل محور السينات أو مجموعة جزئية منه (حسب ما يحدد السؤال)

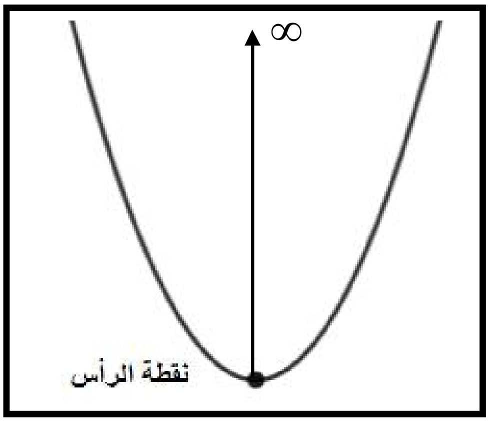
- **مدى الاقتران التربيعي : هي مجموعة صور المجال**

أو قيم ص الناتجة من تعويض قيم س في قاعدة الاقتران التربيعي ، والشكل التالي يوضح العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى

عناصر المجال (قيم س) ← $\boxed{\text{قاعدة الاقتران}}$ ← عناصر المدى (قيم ص)

- **كيف نجد مدى الاقتران التربيعي :**

أولاً : بيانياً



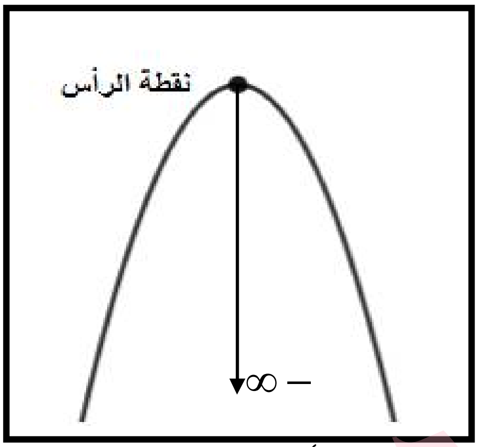
:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأعلى (الشكل المجاور)

فإن أقل قيمة يصل إليها منحنى الاقتران هي الإحداثي

الصادي لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو

من أقل قيمة (الصغرى) إلى ما لانهاية ورمزاً :

$$ص \in [ق(\frac{-ب}{٢أ}) ، \infty) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \{ص : ص \geq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$$



:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأسفل (الشكل المجاور)

فإن أعلى قيمة يصل إليها الاقتران هي الإحداثي الصادي

لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو من سالب

ما لانهاية إلى أكبر قيمة (العظمى) ورمزاً :

$$ص \in (-\infty ، ق(\frac{-ب}{٢أ})] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \{ص : ص \leq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$$

ثانياً : إذا علمت قاعدة الاقتران :

:: إذا كان معامل $س^٢$ أصغر من صفر $(\boxed{أ < ٠})$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل

نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$ص \in (-\infty ، ق(\frac{-ب}{٢أ})] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \{ص : ص \leq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$$

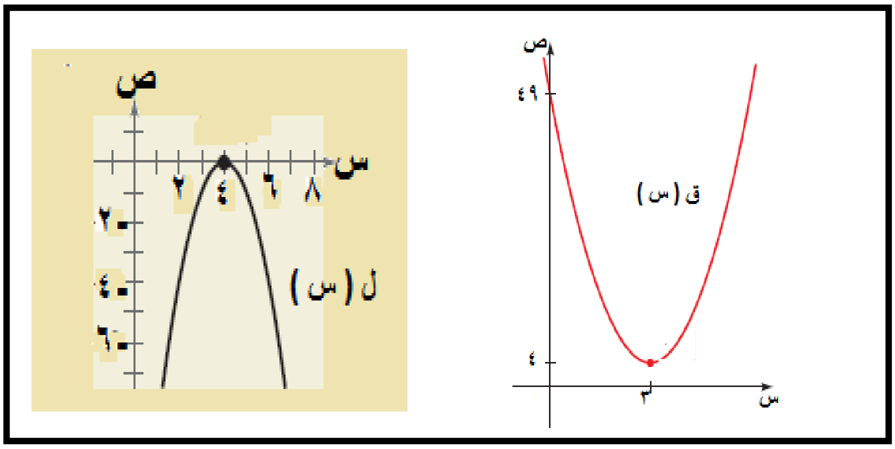
:: إذا كان معامل $س^٢$ أكبر من صفر $(\boxed{أ > ٠})$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى

نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$ص \in [ق(\frac{-ب}{٢أ}) ، \infty) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \{ص : ص \geq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$$

مثال (٨) :

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل جد مدى كل منهما .



الحل :

- **الاقتران ق (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، ومفتوح للأعلى ، إذا :**

مدى ق (س) = {ص : ص ≥ ٤}

- **الاقتران ل (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٤ ، ٠) ، ومفتوح للأسفل ، إذا :**

مدى ل (س) = {ص : ص ≤ ٠}

مثال (٩) : جد مدى كل من الاقترانات التالية :

أ) ن(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤

جـ) ل(س) = ٣س^{٢} + ٦س د) ك(س) = ٣س^{٢} + ٦س − ٢

الحل :

أ) ن(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-(-٢)}{٢ \times ١} = \frac{٢}{٢} = ١$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس**

ن(١) = ١ − ٢ + ٣ = ٢ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ٢) نقطة الرأس**

وبما أن ($\boxed{\text{أ} > ٠}$) **، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = ١ وهي ٢**

إذا مدى ق = {ص : ص ≥ ٢}

ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤ ⟵⟵⟵ أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢ \times -١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

هـ(٣) = −٩ + ١٨ + ٤ = ١٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (٣ ، ١٣) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} < ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٣ وهي ١٣

إذا مدى هـ = {ص : ص ≤ ١٣}

جـ) ل(س) = ٣س^{٢} + ٦س ⟵⟵⟵ أ = ٣ ، ب = ٦ ، جـ = ٠

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢ \times ٣} = \frac{-٦}{٦} = -١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ل(−١) = ٣ − ٦ = −٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (−١ ، −٣) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} > ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ وهي -٣

إذا مدى ل = {ص : ص ≥ −٣}

د) ك(س) = −٣س^{٢} + ٦س − ٢ ⟵⟵⟵ أ = −٣ ، ب = ٦ ، جـ = −٢

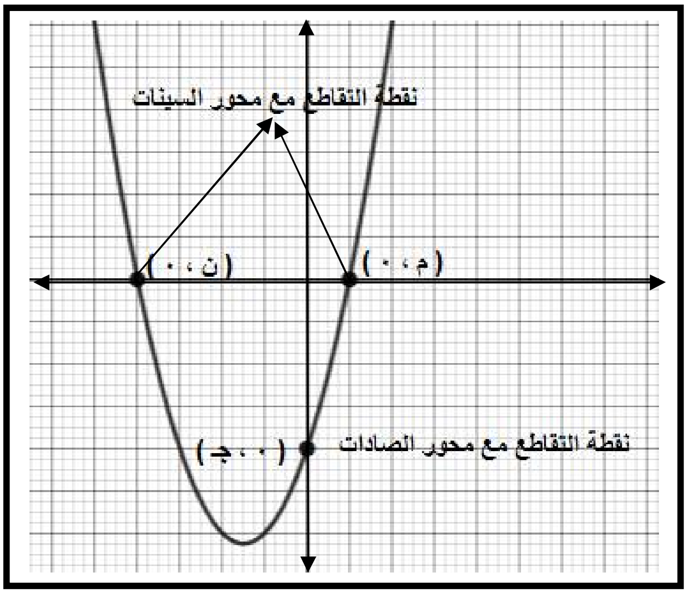
$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢ \times -٣} = \frac{-٦}{-٦} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ك(١) = −٣ + ٦ − ٢ = ١ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ١) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} < ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ١ وهي ١

إذا مدى ك = {ص : ص ≤ ١}

٧) نقاط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين

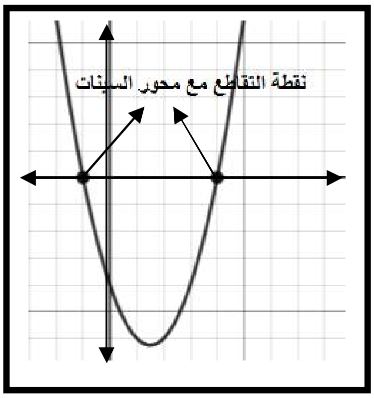


الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران التربيعي مبيناً عليه نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين السيني والصادي .

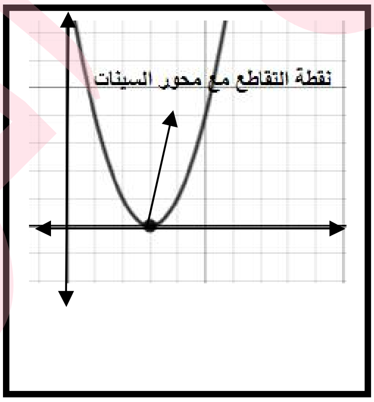
- النقطة (٠ ، جـ) نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور الصادات .
- النقطتين (م ، ٠) ، (ن ، ٠) نقطتي تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

::: ملاحظات مهمة جداً :

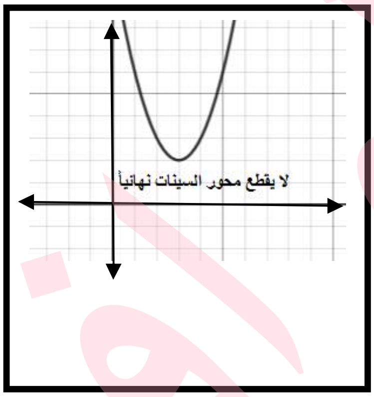
- منحنى الاقتران التربيعي دائما يقطع محور الصادات وإحداثيات نقطة التقاطع هي (٠ ، جـ) حيث جـ الحد المطلق في الاقتران التربيعي (بشرط مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح) .
- منحنى الاقتران التربيعي يقطع محور السينات في نقطتين على الأكثر (أي يمكن أن يقطعه في نقطتين ، أو نقطة واحدة ، أو لا يقطعه نهائياً) والأشكال التالية توضح ذلك .



يقطع محور السينات في نقطتين



يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط



لا يقطع محور السينات نهائياً

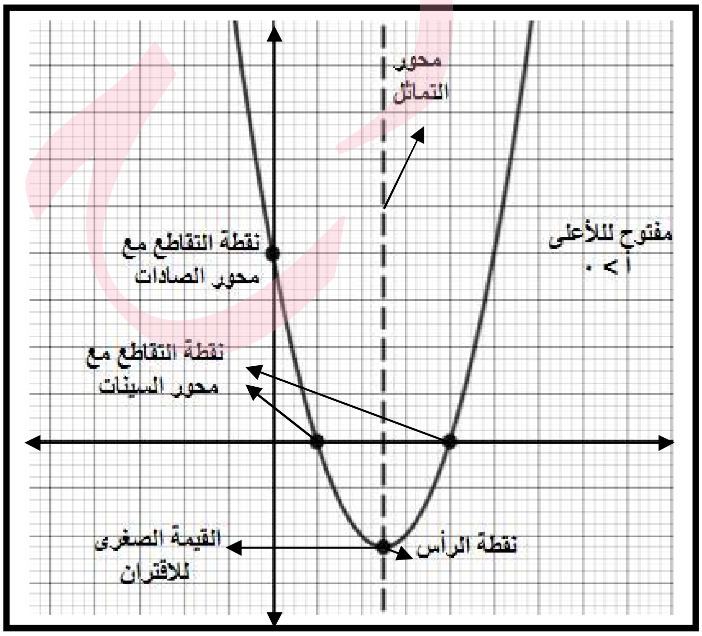
- في هذا الدرس سوف نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور السينات (إن وجدت) بيانياً
- لإيجاد نقطة تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور الصادات إذا علمت قاعدته ، نعوض الصفر بدل كل س في قاعدة الاقتران ، فنجد الناتج يساوي الحد المطلق
  ← ق(٠) = جـ ← (٠ ، جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات .

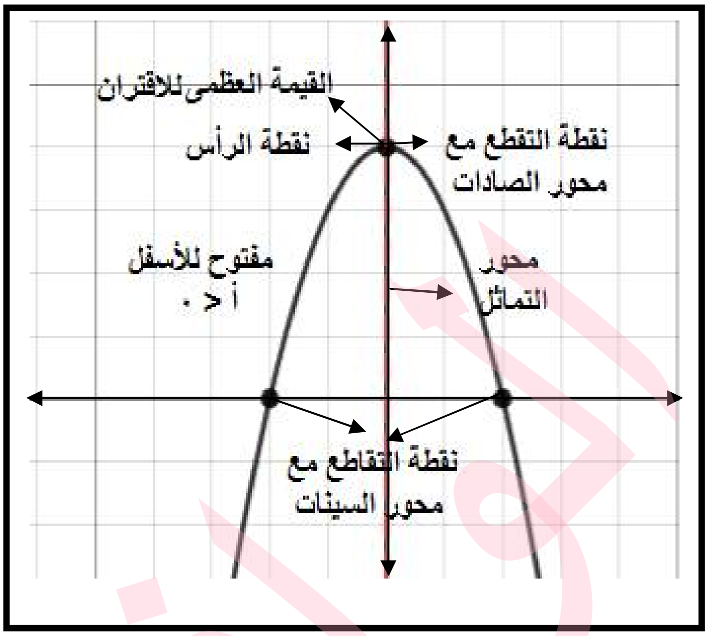
ملخص أولي لما سبق :

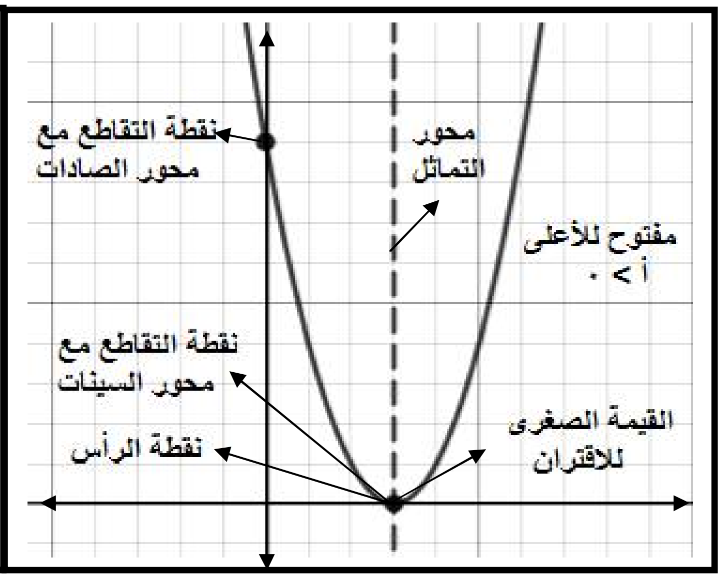
- الصورة العامة للاقتران التربيعي $ق(س) = أس^2 + بس + جـ$

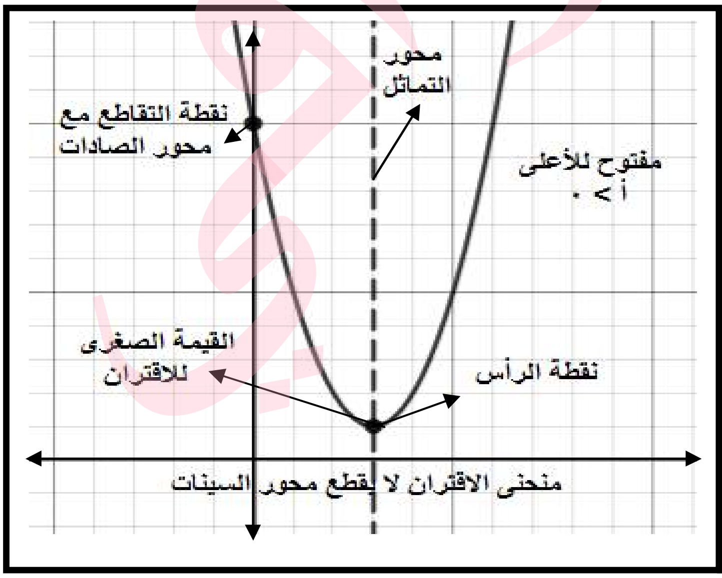
أ	نقطة الرأس	معادلة محور التماثل	قيمة عظمى أو صغرى	فتحة المنحنى	المدى
$أ > 0$	$\left(\frac{-ب}{2أ}، ق\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$	$س = \frac{-ب}{2أ}$	صغرى	للأعلى	$ص \geq ق\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$
$أ < 0$	$\left(\frac{-ب}{2أ}، ق\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$	$س = \frac{-ب}{2أ}$	عظمى	للأسفل	$ص \leq ق\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$

- بيانياً :









الآن ننتقل إلى التمثيل البياني لمنحنى الاقتران التربيعي على المستوى الإحداثي

- **من الطرق المستخدمة في تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً :**

١) طريقة الجدول **٢) استخدام برامج للرسم مثل برنامج إكسل أو غيره**

١) طريقة الجدول

- **نجد الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-ب}{٢أ}$ ، ثم نجد إحداثي نقطة الرأس**
- **ننشئ جدول يتكون من ٨ أعمدة وصفين كما يلي :**

نقطة الرأس

س				$\frac{-ب}{٢أ}$			
ق (س)				$ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$			

- **نعبئ خانات قيم س في أعداد أقل من $\frac{-ب}{٢أ}$ على يمينها ، وأعداد أكبر منها على يسارها**
- **نعوض قيم س في قاعدة الاقتران لإيجاد قيم ص = ق (س)**
- **نعين النقاط الناتجة من الخطوة السابقة عل المستوى الإحداثي ثم نصل بينها بخط منحن**

مثال (١٠) : شامل مثال (٣ – ٣) ص٨٦

ارسم منحنى كلاً من الاقترانات التربيعية التالية في المستوى الإحداثي

أ) $ن(س) = س^{٢} - ٤س + ١$ ب) $هـ(س) = -س^{٢} + ٦س + ٤$

جـ) $ل(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$

الحل :

أ) ق(س) = س^{٢} − ٤س + ١ ←←← أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ١ **(كتاب مدرسي ص٨٦)**

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢\times١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = ٢
- ق(٢) = (٢)^{٢} − ٤ × ٢ + ١ = −٣ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ،** (٢، −٣) **نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص=ق(س)	٦	١	-٢	-٣	-٢	١	٦

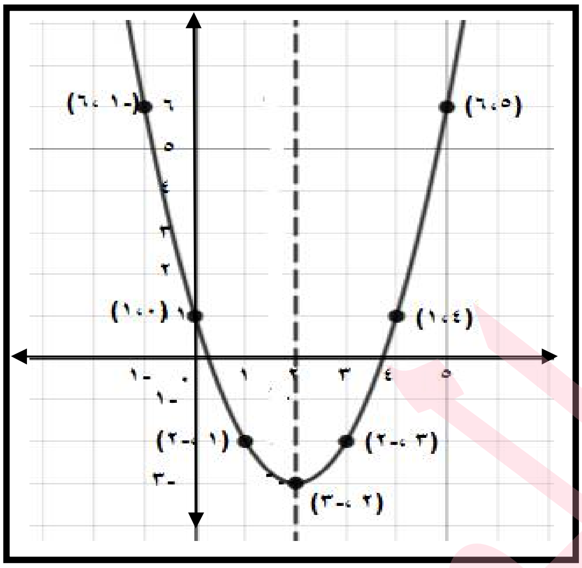
- **نجد قيم ص**

ق(١)=١−٤+١=−٢ ق(٣)=٩−١٢+١=−٢

ق(٠)=٠−٠+١=١ ق(٤)=١٦−١٦+١=١

ق(−١)=١+٤+١=٦ ق(٥)=٢٥−٢٠+١=٦

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠**



ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤ ←←← أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

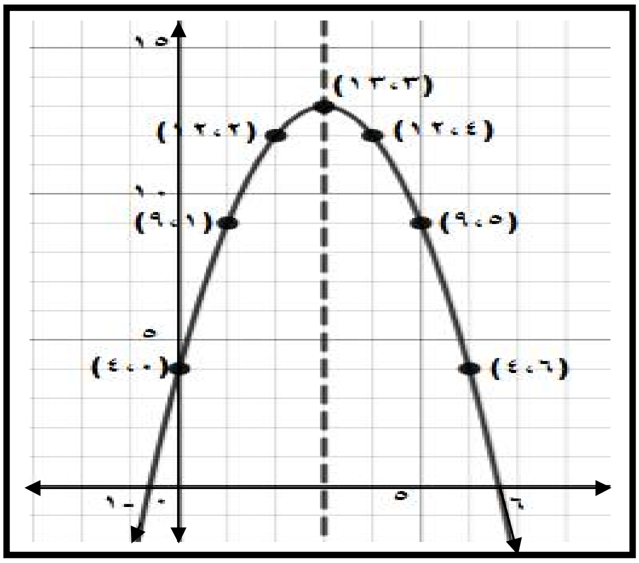
- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٦}{٢\times-١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = ٣
- هـ(٣) = −٩ + ١٨ + ٤ = ١٣ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ،** (٢، −٣) **نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص=هـ(س)	٤	٩	١٢	١٣	١٢	٩	٤

- نجد قيم ص

ه(٠)=–٠+٠+٤=٤	ه(٦)=–٣٦+٣٦+٤=٤
ه(١)=–١+٦+٤=٩	ه(٥)=–٢٥+٣٠+٤=٩
ه(٢)=–٤+١٢+٤=١٢	ه(٤)=–١٦+٢٤+٤=١٢

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠**



جـ) ل(س) = س² – ٢س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = –٢ ، جـ = ٣

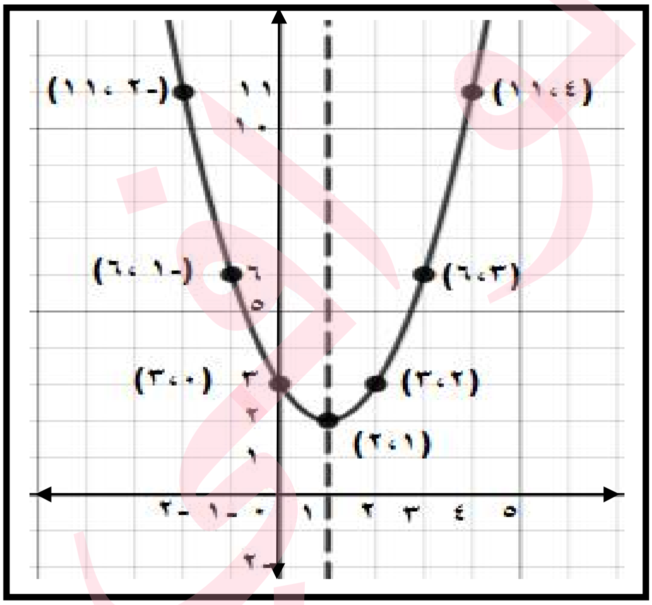
- –ب/٢أ = –(–٢)/(٢×١) = ٢/٢ = ١ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = ١
- ل(١) = ١ – ٢ + ٣ = ٢ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (١،٢) نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص=ق(س)	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١

- **نجد قيم ص**

ل(–٢)=٤+٤+٣=١١	ل(٤)=١٦–٨+٣=١١
ل(–١)=١+٢+٣=٦	ل(٣)=٩–٦+٣=٦
ل(٠)=٠–٠+٣=٣	ل(٢)=٤–٤+٣=٣

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠**



٢) استخدام برامج الرسم

نختار أي برنامج للرسم مثل : برنامج إكسل ، ديسموس ، جيوجبرا ، fx-draw ، ٠٠٠

حل تدريب (٣ – ٢) ص٨٨

ارسم منحنى الاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} + ٤س – ٥

الحل : **تم استخدام برنامج ديسموس في الرسم**

ق(س) = س^{٢} + ٤س – ٥ ←←← أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = –٥

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times١} = \frac{-٤}{٢}$ = –٢ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = –٢
- ق(–٢) = ٤ – ٨ – ٥ = –٩ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ،** (–٢، –٩) **نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص=ق(س)	٠	-٥	-٨	-٩	-٨	-٥	٠

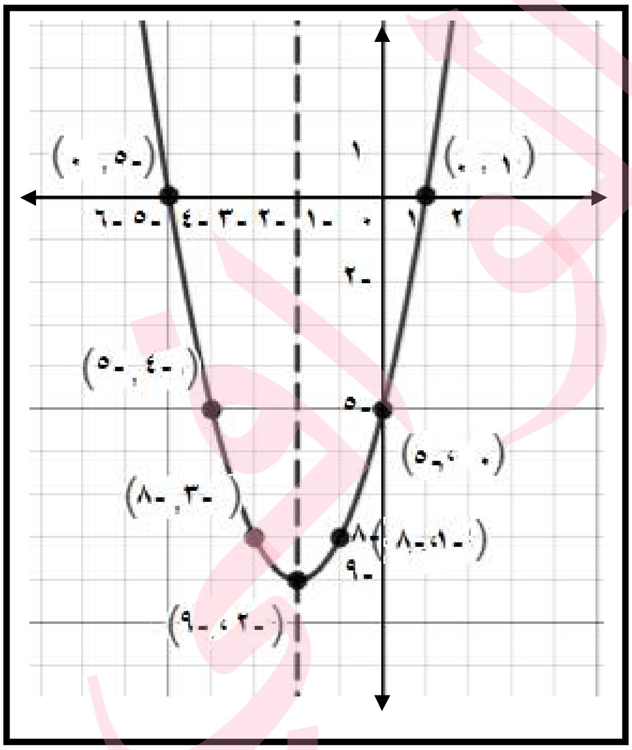
- **نجد قيم ص**

ق(–٥)=٢٥–٢٠–٥=٠ ، ق(١)=١+٤–٥=٠

ق(–٤)=١٦–١٦–٥=–٥ ، ق(٠)=٠+٠–٥=–٥

ق(–٣)=٩–١٢–٥=–٨ ، ق(–١)=١–٤–٥=–٨

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠**



حل تدريب (٣ ـ ٣) ص٨٨

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، حيث $ق(س) = س^٢ + ٢س$

أ) هل منحنى الاقتران ق مفتوح إلى الأعلى أم إلى الأسفل ؟

ب) هل للاقتران ق قيمة صغرى أم قيمة عظمى ؟ جدها

جـ) ما مدى الاقتران ق ؟

الحل :

الجواب في الأفرع الثلاثة يعتمد على إشارة معامل $س^٢ \leftarrow أ = ١ \succ ٠$ (موجبة)

أ) مفتوح إلى الأعلى ⟵ إشارة معامل $س^٢ \leftarrow أ = ١ \succ ٠$ (موجبة)

ب) قيمة صغرى

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢} = -١ \leftarrow ق(-١) = ١ - ٢ = -١$ القيمة الصغرى

جـ) مدى الاقتران ق $= \{ص : ص \geq -١\}$

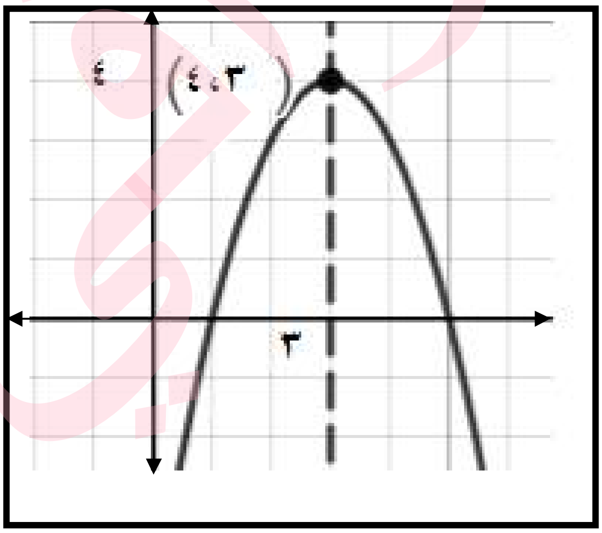
حل تدريب (٣ ـ ٤) ص٨٩

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، قيمته العظمى تساوي ٤ ومعادلة محور تماثله هي س = ٣ ، ارسم رسماً تقريبياً لمنحنى الاقتران ق .

الحل :

بما أن للاقتران قيمة عظمى وتساوي ٤، إذاً :

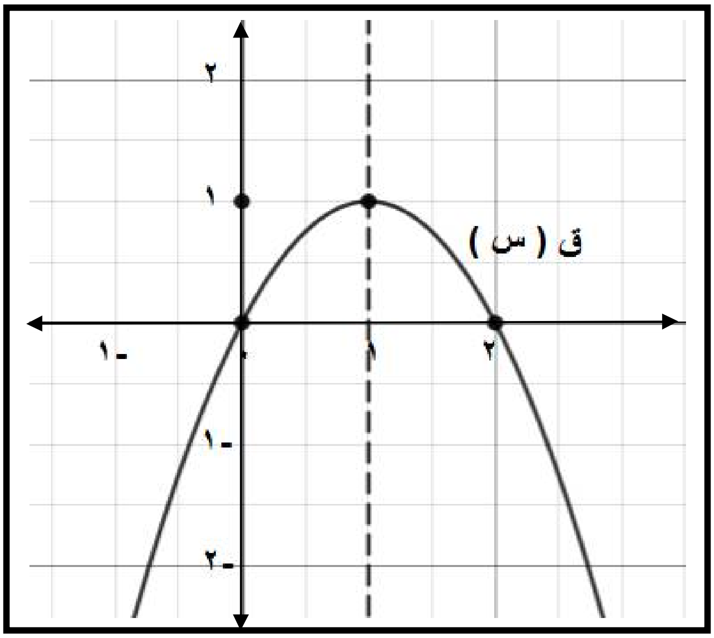
- الاقتران مفتوح إلى الأسفل
- نقطة الرأس $(٣ ، ٤)$



حل تدريب (٣ ـ ٥) ص٨٩

استخدم الآلة الراسمة لرسم منحنى الاقتران التربيعي : ق(س) = ٢س − س^{٢} .

معتمداً على الرسم جد إحداثيي نقطة الرأس ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى للاقتران ق .



الحل :

- نقطة الرأس (١ ، ١)
- معادلة محور التماثل : س = ١
- القيمة العظمى : ١
- مدى الاقتران ق = {ص : ص ≤ ١}

حل تدريب (٣ ـ ٦) ص٩٠

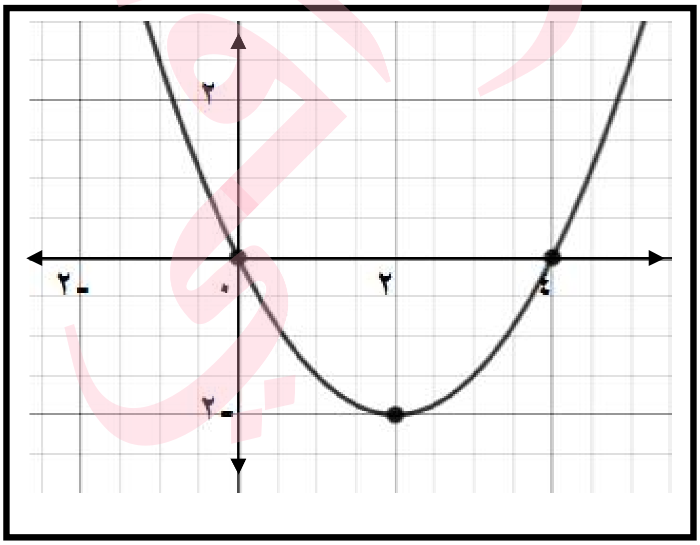
إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٢س

أ) استعمل برنامج إكسل في رسم منحنى الاقتران ق .

ب) ما النقط التي يقطع عندها المنحنى محور السينات ؟

جـ) ما النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور الصادات ؟

الحل :



أ) الشكل المجاور

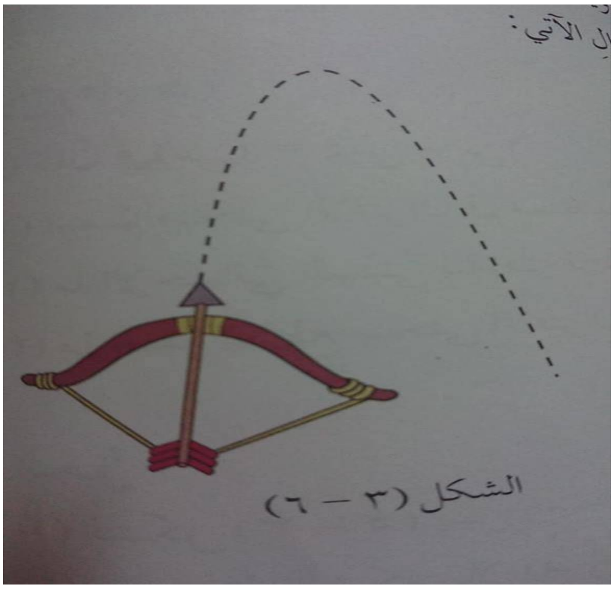
ب) نقط التقاطع مع محور السينات

(٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات

(٠ ، ٠)

أمثلة حياتية على الاقتران التربيعي



مثال (١١) : مثال (٣ – ٦) كتاب مدرسي ص٩٠

في لعبة الرماية استخدم عز الدين قوساً لقذف سهم إلى الأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٤٠ متراً / ثانية وفق العلاقة ل = ٤٠ ن – ٥ ن^{٢} ، حيث ن الزمن بالثواني ، ل الارتفاع بالأمتار ، ما أقصى ارتفاع يمكن أن يصله السهم ؟ الشكل المجاور .

الحل :

لاحظ أن العلاقة التي يسير فيها السهم تمثل اقتران تربيعي ، نكتب العلاقة بالصورة العامة :

ل(ن) = –٥ ن^{٢} + ٤٠ ن ←←← أ = –٥ ، ب = ٤٠ ، ج = ٠

أقصى ارتفاع يصله السهم يمثل القيمة العظمى للاقتران حيث أ ≺ ٠ .

ن = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤٠}{٢\times -٥}$ = ٤ث ، **يصل السهم إلى أقصى ارتفاع بعد مرور ٤ ثوان من قذفه**

أقصى ارتفاع ← ل(٤) = –٥ × ١٦ + ٤٠ × ٤ ← ل(٤) = –٨٠ + ١٦٠ = ٨٠ متراً

حل تمارين ومسائل ص٩١

١) أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟

أ) ق(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ + س ، س ≻ ٠

ليس اقتران تربيعي ، حيث لا يمكن كتابته على الصورة العامة للاقتران التربيعي .

ب) هـ(س) = س(س – ١) + ٥

هـ(س) = س^{٢} – س + ٥ **اقتران تربيعي**

جـ) $ل(س) = ٢س + ١$ ليس اقتران تربيعي

د) $هـ(س) = س^{٢}(٣ - س^{٢}) + س + ٤$

$هـ(س) = -س^{٤} + ٣س^{٢} + س + ٤$ ليس اقتران تربيعي

٢) ما معادلة محور تماثل الاقتران التربيعي $ن(س) = س^{٢} + ٢٥و٠ + س$

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

$ن(س) = س^{٢} + س + ٢٥و٠ \leftarrow\leftarrow أ = ١$ ، $ب = ١$ ، $جـ = ٢٥و٠$

معادلة محور التماثل : $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-١}{٢\times١} = \frac{-١}{٢} \leftarrow \boxed{س = \frac{-١}{٢}}$

٣) ما مجال ومدى الاقتران التربيعي $ن(س) = ١ - س^{٢}$

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

$ن(س) = -س^{٢} + ١ \leftarrow\leftarrow\leftarrow أ = -١$ ، $ب = ٠$ ، $جـ = ١$

- **مجاله : مجموعة الأعداد الحقيقية** ح ، أو $(-\infty ، \infty)$
- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس :** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times-١} = ٠$

الإحداثي الصادي لنقطة الرأس : $ن(٠) = ٠ - ١ = ١ \leftarrow\leftarrow (٠ ، ١)$ **نقطة الرأس**

وبما أن معامل $س^{٢}$ **إشارته سالبة** $(أ \prec ٠)$ ، **إذاً مدى ق** $= \{ص : ص \leq ١\}$

٤) إذا كان ق : ح ← ح : حيث $ن(س) = س^{٢} - ٥س + ٤$ **فجد** $ن(-٢)$ ، $ن(١)$ ، $ن(٤)$

الحل :

قيم س	$ن(س) = س^{٢} - ٥س + ٤$	$(س ، ص)$
-٢	$ن(-٢) = (-٢)^{٢} - ٥\times-٢ + ٤ = ١٨$	$(-٢ ، ١٨)$
١	$ن(١) = (١)^{٢} - ٥\times١ + ٤ = ٠$	$(١ ، ٠)$
٤	$ن(٤) = (٤)^{٢} - ٥\times٤ + ٤ = ٠$	$(٤ ، ٠)$

٥) جد معادلة محور التماثل ، ورأس المنحنى ، والقيمة العظمى أو القيمة الصغرى ، والمجال ، والمدى لكل من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = س^{٢} + ٦س − ٧ ب) و(س) = ٢س − س^{٢} + ٤ جـ) هـ(س) = س^{٢}

الحل : المجال لكل الاقترانات هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

الاقتران	أ	ب	جـ	معادلة محور التماثل	رأس المنحنى	عظمى أو صغرى	المدى
ق(س) = س^{٢} + ٦س − ٧	١	٦	-٧	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٦}{٢\times١}$ = −٣	ق(−٣) = ٩ − ١٨ − ٧ = −١٦ ← (−٣، −١٦)	-١٦ صغرى	ص ≥ −١٦
و(س) = −س^{٢} + ٢س + ٤	-١	٢	٤	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢\times-١}$ = ١	و(١) = −١ + ٢ + ٤ = ٥ ← (١، ٥)	٥ عظمى	ص ≤ ٥
هـ(س) = س^{٢}	١	٠	٠	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢\times١}$ = ٠	هـ(٠) = ٠ ← (٠، ٠)	٠ صغرى	ص ≥ ٠

٦) ارسم منحنى الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = (س + ٢)^{٢} − ١ ب) هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤

الحل : الطريقة الأولى (المعتمدة للصف التاسع)

أ) ق(س) = (س + ٢)^{٢} − ١ : نكتب قاعدة الاقتران على الصورة العامة

ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٤ − ١ ← ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٣

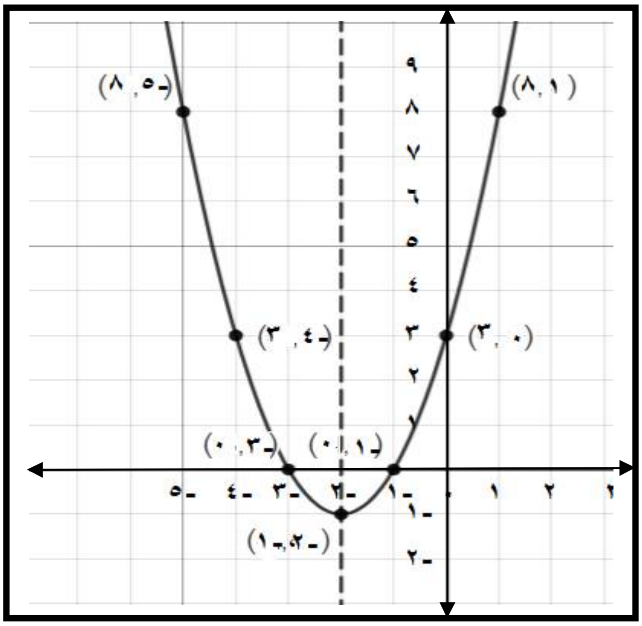
ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٣

- $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢\times١}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = −٢
- ق(−٢) = ٤ − ٨ + ٣ = −١ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (−٢، −١) نقطة الرأس
- الجدول

س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١
ص=ق(س)	٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨

- **نجد قيم ص**

$$\left\{\begin{array}{ll} ق(-٥)=٢٥-٢٠+٣=٨ & ق(١)=١+٤+٣=٨ \\ ق(-٤)=١٦-١٦+٣=٣ & ق(٠)=٠+٠+٣=٣ \\ ق(-٣)=٩-١٢+٣=٠ & ق(-١)=١-٤+٣=٠ \end{array}\right.$$

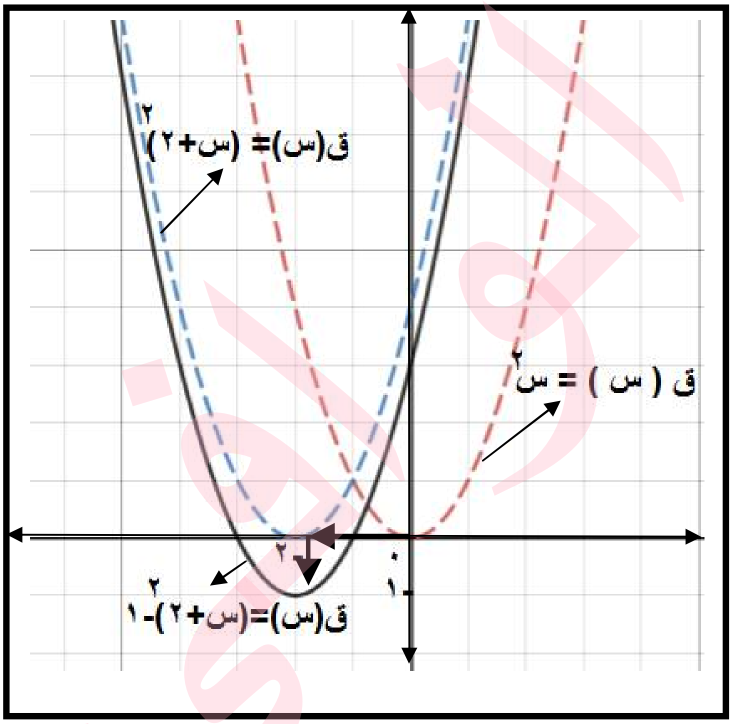


- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحنى ، كما في الشكل المجاور .**

الطريقة الثانية : فرع أ فقط

طريقة الانسحاب الأفقي والعمودي لمنحنى الاقتران التربيعي الإمام $ق(س) = س^{٢}$

خطوات الرسم (الشكل المجاور)



- **نرسم الاقتران الإمام** $ق(س) = س^{٢}$
- **نسحب منحنى الاقتران الإمام وحدتين لليسار** $\leftarrow ق(س) = (س+٢)^{٢}$
- **نسحب منحنى الاقتران الناتج من الخطوة السابقة وحدة واحدة إلى الأسفل**

$\leftarrow ق(س) = (س+٢)^{٢} - ١$

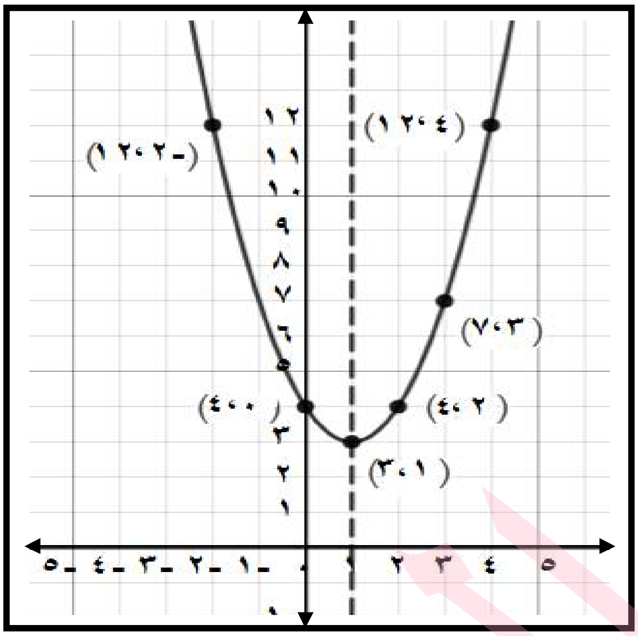
ملاحظة : الاقتران ق في هذا السؤال كتب على الصورة القياسية (تشرح في نهاية الوحدة)

الصورة القياسية للاقتران التربيعي $\leftarrow ق(س) = أ\,(س - م)^{٢} + ك$

ب) هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، ج = ٤

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢\times١} = \frac{٢}{٢} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = ١
- هـ(١) = ١ − ٢ + ٤ = ٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (١ ، ٣) نقطة الرأس

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص=هـ(س)	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢

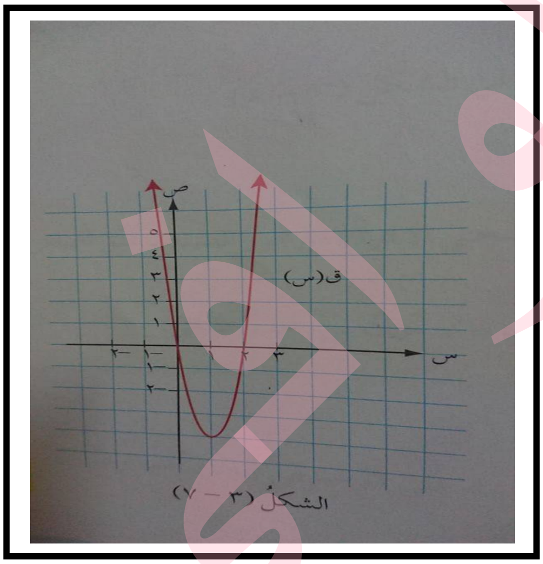


- نجد قيم ص

هـ(−٢)=٤+٤+٤=١٢   هـ(٤)=١٦−٨+٤=١٢
هـ(−١)=٦−٢+٤=٧   هـ(٣)=٩−٦+٤=٧
هـ(٠)=٠−٠+٤=٤   هـ(٢)=٤−٤+٤=٤

- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .

٧) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق ، اكتب قاعدة الاقتران معتمداً على الرسم .



الحل : ق(س) = أس^{٢} + ب س + ج

لإيجاد قاعدة الاقتران ، نجد قيم أ ، ب ، ج

الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٠) ← $\boxed{ج = ٠}$ ...(١)

معادلة محور التماثل س = ١ = $\frac{-ب}{٢أ}$ ← $\boxed{ب = −٢أ}$ ...(٢)

(١ ، −٤) نقطة رأس المنحنى ق(١) = −٤ ← $\boxed{أ+ب+ج = −٤}$ ...(٣)

وبتعويض المعادلتين (١)،(٢) في معادلة (٣) أ − ٢أ + ٠ = −٤ ← $\boxed{أ = ٤}$

وبتعويض قيمة أ في م (٢) ← $\boxed{ب = −٨}$ منها قاعدة الاقتران $\boxed{ق(س) = ٤س^{٢} − ٨س}$

٨) إذا علمت أن منحنى الاقتران التربيعي ق يقطع محور السينات عندما س = −٢ ، س = ٢ ، ويمر بالنقطة (١ ، −٣) ، جد قاعدة الاقتران ق ، ثم ارسم منحناه مستخدما برنامج إكسل .

الحل :

قاعدة الاقتران $ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$

منحنى الاقتران يقطع محور السينات في النقطتين (−٢ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، إذاً :

معادلة محور التماثل $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢+٢}{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{ب = ٠}$

تصبح قاعدة الاقتران $ق(س) = أ س^{٢} + جـ$ ، وبتعويض النقطتين (١ ، −٣) ، (٢ ، ٠)

$(١ ، −٣) \leftarrow ق(١) = −٣ \leftarrow أ + جـ = −٣ \ldots (١)$

$(٢ ، ٠) \leftarrow ق(٢) = ٠ \leftarrow ٤أ + جـ = ٠ \ldots (٢)$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) بطريقة الحذف أو التعويض نجد أن $\boxed{أ = ١ ، ب = −٤}$

إذاً قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = س^{٢} − ٤$

٩) قذف جسيم إلى أعلى وفق العلاقة : $ف(ن) = ٨٠ن − ٥ن^{٢}$ ، حيث ف : الارتفاع بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

الحل :

قاعدة العلاقة بالصورة العامة : $ف(ن) = −٥ن^{٢} + ٨٠ن \leftarrow أ = −٥ ، ب = ٨٠ ، جـ = ٠$

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٨٠}{٢ \times -٥} = \frac{٨٠}{١٠} = ٨ ث$ الزمن اللازم للوصول إلى أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع : $ف(٨) = −٥ \times ٦٤ + ٨٠ \times ٨ \leftarrow ف(٨) = −٣٢٠ + ٦٤٠ = ٣٢٠$ متراً .

١٠) جد العددين اللذين مجموعهما ٤٠ ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض : العدد الأول س ⟵ العدد الثاني ٤٠ − س ،،، حاصل الضرب م

حاصل ضرب العددين = العدد الأول × العدد الثاني ⟵⟵ م = س (٤٠ − س)

م(س) = − س^٢ + ٤٠ س ⟵⟵ أ = −١ ، ب = ٤٠ ، جـ = ٠

معادلة محور التماثل $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤٠}{٢ \times -١} = \frac{-٤٠}{-٢} = ٢٠ \leftarrow \boxed{س = ٢٠}$

بما أن معامل س^٢ < ٠ ، يكون للاقتران قيمة عظمى عند س = ٢٠ العدد الأول

إذاً العددان هما ٢٠ ، ٢٠

١١) اتفقت شركة استيراد وتصدير مع أحد المصانع على استيراد نوع من الماكنات ، بشرط أن يكون مقدار ما تربحه الشركة (ق) (مقدراً بآلاف الدنانير) مرتبطاً مع الزمن اللازم للاستيراد (ن) (مقدراً بالأسابيع) حسب العلاقة ق(ن) = ٤ن − ن^٢ ، ما الزمن اللازم لتحصل الشركة على أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

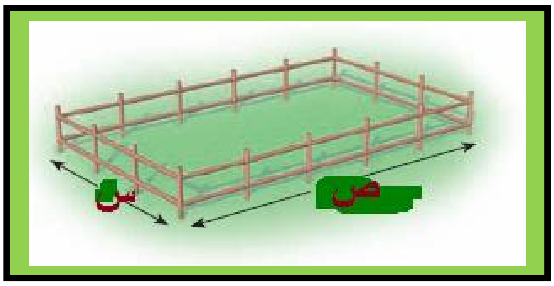
العلاقة ق(ن) = ٤ن − ن^٢ هي اقتران تربيعي تربط ما بين الربح والزمن ، لذلك تحصل الشركة على أكبر ربح عندما يكون لهذا الاقتران قيمة عظمى .

بما أن معامل ن^٢ < ٠ ، تحصل الشركة على أكبر ربح عندما :

$ن = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times -١} = \frac{-٤}{-٢} = ٢ \leftarrow \boxed{س = ٢}$ أسبوع

١٢) حل المسألة الواردة في بداية الدرس .

يملك أحمد سياجاً طوله ٢٠ م ، ينوي عمل حظيرة بهذا السياج على شكل مستطيل ، ما أبعاد الحظيرة بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن ؟



الحل :

- **نفرض بعدي الحظيرة س ،، ص**
- **محيط الحظيرة ٢٠**

$\leftarrow \text{٢س} + \text{٢ص} = \text{٢٠} \leftarrow \boxed{\text{س} + \text{ص} = \text{١٠}} \ldots (\text{١})$

- **نفرض مساحة الحظيرة م** $\leftarrow \text{م} = \text{س ص} \quad \ldots (\text{٢})$
- **من معادلة (١)** $\boxed{\text{ص} = \text{١٠} - \text{س}}$ **تعوض في معادلة (٢)**

$\text{م} = \text{س}\,(\text{١٠} - \text{س}) \leftarrow \boxed{\text{م}(\text{س}) = -\text{س}^{\text{٢}} + \text{١٠س}}$ **اقتران تربيعي**

بما أن معامل س $^{\text{٢}}$ $\prec \text{٠}$ **، يكون للاقتران قيمة عظمى عند** $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{١٠}}{\text{٢} \times -\text{١}} = \text{٥}$

إذاً البعد الأول : س = ٥ متر ،، البعد الثاني ص = ١٠ ـ ٥ ← ص = ٥ متر

مثال (١٢) : للفائدة

الشكل المجاور ، يمثل نافذة مصممة على شكل نصف دائرة تعلو مستطيل ، إذا علمت أن محيط النافذة ١٦ قدم ، اكتب مساحة الدائرة على صورة اقتران تربيعي بدلالة س .

تذكر :

محيط الدائرة $= \text{٢}\pi\text{نق}$

مساحة الدائرة $= \pi\text{نق}^{\text{٢}}$

الحل :

أبعاد المستطيل س ، ص ،،،، نصف قطر الدائرة $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}$

محيط المستطيل $= \text{س} + \text{٢ص}$ **(لماذا؟) ،،، محيط نصف الدائرة** $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{٢}\pi \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}\right) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\pi\text{س}$

محيط المستطيل + محيط نصف الدائرة = محيط النافذة

$\text{س} + \text{٢ص} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\pi\text{س} = \text{١٦} \leftarrow \text{٢س} + \text{٤ص} + \pi\text{س} = \text{٣٢} \leftarrow \boxed{\text{٤ص} + (\text{٢} + \pi)\,\text{س} = \text{٣٢}} \ldots (\text{١})$

- **مساحة المستطيل** $= \text{س ص}$ ،، **مساحة نصف الدائرة** $= \frac{١}{٢}\left(\pi \times \left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٢}\right) = \frac{١}{١٦}\pi\,\text{س}^{٢}$

مساحة النافذة (م) = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

$$\text{م} = \text{س ص} + \frac{١}{١٦}\pi\,\text{س}^{٢} \cdots\cdots (٢)$$

لكن من معادلة (١) $٤\text{ص} + (٢+\pi)\text{س} = ٣٢ \leftarrow \text{ص} = ٨ - \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\pi\right)\text{س}$

وبالتعويض في معادلة (٢) : نجد مساحة النافذة بدلالة س

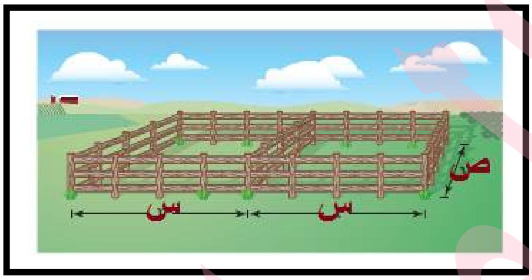
$$\text{م} = \text{س}\left(٨ - \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\pi\right)\text{س}\right) + \frac{١}{١٦}\pi\,\text{س}^{٢}$$

$$= ٨\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\pi\,\text{س}^{٢} + \frac{١}{١٦}\pi\,\text{س}^{٢}$$

$$= ٨\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{٧}{١٦}\pi\,\text{س}^{٢}$$

$$= ٨\text{س} - \left(\frac{١٥+\pi}{١٦}\right)\text{س}^{٢}$$

سؤال (١) :



يمتلك أبو فوزي 200 متراً من السياج ، ينوي

عمل حظيرتين بهذا السياج (الشكل)

١) اكتب مساحة الحظيرتين كاقتران تربيعي بدلالة س .

٢) جد أبعاد كل حظيرة لتكون مساحة كل منهما أكبر ما يمكن

سؤال (٢) :

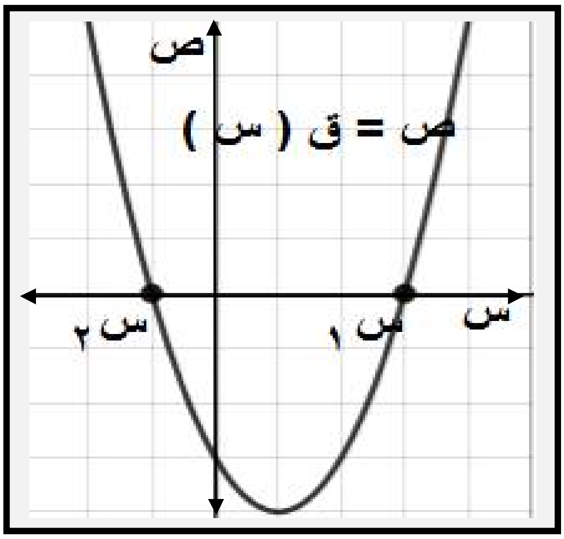
لشركة تجارية إذا كان الإيراد (د) (بالدينار) مرتبطا مع سعر سلعة (س) (بالدينار) تبيعها ،حسب العلاقة التالية:

د (س) = - ١٢ س٢ + ١٥٠ س

١)جد الإيراد إذا كان سعر السلعة : ٤ دينار ، ٦ دينار ، ٨ دينار

٢)جد سعر السلعة التي يكون عندها الإيراد أكبر ما يمكن

أصفار الاقتران التربيعي



- يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق (س)

لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

$س = س_١$ ، $س = س_٢$ ، وهذا يعني أن الإحداثي

الصادي لكلا النقطتين يساوي صفراً ، أي أن :

$ق(س_١) = ٠$ ، $ق(س_٢) = ٠$

يسمى العددان $س_١$ ، $س_٢$ **<u>أصفار الاقتران التربيعي</u>**

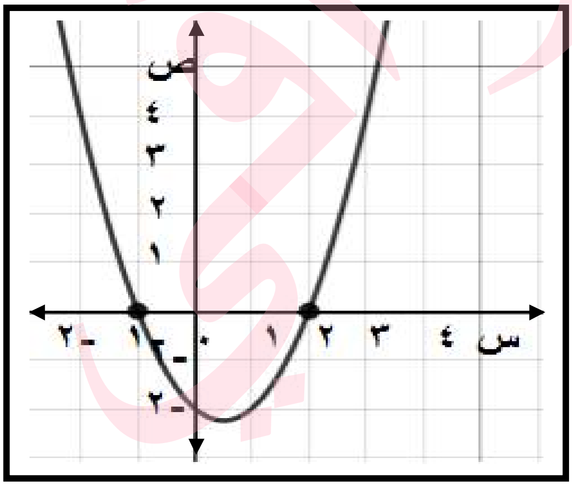
تعريف

- إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، فإن الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات تمثل أصفار هذا الاقتران .
- أي أن العدد $س_١$ يسمى صفراً للاقتران ق إذا كان ق ($س_١$) =٠ ، حيث $س_١$ عدد حقيقي

مثال (١٣) : مثال (٣ ــ ٧) كتاب مدرسي ص٩٣

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ - س - ٢$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره .

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين (-١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، وبما أن أصفار

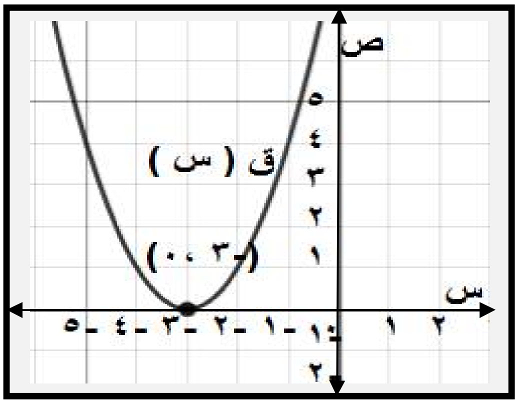
الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران

إذاً صفري الاقتران هما (س = -١) ، (س = ٢)

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $س^{٢}$ + ٦س + ٩ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره ٠

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطة (– ٣ ، ٠) ، وبما أن أصفار الاقتران هي

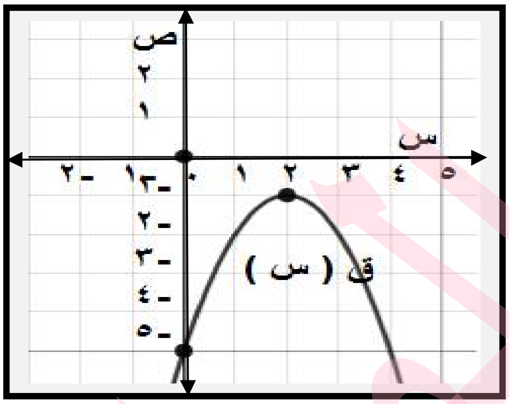
هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران إذاً صفر

الاقتران هو (س = – ٣)

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $-س^{٢}$ + ٤س – ٥ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره ٠

الحل :



لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران

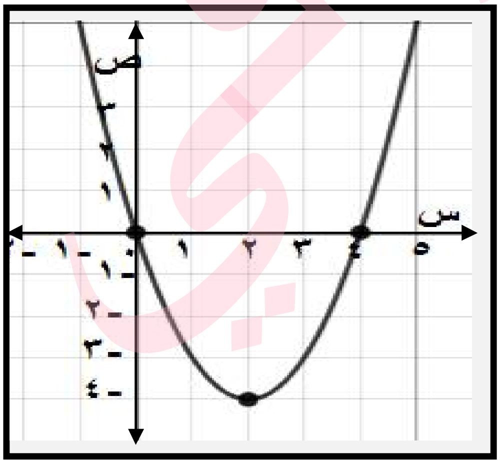
ق (س) أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

نهائياً ، لذلك فإنه لا يوجد أصفار للاقتران ٠

<u>حل تدريب (٣ – ٧) ص ٩٤</u>

ارسم منحنى الاقتران ق بيانياً ، حيث ق (س) = $س^{٢}$ – ٤س ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفار الاقتران ق ٠

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، وبما أن أصفار

الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران

إذاً صفري الاقتران هما (س = ٠) ، (س = ٤)

لاحظ من خلال الأمثلة السابقة

منحنى الاقتران التربيعي

يقطع محور السينات في نقطتين	يقطع محور السينات في نقطة واحدة	لا يقطع محور السينات نهائيا
يوجد صفرين للاقتران	يوجد صفر واحد للاقتران	لا يوجد أصفار للاقتران

مثال (١٥) :

أي من الأعداد ٢ ، ٠ ، −١ ، −٨ ، ٨ يعتبر صفراً للاقتران ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٨ :

الحل : نعوض كل عدد في قاعدة الاقتران ، والعدد الذي ناتج تعويضه = ٠ ، يعتبر صفراً للاقتران

العدد	الاقتران ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٨	الحكم
٢	ق (٢) = ٤ − ١٤ − ٨ = −١٨	ليس صفراً للاقتران
٠	ق (٠) = −٠ − ٠ − ٨ = −٨	ليس صفراً للاقتران
-١	ق (−١) = ١ + ٧ − ٨ = ٠	صفراً للاقتران
-٨	ق (−٨) = ٦٤ + ٥٦ − ٨ = ١١٢	ليس صفراً للاقتران
٨	ق (−٨) = ٦٤ − ٥٦ − ٨ = ٠	صفراً للاقتران

حل تدريب (٣ – ٨) ص ٩٤

إذا علمت أن العدد (٧) هو صفراً للاقتران ق : ق (س) = أس^{٢} − ٤س − ٢١ ، أوجد قيمة الثابت أ ؟

الحل : ٧ صفراً للاقتران ← ق (٧) = ٠ ،، نعوض ٧ في قاعدة الاقتران ق

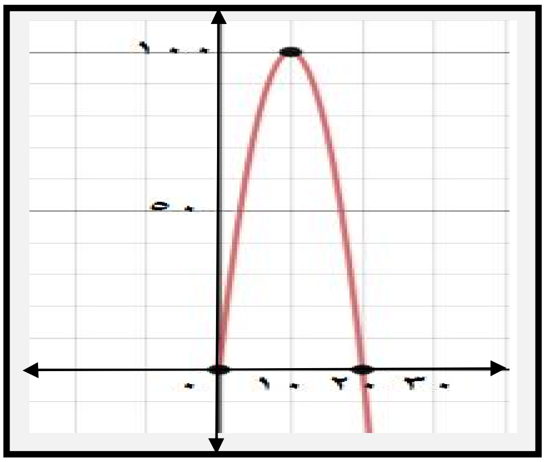
ق (٧) = أ (٧)^{٢} − ٤(٧) − ٢١ = ٠ ← ٤٩أ − ٢٨ − ٢١ = ٠

٤٩أ − ٤٩ = ٠ ← ٤٩أ = ٤٩ ← $\boxed{\text{أ} = ١}$

حل تدريب (٣ – ٩) ص٩٥

يبيع مربي دواجن (س) بيضة يومياً ، إذا كان الربح الذي سيحصل عليه عند بيعها ممثلاً في العلاقة : ص = ٤٠ س – س ٢ (قرشاً) ، استخدم برنامج إكسل لمعرفة عدد البيض اللازم بيعه ليكون الربح صفراً ، وما عدد البيض اللازم بيعه لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟ وما مقدار الربح آنذاك ؟

الحل : باستخدام برنامج ديسموس



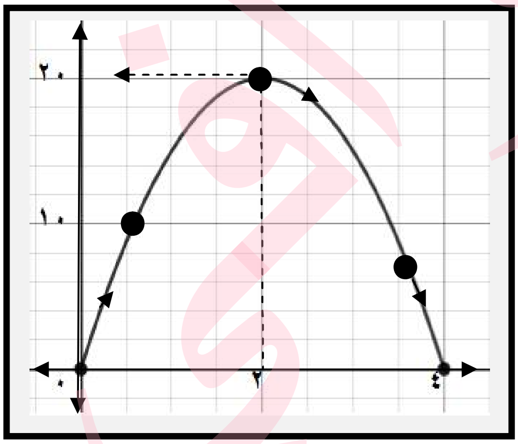
- بما أن عدد البيض لا يمكن أن يكون سالباً ، فإن مجال العلاقة هو س ≥ ٠ .
- من خلال الرسم تلاحظ أن الربح يساوي صفراً عندما س = ٢٠ ،، عند س = ٠ لم يبع أي بيضة
- لتحقيق أكبر ربح يجب عليه بيع ١٠ بيضات ، ويكون مقدار الربح ١٠٠ قرشاً .

مثال (١٦) :

قذفت كرة إلى الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م / ث ، فإذا كان ارتفاع الكرة (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية معطى وفقاً للقاعدة ف : ف (ن) = ٢٠ن – ٥ن ٢

- متى تعود الكرة إلى سطح الأرض ؟
- ما أقصى ارتفاع ممكن أن تصله الكرة ؟

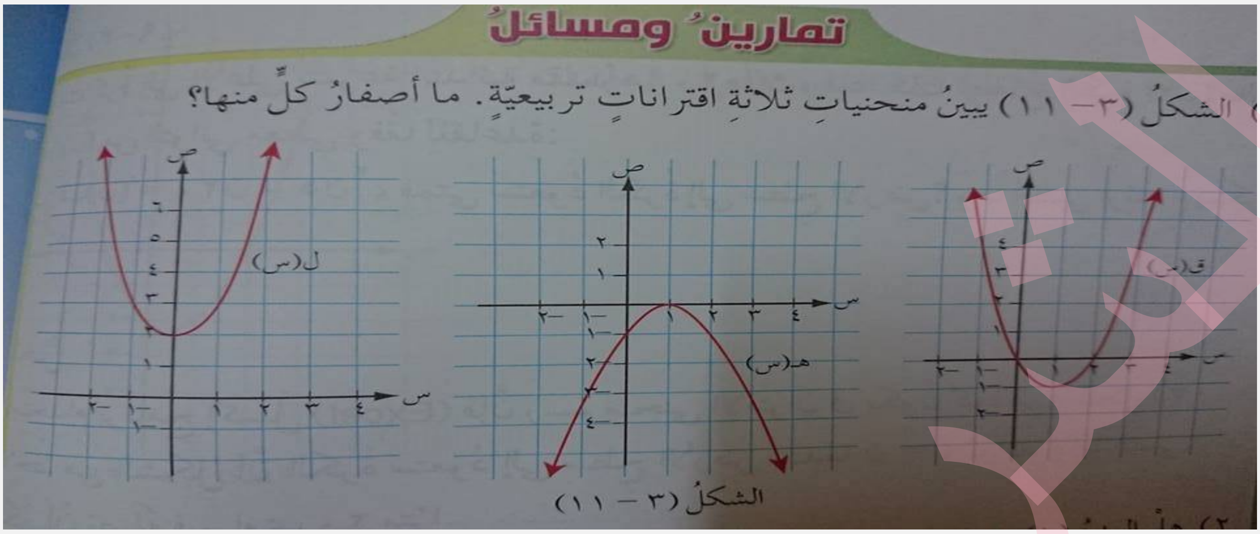
الحل :



- الشكل المجاور يمثل منحنى العلاقة بين الزمن ومسار الكرة .
- لاحظ أن الكرة تعود إلى سطح الأرض بعد مرور ٤ ثوان
- أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو بعد مرور ثانيتين ويساوي ٢٠ متراً .

حل تمارين ومسائل ص٩٦

١) الشكل يبين منحنيات ثلاثة اقترانات تربيعية ، ما أصفار كل منها ؟



الحل : (س = ٠) ، (س = ٢) (س = ١) **لا يوجد**

٢) هل العدد (١) صفر للاقتران ق : ق (س) = $٥س^{٢}$ + س – ٦ **؟ برر إجابتك ؟**

الحل :

نجد ق(١) ← ق (١) = $٥(١)^{٢}$ + ١ – ٦ = ٥ + ١ – ٦ = ٠

وبما أن ق(١) = ٠ ، **إذاً العدد (١) صفر للاقتران .**

٣) ارسم منحنى الاقترانات التالية ، ثم جد أصفار كل منها :

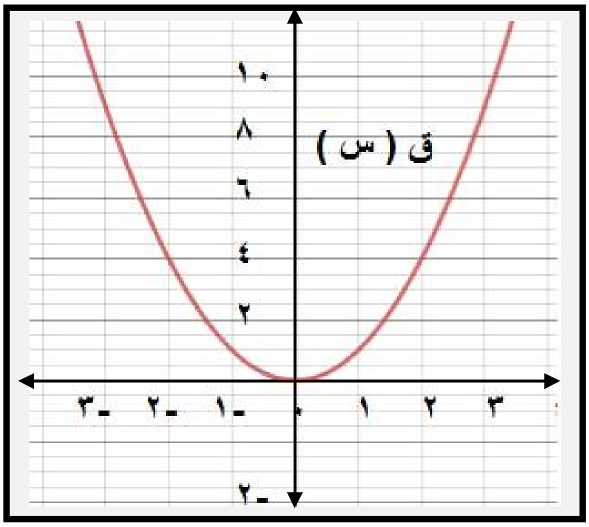
أ) ق (س) = $س^{٢}$ ب) هـ(س) = س – $\frac{١}{٢}س^{٢}$ جـ) ق (س) = ٤ + $س^{٢}$ – ٤س

الحل :

أ) ق (س) = $س^{٢}$ ←←← أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

- $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ←← ق(٠) = $(٠)^{٢}$ = ٠ ← (٠ ، ٠) **نقطة الرأس للمنحنى**

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = ق (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

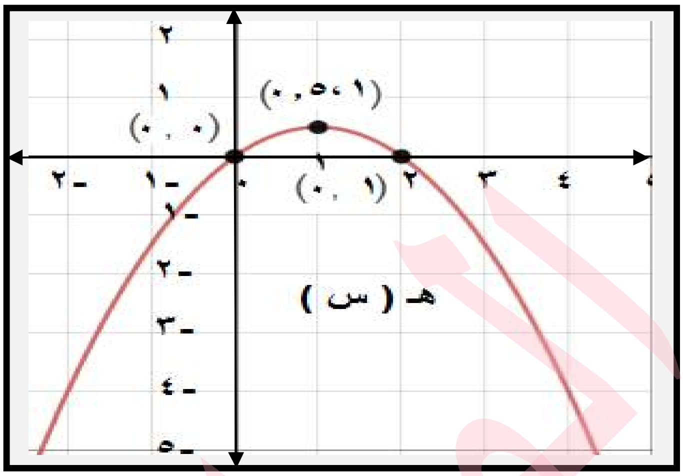


صفر الاقتران (س = ٠)

ب) هـ(س) = $-\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س ←←← أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ١ ، جـ = ٠

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-١}{٢ \times \frac{-١}{٢}} = ١$ ←← ن(١) = $\frac{-١}{٢}(١)^{٢} + ١ = ٥ و٠$ ← (١ ، ٥ و٠) نقطة الرأس للمنحنى

س	ص = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢} + س	(س ، ص)
−٢	$\frac{-١}{٢} \times ٤ + - ٢ = -٤$	(−٢ ، −٤)
−١	$\frac{-١}{٢} \times ١ + - ١ = -٥ و١$	(−١ ، −٥ و١)
٠	$\frac{-١}{٢} \times ٠ + ٠ = ٠$	(٠ ، ٠)
١	$\frac{-١}{٢} \times ١ + ١ = ٥ و٠$	(١ ، ٥ و٠)
٢	$\frac{-١}{٢} \times ٤ + ٢ = ٠$	(٢ ، ٠)
٣	$\frac{-١}{٢} \times ٩ + ٣ = -٥ و١$	(٣ ، −٥ و١)
٤	$\frac{-١}{٢} \times ١٦ + ٤ = -٤$	(٤ ، −٤)



صفري الاقتران (س = ٠) ، (س = ٢)

٤) إذا كان العدد ٢ صفراً للاقتران ن (س) = أس^{٢} + ب س + ٦ ، وكان ن (١) = ٢ ، فجد قيمة كل من العددين الحقيقيين أ ، ب

الحل :

- **لاحظ أنه يوجد مجهولان هما أ ، ب لذلك يجب أن يكون لدينا معادلتان لإيجاد قيمة كل منهما .**
- **في السؤال يوجد لدينا معلومتان نستطيع من خلالهما تكوين المعادلتين :**

المعلومة الأولى : العدد ٢ صفراً للاقتران ن (٢) = ٠ ، ومن خلال تعويض العدد ٢ في قاعدة الاقتران : ن (٢) = ٠ ← ٤أ + ٢ب + ٦ = ٠ ← $\underbrace{٤أ + ٢ب = -٦}_{÷٢}$ ← $\boxed{٢أ + ب = -٣}$ ....(١)

المعلومة الثانية : ق (١) = ٢ نعوض العدد ١ في قاعدة الاقتران ق

ق (١) = ٢ $\leftarrow$ أ + ب + ٦ = ٢ $\leftarrow$ $\boxed{\text{أ + ب = −٤}}$ . . . (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) ، باستخدام طريقة الحذف أو التعويض (نستخدم الحذف)

$\begin{cases} \text{٢أ + ب = −٣} \\ \text{−١} \times \text{(أ + ب = −٤)} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \text{٢أ + ب = −٣} \\ \text{−أ − ب = ٤} \end{cases} \xleftarrow{\text{م١+م٢}} \boxed{\text{أ = ١}}$

وبتعويض قيمة أ في معادلة (٢) $\leftarrow$ ١ + ب = −٤ $\leftarrow$ $\boxed{\text{ب = −٥}}$

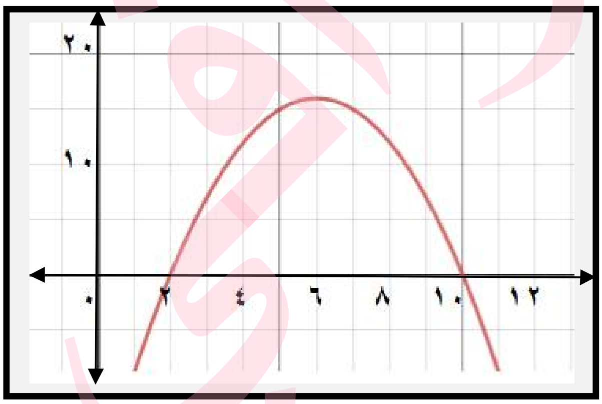
إذاً قيمة كل من العددين الحقيقين أ ، ب هما : (أ = ١) ، (ب = −٥)

٥) يتغير بعدا مستطيل ، بحيث يبقى محيطه ٢٤ سم ، جد طوله عندما تصبح مساحته ٢٠ سم٢ .

الحل :

- **نفرض بعدي المستطيل : الطول = س ،، العرض = ص**
- **محيط المستطيل = ٢٤** $\leftarrow$ $\underbrace{\text{٢س + ٢ص = ٢٤}}_{\div ٢}$ $\leftarrow$ س + ص = ١٢ $\leftarrow$ $\boxed{\text{ص = ١٢ − س}}$ . . . (١)
- **المساحة (م) = ٢٠** $\leftarrow$ م = س ص $\leftarrow$ $\boxed{\text{م = س ص = ٢٠}}$ . . . (٢)
- **وبتعويض معادلة ١ في معادلة ٢ وكتابة الاقتران بدلالة س**

م(س) = س(١٢ − س) − ٢٠ $\leftarrow$ $\boxed{\text{م(س) = −س}^{٢}\text{ + ١٢س − ٢٠}}$



- **نمثل الاقتران بيانياً**

لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

س = ١٠ ،، س = ٢

- **عند س = ١٠ ⟵ ص = ٢**
- **عند س = ٢ ⟵ ص = ١٠**

وبما أن الطول أكبر من العرض إذاً : الطول س = ١٠ سم .

٦) أضيف مربع العدد الموجب س إلى العدد ٢٥ وطرح من الناتج ١٠ أمثال س ، وكان ناتج الطرح صفراً ، كيف يمكنك معرفة قيمة س ؟

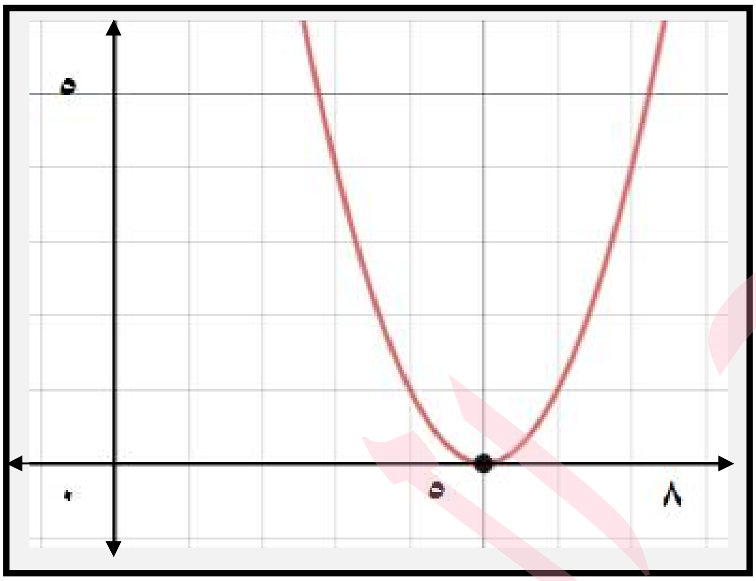
الحل :

العدد س ⟵ مربع العدد س = س ٢ ،، ١٠ أمثال س = ١٠ س

نكتب المعادلة لفظاً :

مربع العدد س + ٢٥ – ١٠ س = ٠ ⟵ س ٢ – ١٠س + ٢٥ = ٠

نفرض أن ق(س) = س ٢ – ١٠س + ٢٥ ونمثل الاقتران بيانياً ، نقطة تقاطع منحناه مع محور السينات هي قيمة س المطلوبة .



لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع

محور السينات عند س = ٥

إذاً قيمة س هي ٥

٣ ــ ٣ حل المعادلة التربيعية بيانياً

::: المعادلة الخطية بمتغير واحد :

الصورة العامة : ← أ س + ب = ٠ ، أ ≠ ٠

تعلمت في الصفوف السابقة على المعادلة الخطية بمتغير واحد وطريقة إيجاد حل هذه المعادلة جبرياً

والمقصود بحل المعادلة : هو إيجاد قيمة (قيم) المتغير الذي يجعل المعادلة صائبة باستخدام الطرق الجبرية أو التمثيل البياني

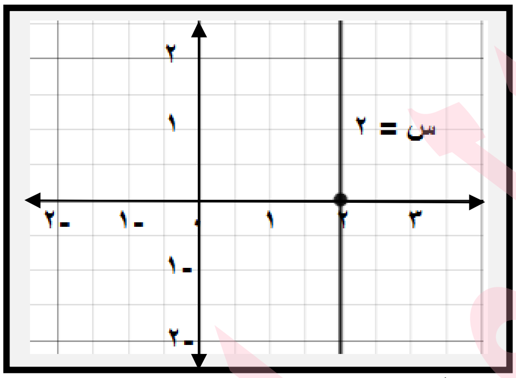
مثال (١٧) :

حل المعادلة ٢ س + ٣ = ٧ جبرياً ثم مثل الحل بيانيا :

الحل :

الطريقة الجبرية : نجعل المتغيرات في جهة والأعداد في الجهة الثانية باستخدام خصائص المساواة

٢ س + ٣ = ٧ (بطرح ٣ـ من الطرفين) ← ٢ س = ٤ ← $\frac{١}{٢}$ × ٢ س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ ← $\boxed{\text{س = ٢}}$



لاحظ أن التمثيل البياني لحل المعادلة هو عبارة عن خط مستقيم موازٍ لمحور الصادات ، ويقطع محور السينات عند س = ٢

في هذا الدرس سوف نتعرف على معادلة بمتغير واحد من الدرجة الثانية

لاحظ المعادلة ← س^{٢} ــ ١٠ س + ٢٥ = ٠ تتكون من متغير واحد (س) وأعلى أس فيها ٢

تسمى مثل هذه المعادلة **معادلة تربيعية**

تعريف

- **الصورة العامة للمعادلة التربيعية في متغير واحد هي أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠**
- **حيث أ ≠ ٠ ، ويسمى العدد س$_{١}$ حلاً أو جذراً للمعادلة إذا كان أ س$_{١}^{٢}$ + ب س$_{١}$ + جـ = ٠**

- **الصورة العامة للاقتران التربيعي : ← ق (س) = أس^{٢} + ب س + جـ**

تسمى المعادلة ← أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ المعادلة المرافقة للاقتران ق

- **من طرق حل المعادلة التربيعية الحل البياني كما يلي :**

١) كتابة قاعدة الاقتران التربيعي بالصورة العامة الذي تكون هذه المعادلة مرافقة له .

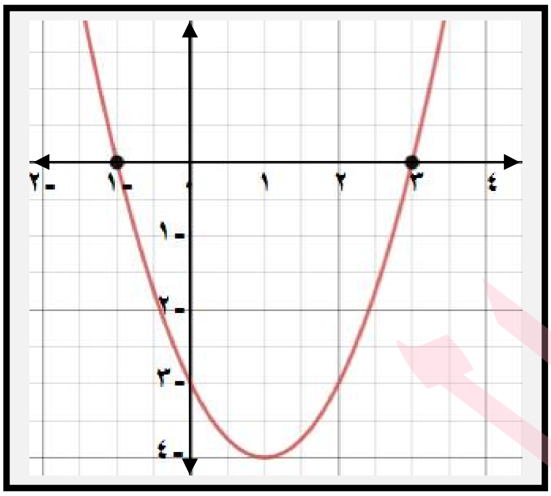
٢) رسم منحنى الاقتران التربيعي على المستوى الإحداثي .

٣) تحديد أصفار الاقتران التربيعي (إن وجدت) ، فتكون هذه الأصفار جذورا (حلاً) للمعادلة التربيعية .

مثال (١٨) : (٣ ـ ١٠) كتاب مدرسي

حل المعادلة التربيعية س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠ بالرسم

الحل :



ليكن ق (س) = س^{٢} – ٢س – ٣ ، نمثل الاقتران بيانياً

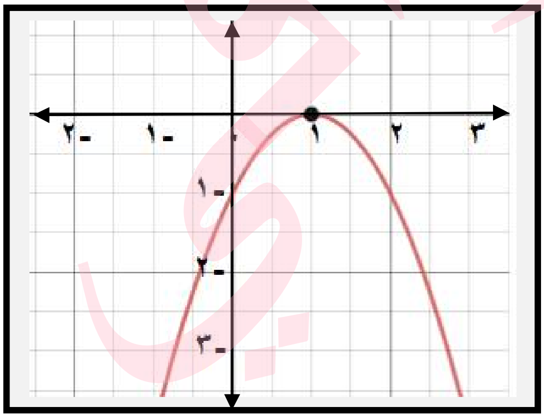
لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق يقطع محور السينات عند س = -١ ، س = ٣ ، وبناءً على ذلك

فإن للاقتران صفرين هما س = -١ ، س = ٣

فيكون س = -١ ، س = ٣ هما حلان (جذران) للمعادلة

إذاً مجموعة حل المعادلة = { –١ ، ٣ }

حل تدريب (٣ – ١٠) ص٩٩



حل المعادلة التربيعية ٢س – س^{٢} – ١ = ٠ بالرسم

الحل : نكتب المعادلة بالصورة العامة – س^{٢} + ٢س – ١ = ٠

نفرض هـ (س) = – س^{٢} + ٢س – ١

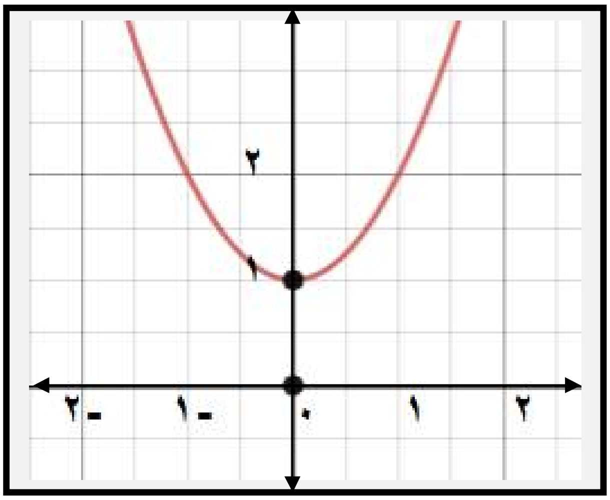
لاحظ من الرسم أن س = ١ ، هي صفر الاقتران هـ

يكون س = ١ هو حل (جذر) للمعادلة

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ١ }

مثال (١٩) :

حل المعادلة التربيعية $س^٢ + ١ = ٠$ بالرسم



الحل :

ليكن ل (س) = $س^٢ + ١$

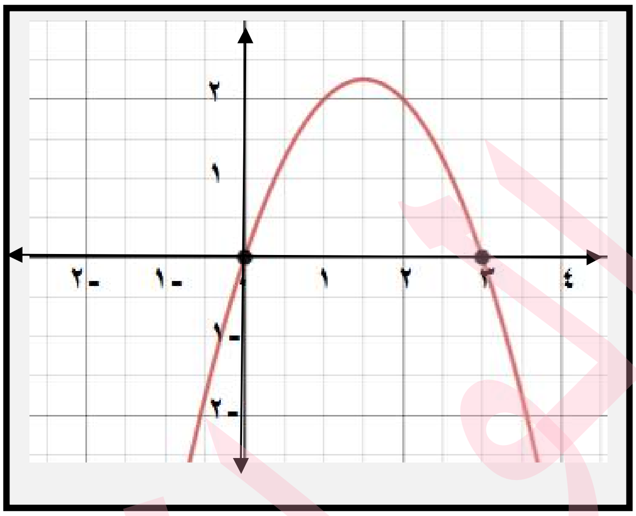
لاحظ أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

لذلك فإنه لا يوجد أصفار للاقتران ، فيكون لا يوجد

حل للمعادلة المرافقة للاقتران

إذاً مجموعة حل المعادلة = { } أو = ∅

مثال (٢٠) : (٣ – ١١) كتاب مدرسي



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق

جد حل المعادلة ق (س) = ٠ ، معتمداً على الشكل

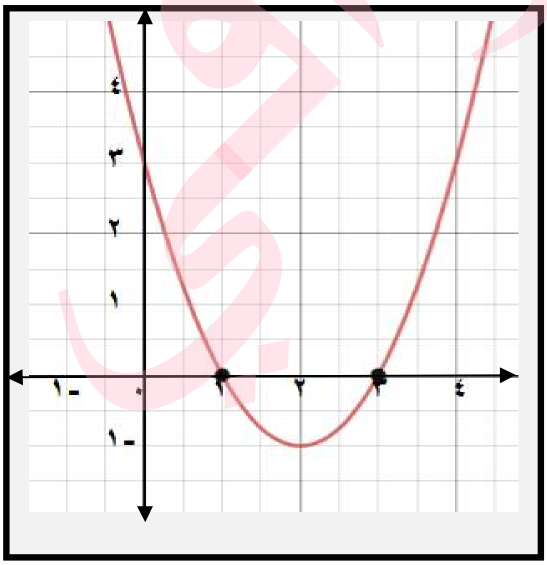
الحل :

أصفار الاقتران س= ٠ ، س = ٣

فيكون س= ٠ ، س = ٣ جذرا المعادلة المرافقة

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ٠ ، ٣ }

حل تدريب (٣ – ١١) ص٩٩



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ل

جد جذري المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ل

الحل :

من الرسم أصفار الاقتران س = ١ ، س = ٣

يكون جذرا المعادلة المرافقة س = ١ ، س = ٣

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ١ ، ٣ }

إيجاد نقط التقاطع بين منحنيين

يتقاطع منحنى الاقتران ق مع منحنى الاقتران ل إذا كان ق (س) = ل (س)

وبشكل عام :

يتقاطع منحنيين الاقترانين ق ، ل عند النقطة (أ ، ب) ، إذا كان ق(أ) = ل(أ) = ب

::: كيف نجد نقطة التقاطع بين منحنى اقترانين مثل ق ، ل :

١) نضع ق (س) = ل (س)

٢) نصفر المعادلة الناتجة من الخطوة السابقة لتصبح على الصورة ← أ$س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

٣) نفرض ك(س) = أ$س^{٢}$ + ب س + جـ **ثم نمثله بيانياً على المستوى الإحداثي**

٤) نحدد أصفار الاقتران ك (إن وجدت) ، التي هي نفسها جذور المعادلة المرافقة

٥) جذور المعادلة المرافقة = الإحداثي السني لنقط التقاطع

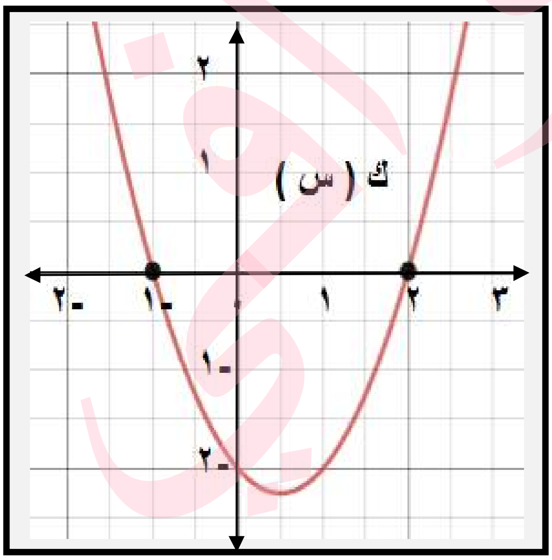
٦) لإيجاد نقط التقاطع (س ، ص) ، نعوض قيمة س في أي اقتران لإيجاد قيمة ص

مثال (٢١) :

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ل (س) = $س^{٢}$ + ١ **مع منحنى الاقتران** هـ (س) = س + ٣

الحل :

- ل (س) = هـ (س) ← $س^{٢}$ + ١ = س + ٣ ← $س^{٢}$ − س − ٢ = ٠ **نصفر المعادلة**



- **ليكن** ك (س) = $س^{٢}$ − س − ٢
- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ق هي عند**

  س = -١ ، س = ٢

- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

(−١ ، ق(−١)) $\xrightarrow{ق(−١)=(−١)^{٢}+١=٢}$ (−١ ، ٢)

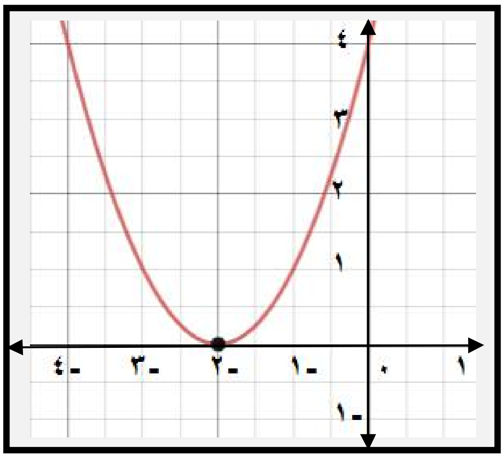
(٢ ، ق(٢)) $\xrightarrow{ق(٢)=(٢)^{٢}+١=٥}$ (٢ ، ٥)

مثال (٢٢) :

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ل (س) = ٢س^٢^ + ٥س – ٥ **مع منحنى الاقتران** ق (س) = س^٢^ + س – ٩

الحل :

- ل (س) = ق (س) ← ٢س^٢^ + ٥س – ٥ = س^٢^ + س – ٩ ← س^٢^ + ٤س + ٤ = ٠
- **ليكن** ك (س) = س^٢^ – س – ٢



- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ق هي عند س = -٢**
- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

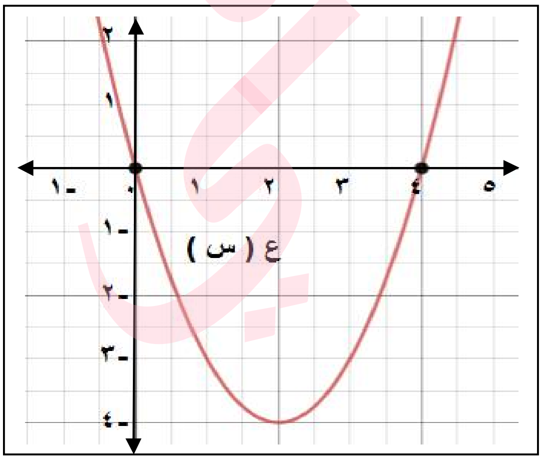
(–٢ ، ل(–٢)) $\xrightarrow[\text{=٨–١٠–٥=–٧}]{\text{ل(–٢)=٢(–٢)}^٢\text{+٥(–٢)–٥=}}$ (–٢ ، –٧)

حل تدريب (٣ – ١٢) ص ١٠٠

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ق (س) = س^٢^ **مع منحنى الاقتران** ل (س) = ٨س – س^٢^

الحل :

- ق (س) = ل (س) ← س^٢^ = ٨س – س^٢^ ← $\underbrace{\text{٢س}^٢ – \text{٨س} = ٠}_{÷٢}$ ← س^٢^ – ٤س = ٠



- **ليكن** ع (س) = س^٢^ – ٤س
- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك**

أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ع س= ٠ ، س = ٤

- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

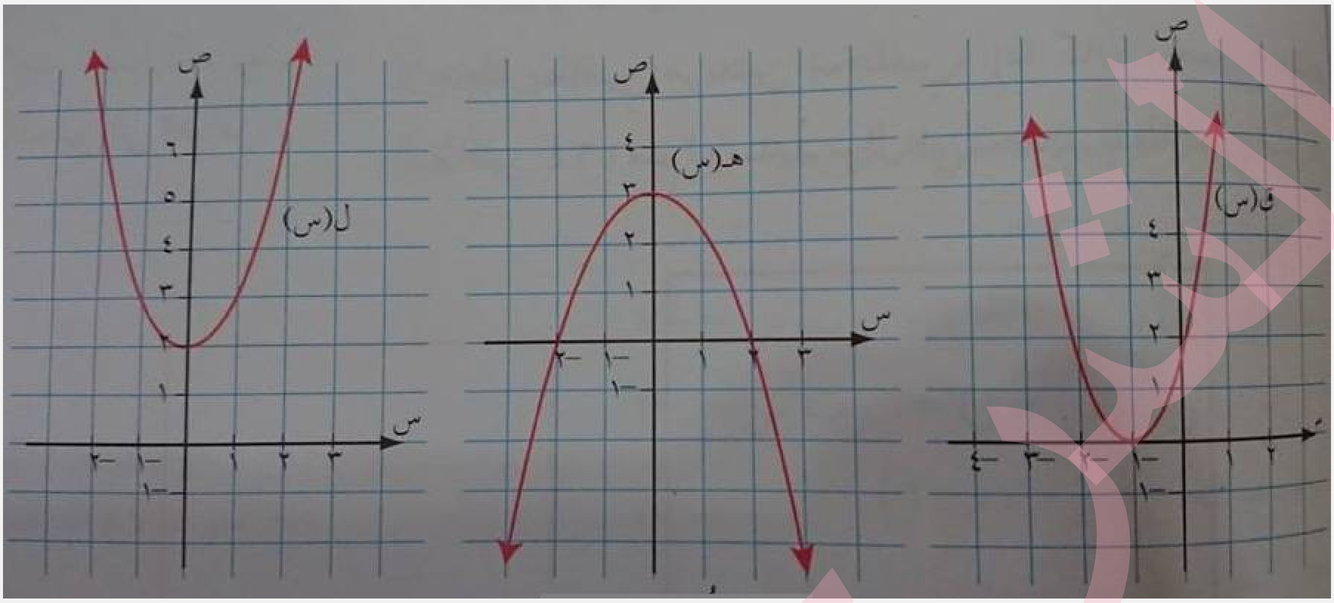
(٠ ، ق(٠)) $\xrightarrow{\text{ق(٠)=(٠)}^٢\text{=٠}}$ (٠ ، ٠)

(٤ ، ق(٤)) $\xrightarrow{\text{ق(٤)=(٤)}^٢\text{=١٦}}$ (٤ ، ١٦)

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تمارين ومسائل ص١٠١

١) يبين الشكل رسم منحنى الاقترانات التربيعية ق ، هـ ، ل على الترتيب ، جد جذور المعادلة المرافقة لكل منهما .



الحل : س = -١ س = -٢ ، س = ٢ لا يوجد

٢) إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي ق محور السينات عندما س = -١ ، س = ٥ ، فما جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ؟

الحل :

س = -١ ، س = ٥ أصفار الاقتران ق ، هي نفسها جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق

٣) حل المعادلات الآتية مستخدماً برنامج إكسل :

أ) $٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠$ ب) $٢ - ٢س - س^{٢} = ٠$

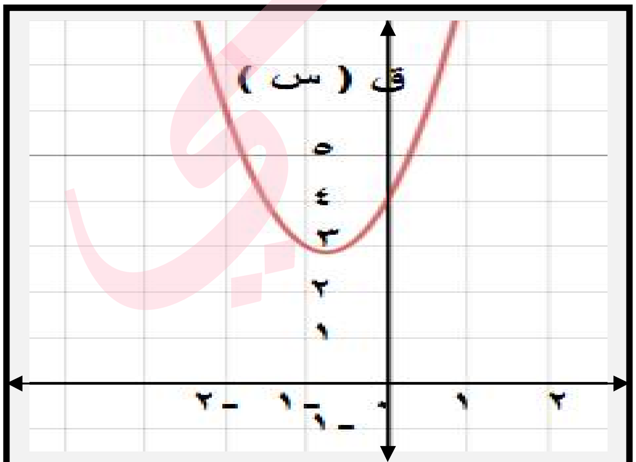
جـ) $س^{٢} - س + ٠٫٢٥ = ٠$ د) $(س - ٢)^{٢} = ٠$

الحل : أ) $٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠$

ليكن $ن(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ٤$

لاحظ في الشكل المجاور أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

إذاً مجموعة حل المعادلة = { } أو = $\varnothing$



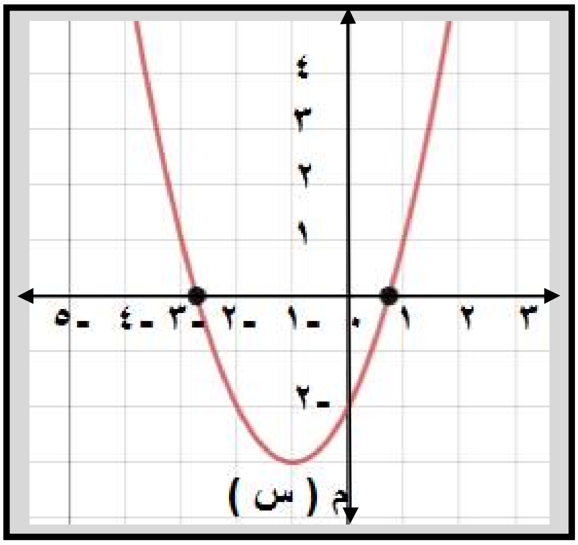
ب) ٢ – ٢س – س^{٢} = ٠

نعيد كتابة المعادلة على الصورة س^{٢} + ٢س – ٢ = ٠

ليكن م (س) = س^{٢} + ٢ س – ٢

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران م يقطع محور السينات (تقريبا) عندما س = ٠و٧ ، س = –٢و٧ .

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ٠و٧ ، –٢و٧ }

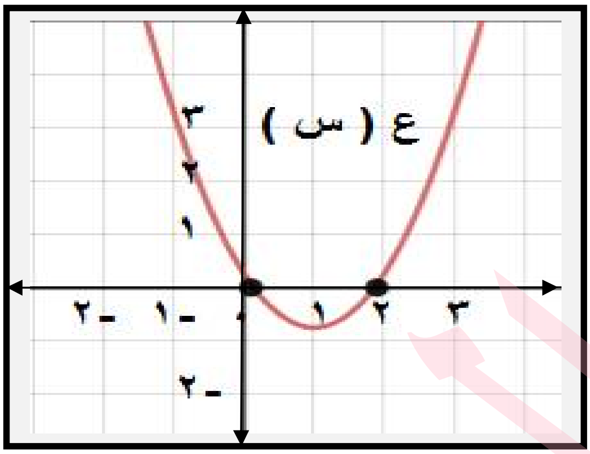


جـ) س^{٢} – س + ٠و٢٥ = ٠ (يمكن تبسيط المعادلة والتخلص من الفاصلة العشرية)

ليكن ع(س) = س^{٢} – س + ٠و٢٥

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران م يقطع محور السينات (تقريبا) عندما س = ٠و١ ، س = ١و٩ .

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ٠و١ ، ١و٩ }



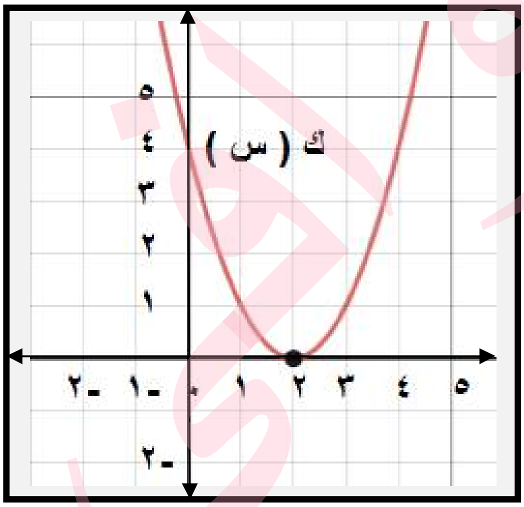
ء) (س – ٢)^{٢} = ٠ نكتب المعادلة على الصورة العامة

(س – ٢)^{٢} = ٠ ← س^{٢} – ٤س + ٤ = ٠

ليكن ك(س) = س^{٢} – ٤س + ٤

لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أنه يقطع محور السينات عند س = ٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { س = ٢ }

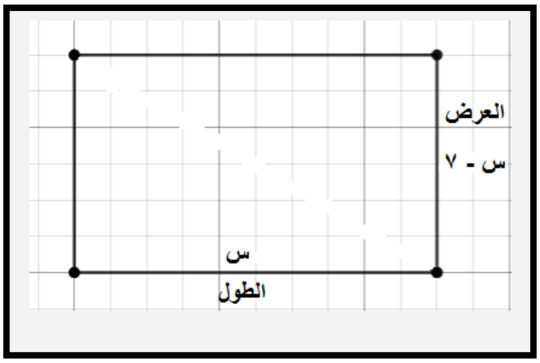


ملاحظة : في نهاية الوحدة إن شاء الله نتعلم طرق أخرى للرسم من خلال الصورة القياسية

٤) يزيد طول مستطيل عن عرضه بمقدار ٧ سم ، إذا علمت أن مساحة المستطيل ٦٠ سم٢ ، جد كلاً من طوله وعرضه .

الحل :

- نفرض طول المستطيل س ⟵ العرض (س - ٧) : أنظر الشكل



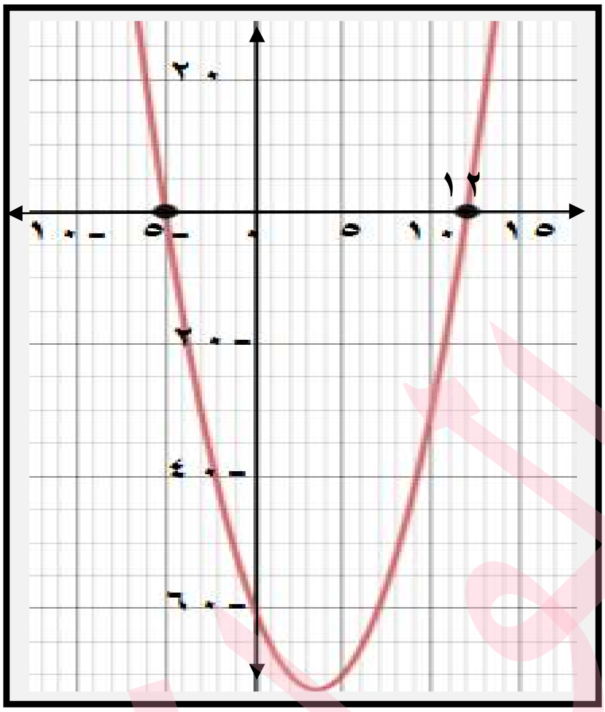
- مساحة المستطيل (م) = الطول × العرض

م = س (س − ٧) ⟵ س (س − ٧) = ٦٠

- نكتب المعادلة في الخطوة السابقة على الصورة العامة

س (س − ٧) = ٦٠ ⟵ س^{٢} − ٧س = ٦٠

س^{٢} − ٧س − ٦٠ = ٠



- ليكن ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٦٠

- لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق

يقطع محور السينات عندما س = −٥ ، س = ١٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { −٥ ، ١٢ }

- لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :

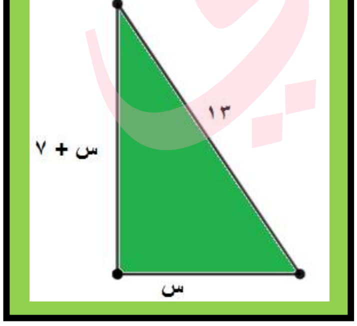
س = −٥ مرفوضة

س = ١٢ سم هي طول المستطيل

منها العرض = س − ٧ = ١٢ − ٧ = ٥ سم

٥) حديقة على شكل مثلث قائم الزاوية ، طول ضلعها الأكبر ١٣ م ، يزيد طول أحد ضلعي القائمة على طول الضلع الآخر بمقدار ٧ م ، جد طول ضلعي القائمة .

الحل :

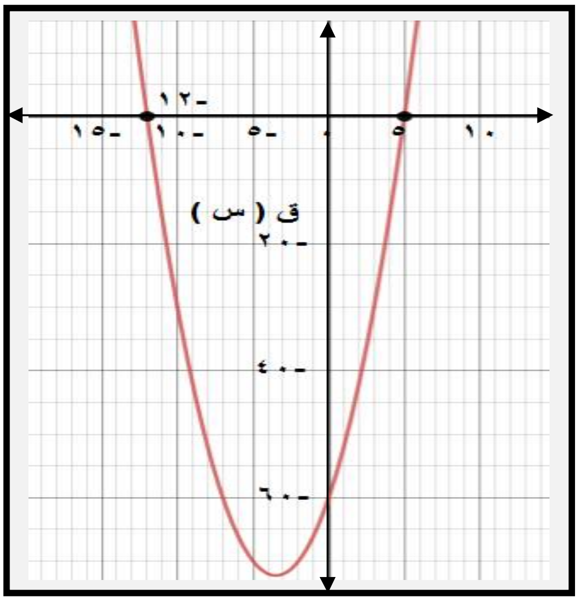


- نفرض طول أحد ضلعي القائمة س ⟵ طول الضلع الآخر س + ٧

- نستخدم مبرهنة فيثاغورس

- $\text{س}^{٢} + (\text{س}+٧)^{٢} = (١٣)^{٢} \leftarrow \text{س}^{٢} + \text{س}^{٢} + ١٤\text{س} + ٤٩ = ١٦٩$

$\underbrace{٢\text{س}^{٢} + ١٤\text{س} - ١٢٠ = ٠}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ٦٠ = ٠$



- ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ٦٠$
- لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق

يقطع محور السينات عندما س = -١٢ ، س = ٥

إذاً مجموعة حل المعادلة = { -١٢ ، ٥ }

- لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :

س = -١٢ مرفوضة

س = ٥ م طول ضلع القائمة الأولى

منها طول ضلع القائمة الثانية = س +٧ = ٥ + ٧ = ١٢ م

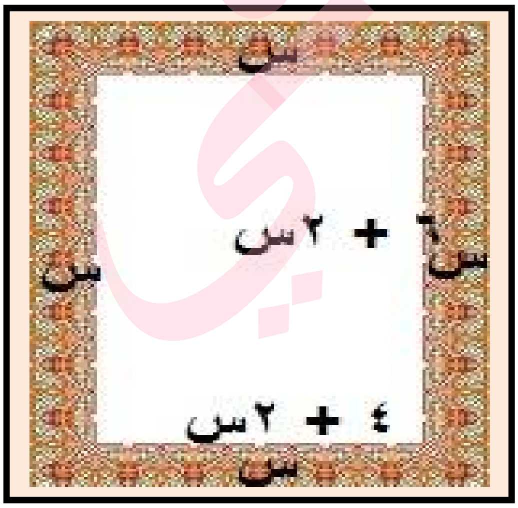
٦) المسألة الواردة في بداية الدرس

يراد إحاطة صورة مستطيلة الشكل طولها ٦ سم وعرضها ٤ سم ، بإطار عرضه متساو على الأطراف جميعها ، إذا كانت مساحة الإطار مع الصورة تساوي مثلي مساحة الصورة ، فجد عرض الإطار .

الحل :

- نفرض عرض الإطار س ← طول الصورة والإطار = ٦ + ٢ س

← عرض الصورة والإطار = ٤ + ٢ س



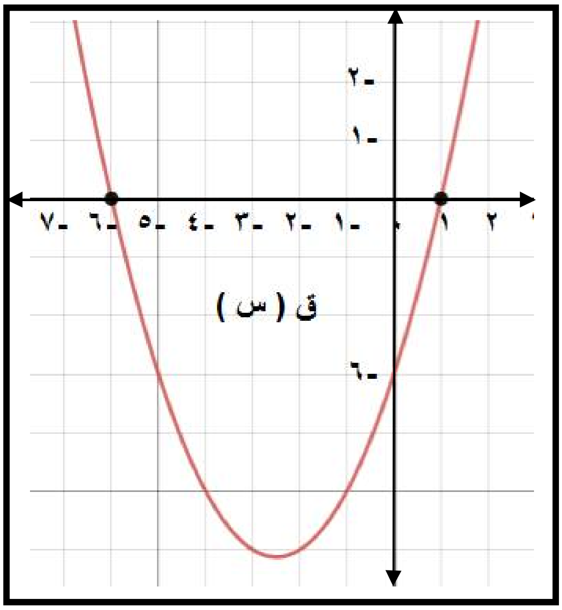
مساحة الإطار والصورة = مثلي مساحة الصورة

$(٤+٢\text{س})(٦+٢\text{س}) = ٢(٦\times٤) \leftarrow ٢٤ + ٢٠\text{س} + ٤\text{س}^{٢} = ٤٨$

$\underbrace{٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} - ٢٤ = ٠}_{÷٤} \leftarrow \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦ = ٠$

ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦$

- لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق يقطع محور السينات عندما س = −٦ ، س = ١



- إذاً مجموعة حل المعادلة = { −٦ ، ١ }
- لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :

س = −٦ مرفوضة

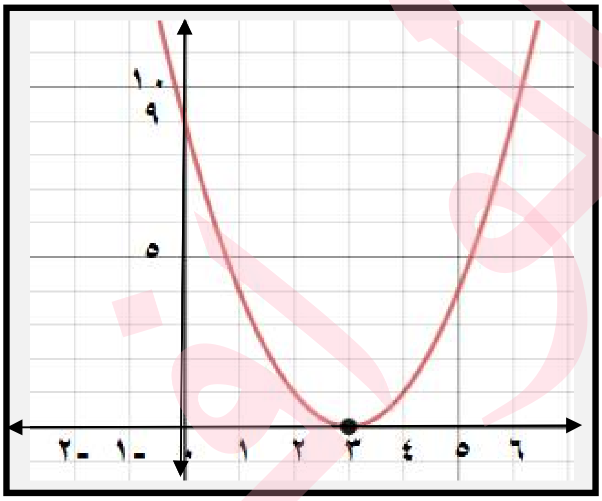
س = ١ سم عرض الإطار

٧) جد نقطة تقاطع منحنى كل من الاقترانين :

ن (س) = س^{٢} ، ل (س) = ٦س − ٩

الحل :

- ن(س) = ل(س) ← س^{٢} = ٦س − ٩ ← $\boxed{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ = ٠}$
- ليكن ن(س) = س^{٢} − ٦س + ٩



لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أنه

يقطع محور السينات عند س = ٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { س = ٢ }

أي أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطة

(٣ ، ن(٣)) $\xleftarrow{\text{ن}(٣)=(٣)^{٢}=٩}$ (٣ ، ٩)

حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل

مراجعة في تحليل العبارة التربيعية

الصورة العامة للعبارة التربيعية : $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$: $\text{أ} \neq ٠$

تحليل العبارة التربيعية :

- **إذا كانت على الصورة** $\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$

$\text{أ} = ١$

- **جـ موجبة ، ب موجبة أو سالبة**

- نفتح قوسين (س) (س)

- الإشارة بعد س حسب إشارة ب

- ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما جـ ومجموعهما ب ونضعهما بعد الإشارة

- **جـ سالبة ، ب موجبة أو سالبة**

- نفتح قوسين (س) (س)

- في القوس الأول بعد س نضع إشارة ب ، وفي القوس الثاني إشارة مخالفة

- ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما جـ والفرق بينهما ب ، ونضع العدد الأكبر في القوس الأول

$\text{أ} \neq ١$

- **نجعل أ = ١ إن أمكن أو**
- **نضرب كامل العبارة في أ ونكتبها على الصورة**

$\text{أ}^{٢}\text{س}^{٢} + \text{ب أس} + \text{أجـ}$ **ثم نكتبها**

$(\text{أس})^{٢} + \text{ب}(\text{أس}) + \text{أجـ}$ **ثم نحللها كما في القسم الأيمن ،**

- **في النهاية نقسم القوسين على أ**

مثال (١) : $\text{٢س}^{٢} + \text{٧س} + ٣$

$$٢(\text{٢س}^{٢} + \text{٧س} + ٣) = (\text{٢س})^{٢} + ٧(\text{٢س}) + ٦$$

$$(\text{٢س} + ١)(\text{٢س} + ٦) = \underbrace{(\text{٢س} + ١) \times ٢(\text{س} + ٣)}_{\div ٢}$$

$$= (\text{٢س} + ١)(\text{س} + ٣)$$

مثال (٢) : $\text{٣س}^{٢} + \text{١١س} - ٤$

الحل بخطوات سريعة

$$(\text{٣س})^{٢} + ١١(\text{٣س}) - ١٢ = (\text{٣س} + ١٢)(\text{٣س} - ١)$$

$$= (\text{س} + ٤)(\text{٣س} - ١)$$

جـ =	ب = ٠
أي على الصورة أ س^{٢} + ب س	أي على الصورة أ س^{٢} + جـ
إخراج س عامل مشترك	تحليل فرق بين مربعين بشرط أ ، ب مختلفي الإشارة

الخاصية الصفرية

- إذا كان أ ، ب عدد ين حقيقيين وكان أ × ب = ٠

فإن إما أ = ٠ أو ب = ٠ أو كليهما يساوي صفراً

كيف نحل المعادلة التربيعية :

نكتب المعادلة على الصورة العامة

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

١ أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

٢ أ س^{٢} + ب س = ٠

٣ أ س^{٢} + جـ = ٠

- نحلل الطرف الأيمن إلى عوامله الأولية بكتابته على شكل حاصل ضرب عبارتين خطيتين ٠
- استخدم الخاصية الصفرية ٠
- حل المعادلتين الخطيتين التي حصلت عليهما في الخطوة السابقة ٠

ملاحظة : ١) يجوز ضرب المعادلة بعدد حقيقي لا يساوي الصفر ، وكذلك القسمة

٢) بالنسبة للحالة الثالثة ، نستخدم الطريقة التالية في إيجاد حل المعادلة بالإضافة إلى طريقة فرق بين مربعين في التحليل

إذا كان س^{٢} = ك فإن س = ± $\sqrt{ك}$: ك ≥ ٠

ومجموعة الحل = { $\sqrt{ك}$ ، − $\sqrt{ك}$ }

مثال (٢٣) :

حل كل من المعادلات التربيعية الآتية :

١) س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠	٢) ٢س^{٢} − س − ١ = ٠	٣) س^{٢} = ٥س + ٦
٤) س^{٢} + ٩س = ٠	٥) س^{٢} − ٢س = ٠	٦) ٤س^{٢} = ٨س
٧) ٩ + س^{٢} = ٦س	٨) ٣٣ = س^{٢} + ٨س	٩) ٢س^{٢} + ٢س = ٢٤
١٠) ٤س^{٢} + ١ = ٤س	١١) ٦س^{٢} = ١١س + ١٠	١٢) س^{٢} − ٩ = ٠
١٣) ٤س^{٢} = ٢٥	١٤) ٣س^{٢} − ١ = ٠	١٥) س^{٢} + ٩ = ٠

الحل :

١) س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠ **نحلل الطرف الأيمن**

س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠ ← (س + ٢)(س + ٧) = ٠

إما س + ٢ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -٢}$ أو س + ٧ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -٧}$

مجموعة الحل = { −٢ ، −٧ }

٢) ٢س^{٢} − س − ١ = ٠

٢س^{٢} − س − ١ = ٠ ← (٢س + ١)(س − ١) = ٠

إما ٢س + ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = \frac{-١}{٢}}$

أو س − ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل = { $\frac{-١}{٢}$ ، ١ }

تذكر : طريقة التحليل

٢(٢س^{٢} − س − ١) = ٠

(٢س)^{٢} − (٢س) − ٢ = ٠

$\underbrace{(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} − ٢) = ٠}_{÷٢}$

(٢س + ١)(س − ١) = ٠

٣) س^{٢} = ٥س + ٦ **نكتب المعادلة بالصورة العامة**

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠ ← (س − ٦)(س + ١) = ٠

إما س − ٦ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ٦}$ أو س + ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -١}$

مجموعة الحل = { −١ ، ٦ }

٤) $س^٢ + ٩س = ٠$ نحلل الطرف الأيمن بإخراج س عامل مشترك

$س^٢ + ٩س = ٠ \leftarrow س(س + ٩) = ٠$

إما $س = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $س + ٩ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٩}$

مجموعة الحل = $\{-٩ ، ٠\}$

٥) $س^٢ - ٢س = ٠$ نحلل الطرف الأيمن بإخراج س عامل مشترك

$س^٢ - ٢س = ٠ \leftarrow س(س - ٢) = ٠$

إما $س = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $س - ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = $\{٢ ، ٠\}$

٦) $٤س^٢ = ٨س$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية **(تحذير : لا يجوز قسمة المعادلة على س)**

$\underbrace{٤س^٢ - ٨س = ٠}_{÷٤} \leftarrow س^٢ - ٢س = ٠$ نقسم المعادلة على ٤

$س^٢ - ٢س = ٠ \leftarrow س(س - ٢) = ٠$

إما $س = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $س - ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = $\{٢ ، ٠\}$

٧) $٩ + س^٢ = ٦س$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية ثم نحلل

$س^٢ - ٦س + ٩ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س - ٣) = ٠$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = $\{ ٣ \}$

تعلم :

$أ = ٠ \leftrightarrow ٠ = أ$

٨) $س^{٢} + ٨س = ٣٣$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية

$س^{٢} + ٨س - ٣٣ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س + ١١) = ٠$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $س + ١١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١١}$

مجموعة الحل $= \{ -١١ ، ٣ \}$

٩) $٢س^{٢} + ٢س = ٢٤$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية ثم نقسمها على ٢ للتسهيل في الحل

$\underbrace{٢س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠}_{\div ٢} \leftarrow س^{٢} + س - ١٢ = ٠ \leftarrow (س + ٤)(س - ٣) = ٠$

إما $س + ٤ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٤}$ أو $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل $= \{ -٤ ، ٣ \}$

١٠) $٤س^{٢} + ١ = ٤س$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية

(لاحظ القسمة على ٤ لا تسهل الحل)

$٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠ \leftarrow (٢س - ١)(٢س - ١) = ٠$

$٢س - ١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

مجموعة الحل $= \{ \frac{١}{٢} \}$

$٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

$(٤س)^{٢} - ٤(٤س) + ٤ = ٠$

$\underbrace{(٤س - ٢)(٤س - ٢) = ٠}_{\div ٤ = ٢ \times ٢}$

$(٢س - ١)(٢س - ١) = ٠$

١١) $٦س^{٢} = ١١س + ١٠$ نكتب المعادلة بالصورة القياسية

$٦س^{٢} - ١١س - ١٠ = ٠ \leftarrow (٦س)^{٢} - ١١(٦س) - ٦٠ = ٠$

$\underbrace{(٦س - ١٥)(٦س + ٤) = ٠}_{\div ٦ = ٣ \times ٢} \leftarrow (٢س - ٥)(٣س + ٢) = ٠$

إما $٢س - ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{٥}{٢}}$ أو $٣س + ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{-٢}{٣}}$

مجموعة الحل $= \{ \frac{-٢}{٣} ، \frac{٥}{٢} \}$

١٢) $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠$ **نحلل فرق بين مربعين**

$\text{س}^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣) = ٠$

إما $\text{س} + ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$ **أو** $\text{س} - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

حل ثاني : نضيف ٩ للطرفين $\leftarrow$ $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow \text{س}^{٢} = ٩$ **الجذر التربيعي للطرفين**

$\sqrt{\text{س}^{٢}} = \pm\sqrt{٩} \leftarrow \text{س} = \pm ٣$ $\leftarrow$ **مجموعة الحل** $= \{-٣ ، ٣\}$

١٣) $٤\text{س}^{٢} = ٢٥$

$\underbrace{٤\text{س}^{٢} = ٢٥}_{÷٤} \leftarrow \text{س}^{٢} = \frac{٢٥}{٤} \leftarrow \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} = \pm\frac{٥}{٢}$ **:: مجموعة الحل** $= \left\{ \pm\frac{٥}{٢} \right\}$

نترك للطالب الحل باستخدام طريقة فرق بين مربعين في التحليل

١٤) $٣\text{س}^{٢} - ١ = ٠$

$٣\text{س}^{٢} - ١ = ٠ \leftarrow \underbrace{٣\text{س}^{٢} = ١}_{÷٣}$

$\text{س}^{٢} = \frac{١}{٣} \leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{\frac{١}{٣}} \leftarrow \text{س} = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مجموعة الحل $= \left\{ \pm\frac{١}{\sqrt{٣}} \right\}$

$٣\text{س}^{٢} - ١ = ٠$ **فرق بين مربعين**

$(\sqrt{٣}\,\text{س} + ١)(\sqrt{٣}\,\text{س} - ١) = ٠$

إما $(\sqrt{٣}\,\text{س} + ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

أو $(\sqrt{٣}\,\text{س} - ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

١٥) $\text{س}^{٢} + ٩ = ٠$

- **لاحظ أن الطرف الأيمن في المعادلة التربيعية عبارة عن مجموع مربعين ، لا تحلل لذلك فإن**

  مجموعة الحل $= \{\quad\}$ **أو** $\varnothing$

- **نضيف -٩ للطرفين** $\text{س}^{٢} = -٩$ **(مستحيل) لا يوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب**

  مجموعة الحل $= \{\quad\}$ **أو** $\varnothing$

مثال (٢٤) : (٣ – ١٤) كتاب مدرسي

إذا علمت أن غرفة الاجتماعات بمدرسة سلمى مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ م٢ ، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٤ م ، جد أبعاد الغرفة .

الحل : نفرض عرض الغرفة س ⟵ الطول س + ٤ ،،،، مساحة الغرفة ٦٤ م٢

مساحة الغرفة = العرض × الطول

$٦٤ = س(س + ٤) \leftarrow س^٢ + ٤س = ٦٤$

$س^٢ + ٤س - ٣٢ = ٠ \leftarrow (س - ٤)(س + ٨) = ٠$

إما $س + ٨ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٨}$ أو $س - ٤ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٤}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً العرض = ٤ م ⟵ الطول = ٨ م

حل تدريب (٣ – ١٣) ص ١٠٣

حل المعادلتين التربيعيتين الآتيتين :

أ) $س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠$ ب) $٣س^٢ = ٨س - ٤$

الحل :

أ) $س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠$

$س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠ \leftarrow (س - ٥)(س - ٢) = ٠$

إما $س - ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٥}$ أو $س - ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = $\{٢ ، ٥\}$

ب) $٣س^٢ = ٨س - ٤ \leftarrow ٣س^٢ - ٨س + ٤ = ٠$

$٣س^٢ - ٨س + ٤ = ٠ \leftarrow (٣س - ٢)(س - ٢) = ٠$

إما $٣س - ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{٢}{٣}}$ أو $س - ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = $\{٢ ، \frac{٢}{٣}\}$

حل تدريب (٣ ـ ١٤) ص١٠٤

بطاقة مثلثة الشكل ، إذا علمت أن طول قاعدتها يساوي مثلي ارتفاعها ، وكانت مساحتها ٦٤ سم٢ ، جد ارتفاعها ٠

الحل :

نفرض أن ارتفاع البطاقة س ← قاعدة البطاقة ٢ س ،،، مساحة البطاقة ٦٤ سم٢

مساحة البطاقة (مثلث) = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$$٦٤ = \frac{١}{٢} \times ٢س \times س \leftarrow س^{٢} = ٦٤$$

$$س^{٢} - ٦٤ = ٠ \leftarrow (س + ٨)(س - ٨) = ٠$$

إما $س - ٨ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٨}$ أو $س + ٨ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٨}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً الارتفاع = ٨ سم

حل تدريب (٣ ـ ١٥) ص١٠٤

المسألة الواردة في بداية الدرس

لدى نول شريطاً لاصقاً ملوناً طوله ٧٢ سم ، أرادت استخدامه لإحاطة بطاقتين مربعتين مختلفتين ، إذا كان مجموع مساحتي البطاقتين ١٦٤ سم٢ ، ساعد نوال في تحديد نقطة قص الشريط ٠

الحل :

- الشريط الأول للبطاقة المربعة الأولى :

نفرض الطول س ← المحيط = ٤ س (المساحة = $س^{٢}$)

- الشريط الثاني للبطاقة المربعة الثانية :

محيط الشريط (حول البطاقة) = طول الشريط - محيط الشريط (حول البطاقة الأولى)

ل = ٧٢ ـ ٤ س

طول ضلع الشريط البطاقة الثانية = $\frac{٧٢ - ٤س}{٤} = ١٨ - س$ ← المساحة $= (١٨ - س)^{٢}$

مساحة البطاقة الأولى + مساحة البطاقة الثانية = ١٦٤

$س^2 + (18 - س)^2 = 164 \longleftarrow\longleftarrow س^2 + 324 - 36س + س^2 = 164$

$\underbrace{2س^2 - 36س + 160 = 0}_{\div 2} \longleftarrow\longleftarrow س^2 - 18س + 80 = 0$

$(س - 8)(س - 10) = 0 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ $س = 8$ ، $س = 10$

تقص نوال الشريط إلى قطعتين : الأولى طولها ٤ × ٨ = ٣٢ سم

الثانية طولها ٤ × ١٠ = ٤٠ سم

حل تمارين ومسائل ص١٠٥

١) إذا كان العدد (١) جذراً للمعادلة $س^2 - 4س + جـ = 0$ ، جد قيمة جـ ، ثم جد الجذر الآخر إن وجد

الحل :

بما أن العدد ١ جذراً للمعادلة إذاً ناتج تعويضه في المعادلة يبقيها = ٠ (صائبة)

$\Big|_{س=1} \longleftarrow (1)^2 - 4(1) + جـ = 0 \longleftarrow 1 - 4 + جـ = 0 \longleftarrow \boxed{جـ = 3}$

المعادلة تصبح $\longleftarrow س^2 - 4س + 3 = 0 \longleftarrow (س - 3)(س - 1) = 0$

إما $س - 3 = 0 \longleftarrow\longleftarrow \boxed{س = 3}$ **أو** $س - 1 = 0 \longleftarrow\longleftarrow \boxed{س = 1}$ **الجذر الآخر ٣**

٢) حل كلاً من المعادلات التربيعية الآتية بالتحليل إلى العوامل :

أ) $س^2 + س - 20 = 0$ ب) $س^2 + 7س = 0$ جـ) $س(س - 1) = 6$

الحل :

أ) $س^2 + س - 20 = 0$

$س^2 + س - 20 = 0 \longleftarrow (س + 5)(س - 4) = 0$

إما $س + 5 = 0 \longleftarrow\longleftarrow \boxed{س = -5}$ **أو** $س - 4 = 0 \longleftarrow\longleftarrow \boxed{س = 4}$

مجموعة الحل = $\{-5 ، 4\}$

ب) $س^٢ + ٧س = ٠$

$س^٢ + ٧س = ٠ \leftarrow س(س + ٧) = ٠$

إما $س = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $س + ٧ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٧}$

مجموعة الحل = $\{-٧ ، ٠\}$

جـ) $س(س - ١) = ٦$

$س(س - ١) = ٦ \leftarrow س^٢ - س - ٦ = ٠ \leftarrow (س + ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س + ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$ أو $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = $\{-٢ ، ٣\}$

٣) إذا كان $(س + ٧)$ ، $(س - ٥)$ هما العاملين الأوليين الناتجين من تحليل المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ، فأكتب قاعدة الاقتران

الحل :

$(س + ٧)\ (س - ٥) = ٠ \leftarrow س^٢ + ٢س - ٣٥ = ٠$

$\boxed{ق(س) = س^٢ + ٢س - ٣٥}$

٤) ينوي وليد رسم صورة جداريه مربعة الشكل على سور المدرسة ، جد طول ضلعها إذا علمت أن ناتج طرح محيطها من مساحتها يساوي (٥) .

الحل :

- **نفرض طول ضلع الصورة س $\leftarrow$ محيطها ٤ س ،،، مساحتها $س^٢$**
- **مساحة الصورة – محيط الصورة = ٥**

$س^٢ - ٤س = ٥ \leftarrow س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$

$س^٢ - ٤س - ٥ = ٠ \leftarrow (س + ١)(س - ٥) = ٠$

إما $س + ١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١}$ أو $س - ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٥}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً طول ضلع الصورة = ٥

٥) سياج معدني طوله ٢٠ م ، يحيط بمبنى مستطيل الشكل مساحته ٢١ م^{٢} ، جد أبعاد المبنى ٠

الحل :

- **نفرض أن بعدي المبنى س ، ص**
- **طول السياج = ٢٠ م ⟵ ٢س + ٢ص = ٢٠ ⟵ ص = ١٠ – س ٠٠٠٠ (١)**
- **مساحة المبنى = ٢١ ⟵ س × ص = ٢١ ٠٠٠٠٠٠ (٢)**
- **بتعويض معادلة ١ في معادلة ٢ ينتج ← $\boxed{\text{س}(١٠-\text{س})=٢١}$ نكتب المعادلة بالصورة العامة**

س(١٠ – س) = ٢١ ← ١٠س – س^{٢} = ٢١ ← س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠

س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠ ← (س – ٧)(س – ٣) = ٠

إما س – ٧ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ٧}$ **أو** س – ٣ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ٣}$

عند س = ٧ م ⟵ ص = ٣ م ،،، عند س = ٣ م ⟵ ص = ٧ م

إذاً أبعاد المبنى ٣ م ، ٧ م

حل المعادلة التربيعية بإكمال المربع

تذكر :

١) أن الأعداد ١ ، ٤ ، ٩ ، ٠٠٠ ، ١٠٠ ، ١٢١ ، ٠٠٠٠ **تسمى مربعات كاملة**

٢) المقادير الجبرية $(س+١)^٢$ ، $(٢س-٣)^٢$ ، $(س-أ)^٢$ ، $(س+٥)^٢$ تسمى مربعات كاملة

٣) إذا كان $س^٢ = ك$ فإن $س = \pm \sqrt{ك}$: $ك \geq ٠$

٤) $\sqrt{س^٢} = |س|$

٥) إذا كان $|س| = ك \leftarrow س = ك$ $\boxed{أو}$ $س = -ك$

مثال (٢٥) :

جد مجموعة حل (إن وجدت) كلاً من المعادلات الآتية :

١) $س^٢ = ٩$	٢) $٢س^٢ = ٥٠$	٣) $٣س^٢ - ١ = ٤٧$
٤) $(س+١)^٢ = ٤$	٥) $(س+٦)^٢ = ١١$	٦) $٢(س+٣)^٢ = ١٠$
٧) $(س+١)^٢ + ١ = ٢٦$	٨) $(٢س+١)^٢ = ٤٩$	٩) $٢س^٢ + ٧ = ٥$

الحل :

١) $س^٢ = ٩$

يمكن حل المعادلة جبرياً بثلاثة طرق :

١) فرق بين مربعين : نضيف ــ ٩ للطرفين فينتج :

$$س^٢ - ٩ = ٠ \leftarrow (س+٣)(س-٣) = ٠$$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $س + ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

٢) **نجد الجذر التربيعي للطرفين** ← س = ± $\sqrt{ك}$: ك ≥ ٠

س^٢ = ٩ ← س = ± $\sqrt{٩}$ ← س = ±٣

مجموعة الحل = { −٣ ، ٣ }

٣) **استخدام القيمة المطلق بعد الجذر التربيعي**

س^٢ = ٩ ← $\sqrt{س^٢}$ = ٣ ← |س| = ٣

إما س = ٣ ←← $\boxed{س = ٣}$ **أو** س = −٣ ←← $\boxed{س = −٣}$

مجموعة الحل = { −٣ ، ٣ }

٢) ٢س^٢ = ٥٠ **بقسمة طرفي المعادلة على ٢ ينتج**

$\underbrace{٢س^٢ = ٥٠}_{÷٢}$ ← س^٢ = ٢٥

س^٢ = ٢٥ $\xrightarrow{\sqrt{}}$ س = ± $\sqrt{٢٥}$ ← $\boxed{س = ±٥}$

مجموعة الحل = { −٣ ، ٣ }

٣) ٣س^٢ − ١ = ٤٧

٣س^٢ $\underset{+١}{−١}$ = $\underset{+١}{٤٧}$ ← $\underbrace{٣س^٢ = ٤٨}_{÷٢}$ ← س^٢ = ١٦ **إضافة +١ للطرفين ثم ÷ ٣ للطرفين**

س^٢ = ١٦ $\xrightarrow{\sqrt{}}$ س = ± $\sqrt{١٦}$ ← $\boxed{س = ±٤}$

مجموعة الحل = { −٣ ، ٣ }

٤) (س + ١)^٢ = ٤

تذكر أن : (أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢ **مربع مجموع حدين**

(أ − ب)^٢ = أ^٢ − ٢أب + ب^٢ **مربع الفرق بين حدين**

الحل بأربعة طرق جبرية

١) **فك القوس ، ثم كتابة المعادلة على الصورة العامة ، ثم استخدام طريقة التحليل لإيجاد الحل**

$(\text{س}+١)^{٢} = ٤ \leftarrow \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ = ٤ \leftarrow \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣ = ٠ \leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-١) = ٠$

إما $\text{س} + ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$ أو $\text{س} - ١ = ١ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ١\}$

٢) استخدام القيمة المطلقة

$(\text{س}+١)^{٢} = ٤ \xleftarrow{\sqrt{}} \sqrt{(\text{س}+١)^{٢}} = ٢ \leftarrow |\text{س}+١| = ٢$

إما $\text{س} + ١ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$ أو $\text{س} + ١ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ١\}$

٣) استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{\text{ك}} \; : \; \text{ك} \geq ٠$

$(\text{س}+١)^{٢} = ٤ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} + ١ = \pm ٢$

إما $\text{س} + ١ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$ أو $\text{س} + ١ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ١\}$

٤) استخدام طريقة فرق بين مربعين في التحليل

$(\text{س}+١)^{٢} = \vec{٤} \leftarrow (\text{س}+١)^{٢} - ٤ = ٠$ **إضافة ٤ للطرفين (تصفير المعادلة)**

$(\text{س}+١+٢)(\text{س}+١-٢) = ٠ \leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-١) = ٠$

إما $\text{س} + ١ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$ أو $\text{س} + ١ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ١\}$

٥) $(\text{س}+٦)^{٢} = ١١$ **الحل باستخدام الجذر التربيعي (نترك للطالب الحل بالطرق الأخرى)**

ملاحظة : فك الأقواس لا تستخدمها الآن (في الدرس القادم)

$(\text{س}+٦)^{٢} = ١١ \leftarrow \text{س} + ٦ = \pm\sqrt{١١}$ **لاحظ لا يوجد جذر للعدد ١١ كعدد صحيح**

إما $س + ٦ = \sqrt{١١}$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = -٦ + \sqrt{١١}}$ أو $س + ٦ = -\sqrt{١١}$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = -٦ - \sqrt{١١}}$

مجموعة الحل = $\{ -٦ - \sqrt{١١} ، -٦ + \sqrt{١١} \}$

٧) $(س + ١)^٢ + ١ = ٢٦$ استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow س = \pm \sqrt{ك}$: $ك \geq ٠$

$(س + ١)^٢ + \underset{-١}{١} = \underset{-١}{٢٦}$ $\leftarrow$ $(س + ١)^٢ = ٢٥$

$(س + ١)^٢ = ٢٥ \xleftarrow{\sqrt{}} س + ١ = \pm ٥$

إما $س + ١ = ٥$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٤}$ أو $س + ١ = -٥$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = -٦}$

مجموعة الحل = $\{ -٦ ، ٤ \}$

٨) $(٢س + ١)^٢ = ٤٩$ استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow س = \pm \sqrt{ك}$: $ك \geq ٠$

$(٢س + ١)^٢ = ٤٩ \xleftarrow{\sqrt{}} ٢س + ١ = \pm \sqrt{٤٩} \leftarrow ٢س + ١ = \pm ٧$

إما $٢س + ١ = ٧$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٣}$ أو $٢س + ١ = -٧$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = -٤}$

مجموعة الحل = $\{ -٤ ، ٣ \}$

٩) $٢س^٢ + ٧ = ٥$ نضيف – ٧ للطرفين ، ثم نقسم الطرفين على ٢ ينتج

$٢س^٢ + \underset{-٧}{٧} = \underset{-٧}{٥} \leftarrow \underbrace{٢س^٢ = -٢}_{÷٢} \leftarrow س^٢ = -١$

$س^٢ = -١$ لاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه يعطي عدد سالب لذلك فإن :

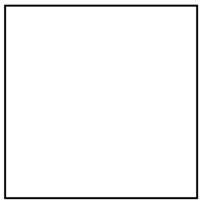
مجموعة الحل = { } أو $\varnothing$

في هذا الدرس سوف نتعلم طريقة جديدة لحل المعادلة التربيعية ، وتسمى هذه الطريقة

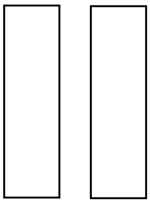
إكمال المربع

- المقدار الجبري التربيعي $س^{٢} + ٢س$ ناتج جمعه يفسر هندسيا كما يلي :

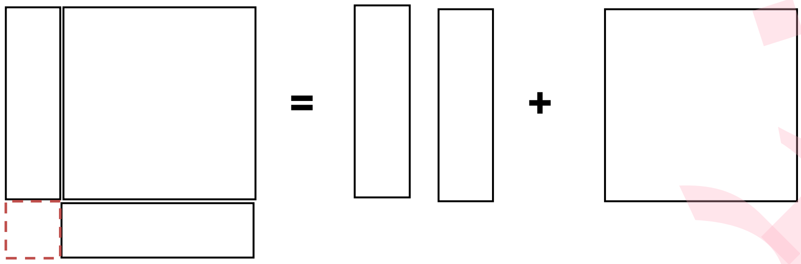
$س^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←



$٢س$ ← تمثل مستطيلين طول كل منهما س ، والعرض وحدة واحدة ←



إذا $س^{٢} + ٢س$ =



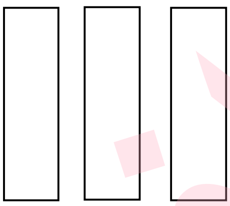
لاحظ أن ناتج الجمع الهندسي عبارة عن مربع كامل طول ضلعه (س +١) ناقص مربع صغير طول ضلعه وحدة واحدة . لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $س^{٢} + ٢س$ كما يلي :

$$س^{٢} + ٢س = (س + ١)^{٢} - (١)^{٢} = (س + ١)^{٢} - ١$$

- الآن لنفسر المقدار الجبري $س^{٢} + ٣س$ هندسيا ونجد ناتج الجمع

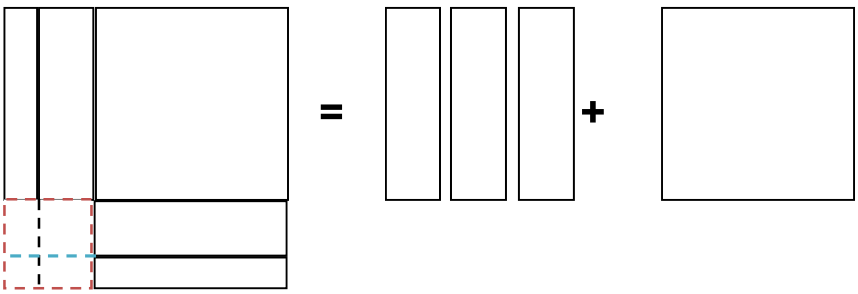
$س^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←

$٣س$ ← تمثل مستطيلين طول كل منهما س ، والعرض وحدة واحدة ←



لاحظ وجود ٣ مستطيلات ، نوزع مستطيلين على جوانب المربع الكبير ، ثم نقسم المستطيل الثالث إلى قسمين متساويين أبعاد كل منهما س ، $\frac{١}{٢}$ وحدة ونوزعهما كما يلي :

$س^{٢} + ٣س$ =

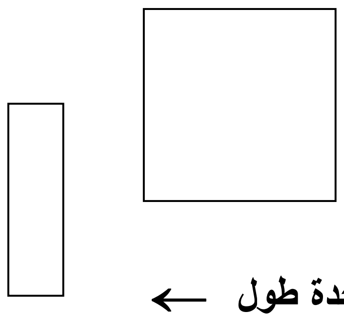


- لاحظ أن الشكل الهندسي الناتج يمثل مربع طول ضلعه $\left(\text{س}+\frac{٣}{٢}\right)$ ناقص مربعين صغيرين طول كل منهما وحدة واحدة ، $\frac{١}{٢}$ وحدة، و مستطيلين بعد كل منهما ١، $\frac{١}{٢}$ لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $\text{س}^{٢}+٣\text{س}$ كما يلي :

$$\text{س}^{٢}+٣\text{س}=\left(\text{س}+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\left((١)^{٢}+\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}+٢\left(١\times\frac{١}{٢}\right)\right)$$

$$=\left(\text{س}+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\left(١+\frac{١}{٤}+١\right)=\boxed{\left(\text{س}+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\frac{٩}{٤}}$$

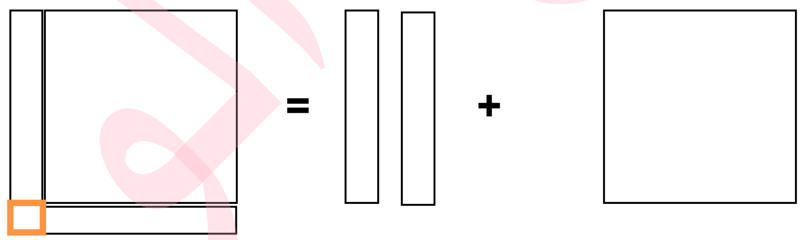
- الآن لنجد ناتج جمع المقدار الجبري $\text{س}^{٢}+\text{ب س}$ هندسياً :



- $\text{س}^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←
- ب س ← تمثل طوله س ، والعرض ب وحدة طول ←

بما أنه يوجد لدينا مستطيل واحد ، نقسمه إلى قسمين أبعاد كل قسم س ، $\frac{\text{ب}}{٢}$ ونوزع

$\text{س}^{٢}+\text{ب س}$ =



لاحظ أن الشكل الهندسي الناتج عبارة عن مربع طول ضلعه $\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{٢}\right)$ ناقص مربع صغير طول ضلعه $\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)$ ، لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $\text{س}^{٢}+\text{ب س}$ كما يلي :

$$\text{س}^{٢}+\text{ب س}=\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}=\boxed{\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}-\frac{\text{ب}^{٢}}{٤}}$$

تسمى هذه الطريقة بطريقة إكمال المربع للمقدار التربيعي الذي على الصورة $\text{س}^{٢}+\text{ب س}$ ، وأيضاً مع العبارة التربيعية $\text{س}^{٢}+\text{ب س}+\text{جـ}$.

مثال (٢٦) :

اكتب كلاً من المقادير الجبرية التالية باستخدام طريقة إكمال المربع :

١) $\text{س}^2 + \text{س}$	٢) $\text{س}^2 + 5\text{س}$
٣) $\text{س}^2 + 4\text{س}$	٤) $\text{س}^2 + 6\text{س} - 5$

الحل : نستخدم القاعدة $\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} = \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2$

١) $\text{س}^2 + \text{س}$

$$\text{س}^2 + \text{س} = \left(\text{س} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\text{س} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

٢) $\text{س}^2 + 5\text{س}$

$$\text{س}^2 + 5\text{س} = \left(\text{س} + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\text{س} + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

٣) $\text{س}^2 + 4\text{س}$

$$\text{س}^2 + 4\text{س} = \left(\text{س} + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = (\text{س} + 2)^2 - 4$$

٣) $\text{س}^2 + 6\text{س} - 5$

$$\text{س}^2 + 6\text{س} - 5 = \left(\text{س} + \frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5 = (\text{س} + 3)^2 - 9 - 5 = (\text{س} + 3)^2 - 14$$

- **لاحظ مما سبق ، أنه حين استخدام طريقة إكمال المربع**

١) يجب أن يكون معامل س^2 يساوي ١

٢) نضيف نصف معامل س إلى س ثم نكتبه كمربع كامل ثم نطرح مربع (نصف معامل س)

مثال (٢٧) :

باستخدام طريقة إكمال المربع ، جد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) $\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠$	٢) $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠$
٣) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٠$	٤) $\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = ٠$

الحل : **نستخدم القاعدة** $\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} = \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$

١) $\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠$

$$\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤} = ٠$$

$$\leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} \text{س} + \frac{١}{٢} = \pm\frac{١}{٢}$$

إما $\text{س} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ **أو** $\text{س} + \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -١}$

مجموعة الحل $= \{-١ ، ٠\}$

٢) $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠$

$$\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$$

$$\leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤} \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} \text{س} + \frac{٥}{٢} = \pm\frac{٥}{٢}$$

إما $\text{س} + \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ **أو** $\text{س} + \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٥}$

مجموعة الحل $= \{-٥ ، ٠\}$

٣) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٤}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} - ٤ \leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ٤$$

$$\leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ٤ \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} \text{س} + ٢ = \pm ٢$$

إما $\text{س} + ٢ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\text{س} + ٢ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٤}$

مجموعة الحل $= \{-٤ ، ٠\}$

٣) $\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = ٠$

$$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = \left(\text{س} + \frac{٦}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٦}{٢}\right)^{٢} - ٥ = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} - ٩ - ٥ = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} = ١٤$$

$$\leftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} = ١٤ \leftarrow \text{س} + ٣ = \pm\sqrt{١٤}$$

إما $\text{س} + ٣ = \sqrt{١٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣ + \sqrt{١٤}}$

أو $\text{س} + ٣ = -\sqrt{١٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣ - \sqrt{١٤}}$

مجموعة الحل $= \{-٣ + \sqrt{١٤} ، -٣ - \sqrt{١٤}\}$

تسمى طريقة إكمال المربع التي تم حل المثال السابق بها بالطريقة الجبرية ، وتستخدم في حل المعادلات التربيعية التي على الصورة $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ **، كما يلي :**

١) ننقل الحد المطلق للطرف الثاني $\leftarrow\leftarrow \text{أ س}^{٢} + \text{ب س} = -\text{جـ}$

٢) نقسم المعادلة على معامل $\text{س}^{٢} \leftarrow\leftarrow \text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ **(يجب أن يكون معامل** $\text{س}^{٢} = ١$**)**

٣) نضيف للطرفين مربع (نصف معامل س) ونحلل $\leftarrow$ **(التفسير الهندسي)**

$$\leftarrow\leftarrow \text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} \leftarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}}$$

- **إذا كان المقدار** $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} \succ ٠$ **. نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونكمل الحل**
- **إذا كان المقدار** $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} = ٠$ **. الحل هو** $\leftarrow\leftarrow \text{س} = -\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}$
- **إذا كان المقدار** $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} \prec ٠$ **. لا يوجد حل للمعادلة** $\leftarrow$ **مجموعة الحل** $= \{\ \}$

مثال (٢٨) :

باستخدام طريقة إكمال المربع ، جد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) $س^{٢} + ٤س + ١ = ٠$	٢) $س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$	٣) $٢س^{٢} - ١٠س = -٣$
٤) $س^{٢} = ٤س + ٣$	٥) $س^{٢} - \frac{١}{٤}س = ١$	٦) $س^{٢} + ٦س = -٩$
٧) $\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠$	٨) $٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠$	٩) $س^{٢} + ٤\sqrt{٣}\,س = ٥$

الحل :

١) $س^{٢} + ٤س + ١ = ٠$

$س^{٢} + ٤س + ١ = ٠ \leftarrow س^{٢} + ٤س = -١$ **نقل الحد المطلق للطرف الثاني**

$س^{٢} + ٤س + \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = -١ + \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} \leftarrow (س + ٢)^{٢} = ٣$ **إضافة** $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ **للطرفين وتبسيط المعادلة**

$\leftarrow (س + ٢)^{٢} = ٣ \leftarrow س + ٢ = \pm\sqrt{٣}$

إما $س + ٢ = \sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢ + \sqrt{٣}}$

أو $س + ٢ = -\sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢ - \sqrt{٣}}$

مجموعة الحل $= \{-٢ + \sqrt{٣} \text{ ، } -٢ - \sqrt{٣}\}$

٢) $س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

$س^{٢} - ٤س + ١ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٤س = -١$

$س^{٢} - ٤س + \Big(\underbrace{\frac{-٤}{٢}}_{=-٢}\Big)^{٢} = -١ + \Big(\underbrace{\frac{-٤}{٢}}_{=-٢}\Big)^{٢} \leftarrow (س - ٢)^{٢} = ٣$

$\leftarrow (س - ٢)^{٢} = ٣ \leftarrow س - ٢ = \pm\sqrt{٣}$

إما $س - ٢ = \sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢ + \sqrt{٣}}$ **أو** $س - ٢ = -\sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢ - \sqrt{٣}}$

مجموعة الحل $= \{٢ + \sqrt{٣} \text{ ، } ٢ - \sqrt{٣}\}$

٣) $٢\text{س}^٢ - ١٠\text{س} = -٣$

$$\underbrace{٢\text{س}^٢ - ١٠\text{س} = -٣}_{\div ٢} \rightarrow \text{س}^٢ - ٥\text{س} = \frac{-٣}{٢}$$

$$\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \left(\frac{-٥}{٢}\right)^٢ = \frac{-٣}{٢} + \left(\frac{-٥}{٢}\right)^٢ \rightarrow \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^٢ = \frac{-٣\times٢ = -٦}{٢\times٢ = ٤} + \frac{٢٥}{٤}$$

$$\rightarrow \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^٢ = \frac{١٩}{٤} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \text{س} - \frac{٥}{٢} = \pm\frac{\sqrt{١٩}}{٢}$$

إما $\text{س} - \frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt{١٩}}{٢} \rightarrow \rightarrow \boxed{\text{س} = \frac{٥}{٢} + \frac{\sqrt{١٩}}{٢}}$ أو $\text{س} - \frac{٥}{٢} = -\frac{\sqrt{١٩}}{٢} \rightarrow \rightarrow \boxed{\text{س} = \frac{٥}{٢} - \frac{\sqrt{١٩}}{٢}}$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{٥ + \sqrt{١٩}}{٢} ، \frac{٥ - \sqrt{١٩}}{٢} \right\}$

٤) $\text{س}^٢ = ٤\text{س} + ٣$

$$\text{س}^٢ = ٤\vec{\text{س}} + ٣ \rightarrow \text{س}^٢ - ٤\text{س} = ٣$$

$$\text{س}^٢ - ٤\text{س} + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^٢ = ٣ + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^٢ \rightarrow (\text{س} - ٢)^٢ = ٧$$

$$\rightarrow (\text{س} - ٢)^٢ = ٧ \rightarrow \text{س} - ٢ = \pm\sqrt{٧} \rightarrow \text{س} = ٢ \pm \sqrt{٧}$$

مجموعة الحل $= \{ ٢ \pm \sqrt{٧} \}$

٥) $\text{س}^٢ - \frac{١}{٤}\text{س} = ١١$

$$\text{س}^٢ - \frac{١}{٤}\text{س} + \left(\frac{-١}{٨}\right)^٢ = ١ + \left(\frac{-١}{٨}\right)^٢ \rightarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٨}\right)^٢ = \frac{٦٥}{٦٤}$$

$$\rightarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٨}\right)^٢ = \frac{٦٥}{٦٤} \rightarrow \text{س} - \frac{١}{٨} = \pm\frac{\sqrt{٦٥}}{٨} \rightarrow \text{س} = \frac{١}{٨} \pm \frac{\sqrt{٦٥}}{٨}$$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{١ \pm \sqrt{٦٥}}{٨} \right\}$

٦) $س^{٢} + ٦س = -٩$

$$س^{٢} + ٦س + \left(\underbrace{\frac{٦}{٢}}_{=٣}\right)^{٢} = -٩ + \left(\underbrace{\frac{٦}{٢}}_{=٣}\right)^{٢} \Rightarrow (س + ٣)^{٢} = ٠$$

$$\Rightarrow (س + ٣)^{٢} = ٠ \Rightarrow س = -٣$$

مجموعة الحل $= \{-٣\}$

٧) $\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠$

$$\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠ \Rightarrow \frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س = -\frac{٣}{٢}$$

$$\underbrace{\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س = -\frac{٣}{٢}}_{\times ٢} \Rightarrow س^{٢} + ١٠س = -٣$$

$$س^{٢} + ١٠س + \left(\underbrace{\frac{١٠}{٢}}_{=٥}\right)^{٢} = -٣ + \left(\underbrace{\frac{١٠}{٢}}_{=٥}\right)^{٢} \Rightarrow (س + ٥)^{٢} = ٢٢$$

$$\Rightarrow (س + ٥)^{٢} = ٢٢ \Rightarrow س + ٥ = \pm\sqrt{٢٢} \Rightarrow س = -٥ \pm \sqrt{٢٢}$$

مجموعة الحل $= \{-٥ \pm \sqrt{٢٢}\}$

٨) $٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠$

$$٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠ \Rightarrow ٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س = -٧$$

$$٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س = -٧ \Rightarrow س^{٢} - \frac{٣}{٤}س = \frac{-٧}{٢}$$

$$\Rightarrow س^{٢} - \frac{٣}{٤}س + \left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧}{٢} + \left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢} \Rightarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٩}{٦٤}$$

$$\Rightarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧ \times ٣٢ = -٢٢٤}{٢ \times ٣٢ = ٦٤} + \frac{٩}{٦٤} \Rightarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٢١٥}{٦٤} \prec ٠$$

مجموعة الحل $= \{\ \}$ أو $= \phi$

٩) $س^{٢} + ٤\sqrt{٣}\,س = ٥$

$$س^{٢} + ٤\sqrt{٣}\,س + \left(\underbrace{\frac{٤\sqrt{٣}}{٢}}_{=٢\sqrt{٣}}\right)^{٢} = ٥ + \left(\underbrace{\frac{٤\sqrt{٣}}{٢}}_{=٢\sqrt{٣}}\right)^{٢} \longleftarrow (س + ٢\sqrt{٣})^{٢} = ١٧$$

$$\longleftarrow (س + ٢\sqrt{٣})^{٢} = ١٧ \xleftarrow{\sqrt{}} س + ٢\sqrt{٣} = \pm\sqrt{١٧} \longleftarrow س = -٢\sqrt{٣} \pm \sqrt{١٧}$$

$$م . ح = \{-٢\sqrt{٣} \pm \sqrt{١٧}\}$$

حل تدريب (٣ ـ ١٦) ص١٠٩

حل المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل :

أ) $(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠$ ب) $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

الحل :

أ) $(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠$

$$(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠ \xleftarrow{\sqrt{}} ٢س - ١ = \pm ١٠$$

إما $٢س - ١ = ١٠ \longleftarrow \boxed{س = \frac{١١}{٢}}$ **أو** $٢س - ١ = -١٠ \longleftarrow \boxed{س = \frac{-٩}{٢}}$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{-٩}{٢} ، \frac{١١}{٢}\right\}$

التحقق : عند $س = \frac{١١}{٢} \longleftarrow \left(٢\left(\frac{١١}{٢}\right) - ١\right)^{٢} \longleftarrow (١٠)^{٢} = ١٠٠$ **الطرف الأيسر**

عند $س = \frac{-٩}{٢} \longleftarrow \left(٢\left(\frac{-٩}{٢}\right) - ١\right)^{٢} \longleftarrow (-١٠)^{٢} = ١٠٠$ **الطرف الأيسر**

ب) $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

$$س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠ \longleftarrow س^{٢} - ٨س = -١٥$$

$$س^{٢} - ٨س + \left(\underbrace{\frac{-٨}{٤}}_{=-٢}\right)^{٢} = -١٥ + \left(\underbrace{\frac{-٨}{٤}}_{=-٢}\right)^{٢} \longleftarrow (س - ٢)^{٢} = -١١ < ٠$$

$$م . ح = \phi$$

حل تدريب (٣ – ١٧) ص١٠٩

المسألة الواردة في بداية الدرس

أراد معتز تصميم نموذج كرتوني لشاخصة مرورية عل شكل مثلث ، يزيد طول قاعدته على ارتفاعه بمقدار ٤ سم ، ومساحته ٤٨ سم٢ ، ساعد معتزاً في إيجاد ارتفاعه ليكتمل النموذج ٠

الحل :

نفرض أن ارتفاع الشاخصة س ← قاعدة الشاخصة س + ٤ ،،، مساحة الشاخصة ٤٨ سم٢

مساحة الشاخصة (مثلث) = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$$٤٨ = \frac{١}{٢} \times (\text{س} + ٤) \times \text{س} \leftarrow \text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٩٦$$

$$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \Big(\underbrace{\frac{٤}{٢}}_{=٢}\Big)^{٢} = ٩٦ + \Big(\underbrace{\frac{٤}{٢}}_{=٢}\Big)^{٢} \leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ١٠٠$$

$$\leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ١٠٠ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} + ٢ = \pm ١٠$$

إما $\text{س} + ٢ = ١٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٨}$ **أو** $\text{س} + ٢ = -١٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -١٢}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً الارتفاع = ٨ سم

حل تمارين ومسائل ص ١١٠

١) جد جور المعادلة $(٢\text{س} - ١)^{٢} = ٢٥$

الحل :

$$(٢\text{س} - ١)^{٢} = ٢٥ \xleftarrow{\sqrt{}} ٢\text{س} - ١ = \pm ٥$$

إما $٢\text{س} - ١ = ٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$ **أو** $٢\text{س} - ١ = -٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٢}$

مجموعة الحل $= \{ -٢ ، ٣ \}$

٢) استخدم طريقة إكمال المربع في حل المعادلات التربيعية التالية :

أ) $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$	ب) $٢س^{٢} - س = ٠$	جـ) $س^{٢} - ٦س = ٧$
د) $٤س - ٢س^{٢} + ٦ = ٠$	هـ) $٩ + س^{٢} = ١٠س$	و) $٨س - ٢س^{٢} = ١٦$

الحل :

أ) $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$

$$س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٤س = ١٢$$

$$س^{٢} - ٤س + \Big(\underbrace{\tfrac{-٤}{٢}}_{=-٢}\Big)^{٢} = ١٢ + \Big(\underbrace{\tfrac{-٤}{٢}}_{=-٢}\Big)^{٢} \leftarrow (س - ٢)^{٢} = ١٦$$

$$\leftarrow (س - ٢)^{٢} = ١٦ \leftarrow س - ٢ = \pm ٤$$

إما $س - ٢ = ٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٦}$ أو $س - ٢ = -٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل $= \{-٢ ، ٦\}$

ب) $٢س^{٢} - س = ٠$

$$٢س^{٢} - س = ٠ \leftarrow س^{٢} - \frac{١}{٢}س = ٠$$

$$س^{٢} - \frac{١}{٢}س + \left(\frac{-١}{٤}\right)^{٢} = \left(\frac{-١}{٤}\right)^{٢} \leftarrow \left(س - \frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{١٦}$$

$$\leftarrow \left(س - \frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{١٦} \xleftarrow{\sqrt{}} س - \frac{١}{٤} = \pm \frac{١}{٤}$$

إما $س - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

أو $س - \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$

مجموعة الحل $= \left\{٠ ، \frac{١}{٢}\right\}$

ى) ٤س − ٢س^٢ + ٦ = ٠

٤س − ٢س^٢ + ٦ = ٠ ← −٢س^٢ + ٤س + ٦ = ٠ ← −٢س^٢ + ٤س = −٦

−٢س^٢ + ٤س = −٦ (÷−٢) ← س^٢ − ٢س = ٣

س^٢ − ٢س + (−٢/٢)^٢ = ٣ + (−٢/٢)^٢ ← (س − ١)^٢ = ٤

(−٢/٢ =−١)

← (س − ١)^٢ = ٤ ← س − ١ = ±٢

إما س − ١ = ٢ ←← **س = ٣** أو س − ١ = −٢ ←← **س = −١**

مجموعة الحل = { −١ ، ٣ }

هـ) ٩ + س^٢ = ١٠س

٩ + س^٢ = ١٠س ← س^٢ − ١٠س = −٩

← س^٢ − ١٠س + (−١٠/٢)^٢ = −٩ + (−١٠/٢)^٢ ← (س − ٥)^٢ = ١٦

(−١٠/٢ =−٥)

← (س − ٥)^٢ = ١٦ ← (س − ٥) = ±٤

إما س − ٥ = ٤ ←← **س = ٩** أو س − ٥ = −٤ ←← **س = ١**

مجموعة الحل = { ١ ، ٩ }

و) ٨س − ٢س^٢ = ١٦

٨س − ٢س^٢ = ١٦ ← س^٢ − ٤س = −٨

← س^٢ − ٤س + (−٤/٢)^٢ = −٨ + (−٤/٢)^٢ ← (س − ٢)^٢ = −٤ < ٠

(−٤/٢ =−٢)

مجموعة الحل = { }

٣) هل يمكنك الحصول على عددين موجبين ، مجموعهما ١٠ ، ومجموع مربعيهما ٥٨ ؟ برر إجابتك .

الحل :

- نفرض العدد الأول س $\leftarrow$ الثاني $(١٠ - س)$
- مربع الأول $\leftarrow$ $س^{٢}$ ،، مربع الثاني $\leftarrow$ $(١٠ - س)^{٢} = ١٠٠ - ٢٠س + س^{٢}$
- مربع الأول + مربع الثاني = ٥٨

$$س^{٢} + ١٠٠ - ٢٠س + س^{٢} = ٥٨ \leftarrow ٢س^{٢} - ٢٠س = -٤٢$$

$$٢س^{٢} - ٢٠س = -٤٢ \leftarrow س^{٢} - ١٠س = -٢١$$

$$س^{٢} - ١٠س + \left(\underset{-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} = -٢١ + \left(\underset{-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س - ٥)^{٢} = ٤$$

$$\leftarrow (س - ٥)^{٢} = ٤ \xleftarrow{\sqrt{}} س - ٥ = \pm ٢$$

إما $س - ٥ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٧}$ أو $س - ٥ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = $\{ ٣ ، ٧ \}$

نعم يمكن : العددان هما : ٣ ، ٧ $\leftarrow$ ٣ + ٧ = ١٠ ،، ٩ + ٤٩ = ٥٨

٤) هل يمكنك إيجاد حل حقيقي لكل من المعادلات الآتية ؟ مبرراً إجابتك .

أ) $٢س^{٢} - ١٢س + ٢٠ = ٠$ ب) $(س + ١)^{٢} = -١$

الحل :

أ) $٢س^{٢} - ١٢س + ٢٠ = ٠$

$$٢س^{٢} - ١٢س + ٢٠ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٦س = -١٠$$

$$س^{٢} - ٦س + \left(\underset{=-٣}{\frac{-٦}{٢}}\right)^{٢} = -١٠ + \left(\underset{=-٣}{\frac{-٦}{٢}}\right)^{٢}$$

$$(س - ٣)^{٢} = -١ < ٠ \leftarrow م.ح = \phi$$

ب) $(س + ١)^{٢} = -١ < ٠$

$$م.ح = \phi$$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب

٣ ـ ٦ حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

مثال (٢٩) :

باستخدام طريقة إكمال المربع جد مجموعة حل المعادلة $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{ج} = 0$

الحل :

١) ننقل الحد المطلق للطرف الثاني $\longleftarrow\longleftarrow$ $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} = -\text{ج}$

٢) نقسم المعادلة على معامل س^2 $\longleftarrow\longleftarrow$ $\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} = -\frac{\text{ج}}{\text{أ}}$ **(يجب أن يكون معامل** $\text{س}^2 = 1$ **)**

٣) نضيف للطرفين مربع (نصف معامل س) ونحلل $\longleftarrow$ **(التفسير الهندسي)**

$$\longleftarrow\longleftarrow\ \text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{أ}} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 \longleftarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^2}{4\text{أ}^2}$$

$$\longleftarrow\ \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^2}{4\text{أ}^2} \longleftarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}{4\text{أ}^2}$$

$$\longleftarrow\ \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}{4\text{أ}^2} \xleftarrow{\sqrt{\ }} \text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}{4\text{أ}^2}}$$

$$\longleftarrow\ \text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} = \pm\frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}} \longleftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}} \longleftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}}$$

يسمى $\longleftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}}$ **بالقانون العام لحل أي معادلة تربيعية ٠**

ويسمى المقدار $\left(\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}\right)$ **مميز المعادلة التربيعية ويرمز له بالرمز** Δ

قاعدة

القانون العام لحل المعادلة التربيعية $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{ج} = 0$ **هو** $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج}}}{2\text{أ}}$

حيث $\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ج} \geq 0$

- المميز $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$ تكمن أهميته في الكشف عن إمكانية تحليل المعادلة التربيعية وتحديد عدد الحلول الحقيقية لها (إن وجدت) كما يلي :

المعادلة التربيعية

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

↓

المميز

$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$

$\Delta > ٠$	$\Delta < ٠$	$\Delta = ٠$
للمعادلة جذران حقيقيين مختلفان	**لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة**	**يوجد جذراً حقيقياً مكرراً للمعادلة هو** $س = \frac{-ب}{٢أ}$

لذلك يفضل قبل البدء في إيجاد جذور المعادلة التربيعية (إن وجدت) إيجاد المميز ٠

مثال (٣٠) :

لكل من المعادلات التربيعية الآتية ، جد المميز ، ثم جد جذور المعادلة (إن أمكن) ، باستخدام القانون العام :

أ) $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$	ب) $٢س^{٢} - س + ٣ = ٠$	جـ) $س^{٢} - ٦س = ٧$
د) $س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$	هـ) $س^{٢} - ١٠س + ٥ = ٠$	و) $٨س - ٢س^{٢} = ١٦$

الحل :

أ) س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −١٢ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ١٦ − ٤ × ١ × −١٢ ← Δ = ١٦ + ٤٨ ← Δ = ٦٤ ≻ ٠

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{٦٤}}{٢ \times ١} \leftarrow \text{س} = \frac{٤ \pm ٨}{٢}$$

إما س $= \frac{٤+٨}{٢}$ ←← $\boxed{\text{س} = ٦}$ أو س $= \frac{٤-٨}{٢}$ ←← $\boxed{\text{س} = -٢}$

مجموعة الحل = { −٢ ، ٦ }

ب) ٢س^{٢} − س + ٣ = ٠

- أ = ٢ ، ب = −١ ، جـ = ٣ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ١ − ٤ × ٢ × ٣ ← Δ = ١ − ٢٤ ← Δ = −٢٣ ≺ ٠

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← م ٠ ح = { }

جـ) س^{٢} − ٦س = ٧ ← س^{٢} − ٦س − ٧ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = −٧ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ٣٦ − ٤ × ١ × −٧ ← Δ = ٣٦ + ٢٨ ← Δ = ٦٤ ≻ ٠

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{٦٤}}{٢ \times ١} \leftarrow \text{س} = \frac{٦ \pm ٨}{٢}$$

إما س $= \frac{٦+٨}{٢}$ ←← $\boxed{\text{س} = ٧}$ أو س $= \frac{٦-٨}{٢}$ ←← $\boxed{\text{س} = -١}$

مجموعة الحل = { −١ ، ٧ }

د) $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ٠$

- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٨$ ، $\text{جـ} = ١٦$ ← $\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  ← $\Delta = ٦٤ - ٤ \times ١ \times ١٦$ ← $\Delta = ٦٤ - ٦٤$ ← $\Delta = ٠ = ٠$

- **بما أن المميز = ٠ ، إذاً للمعادلة جذراً مكرراً هو**
  ← $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$ ← $\text{س} = \frac{-(-٨)}{٢ \times ١}$ ← $\boxed{\text{س} = ٤}$

هـ) $\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٥ = ٠$

- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -١٠$ ، $\text{جـ} = ٥$ ← $\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  ← $\Delta = ١٠٠ - ٤ \times ١ \times ٥$ ← $\Delta = ١٠٠ - ٢٠$ ← $\Delta = ٨٠ \succ ٠$

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$ ← $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$

ملاحظة :

$\text{س} = \frac{٢(٣ \pm ٢\sqrt{٥})}{٢}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$ ← $\text{س} = \frac{-(-١٠) \pm \sqrt{٨٠}}{٢ \times ١}$ ← $\text{س} = \frac{٦ \pm ٤\sqrt{٥}}{٢}$ ← $\boxed{\text{س} = ٣ \pm ٢\sqrt{٥}}$

ملاحظة : $\left(\sqrt{٨٠} = \sqrt{١٦ \times ٥} = \sqrt{١٦} \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥}\right)$

مجموعة الحل $= \{ ٣ \pm ٢\sqrt{٥} \}$

و) $٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢} = ١٦$

- $٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢} = ١٦ \xleftarrow{\div -٢} \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٨ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة ثم ÷ -٢**

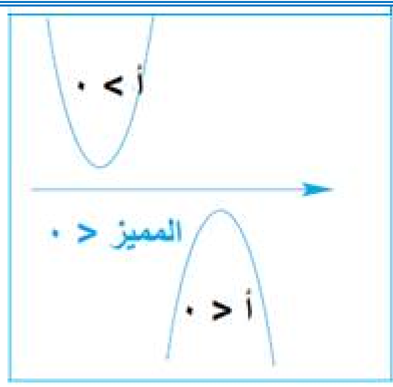
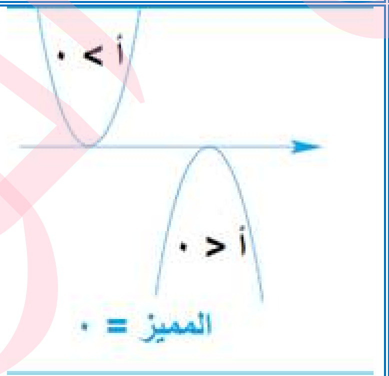
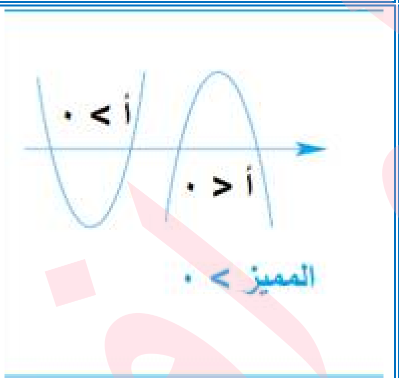
- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٤$ ، $\text{جـ} = ٨$ ← $\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  ← $\Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times ٨$ ← $\Delta = ١٦ - ٣٢$ ← $\Delta = -١٦ \prec ٠$

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← **لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة** ← $\text{م . ح} = \phi$

معلومة :

إذا كان مميز المعادلة التربيعية مربع كامل فإن جذور المعادلة أعداد نسبية

الجدول التالي يوضح العلاقة بين إشارة المميز وعدد جذور المعادلة التربيعية ، وكذلك نقط تقاطع الاقتران مع محور السينات (المعادلة التربيعية مرافقة للاقتران)

عدد نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور السينات	**=**	**عدد جذور (حلول) المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران**
$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$ **لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات**	$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$ **يوجد نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات**	$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ > ٠$ **يوجد نقطتي تقاطع مع محور السينات**
لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة التربيعية المرافقة	**يوجد جذر حقيقي مكرر للمعادلة التربيعية المرافقة**	**يوجد جذرين حقيقيين مختلفين للمعادلة التربيعية المرافقة**
		

حل تدريب (٣ ــ ١٨) ص ١١٤

حل المعادلة $٢س^{٢} + ٥س + ٢ = ٠$ باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية .

الحل :

- $أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٢ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$
  $\leftarrow \Delta = ٢٥ - ٤ \times ٢ \times ٢ \leftarrow \Delta = ٢٥ - ١٦ \leftarrow \Delta = ٩ > ٠$

- **يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان**

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٩}}{٢ \times ٢} \leftarrow س = \frac{-٥ \pm ٣}{٤}$$

إما $س = \frac{-٥ + ٣}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{-١}{٢}}$ **أو** $س = \frac{-٥ - ٣}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل $= \left\{ -٢ ، \frac{-١}{٢} \right\}$ **(لاحظ أن المميز = ٩ (مربع كامل) وأن الجذور أعداد نسبية)**

حل تدريب (٣ – ١٩) ص١١٤

جد قيمة المميز ثم حدد عدد الجذور لكل من المعادلات الآتية :

أ) $س^٢ - ٩س = -٢١$ ب) $٢س^٢ + ١١س + ١٥ = ٠$ جـ) $٩س^٢ + ٢٤س + ١٦ = ٠$

الحل :

أ) $س^٢ - ٩س = -٢١ \leftarrow س^٢ - ٩س + ٢١ = ٠$

- $أ = ١ ، ب = -٩ ، جـ = ٢١ \leftarrow \Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ$

$\leftarrow \Delta = ٨١ - ٤ \times ١ \times ٢١ \leftarrow \Delta = ٨١ - ٨٤ \leftarrow \Delta = -٣ \prec ٠$

لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة

ب) $٢س^٢ + ١١س + ١٥ = ٠$

- $أ = ٢ ، ب = ١١ ، جـ = ١٥ \leftarrow \Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ$

$\leftarrow \Delta = ١٢١ - ٤ \times ٢ \times ١٥ \leftarrow \Delta = ١٢١ - ١٢٠ \leftarrow \Delta = ١ \succ ٠$

جذران حقيقيان مختلفان

جـ) $٩س^٢ + ٢٤س + ١٦ = ٠$

- $أ = ٩ ، ب = ٢٤ ، جـ = ١٦ \leftarrow \Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ$

$\leftarrow \Delta = ٥٧٦ - ٤ \times ٩ \times ١٦ \leftarrow \Delta = ٥٧٦ - ٥٧٦ \leftarrow \Delta = ٠ = ٠$

جذر حقيقي مكرر (جذران حقيقيان متساويان)

مثال (٣١) : (الحل باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها س سم ، إذا كان ارتفاعه يزيد طوله بمقدار ١ سم عن طول قاعدته :

١) بين أن المساحة الكلية للمتوازي ، بدلالة س تعطى بالعلاقة $م = ٦س^{٢} + ٤س$ **سم٢ .**

٢) إذا كانت مساحته الكلية تساوي ٢٤٠ سم٢ ، جد أبعاد المتوازي .

الحل :

- **طول القاعدة س ← محيط القاعدة ٤س :: مساحة القاعدة** $س^{٢}$
- **طول الارتفاع يزيد عن طول القاعدة بمقدار ١ سم ← الارتفاع** $= س + ١$
- **المساحة الكلية = ٢٤٠ سم٢**

١) المساحة الكلية = محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ × مساحة القاعدة

$$م = ٤س \times (س + ١) + ٢ \times س^{٢}$$
$$م = ٤س^{٢} + ٤س + ٢س^{٢}$$
$$م = ٦س^{٢} + ٤س$$

٢) المساحة الكلية = ٢٤٠ سم٢ $م = ٢٤٠ \leftarrow ٦س^{٢} + ٤س = ٢٤٠$

$$٦س^{٢} + ٤س - ٢٤٠ = ٠ \xleftarrow{\div ٢} ٣س^{٢} + ٢س - ١٢٠ = ٠$$

- $أ = ٣ ، ب = ٢ ، جـ = -١٢٠ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$

$$\leftarrow \Delta = ٤ - ٤ \times ٣ \times -١٢٠ \leftarrow \Delta = ٤ + ١٤٤٠ \leftarrow \Delta = ١٤٤٤ \succ ٠$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٤٤٤}}{٢ \times ٣} \leftarrow س = \frac{-٢ \pm ٣٨}{٦}$$

إما $س = \frac{-٢ + ٣٨}{٦} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٦}$ أو $س = \frac{-٢ - ٣٨}{٦} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{-٢٠}{٣}}$ مرفوضة

- **إذا طول قاعدة المتوازي ٦ سم ، وارتفاعه = ٧ سم ← (أبعاد الصندوق ٦ ، ٦ ، ٧)**

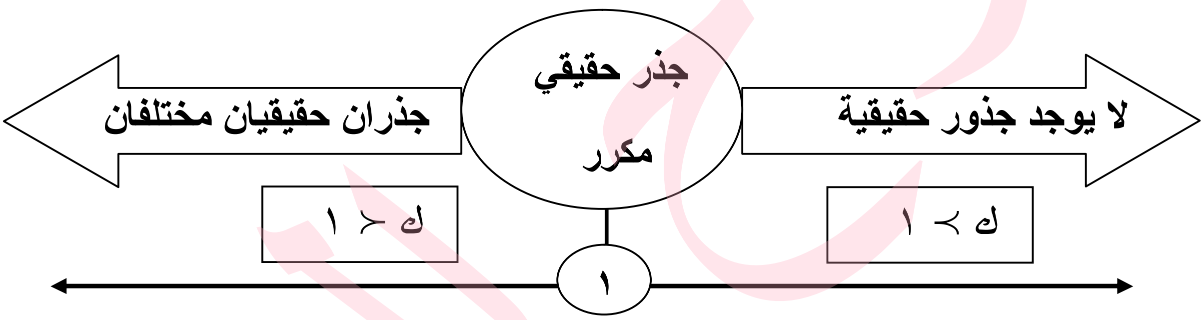
مثال (٣٢) :

للمعادلة $س^{٢} - ٢س + ك = ٠$ **، جد مجموعة قيم ك التي تجعل للمعادلة :**

١) جذر حقيقي مكرر　　٢) جذران حقيقيان مختلفان　　٣) لا يوجد جذور حقيقية

الحل : نستخدم المميز

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ك		
جذر حقيقي مكرر	**جذران حقيقيان مختلفان**	**لا يوجد جذور حقيقية**
$ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$	$ب^{٢} - ٤أجـ > ٠$	$ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$
$٤ - ٤ \times ١ \times ك = ٠$ $٤ - ٤ك = ٠$ $٤ك = ٤ \leftarrow ك = ١$	$٤ - ٤ \times ١ \times ك > ٠$ $٤ - ٤ك > ٠$ $٤ك < ٤ \leftarrow ك < ١$	$٤ - ٤ \times ١ \times ك < ٠$ $٤ - ٤ك < ٠$ $٤ك > ٤ \leftarrow ك > ١$



حل تدريب (٣ – ١٩) ص ١١٤

إذا كان للمعادلة $س^{٢} - ٨هـ س + ٤ = ٠$ **حل واحد فما قيمة قيم الثابت هـ ؟**

الحل :　$أ = ١$ ، $ب = -٨هـ$ ، $جـ = ٤$

- **للمعادلة حل واحد** $\leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

$$ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ \leftarrow (-٨هـ)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤ = ٠$$
$$٦٤هـ^{٢} - ١٦ = ٠ \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow ٦٤هـ^{٢} = ١٦$$
$$هـ^{٢} = \frac{١٦}{٦٤} \leftarrow\leftarrow هـ^{٢} = \frac{١}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{هـ = \pm\frac{١}{٢}}$$

حل تمارين ومسائل ص ١١٧

١) جد جذور المعادلة $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ١٠$

الحل :

- $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ١٠ \Rightarrow \text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠ = ٠$
- $\text{أ} = ١ ،\ \text{ب} = -٣ ،\ \text{جـ} = -١٠ \Rightarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}$

$\Rightarrow \Delta = ٩ - ٤ \times ١ \times -١٠ \Rightarrow \Delta = ٩ + ٤٠ \Rightarrow \Delta = ٤٩ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}} \Rightarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \Rightarrow \text{س} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{٤٩}}{٢ \times ١} \Rightarrow \text{س} = \frac{٣ \pm ٧}{٢}$$

إما $\text{س} = \frac{٣ + ٧}{٢} \Rightarrow \boxed{\text{س} = ٥}$ أو $\text{س} = \frac{٣ - ٧}{٢} \Rightarrow \boxed{\text{س} = -٢}$

مجموعة الحل $= \{ -٢ ، ٥ \}$

٢) استخدم القانون العام لحل المعادلات التربيعية الآتية :

أ) $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥ = ٠$	ب) $٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٣$
جـ) $٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} = -٤$	ء) $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ٠$

الحل :

أ) $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥ = ٠$

- $\text{أ} = ١ ،\ \text{ب} = -٦ ،\ \text{جـ} = ٥ \Rightarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}$

$\Rightarrow \Delta = ٣٦ - ٤ \times ١ \times ٥ \Rightarrow \Delta = ٣٦ - ٢٠ \Rightarrow \Delta = ١٦ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \Rightarrow \text{س} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{١٦}}{٢ \times ١} \Rightarrow \text{س} = \frac{٦ \pm ٤}{٢}$$

إما $\text{س} = \frac{٦ + ٤}{٢} \Rightarrow \boxed{\text{س} = ٥}$ أو $\text{س} = \frac{٦ - ٤}{٢} \Rightarrow \boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل $= \{ ١ ، ٥ \}$

سليمان دلدوم أبو هبه

ب) ٣س^{٢} – ٤س = ٣ ← ٣س^{٢} – ٤س – ٣ = ٠

- أ = ٣ ، ب = –٤ ، جـ = –٣ ← Δ = ب^{٢} – ٤أجـ
← Δ = ١٦ – ٤×٣×–٣ ← Δ = ١٦ + ٣٦ ← Δ = ٥٢ ≻ ٠

س = $\frac{\text{–ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}}$ ← س = $\frac{-(-\text{٤}) \pm \sqrt{\text{٥٢}}}{\text{٢×٣}}$ ← س = $\frac{\text{٤} \pm \text{٢}\sqrt{\text{١٣}}}{\text{٦}}$ ← س = $\frac{\text{٢} \pm \sqrt{\text{١٣}}}{\text{٣}}$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{\text{٢} \pm \sqrt{\text{١٣}}}{\text{٣}} \right\}$

جـ) ٣س + ٣س^{٢} = –٤ ← ٣س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠

- أ = ٣ ، ب = ٣ ، جـ = ٤ ← Δ = ب^{٢} – ٤أجـ
← Δ = ٩ – ٤×٣×٤ ← Δ = ٩ – ٤٨ ← Δ = –٣٩ ≺ ٠

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← م ٠ ح = ϕ

د) س^{٢} – ٨س + ١٦ = ٠

- أ = ١ ، ب = –٨ ، جـ = ١٦ ← Δ = ب^{٢} – ٤أجـ
← Δ = ٦٤ – ٤×١×١٦ ← Δ = ٦٤ – ٦٤ ← Δ = ٠ = ٠

بما أن المميز = ٠ ، إذاً للمعادلة جذراً مكرراً هو

← س = $\frac{\text{–ب}}{\text{٢أ}}$ ← س = $\frac{-(-\text{٨})}{\text{٢×١}}$ ← $\boxed{\text{س = ٤}}$

٣) عددان حقيقيان حاصل ضربهما ٧٧ ، ويزيد أحدهما على الآخر بمقدار ٤ ، جد العددين ٠

الحل :

- **نفرض العدد الأول س ← العدد الثاني ←** س + ٤
- **حاصل ضربهما = ٧٧** ← س (س + ٤) = ٧٧

س (س + ٤) = ٧٧ ← س^{٢} + ٤س – ٧٧ = ٠

- أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = –٧٧ ← Δ = ب^{٢} – ٤أجـ
← Δ = ١٦ – ٤×١×–٧٧ ← Δ = ١٦ + ٣٠٨ ← Δ = ٣٢٤ ≻ ٠

س = $\frac{\text{–ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}}$ ← س = $\frac{\text{–٤} \pm \sqrt{\text{٣٢٤}}}{\text{٢×١}}$ ← س = $\frac{\text{–٤} \pm \text{١٨}}{\text{٢}}$

إما $س = \frac{-٤ + ١٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = ٧}$ أو $س = \frac{-٤ - ١٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = -١١}$

- **عند س = ٧ العدد الأول ← العدد الثاني (س + ٤) = ١١**
- **عند س = -١١ العدد الأول ← العدد الثاني (س + ٤) = -٧**

٤) هل يمكن إيجاد حل حقيقي للمعادلة ٤١ س^٢ – ٣٠ س = ٠ **؟ برر إجابتك .**

الحل :

- أ = ٤١ ، ب = ٣٠ ، جـ = ٠ ← Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ
  ← Δ = ٩٠٠ – ٤ × ١ × ٠ ← Δ = ٩٠٠ – ٠ ← Δ = ٩٠٠ ≻ ٠

نعم يمكن ، لأن المميز = ٩٠٠ > ٠ ، ولها جذران حقيقيان مختلفان

٥) جد قيمة المميز ، ثم حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة فيما يأتي :

أ) س^٢ + س + ٩ = ٠ ب) ٢س^٢ + ١١س + ٦ = ٠

الحل :

أ) س^٢ + س + ٩ = ٠

- أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ٩ ← Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ
  ← Δ = ١ – ٤ × ١ × ٩ ← Δ = ١ – ٣٦ ← Δ = –٣٥ ≺ ٠

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← م ٠ ح = ϕ

ب) ٢س^٢ + ١١س + ٦ = ٠

- أ = ٢ ، ب = ١١ ، جـ = ٦ ← Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ
  ← Δ = ١٢١ – ٤ × ٢ × ٦ ← Δ = ١٢١ – ٤٨ ← Δ = ٧٣ ≻ ٠

بما أن المميز > ٠ (٧٣) ← يوجد لها جذران حقيقيان مختلفان .

٦) يقفز خالد فوق منصة للقفز في بركة سباحة ، وتمثل المعادلة $ل = -٥ن^{٢} + ٨ن + ٦$ ارتفاع خالد (ل) بالأمتار بعد (ن) من الثواني ، استعمل المميز لتعرف إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع (٢٠) متراً ، فسر إجابتك .

الحل : $ل = -٥ن^{٢} + ٨ن + ٦$

- $أ = -٥$ ، $ب = ٨$ ، $جـ = ٦$ ← $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$
← $\Delta = ٦٤ - ٤ \times -٥ \times ٦$ ← $\Delta = ٦٤ + ١٢٠$ ← $\Delta = ١٨٤ > ٠$.

- **بما أن المميز موجب (> ٠) ، إذا منحنى العلاقة يقطع محور السينات في نقطتين ، وكذلك إشارة معامل $ن^{٢}$ سالبة (< ٠) ، إذاً منحنى العلاقة مفتوح للأسفل ، هذا يعني أن مدى العلاقة هو :**

$ف \leq ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$ ← $ف \leq ل\left(\frac{-٨}{٢ \times -٥}\right)$ ← $ف \leq ل(٠و٨)$

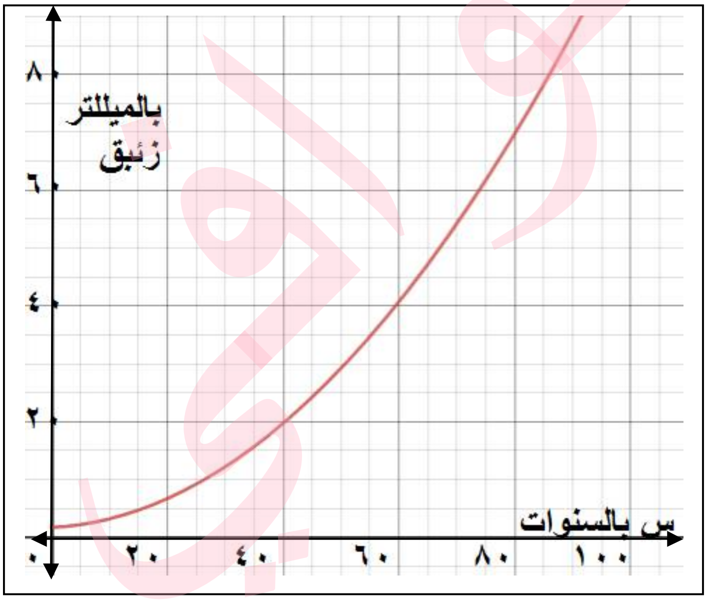
$ف \leq \left(-٥(٠و٨)^{٢} + ٨(٠و٨) + ٦\right)$

$ف \leq -٣و٢ + ٦و٤ + ٦$ ← $\boxed{ف \leq ٩و٢}$

وبما أن أقصى ارتفاع حسب منحنى العلاقة هو ٩و٢ م ، إذا لا يمكن لخالد الوصول لارتفاع ٢٢ متر

٧) المسألة في بداية الدرس

يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي للمرأة بالميللتر زئبق بالاقتران $ص = ٠و٠١س^{٢} + ٠و٠٥س + ١و٧$ حيث س العمر بالسنوات ، ويستعمل هذا الاقتران لتقدير عمر المرأة إذا علم ضغط الدم الانقباضي لها ، هل تستطيع حل المعادلة المرافقة بالطرق التي تعلمتها سابقاً ؟



الحل : نعم يمكن من خلال التمثيل البياني

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى العلاقة لا يقطع محور السينات الممثل للأعمار بالسنوات ، لذلك لا يوجد حل للمعادلة المرافقة .

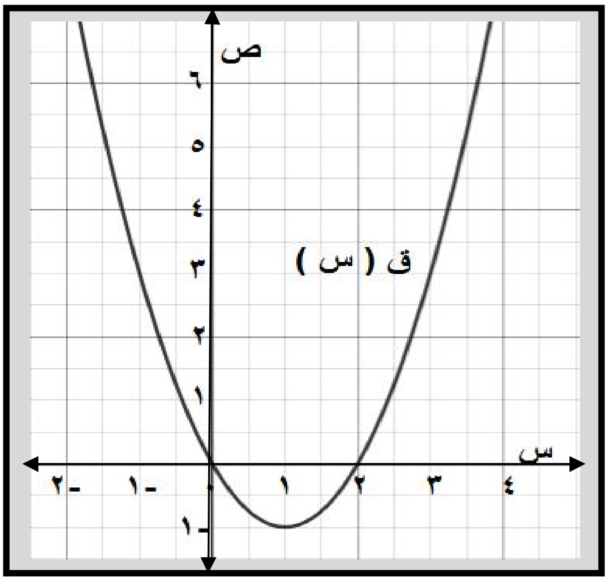
- **أو عن طريق المميز :** $ب^{٢} - ٤أجـ$

$\Delta = (٠و٠٥)^{٢} - ٤ \times ٠و٠١ \times ١و٧$

$\Delta = ٠و٠٠٢٥ - ٠و٠٦٨٠ = -٠و٠٦٥٥$.

بما أن المميز سالب إذاً لا يوجد حل للمعادلة المرافقة .

حل المراجعة ص١١٨ + ١١٩



١) تأمل الشكل المجاور وأجب عن الأسئلة الآتية :

أ) ما مجال ومدى الاقتران ق ؟

الحل : المجال مجموعة الأعداد الحقيقية ح

المدى : ص $\geq$ ١-

ب) جد قيمة س التي يأخذ عندها الاقتران ق قيمة صغرى ٠ ← الحل : س = ١

جـ) جد معادلة محور التماثل للاقتران ق ٠

الحل : س = ١

د) جد إحداثيي رأس منحنى الاقتران ق ٠ ← الحل : (١ ، ١-)

هـ) ما إشارة مميز المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ؟ ← الحل : موجبة

و) جد نقاط تقاطع منحنى ق مع محوري الإحداثيات ٠

الحل : مع السينات ← (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، مع الصادات ← (٠ ، ٠)

ز) كم عدد الجذور الحقيقية للمعادلة المرافقة للاقتران ق ؟ ← الحل : جذران

ح) ما قيمة ق (١-) ؟ ← الحل : ق (١-) = ٤

ط) ما أصفار الاقتران ق ؟ ← الحل : س = ٠ ،،، س = ٢

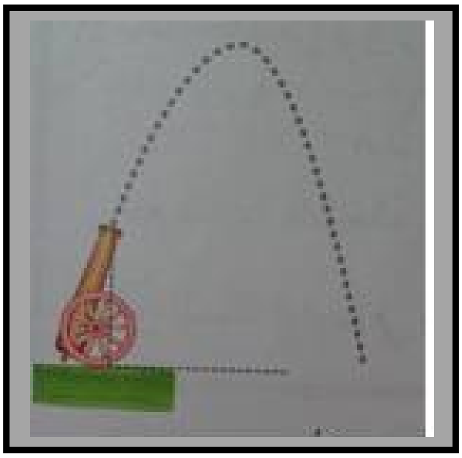
٢) إذا كان للاقتران ق صفر وحيد ، حيث ق(س) = أس٢ + ٦س + ٩ فما قيمة الثابت أ ٠

الحل : صفر وحيد ← المميز = صفر ← ب٢ – ٤أجـ = ٠

ب٢ – ٤أجـ = ٠ ← ٣٦ – ٤ × أ × ٩ = ٠ ← ٣٦ – ٣٦أ = ٠

٣٦أ = ٣٦ ← $\boxed{\text{أ} = ١}$

سليمان دلدوم أبو هبه



٣) أطلق مدفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩و٦ متراً / ث من سطح الأرض ، فإذا كانت المسافة التي تقطعها القذيفة (ف) بالأمتار بعد (ن) من الثواني معطاة بالعلاقة :

ف = −٩و٤ ن^{٢} + ١٩و٦ ن

أ) جد أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة من سطح الأرض .

ب) متى تصل القذيفة سطح الأرض .

الحل :

ا = −٩و٤ ، ب = ١٩و٦ ، جـ = ٠

أ) أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة عند ف$\left(\frac{-\text{ب}}{\text{٢ا}}\right)$

ن = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢ا}}$ ← ن = $\frac{-\text{١٩و٦}}{\text{٢}\times-\text{٩و٤}}$ ← ن = $\frac{\text{١٩و٦}}{\text{٩و٨}}$ ← ن = ٢ ث

ف(٢) = −٩و٤×٤ + ١٩و٦×٢ ← ف(٢) = −١٩و٦ + ٣٩و٢ ← ف(٢) = ١٩و٦ م **أقصى ارتفاع**

ب) تصل القذيفة إلى الأرض عندما تكون المسافة (الإزاحة) = ٠ ← ف = ٠

ت)

ف = ٠ ← −٩و٤ ن^{٢} + ١٩و٦ ن = ٠ ← ن (−٩و٤ ن + ١٩و٦) = ٠

إما ن = ٠ **وهي لحظة الانطلاق**

أو −٩و٤ ن + ١٩و٦ = ٠ ← −٩و٤ ن = −١٩و٦ ← ن = ٤ ث **تصل الأرض بعد ٤ ثواني**

٤) حل المعادلات الآتية :

أ) $(\text{س}+٥)^{٢}=٤٩$ ب) $٣-\text{س}^{٢}=٢\text{س}$ جـ) $\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٧=٠$

د) $٤\text{س}^{٢}+١٢=١٦\text{س}$ هـ) $٢٠=١٢\text{س}-٢\text{س}^{٢}$

الحل :

أ) $(\text{س}+٥)^{٢}=٤٩$

- $(\text{س}+٥)^{٢}=٤٩ \leftarrow \text{س}+٥=\pm٧$

إما $\text{س}+٥=٧ \leftarrow \boxed{\text{س}=٢}$ أو $\text{س}+٥=-٧ \leftarrow \boxed{\text{س}=-١٢}$

مجموعة الحل $=\{٢ ، -١٢\}$

ب) $٣-\text{س}^{٢}=٢\text{س} \leftarrow \text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣=٠$

- أ $=١$ ، ب $=٢$ ، جـ $=-٣$ $\leftarrow \Delta=\text{ب}^{٢}-٤\text{أجـ}$
$\leftarrow \Delta=٤-٤\times١\times-٣ \leftarrow \Delta=٤+١٢ \leftarrow \Delta=١٦ \succ ٠$

بما أن إشارة المميز موجبة وقيمته تمثل مربع كامل ← الحل بطريقة التحليل

$\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣=٠ \leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-١)=٠$

إما $\text{س}+٣=٠ \leftarrow \boxed{\text{س}=-٣}$ أو $\text{س}-١=٠ \leftarrow \boxed{\text{س}=١}$

مجموعة الحل $=\{-٣ ، ١\}$

ملاحظة : يمكن حل فرع ب باستخدام أي طريقة

جـ) $\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٧=٠$

- أ $=١$ ، ب $=٦$ ، جـ $=٧$ $\leftarrow \Delta=\text{ب}^{٢}-٤\text{أجـ}$
$\leftarrow \Delta=٣٦-٤\times١\times٧ \leftarrow \Delta=٣٦-٢٨ \leftarrow \Delta=٨ \succ ٠$ ← **ليس مربع كامل**

يمكن الحل بسهولة باستخدام طريقة إكمال مربع أو القانون العام / الحل بالقانون العام

$$\text{س}=\frac{-\text{ب}\pm\sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س}=\frac{-٦\pm\sqrt{٨}}{٢\times١} \leftarrow \text{س}=-٣\pm\sqrt{٢}$$

مجموعة الحل $=\{-٣\pm\sqrt{٢}\}$

د) $٤س^{٢}+١٢=١٦س \xrightarrow{\div ٤} س^{٢}-٤س+٣=٠$ الكتابة على الصورة العامة ثم القسمة على ٤

- $أ=١$ ، $ب=-٤$ ، $ج=٣$ $\leftarrow \Delta = ب^{٢}-٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ١٦-٤\times١\times٣ \leftarrow \Delta = ١٦-١٢ \leftarrow \Delta = ٤ \succ ٠$

بما أن إشارة المميز موجبة وقيمته تمثل مربع كامل ← الحل بطريقة التحليل

$س^{٢}-٤س+٣=٠ \leftarrow (س-٣)(س-١)=٠$

إما $س-٣=٠ \leftarrow \boxed{س=٣}$ **أو** $س-١=٠ \leftarrow \boxed{س=١}$

مجموعة الحل $=\{٣ ، ١\}$

ملاحظة : يمكن حل فرع د باستخدام أي طريقة

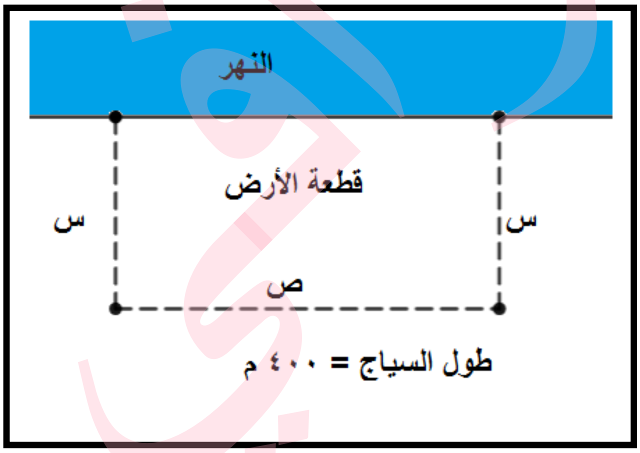
هـ) $٢٠=١٢س-٢س^{٢} \xrightarrow{\div ٢} س^{٢}-٦س+١٠=٠$ الكتابة على الصورة العامة ثم القسمة على ٢

- $أ=١$ ، $ب=-٦$ ، $ج=١٠$ $\leftarrow \Delta = ب^{٢}-٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ٣٦-٤\times١\times١٠ \leftarrow \Delta = ٣٦-٤٠ \leftarrow \Delta = -٤ \prec ٠$

بما أن إشارة المميز سالبة (> ٠) إذاً لا يوجد حل للمعادلة ← $م ، ح = \phi$

٥) أقيم سياج طوله ٤٠٠ م حول قطعة أرض مستطيلة الشكل وتقع على ضفة نهر مستقيم ، فإذا لم تسيج الواجهة الواقعة على ضفة النهر ، جد أبعاد قطعة الأرض بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن .

الحل :



الشكل المجاور يمثل قطعة الأرض ومكان النهر بالنسبة إلى قطعة الأرض ، حيث تم تسييج قطعة الأرض من ٣ جهات فقط ، ولم تسيج الجهة الواقعة على ضفة النهر

- **نفرض أن بعدي القطعة س ، ص ، وبما أنه أقيم السياج على ٣ جهات فإن**

س + س + ص = ٤٠٠ ← $٢س+ص=٤٠٠ \ldots\ldots (١)$

- **مساحة الأرض (م) = حاصل ضرب بعديها**

م = س × ص ٠٠٠٠٠ (٢)

- **لاحظ وجود علاقة بين المعادلتين ١ ، ٢ ، نجعل ص موضع للقانون في المعادلة الأولى ثم نعوضها في المعادلة الثنية**

ص = ٤٠٠ − ٢س ← م = س × ص ← م = س × (٤٠٠ − ٢س) ← م = − ٢س^{٢} + ٤٠٠س

- **لاحظ أنه نتج لدينا اقتران تربيعي م(س) = − ٢س^{٢} + ٤٠٠س يمثل المساحة بدلالة أحد بعدي قطعة الأرض ، وبما أن المطلوب أبعاد قطعة الأرض لتكون المساحة أكبر ما يمكن ، نجد الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، م\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$ ، فتكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{-ب}{٢أ}$ (لاحظ أن إشارة معامل س^{٢} سالبة ، إذاً يوجد قيمة عظمى)**

- س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤٠٠}{٢ × -٢}$ ← $\boxed{س = ١٠٠}$ م **بعد الأرض الأول**

- **عند** س = ١٠٠ ← ص = ٤٠٠ − ٢ × ١٠٠ ← $\boxed{ص = ٢٠٠}$ م **بعد الأرض الثاني**

- **وللتأكد من صحة الحل س + س + ص = ١٠٠ + ١٠٠ + ٢٠٠ = ٤٠٠ م طول السياج ٠**

حل الاختبار الذاتي ص ١٢٠ + ١٢١

١) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، ولكل منها أربعة بدائل ، واحد منها فقط صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح لكل منها ٠

(١) أحد الاقترانات التالية ليس تربيعياً٠

$\boxed{أ)}$ ن(س) = ٢س^{٣} − ٢س + ٢ ب) ل(س) = س^{٢} − ٢س + ٢

جـ) هـ(س) = ١٠س^{٢} د) و(س) = ٤ − ٨س − س^{٢}

(٢) معادلة محور التماثل للاقتران التربيعي ن(س) = س^{٢} **هي :**

أ) س = ١ $\boxed{ب)}$ س = ٠ جـ) س = ٢ د) س = −٢

(٣) الإحداثي السيني لنقطة رأس الاقتران التربيعي ق(س) = ٢س^{٢} − ٢س هي :

$\boxed{\text{أ)}}$ س = ١/٢   ب) س = ٠   جـ) س = ٢   د) س = −١/٢

الحل : س = −ب / ٢أ = −(−٢) / (٢ × ٢) ← $\boxed{\text{س = ١/٢}}$

(٤) مجال الاقتران التربيعي ق(س) = (س − ١)^{٢} يساوي :

أ) ∅ $\boxed{\text{ب)}}$ مجموعة الأعداد الحقيقية

جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة   د) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

(٥) يقطع الاقتران التربيعي ق(س) = ٣س − س^{٢} محور الصادات في النقطة :

أ) (٠ ، ٣)   ب) (٣ ، ٠)   جـ) (٣ ، −١) $\boxed{\text{د)}}$ (٠ ، ٠)

الحل : ق(٠) = ٣(٠) − (٠)^{٢} ← ق(٠) = ٠ ← (٠ ، ٠)

(٦) إذا كان إحداثيا رأس منحنى الاقتران التربيعي ص = ق(س) المفتوح للأسفل هما (−٣ ، ١) ، فإن مدى الاقتران ق هو : مجموعة القيم التي تحقق :

أ) س ≥ −٣   ب) س ≤ −٣   جـ) ص ≥ ١ $\boxed{\text{د)}}$ ص ≤ ١

(٧) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٢ = ٣س هي :

$\boxed{\text{أ)}}$ {١ ، ٢}   ب) {٢ ، −١}   جـ) {−١ ، −٢}   د) ϕ

الحل : س^{٢} + ٢ = ٣س ← س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = ٢ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ٩ − ٤ × ١ × ٢ ← Δ = ٩ − ١ ← Δ = ١ > ٠

س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ ← (س − ١)(س − ٢) = ٠ ← س = ١ ، س = ٢

(٨) مميز المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق(س) = ١ − س − س^{٢} يساوي :

أ) Δ = −٣   ب) Δ = −٤   جـ) Δ = −٥ $\boxed{\text{د)}}$ Δ = ٥

الحل : Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = ١ − ٤ × −١ × ١ ← Δ = ٥

٩) القيمة الصغرى للاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} − ٢س + ٩ **تساوي :**

أ) ٠   ب) ١   جـ) ١١ $\boxed{\text{د)}}$ ٨

الحل : $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ← ق(١) = ١ − ٢ + ٩ = ٨

٢) جد قيم جـ التي تجعل الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٤س + جـ **ليس له جذور حقيقية .**

الحل : ليس له جذور حقيقية ← المميز < ٠

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ ← ١٦ − ٤×١×جـ < ٠

١٦ − ٤جـ < ٠ ←←← ١٦ < ٤جـ

$\frac{١٦}{٤}$ < جـ ←← $\boxed{\text{جـ > ٤}}$

٣) جد حل المعادلات التربيعية الآتية (إن وجد) :

أ) س^{٢} − ٢س = ٢٤   ب) (س + ٢)^{٢} = س + ٤   جـ) ٢س^{٢} + ٦س = ٠

د) −١٠ = س(٣ − س)   هـ) س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

الحل :

أ) س^{٢} − ٢س = ٢٤

س^{٢} − ٢س = ٢٤ ← س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٢٤ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
← Δ = ٤ − ٤×١×− ٢٤ ← Δ = ٤ + ٩٦ ← Δ = ١٠٠ > ٠

س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠ ← (س − ٦)(س + ٤) = ٠ ← س = ١ ، س = ٢

م . ح = { −٤ ، ٦ }

ب) (س + ٢)^{٢} = س + ٤

- (س + ٢)^{٢} = س + ٤ $\xleftarrow{(\text{س+أ})^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{٢أس} + \text{أ}^{٢}}$ س^{٢} + ٤س + $\cancel{٤}$ = س + $\cancel{٤}$ ← س^{٢} + ٣س = ٠
- س^{٢} + ٣س = ٠ ← س(س + ٣) = ٠ ← س = ٠ ، س = −٣ ← م . ح = {−٣ ، ٠}

جـ) ٢س^{٢} + ٦س = ٠

٢س^{٢} + ٦س = ٠ ← س^{٢} + ٣س = ٠ ← س(س + ٣) = ٠

س(س + ٣) = ٠ ← س = ٠ ، س = −٣

م . ح = {−٣ ، ٠}

ملاحظة : في المعادلة التربيعية إذا كان الحد المطلق (جـ) = ٠ ، لا داعي لإيجاد المميز ، نبسط المعادلة إن أمكن ، ثم التحليل بإخراج س عامل مشترك ، ثم نكمل الحل .

د) −١٠ = س(٣ − س)

−١٠ = س(٣ − س) ← −١٠ = ٣س − س^{٢} ← س^{٢} − ٣س − ١٠ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −١٠ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ ← Δ = ٩ − ٤×١×−١٠ ← Δ = ٩ + ٤٠ ← Δ = ٤٩ ≻ ٠ **الحل بالتحليل**

س^{٢} − ٣س − ١٠ = ٠ ← (س + ٢)(س − ٥) = ٠ ← س = −٢ ، س = ٥

م . ح = { −٢ ، ٥ }

هـ) س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −٥ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ ← Δ = ١٦ − ٤×١×−٥ ← Δ = ١٦ + ٢٠ ← Δ = ٣٦ ≻ ٠ **الحل بالتحليل**

س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠ ← (س + ١)(س − ٥) = ٠ ← س = −١ ، س = ٥

م . ح = { −١ ، ٥ }

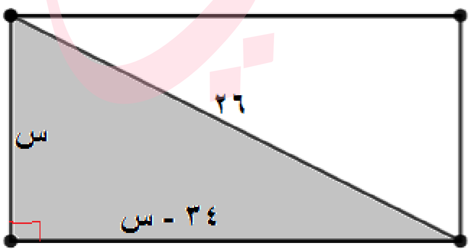
٤) جد أبعاد المستطيل الذي محيطه ٦٨ سم ، وطول قطره ٢٦ سم .

الحل :

- **نستخدم علاقة محيط المستطيل ونظرية فيثاغورس في تكوين علاقة بدلالة أحد بعديه .**
- **نفرض طول أحد بعدي المستطيل س ← البعد الثاني** = $\frac{٦٨ - ٢س}{٢}$ = (٣٤ − س)
- **بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث المظلل (الشكل)**

(٣٤ − س)^{٢} + س^{٢} = (٢٦)^{٢}

وبفك القوس وجمع الحدود المتشابهة وترتيب المعادلة



(٣٤ − س)^{٢} + س^{٢} = (٢٦)^{٢} ← ١١٥٦ − ٦٨س + س^{٢} + س^{٢} ← = ٦٧٦

٢س^{٢} − ٦٨س + ٤٨٠ = ٠ ← س^{٢} − ٣٤س + ٢٤٠ = ٠ ← **معادلة تربيعية**

- أ = ١ ، ب = −٣٤ ، جـ = ٢٤٠ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ **طريقة التحليل**
← Δ = ١١٥٦ − ٤×١×٢٤٠ ← Δ = ١١٥٦ − ٩٦٠ ← Δ = ١٤ ≻ ٠

س^{٢} − ٣٤س + ٢٤٠ = ٠ ← (س − ٢٤)(س − ١٠) = ٠ ← س = ٢٤ ، س = ١٠

عندما البعد الأول = ١٠ سم ← البعد الثاني = ٣٤ − س = ٣٤ − ١٠ = ٢٤ سم

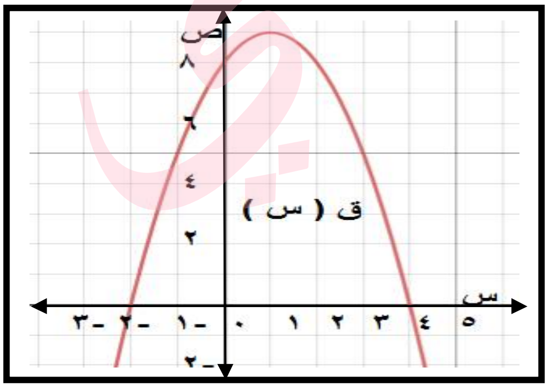
عندما البعد الأول = ٢٤ سم ← البعد الثاني = ٣٤ − س = ٣٤ − ٢٤ = ١٠ سم

ملاحظة : $\frac{١}{٢}$ محيط المستطيل (ل) = البعد الأول + البعد الثاني

٥) إذا علمت أن منحنى الاقتران التربيعي ق يقطع محور السينات عند س = -٢ ، س = ٤ ، ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٨) ، جد قاعدة الاقتران ق ، ثم ارسم منحناه مستخدماً برنامج رسم .

الحل : ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

- **يمر في النقطة** (٠ ، ٨) ← ق(٠) = ٨ ← $\boxed{\text{جـ = ٨}}$ **(نقطة تقاطعة مع محور الصادات)**
- **صورة الاقتران** ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٨ = ٠
- **يقطع محور السينات عند** س = −٢ ← ق(−٢) = ٠ ← ق(−٢) = ٤أ − ٢ب + ٨ = ٠ . . . . (١)
- **يقطع محور السينات عند** س = ٤ ← ق(٤) = ٠ ← ق(٤) = ١٦أ + ٤ب + ٨ = ٠ . . . . (٢)
- **بضرب المعادلة ١ في ٢ ، ثم جمعها للمعادلة ٢ ينتج** ← ٢٤أ + ٢٤ = ٠ ← $\boxed{\text{أ = −١}}$
- **بتعويض قيمة أ في معادلة ١ ينتج** ← −٤ − ٢ب + ٨ = ٠ ← $\boxed{\text{ب = ٢}}$
- **قاعدة الاقتران هي :** ق(س) = −س^{٢} + ٢س + ٨ = ٠



القسم الثاني : الصورة القياسية للاقتران التربيعي

- درسنا سابقا الصورة العامة للاقتران التربيعي والتي هي على الصورة [redacted] وفي هذا الجزء سوف نتعرف على صورة ثانية وهي $ق(س) = أ(س - د)^2 + هـ \leftarrow أ \neq ٠$ حيث :

- $(د ، هـ)$ إحداثيي نقطة الرأس لمنحنى الاقتران
- معادلة محور التماثل $(س = د)$
- نقطة التقاطع مع محور الصادات ضع $(س = ٠)$

- الصورة القياسية ناتجة من الصورة العامة للاقتران التربيعي باستخدام طريقة إكمال المربع كما يلي :

$$ق(س) = أ س^2 + ب س + جـ$$

١) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س^2 + \frac{ب}{أ}س + \frac{جـ}{أ}\right)$ إخراج أ عامل مشترك

٢) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س^2 + \frac{ب}{أ}س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^2 - \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^2 + \frac{جـ}{أ}\right)$ إضافة $\pm\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^2$ داخل القوس

٣) $\leftarrow ق(س) = أ\left(\left(س^2 + \frac{ب}{أ}س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^2\right) + \left(-\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^2 + \frac{جـ}{أ}\right)\right)$ نرتب

٤) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^2 + \left(\frac{٤أجـ - ب^2}{٤أ^2}\right)$ نحلل ونرتب القوسين

٥) نفرض أن $\leftarrow \boxed{د = -\frac{ب}{٢أ}}$ ، $\boxed{هـ = \frac{٤أجـ - ب^2}{٤أ^2}} \leftarrow$

٦) $\leftarrow ق(س) = أ(س - د)^2 + هـ \leftarrow\leftarrow$ الصورة القياسية للاقتران التربيعي

المعادلة المرافقة للاقتران التربيعي بالصورة القياسية هي : $أ(س - د)^2 + هـ = ٠$

مثال (٣٣) :

لكل من الاقترانات التربيعية الآتية :

أ) $ك(س) = (س - ٤)^{٢} + ٣$ ب) $ص = -(س + ٣)^{٢} + ٢$ جـ) $ن(س) = ٢(س + ١)^{٢}$

د) $ل(س) = ٣(س + ٢)^{٢} - ٤$ هـ) $م(س) = \frac{١}{٢}(س - ٢)^{٢}$ و) $ع(س) = \frac{-٣}{٢}(س + ٢)^{٢} - ٤$

١) جد معادلة محور التماثل .

٢) جد إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران

٣) جد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع المحورين الإحداثيين

الحل :

أ) $ك(س) = (س - ٤)^{٢} + ٣$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow$ $س - ٤ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٤}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(د ، هـ) = (٤ ، ٣)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{س = ٠} \leftarrow ك(٠) = (٠ - ٤)^{٢} + ٣ = ١٩ \leftarrow (٠ ، ١٩)$

مع محور السينات $ك(س) = ٠ \leftarrow (س - ٤)^{٢} + ٣ = ٠ \leftarrow (س - ٤)^{٢} = -٣$

مجموعة الحل $= \phi$ **، لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب**

إذاً منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

ب) $ص = -(س + ٣)^{٢} + ٢$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow$ $س + ٣ = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٣}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(د ، هـ) = (-٣ ، -٢)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{س = ٠} \leftarrow ص = (٠ + ٣)^{٢} + ٢ = ١١ \leftarrow (٠ ، ١١)$

مع محور السينات $ص = ٠ \leftarrow -(س + ٣)^{٢} + ٢ = ٠ \leftarrow \underbrace{-(س + ٣)^{٢}}_{\div -١} = \underbrace{-٢}_{\div -١}$

$(\text{س}+٣)^{٢} = ٢ \leftarrow \text{س}+٣ = \pm\sqrt{٢} \leftarrow \text{س} = -٣ \pm \sqrt{٢}$ أصفار الاقتران ص

$\text{م . ع} = \{\ \text{س} = -٣ \pm \sqrt{٢}\ \}$

نقط التقاطع مع محور السينات $(-٣ + \sqrt{٢} \text{ ، } ٠)(-٣ - \sqrt{٢} \text{ ، } ٠)$

ج) $\text{ن}(\text{س}) = ٢(\text{س}+١)^{٢}$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow \text{س}+١ = ٠ \leftarrow \boxed{\text{س} = -١}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{د ، هـ}) = (-١ \text{ ، } ٠)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠} \leftarrow \text{ن}(٠) = ٢(٠+٣)^{٢} = ١٨ \leftarrow (٠ \text{ ، } ١٨)$

مع محور السينات $\text{ن}(\text{س}) = ٠ \leftarrow \underbrace{٢(\text{س}+١)^{٢}}_{÷٢} = \underset{÷٢}{٠} \leftarrow (\text{س}+١)^{٢} = ٠$

$\leftarrow (\text{س}+١)^{٢} = ٠ \leftarrow \text{س}+١ = ٠ \leftarrow \boxed{\text{س} = -١}$

نقطة التقاطع مع محور السينات $(-١ \text{ ، } ٠)$

د) $\text{ل}(\text{س}) = ٣(\text{س}+٢)^{٢} - ٤$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow \text{س}+٢ = ٠ \leftarrow \boxed{\text{س} = -٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{د ، هـ}) = (-٢ \text{ ، } -٤)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠} \leftarrow \text{ل}(٠) = ٣(٠+٢)^{٢} - ٤ = ٨ \leftarrow (٠ \text{ ، } ٨)$

مع محور السينات $\text{ل}(\text{س}) = ٠ \leftarrow ٣(\text{س}+٢)^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow \underbrace{٣(\text{س}+٢)^{٢}}_{÷٣} = \underset{÷٣}{٤}$

$(\text{س}+٢)^{٢} = \frac{٤}{٣} \leftarrow \text{س}+٢ = \pm\frac{٢}{\sqrt{٣}} \leftarrow \text{س} = -٢ \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ أصفار الاقتران ص

$\text{م . ع} = \left\{\ \text{س} = -٢ \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}}\ \right\}$

نقط التقاطع مع محور السينات $\left(-٢ \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}} \text{ ، } ٠\right)\left(-٢ - \frac{٢}{\sqrt{٣}} \text{ ، } ٠\right)$

هـ) $م(س) = \frac{١}{٢}(س - ٢)^{٢}$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow$ $س - ٢ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(ى ، هـ) = (٢ ، ٠)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{س = ٠} \leftarrow م(٠) = \frac{١}{٢}(٠ - ٢)^{٢} = ٢ \leftarrow (٠ ، ٢)$

مع محور السينات $م(س) = ٠ \leftarrow \underbrace{\frac{١}{٢}(س - ٢)^{٢}}_{\times ٢} = \underset{\times ٢}{٠} \leftarrow (س - ٢)^{٢} = ٠$

$\leftarrow (س - ٢)^{٢} = ٠ \leftarrow س - ٢ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٢}$

نقطة التقاطع مع محور السينات $(٢ ، ٠)$

و) $ع(س) = \frac{-٣}{٢}(س + ٢)^{٢} - ٤$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow$ $س + ٢ = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(ى ، هـ) = (-٢ ، -٤)$

٣) مع محور الصادات ، نضع

$\leftarrow \boxed{س = ٠} \leftarrow ع(٠) = \frac{-٣}{٢}(٠ + ٢)^{٢} - ٤ = -١٠ \leftarrow (٠ ، -١٠)$

مع محور السينات $ل(س) = ٠ \leftarrow \frac{-٣}{٢}(س + ٢)^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow \underbrace{\frac{-٣}{٢}(س + ٢)^{٢}}_{\times \frac{٢}{-٣}} = \underset{\times \frac{٢}{-٣}}{٤}$

$(س + ٢)^{٢} = \frac{-٨}{٣} \leftarrow م ، ع = \{ \quad \}$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب، إذا : لا يوج نقط تقاطع مع محور السينات

معلومة

إذا كان الاقتران على الصورة $ن(س) = أ(س - ى)^{٢}$ ، فإنه يقطع (يمس) محور السينات في نقطة واحدة فقط وهي $(ى ، ٠)$ ، وهي أيضاً نقطة الرأس لمنحنى الاقتران .

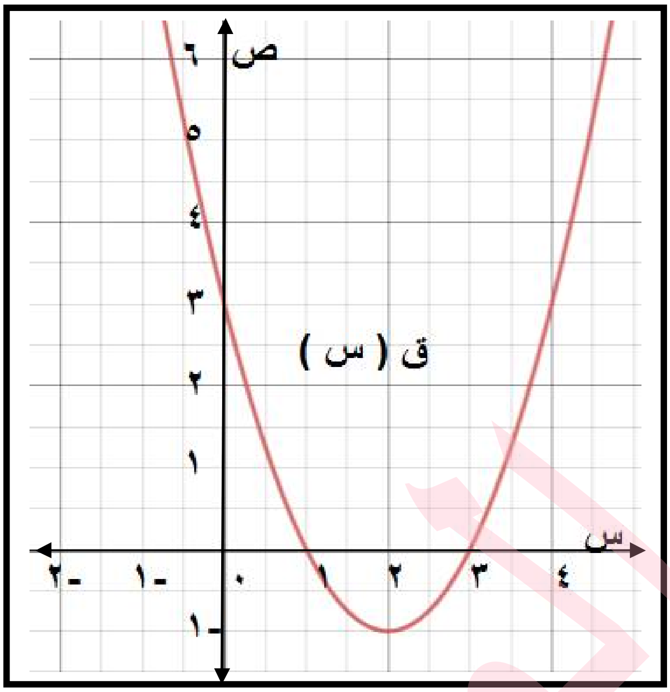
مثال (٣٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = (س – ٢)^{٢} – ١ ، مستخدما أي برنامج رسم ، ثم من خلال الرسم جد :

١) إحداثي نقطة الرأس   ٢) معادلة محور التماثل   ٣) نقط التقاطع مع المحورين الإحداثيين

٤) مدى الاقتران   ٥) جذور المعادلة المرافقة للاقتران   ٦) ق(٤)

الحل :



١) إحداثي نقطة الرأس ← (٢ ، –١)

٢) معادلة محور التماثل ← (س = ٢)

٣) نقط التقاطع مع المحورين الإحداثيين

:: مع الصادات ← (٠ ، ٣)

:: مع السينات ← (٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

٤) مدى الاقتران ← { ص : ص ≥ –١ }

٥) جذور المعادلة المرافقة للاقتران

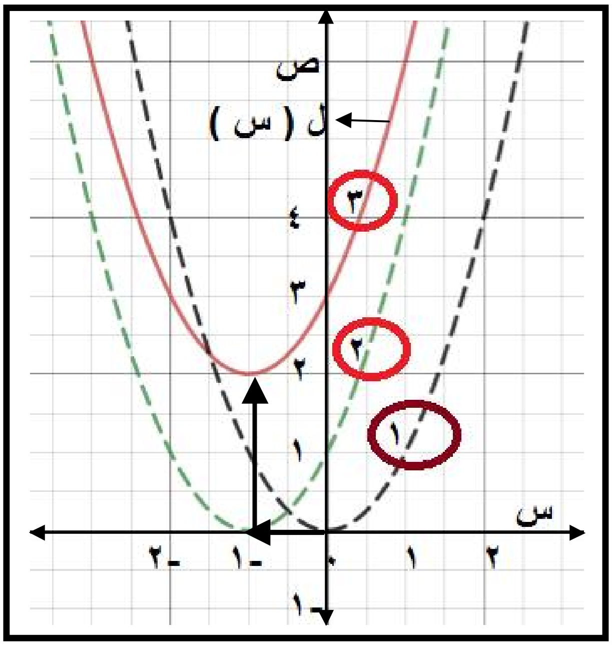
← (س = ١ ، س = ٣)

٦) ق(٤) ← ق(٤) = ٣

مثال (٣٤) : مستخدما الاقتران التربيعي الإمام ق(س) = س^{٢} ، ثم الانسحابات الأفقية والعمودية في رسم تقريبي لمنحنى الاقتران ل(س) = (س + ١)^{٢} + ٢

الحل :

- **نكتب الاقتران على الصورة القياسية** ل(س) = (س – (–١))^{٢} + ٢
- **نرسم الاقتران الإمام** ق(س) = س^{٢} ..... **(١)**
- **نسحب الاقتران وحدة واحدة (أفقياً) إلى اليسار** (ء = –١) **، فتكون نقطة رأس الاقتران الجديد هي** ← (–١ ، ٠) .... **(٢)**



- نسحب منحنى الاقتران الجديد (رقم ٢)

وحدتين إلى الأعلى $(هـ = ٢)$ ...... (٣)

- يكون الشكل الناتج (رقم ٣) هو منحنى الاقتران

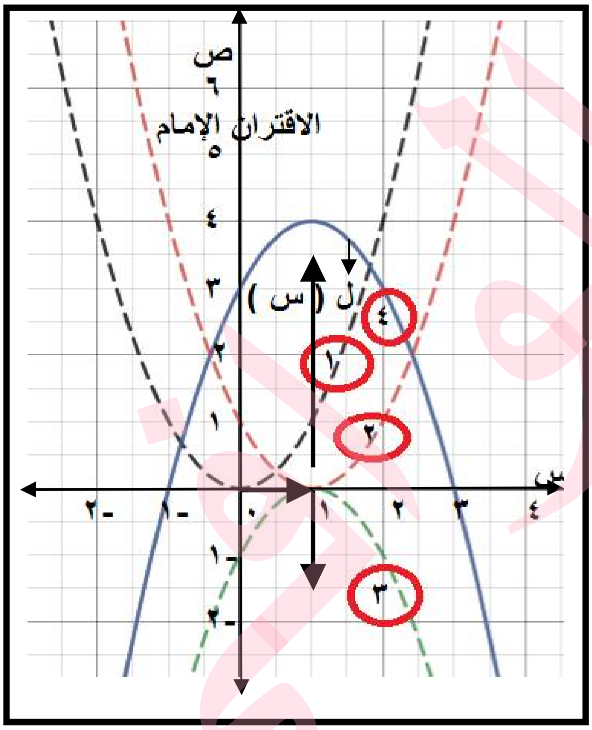
$ل(س) = (س + ١)^{٢} + ٢$

مثال (٣٥) :

مثل منحنى الاقران $ل(س) = -س^{٢} + ٢س + ٣$ بيانياً : مستخدماً الاقتران الإمام والانسحابات .

الحل :

- نكتب الاقتران ل على الصورة القياسية $ل(س) = أ(س - د)^{٢} + هـ$



$ل(س) = -س^{٢} + ٢س + ٣ \leftarrow ل(س) = -(س^{٢} - ٢س - ٣)$

$\xleftarrow{\pm(\frac{ب}{٢})^{٢} = \pm ١} ل(س) = -(س^{٢} - ٢س + ١ - ١ - ٣)$

$ل(س) = -((س - ١)^{٢} - ٤) \leftarrow ل(س) = -(س - ١)^{٢} - ٤$

- نرسم الاقتران الإمام .... (١)
- نسحب الاقتران الإمام وحدة واحدة $(د = ١)$ إلى اليمين ينتج الاقتران رقم (٢) ورأسه $\leftarrow (١ ، ٠)$
- نعكس الاقتران رقم (٢) $(أ = -١)$ حول محور السينات ينتج الاقتران رقم (٣) ورأسه $\leftarrow (١ ، ٠)$
- نسحب الاقتران رقم (٣) أربع وحدات للأعلى ينتج الاقتران رقم (٤) ، والذي يمثل منحنى الاقتران $ل(س) = -(س - ١)^{٢} - ٤ \leftarrow ل(س) = -س^{٢} + ٢س + ٣$

مثال (٣٦) :

اكتب قاعدة الاقتران ق الذي يحقق الشروط في كل حالة من الحالات التالية ، علما بأن ($ا = ١$) أو ($ا = -١$)

١) نقطة الرأس ← ($٢ ، ٣$) ومنحناه مفتوح للأسفل

٢) نقطة الرأس ← ($-٢ ، -٣$) ومنحناه مفتوح للأعلى

٣) نقطة الرأس ← ($-٣ ، ٠$) ومنحناه مفتوح للأسفل

الحل : الصورة القياسية للاقتران هي $ق(س) = ا(س - ى)^{٢} + هـ$ نقطة الرأس ← ($ى ، هـ$)

١) نقطة الرأس ← ($ى ، هـ$) = ($٢ ، ٣$) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← ($ا = -١$)

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = -(س - ٢)^{٢} + ٣$

٢) نقطة الرأس ← ($ى ، هـ$) = ($-٢ ، -٣$) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← ($ا = ١$)

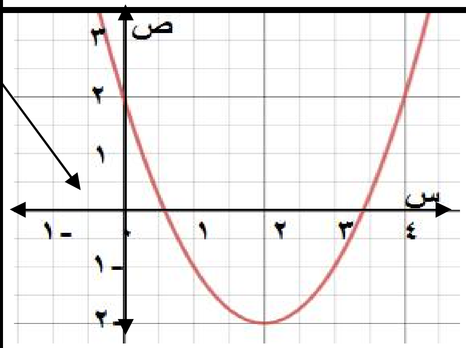
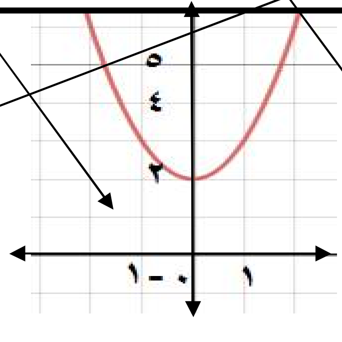
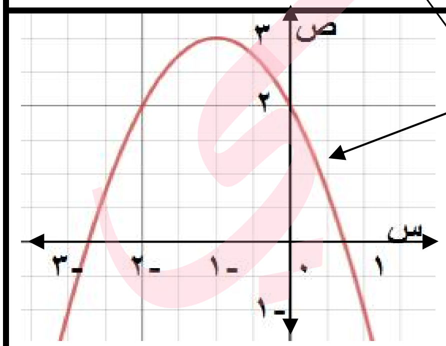
قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = (س + ٢)^{٢} - ٣$

٣) نقطة الرأس ← ($ى ، هـ$) = ($-٣ ، ٠$) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← ($ا = -١$)

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = -(س + ٣)^{٢}$

مثال (٣٦) :

صل بين الاقتران التربيعي والرسم الذي يمثل هذا الاقتران

الاقتران ←	$ق(س) = -(س + ١)^{٢} + ٣$	$ق(س) = (س - ٢)^{٢} - ٢$	$هـ(س) = س^{٢} + ٢$
الرسم ←			

القسم الثالث : كتابة قاعدة الاقتران بدلالة صفريه

- إذا كان م ، ن ، هما صفري الاقتران ق فإن قاعدة الاقتران ق تكتب كما يلي :

$$ق(س) = أ(س - م)(س - ن) \leftarrow أ \neq ٠$$

١) م ، ن الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

٢) معادلة محور التماثل هي $\leftarrow \left(س = \frac{م + ن}{٢}\right)$

٣) إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران $\leftarrow \left(\frac{م + ن}{٢} ، ق\left(\frac{م + ن}{٢}\right)\right)$

٤) نقطة التقاطع مع محور الصادات ضع $\leftarrow (س = ٠)$ أو جد $ق(٠)$

٥) م ، ن جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران $\leftarrow أ(س - م)(س - ن) = ٠$

مثال (٣٧) :

لكل من الاقترانات التربيعية الآتية :

أ) $ك(س) = (س + ٢)(س - ٢)$ ب) $ل(س) = ٢(س - ١)(س - ٣)$ جـ) $ق(س) = ٣(س - ١)(س - ٢)$

د) $ع(س) = \frac{١}{٢}س(س - ٤)$ هـ) $م(س) = -٢س(س + ٣)$ و) $د(س) = \frac{-١}{٢}(س + ٢)(س + ٣)$

١) جد معادلة محور التماثل .

٢) جد إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران

٣) جد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

٤) جد نقطة التقاطع مع محور الصادات

الحل :

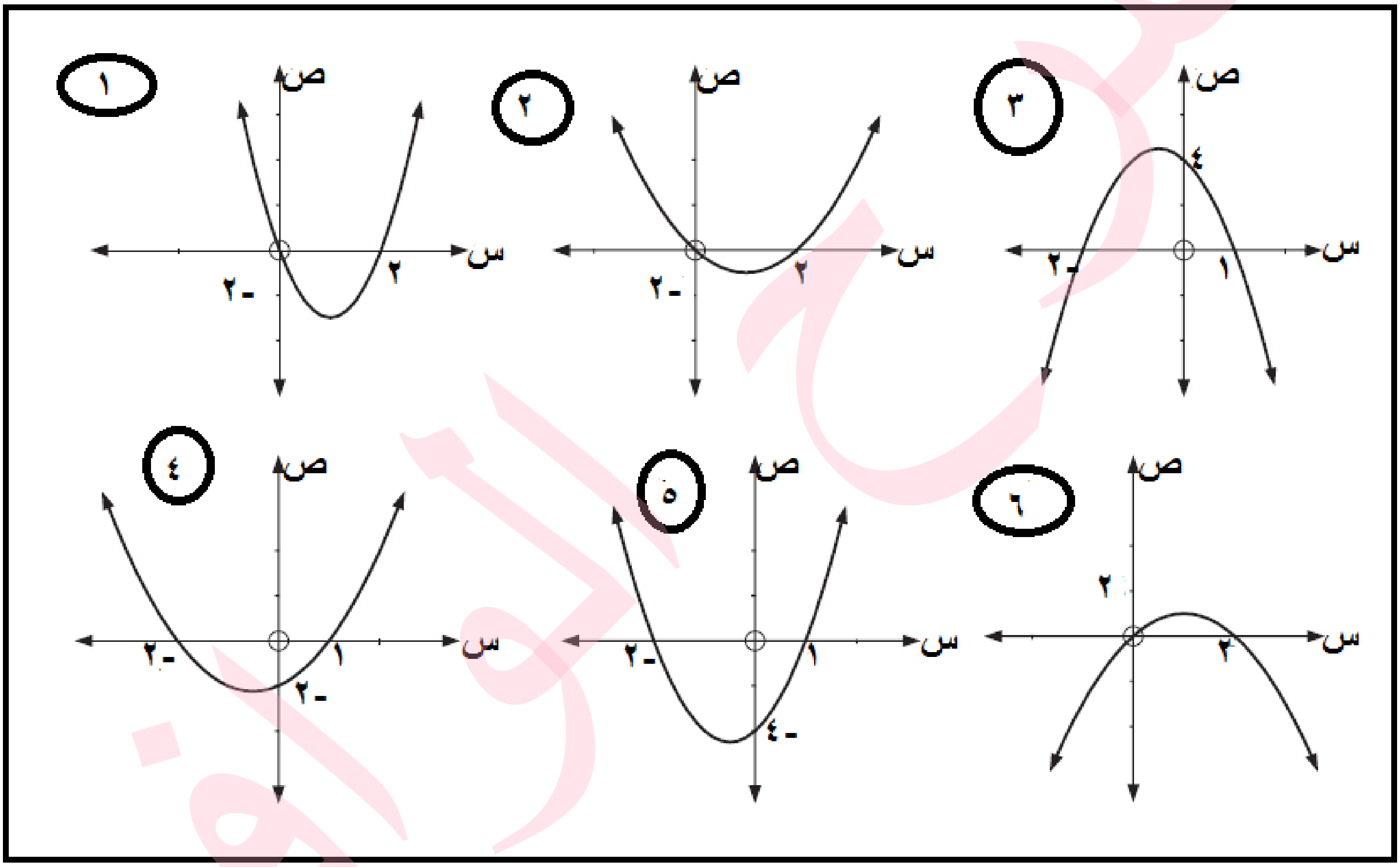
الاقتران	معادلة محور التماثل	نقطة الرأس	نقاط التقاطع مع السينات	نقاط التقاطع مع الصادات
	س = $\frac{م+ن}{٢}$	$\left(\frac{م+ن}{٢} ، ق\left(\frac{م+ن}{٢}\right)\right)$	مع السينات	مع الصادات
أ) ك(س) = (س+٢)(س−٢) م = −٢ ، ن = ٢	س = $\frac{-٢+٢}{٢}$ س = ٠	(٠ ، ق(٠)) (٠ ، −٤)	(−٢ ، ٠) (٢ ، ٠)	(٠ ، −٤)
ب) ل(س) = ٢(س−١)(س−٣) م = ١ ، ن = ٣	س = $\frac{١+٣}{٢}$ س = ٢	(٢ ، ق(٢)) (٢ ، −٢)	(١ ، ٠) (٣ ، ٠)	(٠ ، ٦)
جـ) ن(س) = ٣(س−١)(س−٢) م = ١ ، ن = ٢	س = $\frac{١+٢}{٢}$ س = $\frac{٣}{٢}$	$\left(\frac{٣}{٢} ، ق\left(\frac{٣}{٢}\right)\right)$ $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٣}{٤}\right)$	(١ ، ٠) (٢ ، ٠)	(٠ ، ٦)
د) ع(س) = $\frac{١}{٢}$س(س−٤) م = ٠ ، ن = ٤	س = $\frac{٠+٤}{٢}$ س = ٢	(٢ ، ق(٢)) (٢ ، −٢)	(٠ ، ٠) (٤ ، ٠)	(٠ ، ٠)
هـ) م(س) = −٢س(س+٣) م = ٠ ، ن = −٣	س = $\frac{٠+-٣}{٢}$ س = $\frac{-٣}{٢}$	$\left(\frac{-٣}{٢} ، ق\left(\frac{-٣}{٢}\right)\right)$ $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}\right)$	(٠ ، ٠) (−٣ ، ٠)	(٠ ، ٠)
و) د(س) = $\frac{-١}{٢}$(س+٢)(س+٣) م = −٢ ، ن = −٣	س = $\frac{-٢+-٣}{٢}$ س = $\frac{-٥}{٢}$	$\left(\frac{-٥}{٢} ، ق\left(\frac{-٥}{٢}\right)\right)$ $\left(\frac{-٥}{٢} ، \frac{١}{٨}\right)$	(−٢ ، ٠) (−٣ ، ٠)	(٠ ، −٣)

مثال (٣٨) :

صل بين الاقتران والرسم الذي يمثل هذا الاقتران

أ) ك(س) = س(س − ٢)   ب) ل(س) = ٣س(س − ٢)   جـ) ن(س) = −س(س − ٢)

د) ع(س) = (س + ٢)(س − ١)   هـ) م(س) = ٢(س + ٢)(س − ١)   و) د(س) = −(س + ٢)(س − ١)



الحل :

الاقتران	ك(س)	ل(س)	ن(س)	ع(س)	م(س)	د(س)
رقم الشكل	٢	١	٦	٤	٥	٣

مثال (٣٩) :

اكتب الاقتران ق(س) = ٣س^٢ − ٦س − ٩

١) بالصورة القياسية ٢) بدلالة صفري الاقتران

الحل :

١) الصورة القياسية

ق(س) = ٣(س^٢ − ٢س − ٣) إخراج ٣ عامل مشترك

ق(س) = ٣(س^٢ − ٢س + ١ − ١ − ٣) إكمال مربع داخل القوس

ق(س) = ٣(س^٢ − ٢س + ١) − ١٢ ترتيب

ق(س) = ٣(س − ١)(س − ١) − ١٢ تحليل ما داخل القوس

ق(س) = ٣(س − ١)^٢ − ١٢ كتابة الاقتران على الصورة القياسية

٢) بدلالة صفري الاقتران

ق(س) = ٣(س^٢ − ٢س − ٣) إخراج ٣ عامل مشترك

ق(س) = ٣(س − ٣)(س + ١) تحليل ما داخل القوس

مثال (٤٠) :

إذا كان منحنى الاقتران التربيعي ق(س) يقطع محور السينات عندما س = ٢ ، س = −٤ ، إذا علمت أن الإحداثي الصادي لنقطة الرأس يساوي ٤ .

١) جد معادلة محور التماثل للاقتران ق .

٢) جد إحداثيي نقطة الرأس لمنحنى الاقتران ق .

٣) إذا كان ق(س) = أ(س − م)(س − ن) : أ معامل س^٢ ، م ، ن صفري الاقتران ق ، جد قيمة كل من أ ، م ، ن .

٤) جد مجموعة حل المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق .

٥) مدى الاقتران ق .

الحل :

١) بما أن الاقتران يقطع محور السينات عندما س = ٢ ، س = −٤ ⟵ معادلة محور التماثل

$$س = \frac{٢ + −٤}{٢} \leftarrow \boxed{س = −١}$$

٢) بما أن محور التماثل يمر في نقطة الرأس ، إذاً إحداثيي نقطة الرأس (−١ ، ٤)

٣) بما أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عندما س = ٢ ، س = −٤ ، إذا صفري الاقتران هما م = ٢ ، ن = −٤ ⟵ ق(س) = أ(س − ٢)(س + ٤) ، ولإيجاد قيمة أ ، من نقطة الرأس (−١ ، ٤) ⟵ ق(−١) = ٤

$$\leftarrow ق(−١) = أ(−١ − ٢)(−١ + ٤) \leftarrow ٤ = −٩أ \leftarrow \boxed{أ = \frac{−٤}{٩}}$$

٤) صفري الاقتران ق هما جذور المعادلة المرافقة ⟵ م ، ع = {٢ ، −٤}

٥) مدى الاقتران ق : = {ص ، ص ≤ ٤}

مثال (٤١) :

إذا كان منحنى الاقتران ق(س) = (س − م)(س − ن) يقطع محور السينات عندما س = −٣ ، س = −١ ، إذا تم سحب الاقتران ٥ وحدات لليمين ، ثم ٤ وحدات للأعلى جد :

١) إحداثيي نقطة رأس الاقتران الجديد ل(س)

٢) أكتب الاقتران ل(س) بالصورة القياسية .

الحل :

- لاحظ أن م = −٣ ، ن = −١ ⟵ ق(س) = (س − (−٣))(س − (−١))
- انسحاب لليمين ٥ وحدات ⟵ ق(س) = (س − (−٣ + ٥))(س − (−١ + ٥))

 ⟵ هـ(س) = (س − ٢)(س − ٤) ⟵ نقطة الرأس ⟵ (٣ ، −١)
- انسحاب للأعلى ٤ وحدات ⟵ نقطة الرأس للاقتران ل ⟵ (٣ ، −١ + ٤) ⟵ (٣ ، ٣)
- الصورة القياسية للاقتران ل هي ⟵ ل(س) = $(س − ٣)^{٢} + ٣$

القسم الرابع : حل معادلات كسرية تؤول إلى معادلات تربيعية

مثال (٤٢) :

جد مجموعة حل المعادلات الكسرية الآتية (إن أمكن) :

أ) $\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}} = ٧ \leftarrow \text{س} \neq ٠$ ب) $٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ٣ \leftarrow \text{س} \neq ٠$

جـ) $\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ١ \leftarrow \text{س} \neq ٠$ د) $\frac{\text{س} - ١}{٢ - \text{س}} = ٢\text{س} + ١ \leftarrow \text{س} \neq ٢$

الحل :

أ) $\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}} = ٧ \leftarrow \text{س} \neq ٠$

- أ) $\text{س} \times \left(\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}} = ٧\right) \leftarrow \text{س}^٢ + ١٢ = ٧\text{س}$ **ضرب طرفي المعادلة في** $\text{س} \neq ٠$

$\text{س}^٢ + ١٢ = ٧\text{س} \leftarrow \text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $\text{أ} = ١ ، \text{ب} = -٧ ، \text{جـ} = ١٢ \leftarrow \Delta = \text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ}$ **طريقة التحليل**

$\leftarrow \Delta = ٤٩ - ٤ \times ١ \times ١٢ \leftarrow \Delta = ٤٩ - ٤٨ \leftarrow \Delta = ١ \succ ٠$

$\leftarrow \text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢ = ٠ \leftarrow (\text{س} - ٤)(\text{س} - ٣) = ٠$

$\leftarrow \text{س} = ٤ ، \text{س} = ٣ \leftarrow \text{م . ح} = \{ ٣ ، ٤ \}$

ب) $٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ٣ \leftarrow \text{س} \neq ٠$

$\text{س} \times \left(٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ٣\right) \leftarrow ٢\text{س}^٢ - ١ = ٣\text{س}$ **ضرب طرفي المعادلة في** $\text{س} \neq ٠$

$٢\text{س}^٢ - ١ = ٣\text{س} \leftarrow ٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $\text{أ} = ٢ ، \text{ب} = -٣ ، \text{جـ} = -١ \leftarrow \Delta = \text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ}$ **طريقة القانون العام**

$\leftarrow \Delta = ٩ - ٤ \times ٢ \times -١ \leftarrow \Delta = ٩ + ١٧ \leftarrow \Delta = ٢٦ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$$

$$\text{م . ح} = \left\{ \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤} \right\}$$

جـ) $س - \frac{1}{س} = 1 \leftarrow س \neq 0$

$س \times \left(س - \frac{1}{س} = 1\right) \leftarrow س^{2} - 1 = س$ **ضرب طرفي المعادلة في $س \neq 0$**

$\leftarrow س^{2} - 1 = س \leftarrow س^{2} - س - 1 = 0$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $أ = 1$ ، $ب = -1$ ، $جـ = -1 \leftarrow \Delta = ب^{2} - 4أجـ$ **طريقة القانون العام**
$\leftarrow \Delta = 1 - 4 \times 1 \times -1 \leftarrow \Delta = 1 + 4 \leftarrow \Delta = 5 \succ 0$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} \leftarrow س = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$م . ح = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

ء) $\frac{س - 1}{2 - س} = 2س + 1 \leftarrow س \neq 2$

$(2 - س)\left(\frac{س - 1}{2 - س} = 2س + 1\right) \leftarrow س - 1 = (2 - س)(2س + 1)$ **ضرب طرفي المعادلة في $2 - س \neq 0$**

$\leftarrow س - 1 = -2س^{2} + 3س + 2 \leftarrow 2س^{2} - 2س - 3 = 0$ **فك الأقواس ثم الترتيب**

- $أ = 2$ ، $ب = -2$ ، $جـ = -3 \leftarrow \Delta = ب^{2} - 4أجـ$ **القانون العام**
$\leftarrow \Delta = 4 - 4 \times 2 \times -3 \leftarrow \Delta = 4 + 24 \leftarrow \Delta = 28 \succ 0$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} \leftarrow س = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} \leftarrow س = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} \leftarrow س = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$م . ح = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \right\}$$

مثال (٤٣) :

إذا كان مجموع عدد ومقلوبه يساوي $\frac{26}{5}$ ، فما هو العدد ؟

الحل : نفرض العدد $س \leftarrow$ **مقلوبه** $\leftarrow \frac{1}{س}$ ،، $\leftarrow س + \frac{1}{س} = \frac{26}{5}$: $س \neq 0$

$5س\left(س + \frac{1}{س} = \frac{26}{5}\right) \leftarrow 5س^{2} + 5 = 26س$ **ضرب طرفي المعادلة في $5س \neq 0$**

$5س^{2} + 5 = 26س \leftarrow 5س^{2} - 26س + 5 = 0$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- أ = ٥ ، ب = −٢٦ ، جـ = ٥ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ

← Δ = ٦٧٦ − ٤×٥×٥ ← Δ = ٦٧٦ − ١٠٠ ← Δ = ٥٧٦ ≻ ٠

الحل باستخدام القانون العام أو التحليل (المميز مربع كامل) ⟵ تحليل

٥س^{٢} − ٢٦س + ٥ = ٠ ← (٥س − ١)(س − ٥) = ٠

(٥س − ١) = ٠ ← س = $\frac{١}{٥}$ ، (س − ٥) = ٠ ← س = ٥

إذاً العدد إما $\frac{١}{٥}$ أو ٥