الفصل الأول

المتجهات

سلسلة ١٠١ في

الفيزياء

للأول الثانوي العلمي والصناعي

إعداد الأستاذ

ابراهيم أبو دية

٠٧٩١٨٣٩٨٢٠

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

الدرس الأول :- الكمية القياسية والكمية المتجهة

* تعلمنا في الصف التاسع سابقاً عن بعض الكميات الفيزيائية مثل الطول والكتلة والسرعة والقوة والزمن وغيرها من الكميات حيث تندرج هذه الكميات الى نوعين وهما :-

1) كمية متجهة .

- هي كمية فيزيائية تحدد بالمقدار والاتجاه .
- من الأمثلة عليها :-
  أ- القوة ب- السرعة
  ج- التسارع د- الازاحة
  هـ- المجال .

2) كمية قياسية .

- هي كمية فيزيائية تحدد بالمقدار فقط .
- من الأمثلة عليها :-
  أ- درجة الحرارة . ب- الطول
  ج- الكتلة د- الزمن
  هـ- الشغل .

- وعند نقول : أثر خالد أثر على طاولة بقوة مقدارها 5 نيوتن نحو الشرق .
- بينما نقول : أن خالد كتلته 50 كغم .

مثال : هل يمكننا القول أنه قوة مقدارها 10 نيوتن باتجاه الشرق تساوي سرعة مقدارها 10 م/ث باتجاه الشرق ! لماذا ؟!

الحل : هنا نقول أن القوة والسرعة كلتاهما كميتان فيزيائيتان متجهتان لهما نفس الاتجاه ولكنهما غير متساويتان في المقدار .

Scanned by CamScanner

* تمييز الكمية المتجهة عن الكمية العددية :-

يتم تمييز الكمية المتجهة عن طريق رموز (حروف) ونضع أعلاه سهم مثل القوة ($\vec{F}$) بينما يتم تمييز الكمية العددية بوضع رمز (حرف) فقط مثل الكتلة (ك).

* بعض رموز أو دلالات الكميات الفيزيائية :-

١) القوة ← ق ٢) الزمن ← ز ٣) السرعة ← ع ٤) التسارع ← ت
٥) المجال ← م ٦) الكتلة ← ك ٧) الوزن ← و ٨) الطول ← ل
٩) درجة الحرارة ← د ١٠) الشغل ← ش ١١) السعة ← ف ١٢) الإزاحة ← ح

* كيف يمكن تمثيل الكمية المتجهة بيانياً :-

يتم تمثيل الكمية المتجهة بيانياً حيث يتم رسم سهماً يناسب طوله مع مقدار الكمية المتجهة وذلك عن طريق اختيار مقياس رسم مناسب واتجاهه يشير الى اتجاهها.

* لحساب طول السهم نتبع العلاقة الرياضية التالية :-

$$\text{الكمية المتجهة} = \frac{\text{طول السهم}}{\text{مقدار مناسب}} \times \text{مقدار الكمية المتجهة}$$

لمقياس الرسم حيث المقدار الذي يجب أن يناسب مع مقدار الكمية المتجهة.

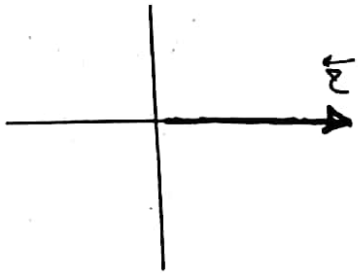
Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

مثال ١: ذهب أحمد من بيته الى المدرسة التي تقع على بعد ٨٠٠ م باتجاه الشرق مثل بالرسم الازاحة التي قطعها أحمد وعبر عنها ياضياً :.

الحل:

نحسب طول المتجه $|\overleftarrow{ع}| = \frac{١ سم}{٢٠٠ م} \times ٨٠٠ م = ٤ سم$

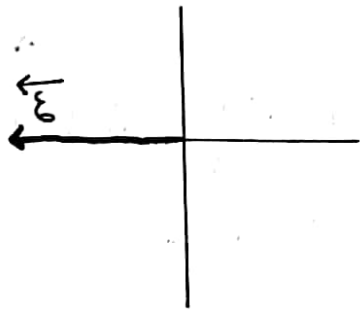


ياضياً :.

$\overleftarrow{ع}$ = ٨٠٠ م ، شرقاً

مثال ٢: تسير سيارة بسرعة ثابتة مقدارها ١٨٠ كم/ساعة نحو الغرب مثل هذا المتجه السرعة بالرسم بيانياً وعبر عنه ياضياً .

الحل:



$|\overleftarrow{ع}| = \frac{١ سم}{٦٠ كم/ساعة} \times ١٨٠ كم/ساعة$

= ٣ سم

ياضياً : $\overleftarrow{ع}$ = ١٨٠ كم/ساعة ، غرباً

ملاحظة : يمكننا تحديد اي متجه بالدرجات (زاوية θ) وذلك نسبة الى نقطة اسناد مرجعية وهي محور السينات الموجب حيث θ : زاوية محصورة بين محور السينات الموجب وضلع انتهاء المتجه ومثال على ذلك المتجه $\overleftarrow{هـ}$ = ١٥٠ نيوتن ، جنوب :.

$\overleftarrow{هـ}$ = ١٥٠ نيوتن ، ٢٧٠°

Scanned by CamScanner

* يتم التعبير عنه المتجه رياضياً من خلال العلاقة التالية :-

ع = مقدار المتجه ، الاتجاه ← ⊙ : محصور بين محور السينات الموجب وضلع انتهاء الزاوية .
← محاور : شمال / جنوب / شرق / غرب

في حال كان الاتجاه عبارة عن اتجاهين موجبين الزاوية تتبع لـ ال المقدار فقط والأمثلة على ذلك :-

١) $\overrightarrow{ب}$ = ٢٥ نيوتن ، ١٥٠°

٢) $\overrightarrow{ع}$ = ٦ نيوتن ، شرقاً

٣) $\overrightarrow{ك}$ = ٨٥ م/ث ، ٢٠ شمال الشرق .

مثال ٤ :- حلل بالرسم القوى التالية :-

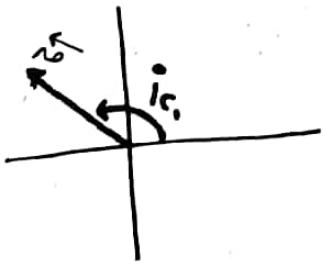
١) $\overrightarrow{ق_1}$ = ٦ نيوتن ، ١٢٠° .

٢) $\overrightarrow{ق_2}$ = ١٥٠ نيوتن ، ٣٠° شرق الجنوب .

الحل :-

١) $\overrightarrow{ق_1}$ = $\frac{٣ سم}{٢ نيوتن}$ × ٦ نيوتن

= ٣ سم



٢) $\overrightarrow{ق_2}$ = $\frac{١ سم}{٣٠ نيوتن}$ × ١٥٠ نيوتن

= ٥ سم

عكيف التعبير عنه هذه العلاقة الرياضية من خلال العلاقة التالية :-

$\overrightarrow{ق_3}$ = ١٥٠ نيوتن ، ٣٠٠°

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

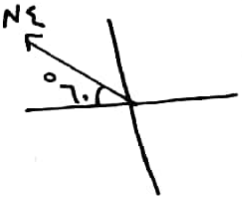
تدريب ١ :- مثل المتجهة التالية بيانياً :-

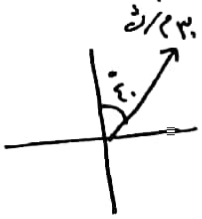
[١] $\vec{ق}$ = ٣ نيوتن ، ١٥٠° [٢] $\vec{ق}$ = ٦ نيوتن ، ٥٠°

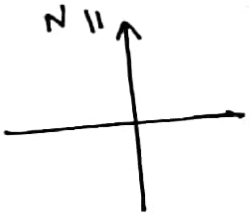
[٣] $\vec{ع}$ = ٨ م/ث ، ٢٤٠° [٤] $\vec{ص}$ = ٥ نيوتن/كيلوم ، ٣٠ شرق الشمال

[٥] $\vec{ع}$ = ٦ م/ث ، ٢٠° غرب الشمال [٦] $\vec{ع}$ = ١٢٠ م/ث ، ٢٠ شرق الجنوب

مثال :- بالاعتماد على الاشكال التالية البيانية حدد المتجهات رياضياً :-

١)


٢)


٣)


الحل :-

[١] $\vec{ق}$ = ٤ N ، ٦٠° شمال الغرب .

= ٤ N ، ١٢٠°

= ٤ N ، ٣٠° غرب الشمال .

[٢] $\vec{ع}$ = ٣٠ م/ث ، ٤٠° شرق الشمال

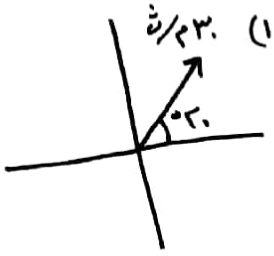
= ٣٠ م/ث ، ٥٠°

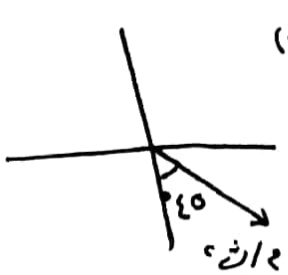
= ٣٠ م/ث ، ٥٠° شمال الشرق

[٣] $\vec{ق}$ = ١١ N ، ٩٠°

= ١١ N ، شمال

تدريب ٢ :- بالاعتماد على الاشكال التالية عبر عن المتجهات رياضياً :-

١)


٢)


٣)

Scanned by CamScanner

تدريب ٣ :- وضح العدد بكل من الكمية المتجهة والكمية القياسية . . . . . .

تدريب ٤ :- مثل بالرسم الكميات المتجهة التالية وعبر عنها بصيغ رياضية أخرى :-

(١) $\overleftarrow{ع}$ = ١٨٠ كم/ساعة باتجاه ٦٠° غرب الجنوب .

(٢) $\overleftarrow{ن}$ = ٣ م/ث² باتجاه الشمال .

(٣) $\overleftarrow{ه}$ = ٧٠ نيوتن ، ٢٢٠°

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

الدرس الثاني :- بعض خصائص المتجهات

* نحتاج في كثير من التطبيقات الفيزيائية إلى أنه نتعامل مع أكثر من متجه لذا لا بد من أنه نتعرف على بعض الخصائص .

* خصائص المتجهات :-

1) تساوي المتجهين :-

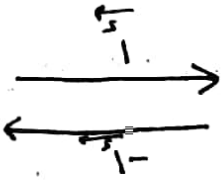
تتساوى المتجهان إذا كانا لهما المقدار والاتجاه نفسه مثال على ذلك $\vec{A} = \vec{B}$ إذا كانا متجهين $A = B$ وكل منهما يشير إلى نفس الاتجاه .

ملاحظة :-

* خاصية تساوي المتجهين تسمح لنا بنقل المتجه إلى أي موقع بشرط ألا نغير مقداره أو اتجاهه .

2) سالب المتجه :-

مقصود بسالب المتجه انه متجه مساوي لمقدار المتجه الأصلي ولكنه معاكس لإتجاهه وهذا يعني أنه المتجه $\vec{A}$ اذا أضيف له متجه سالب $(-\vec{A})$ فإنه $\vec{A} + (-\vec{A}) =$ صفر .



الشكل يمثل سالب المتجه .

Scanned by CamScanner

[٣] ضرب المتجه بكمية قياسية :-

تقسم هذه الخاصة الى حالتين وهما :-

أ- عند ضرب المتجه بكمية قياسية موجبة يختلف مقدار المتجه مع المحافظة على اتجاهه.

ب- عند ضرب المتجه بكمية قياسية سالبة يختلف مقدار المتجه مع اختلاف اتجاهه.

مثال ١ :- صل متساوي المتجهات $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ في كل مما يأتي :-

[١] $\vec{أ}$ = ٦ وحدات ، شمالاً. [٢] $\vec{أ}$ = ٨ وحدات ، ٣٧ شرق الشمال -

$\vec{ب}$ = ٦ وحدات ، ٩٠°. $\vec{ب}$ = ٨ وحدات ، ٥٣ شمال الشرق -

[٣] $\vec{أ}$ = ٤ وحدات ، غرباً. [٤] $\vec{أ}$ = ٥ وحدات ، ٣٧ شرق الشمال.

$\vec{ب}$ = ٦ وحدات ، ١٨٠°. $\vec{ب}$ = ٥ وحدات ، ٣٧ شمال الشرق.

الحل :-

[١] نعم ، لأنه المتجهان لهما نفس المقدار والاتجاه.

[٢] نعم ، لأنه المتجهان لهما نفس المقدار والاتجاه.

[٣] لا ، لأنه المتجهان غير متساويان في المقدار.

[٤] لا ، لأنه المتجهان ليس لهم نفس الاتجاه.

مثال ٢ :- اكتب متجه يساوي كل من المتجهات التالية :-

[١] $\vec{أ}$ = ٥ وحدات ، ٣٧ شرق الشمال. [٢] $\vec{جـ}$ = ٣ وحدات ، ٢٧٠°.

[٣] $\vec{ب}$ = ٦ وحدات ، ٤٠ شرق الجنوب.

الحل :-

[١] $\vec{هـ}$ = ٥ وحدات ، ٥٣° . [٢] $\vec{ع}$ = ٣ وحدات ، جنوباً.

[٣] $\vec{ك}$ = ٦ وحدات ، ٥٠ جنوب الشرق.

Scanned by CamScanner

[٤] جمع المتجهات (عملية تركيبية) :-

ان هذه الخاصية عند جمع متجهين يكون ناتج عند الجمع متجه ثالث (متجه محصل) يختلف مقداره ويختلف اتجاهه باختلاف الزاوية بين المتجهين نطلق على المتجه المحصل بانه حاصل الجمع الاتجاهي لمتجهين أو اكثر .

تذكر :- $\vec{أ} + \vec{ب} \neq أ + ب$

ملاحظة :-

* لا يمكن جمع متجهين أو أكثر منه غير معرفة اتجاه كل منها أو الزاوية بينهما وهذا ما يميز جمع الكميات المتجهة عنه جمع الكميات القياسية .

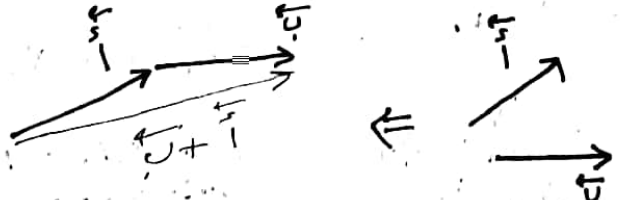
* عملية جمع المتجهات اثناء تطبيقها الحل كلها يجب الالتزام ببعض القواعد والأمور الخاصة حيث بداية :-

١- نختار مقياس رسم مناسب لحساب طوله الكمية المتجهة وتمثيلها بالرسم وليكن $\left\{ \frac{\text{طول}}{\text{مقدار مناسب مع مقدار المتجه}} \right\}$

٢- نرسم طوله المتجهات الواردة في السؤال وذلك باستخدام المسطرة وعليه يجب معرفة طول المتجه من خلال العلاقة التالية :- $\left\{ \text{طول المتجه} = \frac{\text{طول}}{\text{مقدار مناسب مع مقدار المتجه}} \times \text{مقدار المتجه} \right\}$

٣- حاصل الجمع عبارة عن تركيب حيث نرسم المتجه الأول والمتجه الثاني ذيله ينطبق على رأس المتجه الأول .

توضيح $\vec{أ} + \vec{ب}$



Scanned by CamScanner

٤- حسب طول المتجه المحصل باستخدام المسطرة ثم كتابة مقداره من خلال العلاقة التالية :-

طول المحصل = $\frac{\text{١ سم}}{\text{مقدار مناسب مع مقدار المتجه}}$ × طول المتجه

٥- حسب اتجاه المتجه المحصل باستخدام المنقلة .

مثال ٣ :- أوجد سالب المتجه لكل المتجهات التالية :-

[١] $\overleftarrow{أ}$ = ٥ وحدات ، ٣٧° شرق الشمال .
[٢] $\overleftarrow{ب}$ = ٢٠ وحدة ، ٤٠° غرب الجنوب .
[٣] $\overleftarrow{ع}$ = ٥ وحدات ، ١٢٠° .
[٤] $\overleftarrow{هـ}$ = ١٢ وحدة ، ١٨٠°
[٥] $\overleftarrow{د}$ = ٨ وحدات ، ٥٠° غرب الشمال
[٦] $\overleftarrow{جـ}$ = ٣ وحدات ، شمالاً .

الحل :-

[١] $-\overleftarrow{أ}$ = ٥ وحدات ، ٣٧° غرب الجنوب .
[٢] $-\overleftarrow{ب}$ = ٢٠ وحدة ، ٤٠° غرب الشمال .
[٣] $-\overleftarrow{ع}$ = ٥ وحدة ، ١٢٠° شرق الجنوب .
[٤] $-\overleftarrow{هـ}$ = ١٢ وحدة ، جنوباً .
[٥] $-\overleftarrow{د}$ = ٨ وحدات ، ٥٠° شرق الجنوب .
[٦] $-\overleftarrow{جـ}$ = ٣ وحدات ، جنوباً .

مثال :- اذا علمت أن المتجه $\overleftarrow{ع}$ = ٨ وحدات ، جنوباً أوجد ما يأتي :-

[١] $٤\overleftarrow{ع}$ [٢] $-٦\overleftarrow{ع}$ [٣] $\frac{١}{٤}\overleftarrow{ع}$ [٤] $-\frac{١}{٢}\overleftarrow{ع}$ [٥] $١٢\overleftarrow{ع}$ [٦] $-٣\overleftarrow{ع}$

الحل :-

[١] $٤\overleftarrow{ع}$ = ٤ × ٨ = ٣٢ وحدة
ومنه $٤\overleftarrow{ع}$ = ٣٢ وحدة ، جنوباً .

[٢] $-٦\overleftarrow{ع}$ = ٦ × ٨ = ٤٨ وحدة
ومنه $-٦\overleftarrow{ع}$ = ٤٨ وحدة ، شمالاً .

[٣] $\frac{١}{٤}\overleftarrow{ع}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٨ = ٢ وحدة
ومنه $\frac{١}{٤}\overleftarrow{ع}$ = ٢ وحدة ، جنوباً .

[٤] $-\frac{١}{٢}\overleftarrow{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ وحدة
ومنه $-\frac{١}{٢}\overleftarrow{ع}$ = ٤ وحدة ، شمالاً .

Scanned by CamScanner

تابع حل المثال ٤ :-

ب) $\overrightarrow{ع_{٢}} = ٨ \times ٣ = ٢٤$ وحدة

$\overrightarrow{ع_{٢}} = ٢٤$ وحدة ، شمالاً .

ج) $\overrightarrow{ع_{١٢}} = ٨ \times ١٢ = ٩٦$ وحدة

$\overrightarrow{ع_{١٢}} = ٩٦$ وحدة ، جنوباً .

مثال ٥ :- تحركت ناقلة سيارات صافرة ١٢٠ كم شرقاً ثم ١٨٠ كم باتجاه ٣٠ شرق الشمال

أوجد :- أ) المسافة الكلية المقطوعة . ب) الازاحة المحصلة للسيارة .

الحل :-

أ) $ف = ١٢٠ + ١٨٠ = ٣٠٠$ كم

ب) $\overrightarrow{أ} = ١٢٠$ كم شرقاً ، $\overrightarrow{ب} = ١٨٠$ كم ، ٣٠ شرق الشمال

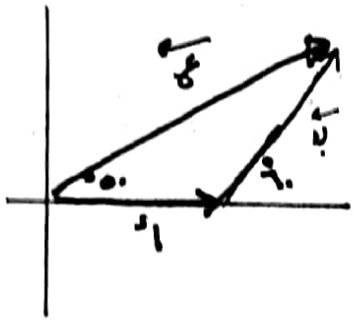
$\overrightarrow{أ} = ١٢٠$ كم ، صفر° $\quad$ $\overrightarrow{ب} = ١٨٠$ كم ، ٦٠°

نأخذ مقياس رسم مناسب لكل المتجهات وهو $\frac{١ سم}{٣٠ كم}$ ولكن حرية الاختيار عزيزي الطالب لمقياس الرسم

ويطبق عند طول كل متجه ونرسمه :-

$|\overrightarrow{أ}| = ١٢٠ كم \times \frac{١ سم}{٣٠ كم} = ٤ سم$

$|\overrightarrow{ب}| = ١٨٠ كم \times \frac{١ سم}{٣٠ كم} = ٦ سم$



نقوم بايجاد محصلة المتجهين عن طريق وذلك من خلال العلاقة التالية

$|\overrightarrow{ع}| = س \times \frac{١ سم}{٣٠ كم}$

$٨ سم = س \times \frac{١ سم}{٣٠ كم}$

$س = ٢٤٠ كم$

ومنه نجد اتجاهه يكون $\theta = ٥٠°$ يتم حسابها بالمنقلة .

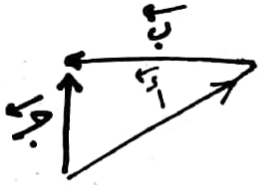
Scanned by CamScanner

تدريب: ذهب احمد الى المدرسة سيراً على الأقدام فقطع الاشارة مقداره ٢٠ كم شرقاً ثم عاد الى منزله فقطع ٣٥ كم ٣٠° شرق الشمال أحسب الازاحة المحصلة للسيارة .

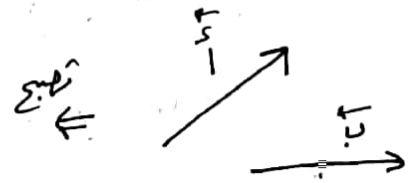
٥) طرح المتجهات :-

لإجراء عملية طرح متجهين مثل $\vec{أ} - \vec{ب}$ نستخدم تعريف سالب المتجه الذي اخذناه سابقاً حيث منه خلالها تصبح عملية الطرح على صورة $\vec{أ} + (-\vec{ب})$ أي نحولها لعملية جمع حيث نقوم بعملية عكس اتجاه المتجه (سالب المتجه) .

مثال توضيحي :- اذا كان لدينا المتجهين $\vec{أ}, \vec{ب}$ كما في الشكل وكان المتجه الناتج منه حاصل الطرح هو $\vec{جـ}$ حيث $\vec{أ} - \vec{ب} = \vec{جـ} \Leftarrow \vec{أ} + (-\vec{ب}) = \vec{جـ}$:



نلاحظ هنا انه تم استخدام خاصية جمع المتجهات لكنه مع عكس اتجاه المتجه $\vec{ب}$



 # ملاحظة :- تطبيقات الحل على خاصية جمع المتجهات نفس التطبيقات على خاصية الطرح لكنه نقوم باستخدام سالب المتجه .

 # مثال آخر :- $\vec{ك} - \vec{هـ} \Leftarrow \vec{ك} + (-\vec{هـ})$

↳ نقلب المتجه بأكمله ليكون معاكس للاتجاه .

Scanned by CamScanner

تمرين ٣ :- هل يمكنه أنه نقد سالب المتجه ناتجاً عند ضرب المتجه بعدد سالب وضح ذلك ؟!

تمرين ٣ :- ما سبب اختلاف مقدار المسافة الكلية عن مقدار الإزاحة الكلية ؟!

تمرين ٤ :- معتمداً على طريقة التركيب السابقة متى يكون المتجه المحصل لعدة متجهات مساوياً للصفر ؟!

تمرين ٥ :- هل يمكنه القول انه $\vec{A} - \vec{B} = \vec{B} - \vec{A}$ ؟!

ملاحظة :-

منه وضا نفه المتجهات (جمع المتجهات) :-

١) تبديلي $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ٢) تجميعي $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

Scanned by CamScanner

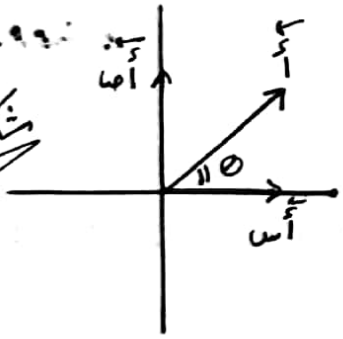
الدرس الثالث: تحليل المتجهات

* تعلمنا مع المتجهات في الدرس السابقة طريقة الرسم وهي طريقة عملية بسيطة لتمثيل المتجه لكنها لا تخلو من الأخطاء بسبب استخدام أدوات القياس وهي ليست عملية عندما نتعامل مع متجهات عدة لذلك سنتعرف على طريقة رياضية جديدة وهي تحليل المتجهات.

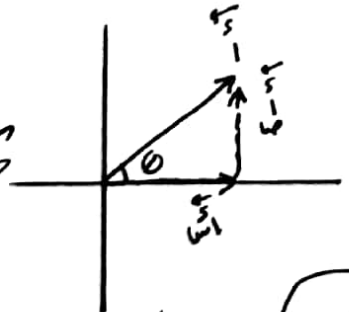
* في هذا الدرس سوف نتعلم طريقة حساب مقدار واتجاه المتجه المحصل اذا كانت لدينا متجهين متعامدين وذلك من خلال ما يعرف بإسم مركبتي المتجه ولتوضيح ذلك نأخذ المتجه $\vec{أ} = \vec{أ}, \theta$ الذي يمكن تمثيله على محورين متعامدين (سيني ، صادي) ...

حيث نقدم تحليل المتجه $\vec{أ}$ الى مركبتين متعامدتين أحدهما تمثل المقطع السيني والأخرى المقطع الصادي حيث المركبة السينية ($\vec{أس}$) والمركبة الصادية ($\vec{أص}$) كما في الشكل رقم (١) نلاحظ انه يمكن نقل المتجه $\vec{أص}$ أو المتجه $\vec{أس}$ الى أي مكان حسب حاجتنا متساوي المتجهين ولكن بشرط أن يكون له نفس المقدار والاتجاه ونختار المتجه $\vec{أص}$ ونقله من موقعه كما في الشكل رقم (٢) وفي هذه الحالة نستخدم متطابقتين المثلثية ونستنتج بعض المتطابقات الهامة :

شكل (١)



شكل (٢)



[١] $جتا\theta = \frac{أس}{أ}$ ومنه $أس = أ\ جتا\theta$ ... المركبة السينية

[٢] $جا\theta = \frac{أص}{أ}$ ومنه $أص = أ\ جا\theta$ ... المركبة الصادية

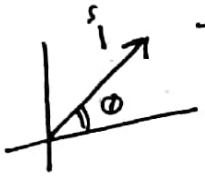
Scanned by CamScanner

وبما أنه هاتين المركبتين تشكلان ضلعي مثلث قائم الزاوية فإن وتره أ فإن:

[1] $\vec{أ} = \sqrt{\vec{أس} + \vec{أص}}$

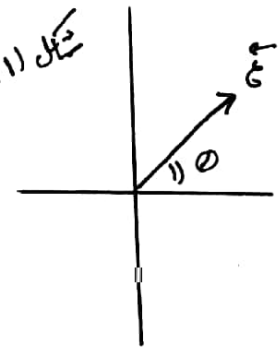
[2] $ظا\theta = \frac{\vec{أص}}{\vec{أس}}$ ومنه $\theta = ظا^{-1}\frac{\vec{أص}}{\vec{أس}}$

* ملاحظة: θ هي زاوية محصورة بين محور السينات الموجب وضلع انتهاء المتجه مثل:

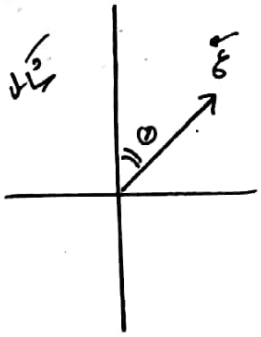


* نلاحظ مما تأخذ بالحسبان أنه المركبة السينية لا تأخذ دائماً $\vec{أس} = \vec{أ} جتا\theta$ والمركبة الصادية لا تأخذ دائماً $\vec{أص} = \vec{أ} جا\theta$ بل نقول بصيغة عامة مطروح ما بتمام الزاوية نأخذ جيب التمام، ومثال توضيحي على ذلك:

شكل (١)



شكل (٢)



- نقوم بتحليل المتجه $\vec{ع}$ في الشكل (١):

$\vec{ع_س} = \vec{ع} جتا\theta$

$\vec{ع_ص} = \vec{ع} جا\theta$

- نقوم بتحليل المتجه $\vec{ع}$ في الشكل (٢):

$\vec{ع_س} = \vec{ع} جا\theta$

$\vec{ع_ص} = \vec{ع} جتا\theta$

* ملاحظة: هنا تم استخدام الصيغة العامة في الحل وليس دائماً نطبق الصيغة العامة عندما يكون المتجه مرسوم بيانياً.

Scanned by CamScanner

مثال: اذا كانت $\vec{أ}$ = ٤ وحدات ، ١٢٠° هي مركبتي المتجه $\vec{أ}$.

الحل:

$\vec{أ_س} = \vec{أ} \times$ جتا θ

$= ٤ \times$ جتا ١٢٠

$= ٤ \times -$ جتا ٦٠

$= -٤$ وحدات

لأن زاوية جتا ١٢٠ في الربع الثاني

$\vec{أ_ص} = \vec{أ} \times$ جا θ

$= ٤ \times$ جا ١٢٠

$= ٤ \times$ جا ٦٠

$= ٢,٤٦$ وحدة

تدريب: اذا كانت $\vec{أ_س} = ٢$ وحدة ، $\vec{أ_ص} = ٢$ وحدة ، $\vec{ب_س} = -٢$ وحدة ، $\vec{ب_ص} = -٢$ وحدة

حدد كل من $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$.

Scanned by CamScanner

* طريقة حساب المتجه المحصل لمتجهات عدة بطريقة التحليل :-

اذا اردنا حساب المتجه المحصل لعدة متجهات فاننا نحلل كل متجه الى مركبتيه ثم نجمع المركبات السينية معاً والمركبات الصادية معاً ونأخذ بعين الاعتبار ما يأتي :-

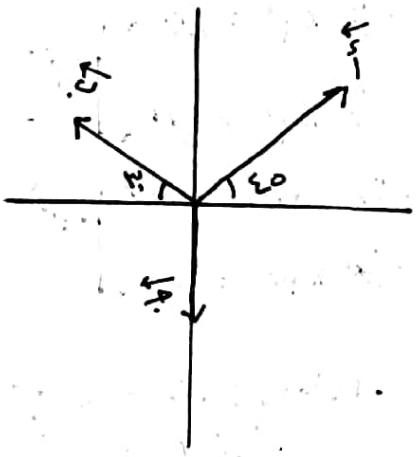
① اذا كانت المتجهات في نفس الاتجاه ← فان :-

$\overrightarrow{م ح} = \overrightarrow{م ١} + \overrightarrow{م ٢}$ والاتجاه نحو أي منهما .

② اذا كانت المتجهات معاكسة الاتجاه ← فان :-

$\overrightarrow{م ح} = \overrightarrow{م كبرى} - \overrightarrow{م صغرى}$ والاتجاه نحو الأكبر .

مثال : أحسب المتجه المحصل للمتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ المرسومة في الشكل المقابل علماً بأن : $\overleftarrow{أ}$ = ٨ وحدات ، $\overleftarrow{ب}$ = ٦ وحدات ، $\overleftarrow{جـ}$ = ٦ وحدات



الحل :

أولاً : نحدد الزوايا التي يصنعها المتجهات مع محور السينات

← $\theta_أ = ٤٥°$ ، $\theta_ب = ٣٠°$ ، $\theta_جـ = ٢٧٠°$

ثانياً : نقوم بتحليل المتجهات الى مركباتها السينية والصادية

← أس = أ × جتا $\theta_أ$ = ٨ × جتا ٤٥ = ٨ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٥,٦٦ وحدة .

أص = أ × جا $\theta_أ$ = ٨ × جا ٤٥ = ٨ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٥,٦٦ وحدة .

← ب س = ب × جتا $\theta_ب$ = ٦ × جتا ٣٠ = ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٥,٢٠ وحدة .

ب ص = ب × جا $\theta_ب$ = ٦ × جا ٣٠ = ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٣ وحدة .

← جـ س = جـ × جتا $\theta_جـ$ = ٦ × جتا ٢٧٠ = ٦ × صفر = صفر وحدة .

جـ ص = جـ × جا $\theta_جـ$ = ٦ × جا ٢٧٠ = ٦ × -١ = -٦ وحدة .

ل س = ٥,٦٦ + -٥,٢٠ + صفر

= ٠,٤٦

ل ص = ٥,٦٦ + ٣ + -٦

= ٢,٦٦

Scanned by CamScanner

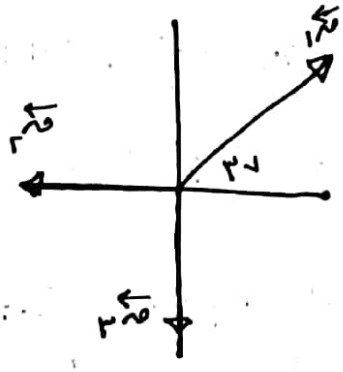
ثالثاً :- نجد محصلة المتجه الكلي ل :-

$$ل = \sqrt{ل_س^2 + ل_ص^2} = \sqrt{(٢٤٫٥)^2 + (٢٦٫٦)^2} = ٣٦٫١٠ \text{ وحدة}$$

رابعاً :- نقوم بحساب محصلة الزاوية θ :-

$$\text{ظا}\theta = \frac{ل_ص}{ل_س} = \frac{٢٦٫٦}{٢٤٫٥} = ١٫٠٨ \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1} ١٫٠٨ = ٤٧٫٦^\circ$$

مثال :- أحسب مقدار القوة المحصلة المؤثرة في الجسم الموضح في الرسم .



ق١ = ٦٠ نيوتن ؛ ق٢ = ٤٠ نيوتن ؛ ق٣ = ٥٠ نيوتن .

الحل :- $\theta_1 = ٣٧^\circ$ ؛ $\theta_2 = ١٨٠ - \theta_1 = ١٤٣^\circ$ ؛ $\theta_3 = ٢٧٠^\circ$

ق١ :
$م_س = م_١ \times \text{جتا}\theta = ٦٠ \times \text{جتا}٣٧ = ٤٨$ نيوتن
$م_ص = م_١ \times \text{جا}\theta = ٦٠ \times \text{جا}٣٧ = ٣٦$ نيوتن

ق٢ :
$م_س = م_٢ \times \text{جتا}\theta = ٤٠ \times \text{جتا}١٨٠ = -٤٠$ نيوتن
$م_ص = م_٢ \times \text{جا}\theta = ٤٠ \times \text{جا}١٨٠ =$ صفر

ق٣ :
$م_س = م_٣ \times \text{جتا}\theta = ٥٠ \times \text{جتا}٢٧٠ =$ صفر
$م_ص = م_٣ \times \text{جا}\theta = ٥٠ \times \text{جا}٢٧٠ = -٥٠$

$م_{ح_س} = ٤٨ + (-٤٠) +$ صفر
$= ٨$ نيوتن

$م_{ح_ص} = ٣٦ +$ صفر $+ (-٥٠)$
$= -١٤$

$$م_ح = \sqrt{م_{ح_س}^2 + م_{ح_ص}^2} = \sqrt{٨^2 + (-١٤)^2} = \sqrt{٦٤ + ١٩٦} = \sqrt{٢٦٠} = ١٦ \text{ نيوتن}$$

$$\text{ظا}\theta = \frac{م_{ح_ص}}{م_{ح_س}} = \frac{١٤}{٨} = ١٫٧٥ \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1} ١٫٧٥ = ٦٠^\circ$$

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

مثال : أوجد المركبات السينية والصادية لكل من المتجهات التالية :-

[1] $\vec{ق} = 10$ نيوتن، $30°$

[2] $\vec{ع} = 16$ م/ث، $60°$

[3] $\vec{ك} = 40$ م/ث²، $45°$

[4] $\vec{أ} = 100$ نيوتن، $\vec{ب} = 120$ نيوتن، $\vec{جـ} = 80$ نيوتن، $60°$، $37°$

الحل :

[1] $ق_س = ق \times جتا\theta$

$= 10 \times جتا 30 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ نيوتن

$ق_ص = ق \times جا\theta$

$= 10 \times جا 30 = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ نيوتن

[2] $ع_س = ع \times جا\theta$

$= 16 \times جا 60 = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 8\sqrt{3}$ م/ث

$ع_ص = ع \times جتا\theta$

$= 16 \times جتا 60 = -8$ م/ث

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

تابع حل المثال في الصفحة رقم (١٩) :-

[٣] ت س = ت × جا ٥
= ٤٠ × جا ٤٥
= ٤٠ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{40}{\sqrt{2}}$ ث/ث

ت ص = ت × جتا ٥
= ٤٠ × جتا ٤٥
= ٤٠ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{40}{\sqrt{2}}$ ث/ث

[٤] أ س = أ × جتا ٣٠
= ١٠٠ × جتا ٣٠ = ١٠٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$
= ٥٠ $\sqrt{3}$ = ٨٦,٦ N

أ ص = أ × جا ٣٠
= ١٠٠ × جا ٣٠ = ١٠٠ × $\frac{1}{2}$
= ٥٠ N

ب س = ب × جتا ٦٠
= ١٢٠ × $\frac{1}{2}$ = ٦٠ N

ب ص = ب × جا ٦٠
= ١٢٠ × جا ٦٠ = ٦٠ $\sqrt{3}$ N

جـ س = جـ × جا ٣٧
= ٨٠ × ٠,٦ = ٤٨ N

جـ ص = جـ × جتا ٣٧
= ٨٠ × ٠,٨ = ٦٤ N

مثال :- اذا كانت أ = ٣ وحدات ، ب = ٤ وحدات أوجد :-
$\vec{A}+\vec{B}$ في الحالات التالية : [١] نفس الاتجاه نحو الشرق . [٢] متعاكسة (أ شرقاً ، ب غرباً) .
[٣] متعامدتان (أ شرقاً ، ب جنوباً) :-

الحل :- [١] عملية الجمع لمتجهتين $\vec{A}+\vec{B}$ يقصد بها الوصلة في حال نفس الاتجاه فإن $\vec{A}+\vec{B}$
٣ + ٤ = ٧ وحدات ، شرقاً

Scanned by CamScanner

تابع حل اسئلة صفحة رقم (٢٠) :-

[٢] $\vec{أ} - \vec{ب} = ٤ - ٣ = ١$ نحو الغرب (١ وحدة ، غرباً)

[٣] $\vec{ك} = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ (٥ وحدات ، ٥٣ جنوب الشرق)

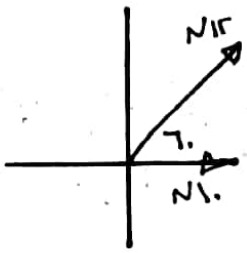
$ظا\theta = \frac{٤}{٣} \leftarrow ظا\theta = \frac{٤}{٣}^{-١}$

مثال : أوجد محصلة كل مما يأتي :

[١] $\vec{ق_١} + \vec{ق_٢}$

$ق_١ = ١٠$ N

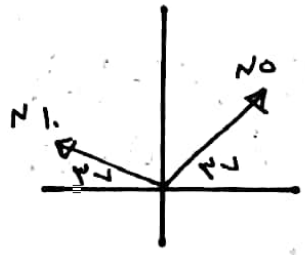
$ق_٢ = ١٢$ N



[٢] $\vec{ق_١} + \vec{ق_٢}$

$ق_١ = ١٥$ N

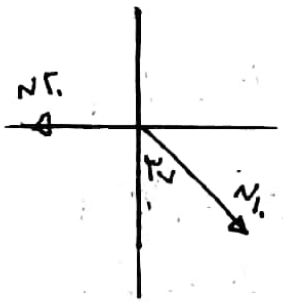
$ق_٢ = ١٠$ N



[٣] $\vec{أ} - \vec{ب}$

$أ = ١٠$ N

$ب = ٢٠$ N

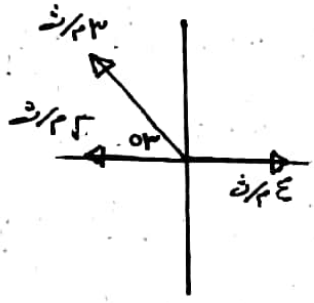


[٤] $\vec{ع_١} + \vec{ع_٢} - ٣\vec{ع_٣}$

$ع_١ = ٤$ م/ث

$ع_٢ = ٣$ م/ث

$ع_٣ = ٢$ م/ث



الحل :

[١] $\vec{ق_١} + \vec{ق_٢}$ = محصلة متجهين متعامدين

$\vec{ق_١}$:

$ق_{١س} = ق_١ \times$ جتا صفر $= ١٠ \times ١ = ١٠$ N

$ق_{١ص} = ق_١ \times$ جا صفر $= ١٠ \times$ صفر $=$ صفر

$\vec{ق_٢}$:

$ق_{٢س} = ق_٢ \times$ جتا $٦٠ = ١٢ \times \frac{١}{٢} = ٦$ N

$ق_{٢ص} = ق_٢ \times$ جا $٦٠ = ١٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٠$ N

$ق_س = ق_{١س} + ق_{٢س} = ١٠ + ٦ = ١٦$ N

$ق_ص = ق_{١ص} + ق_{٢ص} = ١٠ +$ صفر $= ١٠$ N

$ق = \sqrt{ق_س^٢ + ق_ص^٢} = \sqrt{١٠٠ + ٢٥٦} = \sqrt{٣٥٦} = ١٩$ N

$\theta = ظا^{-١}(\frac{١٠}{١٦}) = ٣٢$

Scanned by CamScanner

أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

[٢] $\vec{ق}_1 + \vec{ق}_2 =$ صفر، فهل يمكن تطبيق على $\vec{ق}$

$\vec{ق}_1$: $\vec{ق}_{1س} = ق \times$ جتا٣٧ $= ٥٠ \times ٠٫٨ = ٤٠$ N
$\vec{ق}_{1ص} = ق \times$ جا٣٧ $= ٥٠ \times ٠٫٦ = ٣٠$ N

$\vec{ق}_2$: $\vec{ق}_{2س} = ق \times$ جتا٣٧ $= ١٠٠ \times ٠٫٨ = ٨٠$ N
$\vec{ق}_{2ص} = ق \times$ جا٣٧ $= ١٠٠ \times ٠٫٦ = ٦٠$ N

$\vec{ق}_س = ٤٠ + (-٨٠) = -٤٠$ N

$\vec{ق}_ص = ٣٠ + ٦٠ = ٩٠$ N

$\vec{ق} = \sqrt{٤٠^2 + ٩٠^2}$

$= \sqrt{١٦٠٠ + ٨١٠٠} = \sqrt{٩٧٠٠}$

$ظا\theta = \frac{٩٠}{٤٠} \leftarrow \theta = ظا^{-1}(\frac{٩}{٤}) = ٦٦٫٤°$

[٣] $\vec{أ} - \vec{ب} =$ نقوم بعملية استدام جمع المتجهات مع عكس اتجاه

$\vec{أ} + (-\vec{ب}) = \vec{ق}$

صنا قمنا بعملية استدام طريقة المثلث حيث تم عكس اتجاه المتجه ب في عملية الرسم

$\vec{أ}$: $\vec{أ}_س = أ \times$ جتا٣٧ $= ١٠٠ \times ٠٫٦ = ٦٠$ N
$\vec{أ}_ص = أ \times$ جا٣٧ $= ١٠٠ \times ٠٫٨ = ٨٠$ N

$\vec{ب}$: $\vec{ب}_س = ب \times$ جتا٠ $= ٢٠ \times ١ = ٢٠$ N
$\vec{ب}_ص = ب \times$ جا٠ $= ٢٠ \times ٠ =$ صفر

$\vec{ق}_س = ٦٠ + (-٢٠) = ٤٠$ N

$\vec{ق}_ص = ٨٠ + ٠ = ٨٠$ N

$\vec{ق} = \sqrt{٤٠^2 + ٨٠^2} = ٨٩٫٤$ N

$ظا\theta = \frac{٨٠}{٤٠} \leftarrow \theta = ظا^{-1}(\frac{٨}{٤}) = ٦٣٫٤°$

[٤] يجب اعادة ترتيب الرسم لأنه $\vec{ع}_3$ تعني عكس اتجاه $\vec{ع}_3$

أولاً نقوم بتعديل قيم المتجهات وتصبح :-

$\vec{ع}_1 = ٤$ م/ث نحو الشرق

$\vec{ع}_2 = ٣$ م/ث نحو ٥٣° شمال الغرب

$\vec{ع}_3 = ٢$ م/ث نحو الشرق تم عكس اتجاهها وذلك بسبب اشارة السالب.

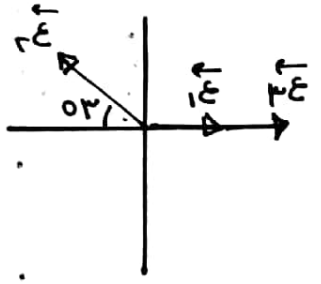
$\vec{ع}_1 = ٤$ م/ث نحو الشرق

$\vec{ع}_2 = ٦$ م/ث نحو ٥٣° شمال الغرب

$\vec{ع}_3 = ٦$ م/ث نحو الشرق.

Scanned by CamScanner

تابع حل السؤال صفحة رقم (٢١) ::



ع١ ← ع١س = ع١ × جتا صفر = ٤ × ١ = ٤ م/ث
ع١ص = ع١ × جا صفر = ٤ × صفر = صفر

ع٢ ← ع٢س = ع٢ × جتا ٥٣° = ٦ × ٠,٦ = ٣,٦ م/ث
ع٢ص = ع٢ × جا ٥٣° = ٦ × ٠,٨ = ٤,٨ م/ث

ع٣ ← ع٣س = ع٣ × جتا صفر = ٦ × ١ = ٦ م/ث
ع٣ص = ع٣ × جا صفر = ٦ × صفر = صفر

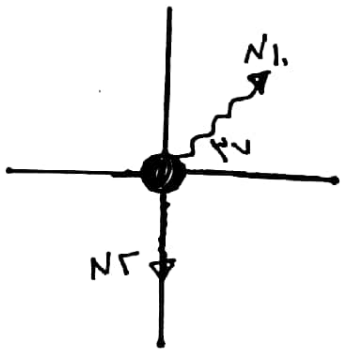
ع س = ٤ + (-٢,٦) + ٦ = ٤,٤ م/ث
ع ص = صفر + ٤,٨ + صفر = ٤,٨ م/ث

ع = √(٤,٤^٢ + ٤,٨^٢) = √٤٢ = ٧ م/ث ؟

ظا θ = ٤,٨ / ٤,٤ ← θ = ظا^-١ (٤,٨ / ٤,٤)

تدريب :: يجري رياضيان حول ملعب دائري كما بالشكل ق س = ٤ م/ث ، ق ص = ٣ م/ث

مثال :: جسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى والشكل المجاور يبين اتجاه اثنين منها فجد مقدار واتجاه القوة الثالثة (التي تتزن الجسم يجب ان تكون محصلة القوى = صفر) .



الحل :
المتجه أ ← أ = ١٠ N ، ٣٧° ، المتجه ب ← ب = ٢ N ، ٢٧٠°

أ ← أس = أ × جتا ٣٧ = ١٠ × ٠,٨ = ٨ N
أص = أ × جا ٣٧ = ١٠ × ٠,٦ = ٦ N

ب ← بس = ب × جتا ٢٧٠ = ٢ × صفر = صفر
بص = ب × جا ٢٧٠ = ٢ × -١ = -٢ N

محص س = ٨ + ٠ = ٨ N ← محص ص = ٦ + -٢ = ٤ N

ق = √(٨^٢ + ٤^٢) = √٨٠ = ٨,٩ N

ظا θ = ٤ / ٨ ← θ = ظا^-١ (٤ / ٨)

(٢٣)

Scanned by CamScanner

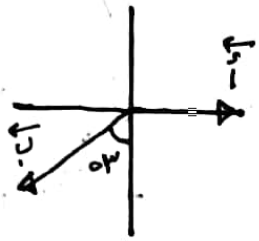
أ. ابراهيم ابوديه
0791839820

تدريب ١ :- من الشكل المجاور :-

$\vec{أ}$ = ٥ وحدات ، شرقاً

$\vec{ب}$ = ١٠ وحدات ، ٥٣ غرب جنوب

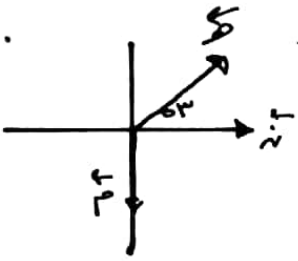
أوجد :- $\vec{أ} + \vec{ب}$



تدريب ٢ :- بالاعتماد على الشكل المجاور والبيانات

أوجد :-

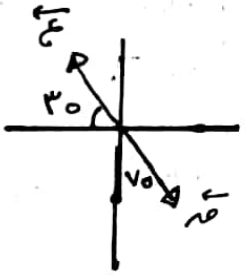
① $\vec{م}$ ٦ ② $-٢\vec{هـ}$ ③ $\frac{٣}{٢}\vec{ن}$



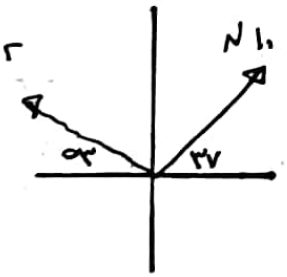
تدريب ٣ :- حلل المتجهات التالية :-

أ) $\vec{هـ}$ = ٥٠ N ، ٧٥ شرق الجنوب

ب) $\vec{ع}$ = ٦٠ كم/ساعة ، ٢٥ شمال الغرب



تدريب ٤ :- في الشكل المجاور أوجد محصلة القوى مقداراً واتجاهاً .



Scanned by CamScanner

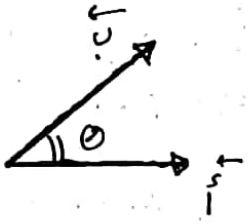
الدرس الرابع : ضرب المتجهات

في هذا الدرس سوف نتناول نوعان من الضرب يمكن اجراؤهما على المتجهات أحدهما ينتج عنه كمية قياسية تطلق عليه الضرب القياسي والآخر ينتج عنه كمية متجه تطلق عليه الضرب المتجهي

١) الضرب القياسي (النقطي) :-

- هو الضرب الناتج من متجهين وينتج منه كمية قياسية حيث اذا كان لدينا $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ مرسومان من النقطة نفسها وبينهما زاوية محصورة θ كما في الشكل

شكل رقم (١)



$\Leftarrow \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ ب \times جتا\theta$

- من اسطة الأمثلة على الضرب القياسي الشغل حيث

الشغل = $ق \times ف \times جتا\theta$

حيث ق : القوة
ف : الازاحة

- تعتمد صحة وإشارة حاصل الضرب القياسي (النقطي) للمتجهين على مقدار الزاوية المحصورة بين المتجهين

- $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

 # ملاحظة : يجب انه يصدر المتجهين من نفس النقطة .

مثال: $\overrightarrow{أ}$ = ٣ وحدات ، شرقاً ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ وحدات ، ٢٧ شمال الشرق

أوجد : ١) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ ٢) $\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

الحل :

١) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ \times ب \times جتا\theta$
$= ٤ \times ٣ \times جتا ٢٧$
$= ١٢ \times ٠,٨$
$= ٩,٦$ وحدة

٢) $\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ} = ب \times أ \times جتا\theta$
$= ٣ \times ٤ \times جتا ٢٧$
$= ١٢ \times ٠,٨$
$= ٩,٦$ وحدة

Scanned by CamScanner

مثال: جسم موضوع على سطح أفقي أثرت فيه قوة مقدارها ٢٠ نيوتن بزاوية ٢٧° مع الأفق فحركته باتجاهها مسافة ٥م أوجد الشغل الذي تبذله القوة.

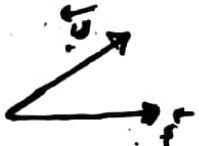
الحل:

الشغل = ق . ف . جتا θ = ٢٠ × ٥ × جتا ٢٧

الشغل = ١٠٠ × ٠٫٨٩ = ٨٠ جول

[٢] الضرب التقاطعي (المتجهي) (X):

- هو الضرب الناتج منه متجهين وينتج منه كمية متجهة حيث $\vec{أ} \times \vec{ب}$ = كمية متجهة حيث اذا كانا المتجهان $\vec{أ}$، $\vec{ب}$ مرسومان من نفس النقطة وبينهما زاوية محصورة θ كما في الشكل



$\Leftarrow \vec{أ} \times \vec{ب} = أ \times ب \times جا\theta$

- منه أبسط الأمثلة على الضرب التقاطعي عزم القوة حيث عزم القوة = $ق \times ف \times جا\theta$

ق : القوة
ف : الإزاحة

- تعتمد صحة وإشارة حاصل الضرب التقاطعي بالتجهين على مقدار واتجاه الزاوية المحصورة بينهما.

- $\vec{أ} \times \vec{ب} \neq \vec{ب} \times \vec{أ}$

+ ملاحظة: يجب أن يصدر المتجهان منه نفس النقطة.

- بما أنه الناتج حصلنا على عملية الضرب كمية متجهة فإننا نستخدم قاعدة اليد اليمنى في تحديد الاتجاه:

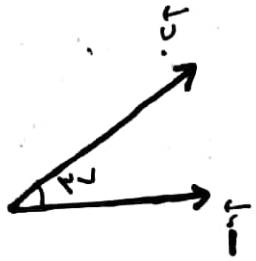
أولاً: الإبهام يشير الى المتجه الأول.
ثانياً: باقي أصابع اليد تشير الى المتجه الثاني
ثالثاً: الخارج من اليد يشير الى الاتجاه أما لداخل الصفحة (X)
أو خارج الصفحة (٠)

Scanned by CamScanner

مثال: لديك المتجهات التالية :-

$\vec{أ}$ = ٥ وحدات ، شمالاً .

$\vec{ب}$ = ٦ وحدات ، ٣٧° شمال الشرق .



أوجد: ① $\vec{أ} \times \vec{ب}$ ② $\vec{ب} \times \vec{أ}$

الحل:

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = أ ب$ جا θ

$= ٥ \times ٦ \times$ جا ٣٧

$= ٣٠ \times$ ٦٠

$= ١٨$ وحدة ، خارج (٠)

② $\vec{ب} \times \vec{أ} = ٦ \times ٥ \times$ جا ٣٧

$= ٣٠ \times$ جا ٣٧

$= ١٨$ وحدة ، داخل (X)

مثال: بالاعتماد على الشكل والبيانات المثبتة عليه أوجد

① $\vec{أ} \times \vec{ب}$ ② $\vec{ب} \times \vec{أ}$

الحل:

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = أ ب$ جا θ

$= ١٠ \times ٨ \times$ جا ١٢٠

$= ٨٠ \times$ جا ١٢٠

$= ٧٠$ وحدة ، خارج (٠)

② $\vec{ب} \times \vec{أ} = ٥ \times ١٠ \times$ جا ١٢٠

$= ٨ \times ١٠ \times$ جا ١٢٠

$= ٧٠$ وحدة ، داخل (X)

Scanned by CamScanner

تدريب ١: اذا كانت لدينا إحدى الخيارات $\vec{أ}$ = ٥٥ وحدات، صفر $\vec{ب}$ = ٤ وحدات، ٦٠° بينهما

في مستوى الورقة أوجد حاصل الضرب :

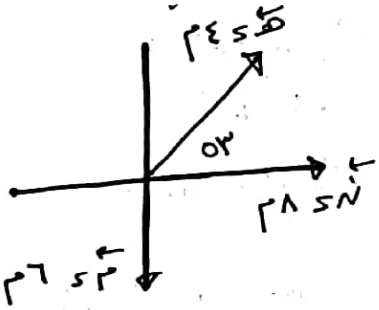
① $\vec{أ} \times \vec{ب}$

② $\vec{ب} \times \vec{أ}$

③ $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

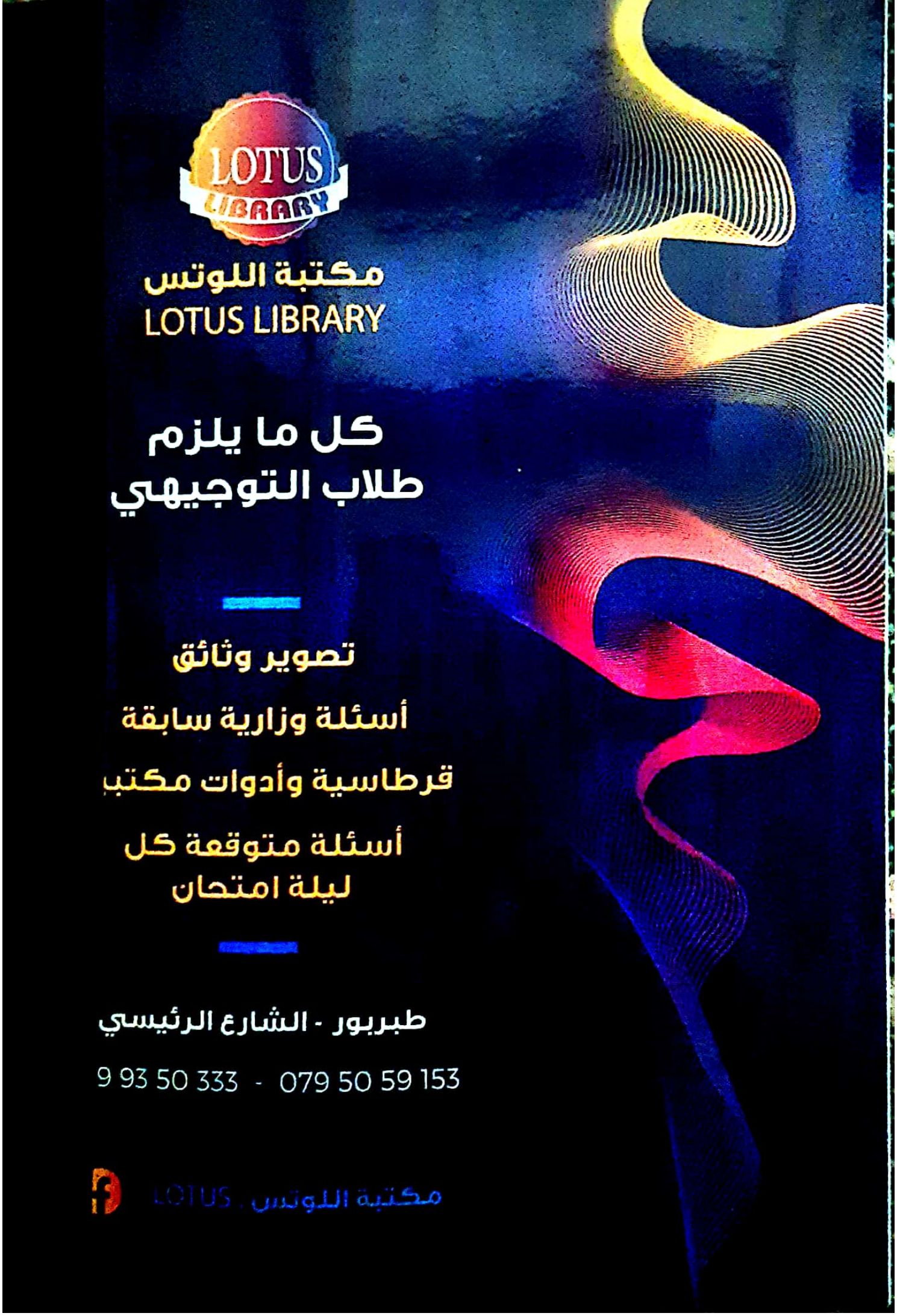
④ $\vec{ب} \cdot \vec{أ}$

تدريب ٢: بالاعتماد على أشكال الأبعاد والمتجهات المتجهة عليه أجب عما يلي :



[أ] $-\vec{ن} \times \vec{م}$ [ب] $\vec{ن} \cdot \vec{هـ}$

Scanned by CamScanner



Scanned by CamScanner