الرياضيات

الصف العاشر

شرح مفصل للمادة

حل أسئلة الكتاب

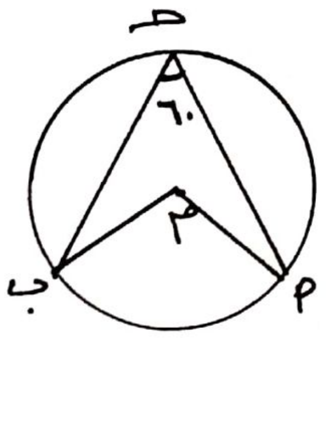
اوراق عمل

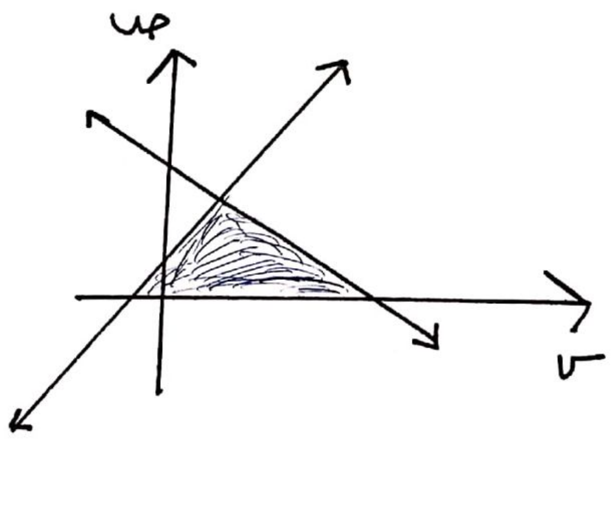
امتحانات شهرية

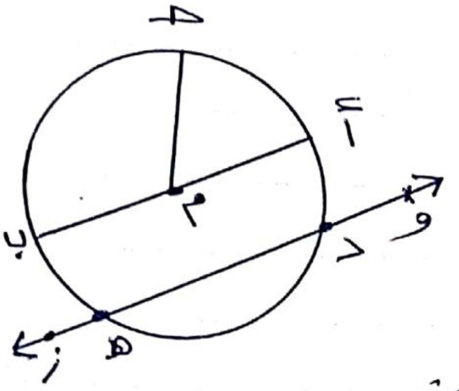
س − ٣ص + ٣ع = −٤

٢س + ٣ص = ع − ١٥

٤س − ٣ص − ع = ١٩







مقدمة :-

١) نصف قطر الدائرة :- هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة ونقطة عليها
ومن الشكل المجاور :- $\overline{مأ}$ ، $\overline{محـ}$ ، $\overline{مب}$

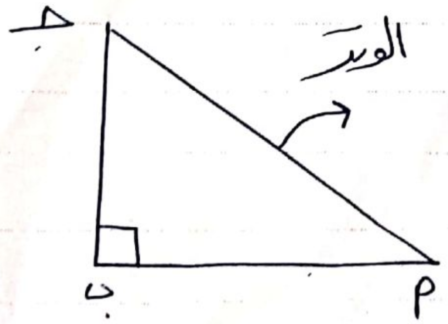
٢) الوتر :- هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة.
من الشكل المجاور :- $\overline{أب}$ ، $\overline{دهـ}$

٣) القطر :- هو وتر الدائرة المار بمركزها
وهو أطول وتر في الدائرة
من الشكل المجاور :- $\overline{أب}$

٤) القاطع :- هو المستقيم الذي يحتوي وتراً في الدائرة
من الشكل المجاور :- $\overleftrightarrow{وز}$

٥) القوس :- هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها
من الشكل المجاور :- $\frown{أحـ}$ ، $\frown{أد}$ ، $\frown{دهـ}$ ، ....

تذكير :- فيثاغورس :-



مربع الوتر = مجموع مربعي ضلعي القائمة

$$(أحـ)^2 = (أب)^2 + (ب حـ)^2$$

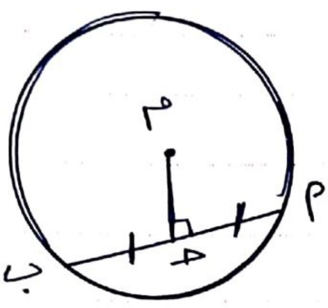
رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

مبرهنة

١) العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ، ينصفه

٢) المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز يعامد الوتر.

٣) العمود المقام من منتصف وتر في الدائرة ، يمر بمركزها.



اهتمام

توضيح

في الشكل الأعلى ، م هـ عمودي على $\overline{أب}$

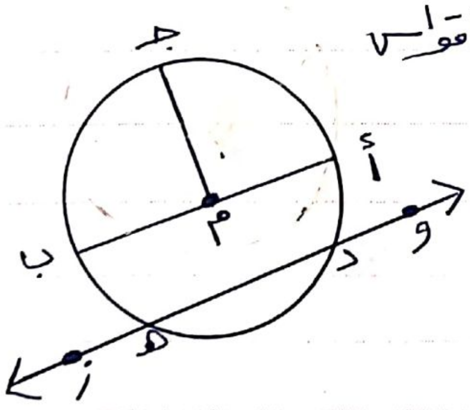
وعليه $\overline{أهـ} = \overline{هـ ب}$

تدريب (١)

يمثل الشكل دائرة مركزها م ، عيّن على هذه الدائرة

١) قطراً ٢) ثلاثة أنصاف أقطار

٣) وترين ٤) قاطعاً ٥) ثلاثة أقواس



الحل :-

١) $\overline{أب}$

٢) $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$

٣) $\overline{أب}$ ، $\overline{د هـ}$

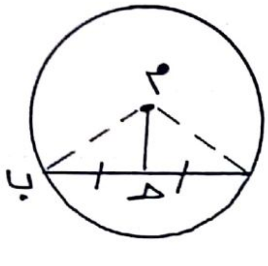
٤) $\overleftrightarrow{و ز}$

٥) $\frown{د هـ}$ ، $\frown{جـ ب}$ ، $\frown{أ هـ}$

تدريب (٣) :

١) برهن أن المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يعامد الوتر.

٢) برهن أن العمود المقام من منتصف وتر في الدائرة يمر بمركزها .



$\perp$: يعامد

الحل :-

١) المعطيات :

$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م

$\overline{أهـ} = \overline{هـ ب}$

المطلوب :

اثبات أن $\overline{مهـ} \perp \overline{أب}$

البرهان :

نصل م أ ، م ب فيتشكل المثلثان م أ هـ ، م هـ ب ولدينا فيه

$\overline{م أ} = \overline{م ب}$ (انصاف اقطار)

م هـ = م هـ (ضلع مشترك)

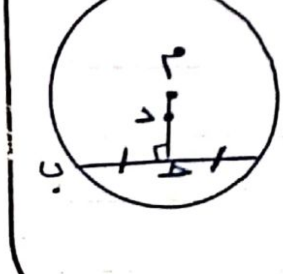
أ هـ = هـ ب (معطيات)

وعليه يتطابق المثلثان ((٣ أضلاع)) وينتج أن :-

ق ∡ م هـ أ = ق ∡ م هـ ب وبما أنهما متجاورتان على خط مستقيم ومجموع قياسهما = ١٨٠° ومنه فإن :-

ق ∡ م هـ أ = ق ∡ م هـ ب = ٩٠°

اذن : $\overline{مهـ} \perp \overline{أب}$ (وهو المطلوب)



٢) المعطيات :

أب وتر في الدائرة مركزها م

$\overline{أهـ} = \overline{هـ ب}$ ، هـ : منتصف $\overline{أب}$

$\overline{د هـ} \perp \overline{أب}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

المطلوب :

اثبات أن دهـ يمر بمركز الدائرة (م)

البرهان :

نصل $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$

بما أن $\overline{دهـ} \perp \overline{أب}$ وينصفه

$\overline{مأ} = \overline{مب}$

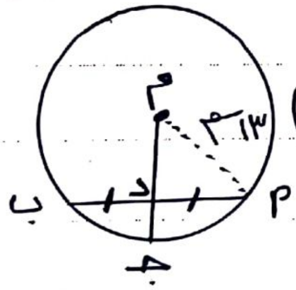
وعليه النقطة م تقع على $\overline{دهـ}$ (أو امتدادها) فهنا دهـ يمر في مركز الدائرة

أمنة صالح

تدريب (٣) :

$\overline{أب}$ وتر في دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ١٣سم $\overline{مهـ}$ نصف قطر في الدائرة ، ينصف الوتر $\overline{أب}$ في النقطة د فإذا كان أب = ١٠سم ، جد دهـ

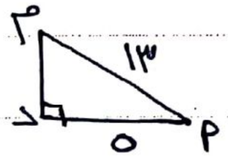
الحل :



مهـ ينصف الوتر أب وعليه $\overline{مد} \perp \overline{أب}$ (مبرهنة)

د : منتصف أب وعليه أد = ٥سم

نطبق فيثاغورس :



$(أم)^2 = (أد)^2 + (مد)^2$

$١٦٩ = ٢٥ + (مد)^2$

$-٢٥ \quad -٢٥$

$(مد)^2 = ١٤٤ \Leftarrow مد = ١٢$سم

مهـ = مد + دهـ

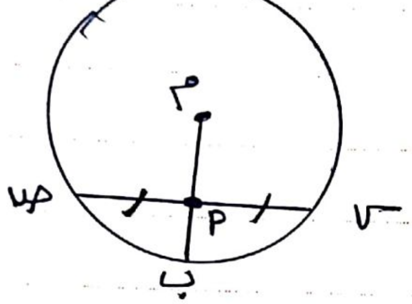
$١٣ = \cancel{١٢} + دهـ \longrightarrow دهـ = ١$سم

$-١٢ \quad \cancel{-١٢}$

... بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

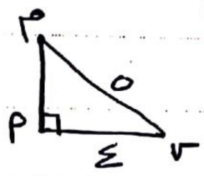
تدريب (٤) :-

$\overline{س ص}$ وتر في دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٥ سم
النقطة ء منتصف $\overline{س ص}$ ، أقيم العمود $\overline{ء ب}$ على $\overline{س ص}$
فقطع الدائرة في النقطة ب على القوس الأصغر $\overline{س ص}$
فإذا كان س ص = ٨ سم فجد ء ب .



الحل :-

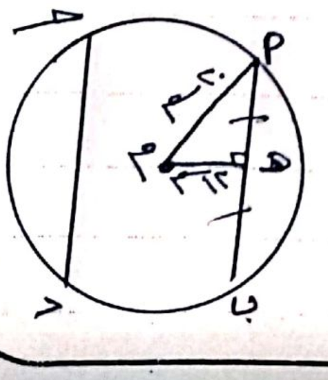
ء منتصف $\overline{س ص}$ وعليه
س ء = ء ص = ٤ سم
نمد ء ب على استقامة من جهة ء
فنجده يمر بمركز الدائرة (مبرهنة)



نطبق فيثاغورس :
(م س)² = (س ء)² + (م ء)²
٢٥ = ١٦ + (م ء)²
-١٦ -١٦
(م ء)² = ٩ ← $\overline{م ء}$ = ٣ سم
$\overline{م ب}$ = $\overline{م ء}$ + $\overline{ء ب}$
٥ = ٣ + $\overline{ء ب}$ ومنه $\overline{ء ب}$ = ٢ سم

تدريب (٥) :-

يمثل الشكل ١٥ إطاراً معدنياً دائرياً الشكل ، طول نصف قطره ٢٠ سم ، أراد ماهر تقويته بإضافة القطعتين المعدنيتين المتوازيتين $\overline{ء ب}$ ، $\overline{حـ د}$ بحيث تبتعد كل منهما عن المركز ١٢ سم
ساعد ماهراً في إيجاد طول كل منهما .



الحل :-

نقوم بإنزال عمود على $\overline{ء ب}$ من م
نطبق فيثاغورس على المثلث ء هـ م وعليه :-

$(أم)^2 = (هـم)^2 + (أهـ)^2$

$٤٠٠ = \cancel{١٤٤} + (أهـ)^2$

$-\cancel{١٤٤} \quad -١٤٤$

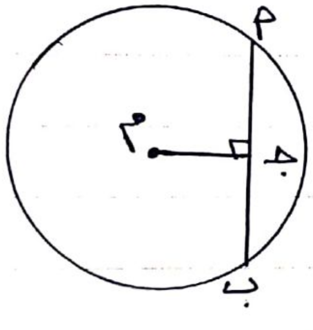
$(أهـ)^2 = ٢٥٦ \leftarrow$ أهـ = ١٦ سم ومنه أب = ١٦×٢ = ٣٢ سم

وبالمثل فان $\overline{هـد}$ = ٣٢ سم.

الأسئلة

١) في الشكل، دائرة مركزها م ، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$.

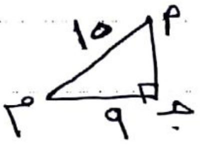
$\overline{مأ}$ = ١٥ سم ، $\overline{مجـ}$ = ٩ سم، جد أب



الحل:-

نصل $\overline{مأ}$ ، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ فان $\overline{أجـ} = \overline{جـب}$

نطبق فيثاغورس على المثلث:



$(أم)^2 = (أجـ)^2 + (جـم)^2$

$٢٢٥ = (أجـ)^2 + \cancel{٨١}$

$-٨١ \quad -\cancel{٨١}$

رافت صافي

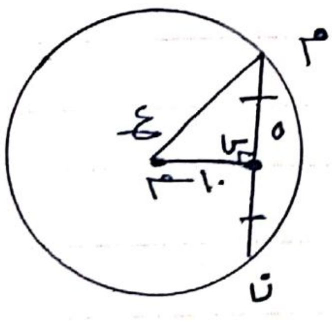
$(أجـ)^2 = ١٤٤ \leftarrow \overline{أجـ}$ = ١٢ سم

∴ أب = ١٢×٢ = ٢٤ سم

٢) $\overline{من}$ وتر في دائرة مركزها ع ، طوله ١٠ سم

النقطة س منتصف $\overline{من}$ فاذا كان ع س = ١٠ سم

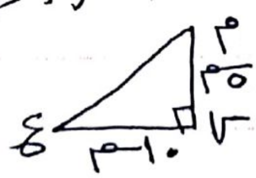
جد طول نصف قطر الدائرة.



الحل:

س منتصف م ن فان ع س ⊥ م ن (مبرهنة)

نطبق فيثاغورس على المثلث

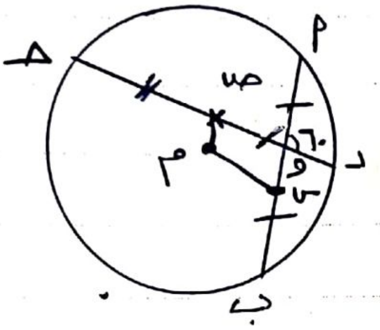


$(مع)^2 = (م س)^2 + (س ع)^2$

$= ٢٥ + ١٠٠ = ١٢٥$

$مع = \sqrt{١٢٥} = \sqrt{٢٥ \times ٥} = ٥\sqrt{٥}$ سم

٣) أب ، حـد وتران في دائرة مركزها م ، غير مارين بالمركز ويتقاطعان في النقطة و ، وإذا كان ق∢أود = ٦٠
وكانت م تقع داخل الزاوية الحادة حـ و ب
س منتصف أب ، ص منتصف حـد ، اثبت أن ق∢ س م ص = ١٢٠°

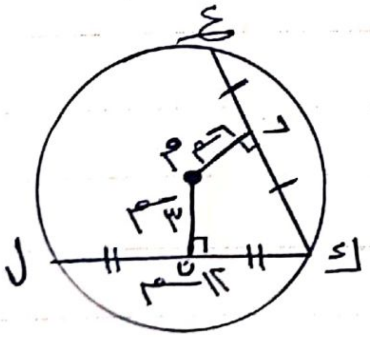


الحل :

س منتصف أب وعليه م س ⊥ أب (مبرهنة)
ومنه ق∢ م س و = ٩٠°
ص منتصف د حـ وعليه م ص ⊥ حـ د
ومنه ق∢ م ص و = ٩٠°
ق∢ ص و س = ق∢ أ و د (تقابل بالرأس)
الشكل الرباعي ص و س م مجموع قياسات زواياه ٣٦٠°
∴ ق∢ س م ص = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠° وهو المطلوب

---

٤) كل وتر في دائرة ، طوله ١٢ سم ويبعد عن مركزها ٣ سم
كع وتر آخر في الدائرة نفسها ، ويبعد عن مركزها
٦ سم ، جد كع .



الحل :-

م ن ⊥ ك ل ← ك ن = ن ل = ٦ سم (مبرهنة)

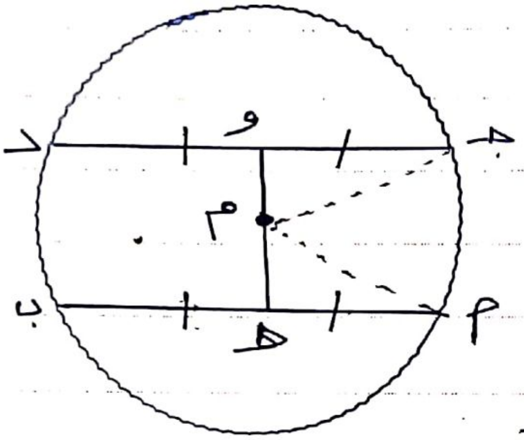
ناخذ المثلث م ك ن
(ك م)² = (ك ن)² + (م ن)²
= ٣٦ + ٩ = ٤٥
ك م = √٤٥ سم (نصف قطر الدائرة)

ناخذ المثلث م د ع :
(ع م)² = (د م)² + (ع د)²
٤٥ = ٣٦ + (ع د)²

$(ع د)^2 = 45 - 36 = 9 \leftarrow ع د = 3$ سم

وعليه ع ك $= 3 \times 2 = 6$ سم

5) أب ، حـ د وتران في دائرة مركزها م ومتساويان في الطول ، أثبت أن لهما بعد نفس عن م



الحل:

المعطيات:

أب ، حـ د وتران في دائرة مركزها م ومتساويان في الطول

المطلوب:

بعد حـ د عن م يساوي بعد أب عن م

البرهان:

ننصف أب بحيث هـ منتصف أب وعليه فان

م هـ $\perp$ أب $\leftarrow$ ق$\measuredangle$ أ هـ م $= 90^\circ$

ننصف حـ د بحيث و منتصف حـ د وعليه فان

م و $\perp$ حـ د $\leftarrow$ ق$\measuredangle$ حـ و م $= 90^\circ$

نبحث تطابق المثلثان حـ م و ، أ م هـ وذلك منه:

ق$\measuredangle$ أ هـ م = ق$\measuredangle$ حـ و م (انصاف اوتار متساوية)

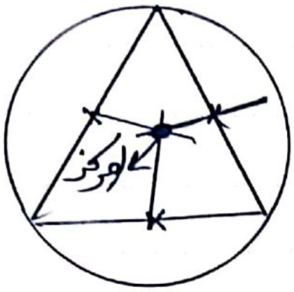
هـ أ = حـ و لانه حـ د = أب

م أ = م حـ (انصاف أقطار)

وعليه يتطابق المثلثان (ضلعان وزاوية)

ومنه م و = م هـ وهو المطلوب

٦) اعتماداً على المبرهنة (٢-١)، كيف تحدد مركز دائرة تمر برؤوس المثلث س ص ع؟

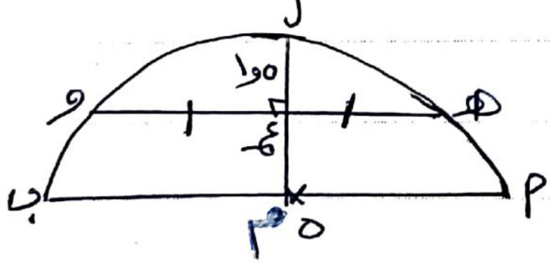


الحل: ننصف أضلاع المثلث وهي تمثل أوتاراً في الدائرة، ثم ننشئ أعمدة من هذه المنصفات فتكون نقطة التلاقي هذه المنصفات هي مركز الدائرة المار برؤوس المثلث

---

٧) نافذة مسجد مصممة على شكل قوس دائرة طول قطرها ٥ أمتار، فإذا كان ارتفاع قوس النافذة فوق منتصف قاعدتها يساوي ١و٥ متراً جد عرض قاعدة النافذة.

الحل:



هو قاعدة النافذة

ع ل ارتفاع النافذة

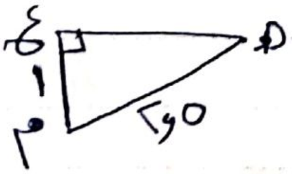
صل م ه بحيث:

أم = ٢و٥

م ل = ٢و٥ (نصف قطر)

ع م = ل م − ل ع = ٢و٥ − ١و٥ = ١ م

نطبق فيثاغورس على المثلث م ه ع



(ه م)^2 = (ه ع)^2 + (ع م)^2

٦و٢٥ = (ه ع)^2 + ١

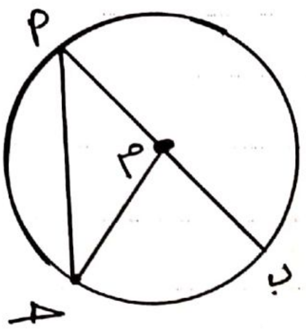
(ه ع)^2 = ٦و٢٥ − ١ = ٥و٢٥

ه ع = $\sqrt{\text{٥و٢٥}}$ م

وعليه هو = ٢ × $\sqrt{\text{٥و٢٥}}$ م

ورقة عمل

١) في الشكل المجاور ، دائرة مركزها م عيّن :



أ) ٣ أنصاف أقطار

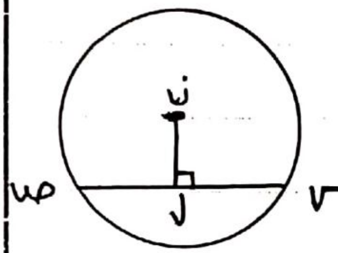
ب) وتر

ج) ٣ أقواس

د) قطر

[illegible]

٢) في الشكل المجاور ، دائرة مركزها (ن)



نل ⊥ س ص اذا كان $\overline{\text{نل}}$ = ٥ سم

$\overline{\text{ن ص}}$ = ١٣ سم جد $\overline{\text{س ص}}$

$\boxed{٢٤}$

٣) $\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة طوله ١٦ سم ، د : منتصف أب

اذا كان م د = ٦ سم ، جد طول قطر الدائرة حيث م : مركز الدائرة

$\boxed{٢٠}$

٤) $\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة طوله ٢٤ سم ويبعد عن مركزها ٥ سم

جـ د وتر آخر في نفس الدائرة ويبعد عن مركزها ١٢ سم

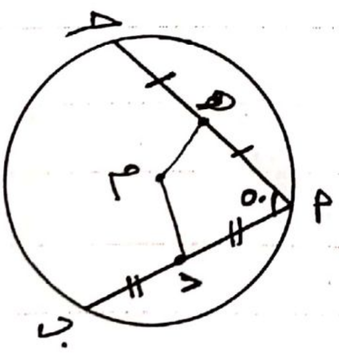
جد طول جـ د

$\boxed{١٠}$

٥) جد ق∠ هـ م د

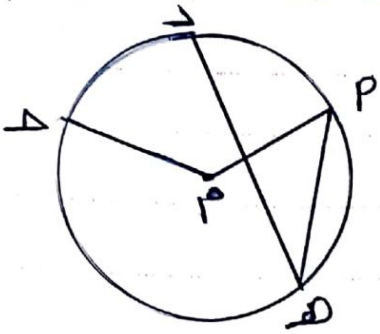
في الشكل المجاور ، م : مركز الدائرة

(مجموع قياسات الشكل الرباعي = ٣٦٠°)



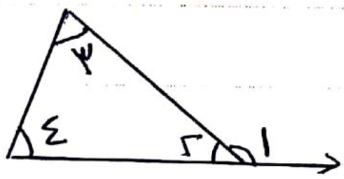
$\boxed{١٣٠}$

أ. ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٨٢٤٤٦٤

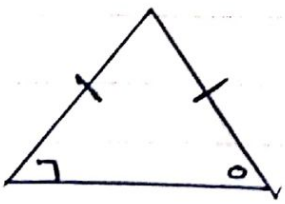


مقدمة :-
الزاوية ؟م د يقع رأسها في مركز الدائرة وضلعاها انصاف أقطار ومرسومة على القوس ؟ د جـ
أما الزاوية ؟ هـ د يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتريين مرسومة على القوس ؟ د

تعريف :-
١) الزاوية المركزية :- هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة وضلعاها يحتويان انصاف أقطار
٢) الزاوية المحيطية :- هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة وضلعاها يحتويان وتريين في الدائرة

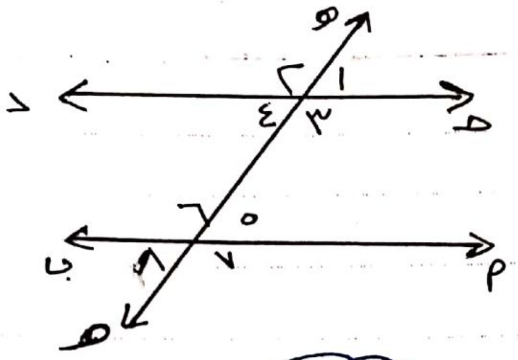


معلومات سابقة
١) مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°
حيث ∢٢ + ∢٣ + ∢٤ = ١٨٠°
٢) ∢١ تسمى زاوية خارجة المثلث وقياسها يساوي مجموع قياس الزاويتان الداخليتان للمثلث (غير المجاورة)
حيث ∢١ = ∢٣ + ∢٤



٣) المثلث المتطابق الضلعان ، زوايا القاعدة متساوية
ق ∢٥ = ق ∢٦

٤) $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ مستقيمان متوازيان
$\overleftrightarrow{هـو}$ قطع المستقيمان :

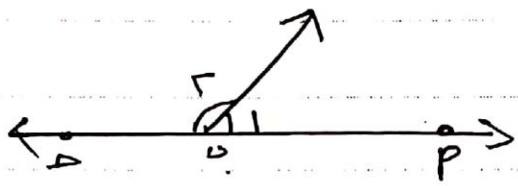


∢١ = ∢٥
∢٣ ، ∢٧
∢٢ ، ∢٦ تناظراً
∢٤ ، ∢٨

∢٣ + ∢٥ = ١٨٠ تحالف
∢٤ + ∢٦ = ١٨٠ تحالف
∢٣ = ∢٦ تبادل وكذلك ∢٥ = ∢٤ تبادل

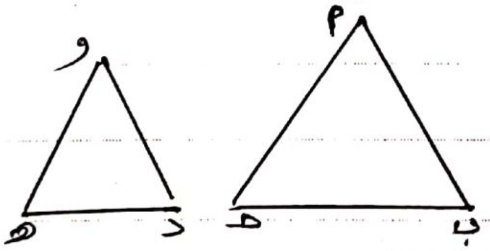
رأفت صافي

٥) ∢ أ ب جـ مستقيمة
وقياسها ١٨٠ وعليه



ق ∢١ + ق ∢٢ = ١٨٠

٦) يتشابه المثلثان عند تساوي زاويتان متناظرتان
بالقياس وينتج من تشابه تناسب
الأضلاع $\frac{أب}{ود} = \frac{بجـ}{دهـ} = \frac{أجـ}{وهـ}$

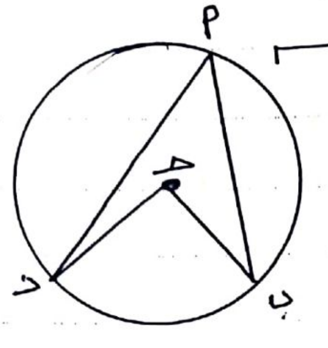


٧) يتطابق مثلثان ، عند تساوي الأضلاع المتناظرة وكذلك تساوي
ضلعان وزاوية

٨) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠

مبرهنة (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه

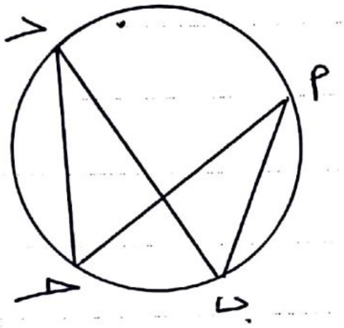


ق ∢ ب م د = ٢ × ق ∢ ب أ د

حيث الزاويتان مرسومتان على نفس القوس ب د

دفتر صافي

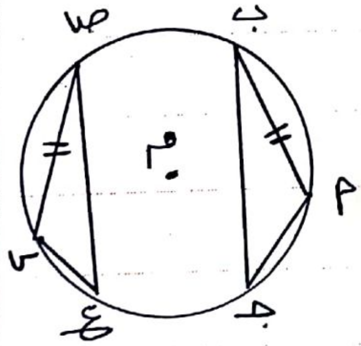
مبرهنة (٢)



الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

ق ∢ ب أ جـ = ق ∢ ب د جـ

ملاحظة :-

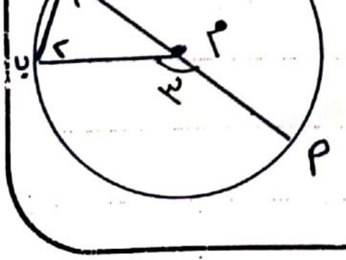


الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة (وأقواس متطابقة) تتساوى في القياس.

ق ∢ أ جـ ب = ق ∢ س ع ص

تدريب (١) :-

أثبت المبرهنة (٢-٢) ، إذا كان أحد ضلعي الزاوية المحيطية قطراً في الدائرة ، كما في الشكل



الحل :-

المعطيات :-

أ جـ قطر في دائرة مركزها م

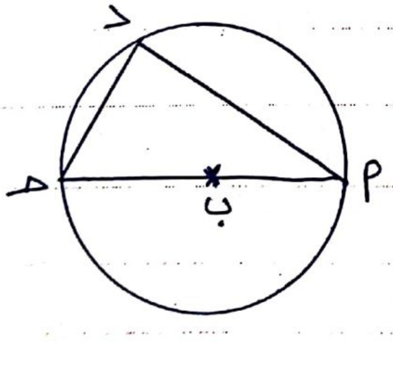
∢ جـ م ب مركزية ، ∢ أ جـ ب محيطية

المطلوب:
اثبات أن ق ∢ م م ب = ٢ × ق ∢ م ـ ب

البرهان
المثلث م ب جـ فيه م جـ = م ب (انصاف اقطار)
وعليه المثلث متطابق الضلعين
ق ∢ ١ = ق ∢ ٢ (زاويتا القاعدة متساويتان)
ق ∢ ٣ = ق ∢ ١ + ق ∢ ٢ (زاوية خارجة للمثلث)
لكن قياس لزاوية ١ = س وعليه
ق ∢ ٣ = ٢ س
وعليه ق ∢ ٣ = ٢ × ق ∢ ١
∴ ق ∢ م م ب = ٢ × ق ∢ م ـ ب

رافت صافي

تدريب (٢)
٤) اثبت ان الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة.



المعطيات
م ـ قطر في دائرة مركزها ب
∢ م د ـ محيطية

المطلوب
اثبات ان ق ∢ م د ـ = ٩٠°

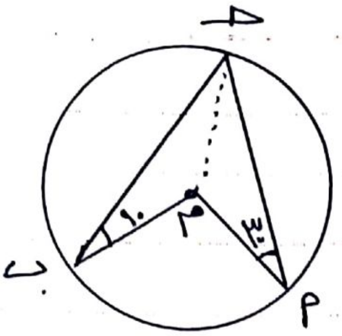
الاثبات
ق ∢ م ب ـ = ١٨٠ لا زاوية مستقيمة وهي مركزية
∢ م د ـ مرسومة على القوس م ـ وكذلك الزاوية المركزية م ب ـ وعليه
ق ∢ م ب ـ = ٢ × ق ∢ م د ـ (المبرهنة)
١٨٠ = ٢ × ق ∢ م د ـ ومنه ق ∢ م د ـ = ٩٠°

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤

تدريب (٣)

يمثل الشكل دائرة مركزها م

جد ق $\angle$ أ م ب



الحل :-

نصل م جـ وعليه المثلث

ب م جـ متطابق الضلعين

ومنه ق $\angle$ م جـ ب = 10°

وايضاً المثلث أ م جـ متطابق

الضلعين ومنه ق $\angle$ م جـ أ = 30°

رافت صافي

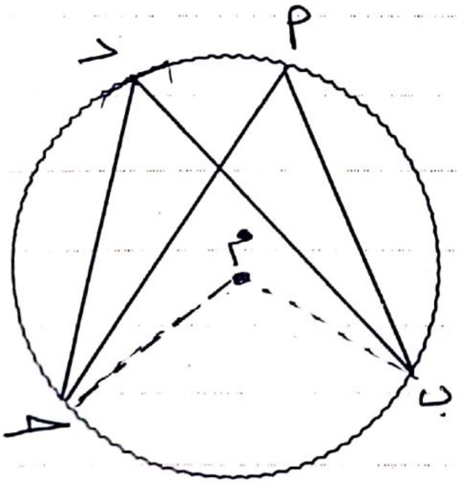
$\therefore$ ق $\angle$ أ جـ ب = ١٠ + ٣٠ = 40°

ق $\angle$ أ م ب = ٢ × ق $\angle$ أ جـ ب (مبرهنة)

= ٢ × ٤٠ = 80°

تدريب (٤)

اثبت المبرهنة (٢-٣)



الحل :-

المعطيات :-

$\angle$ ب أ جـ ، $\angle$ ب د جـ محيطيتان

مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

المطلوب :-

اثبات ان ق $\angle$ ب د جـ = ق $\angle$ ب أ جـ

الاثبات :-

صل م ب ، م جـ

ق $\angle$ ب أ جـ = $\frac{1}{2}$ × ق $\angle$ ب م جـ (مبرهنة) ——— ①

ق $\angle$ ب د جـ = $\frac{1}{2}$ × ق $\angle$ ب م جـ (مبرهنة) ——— ②

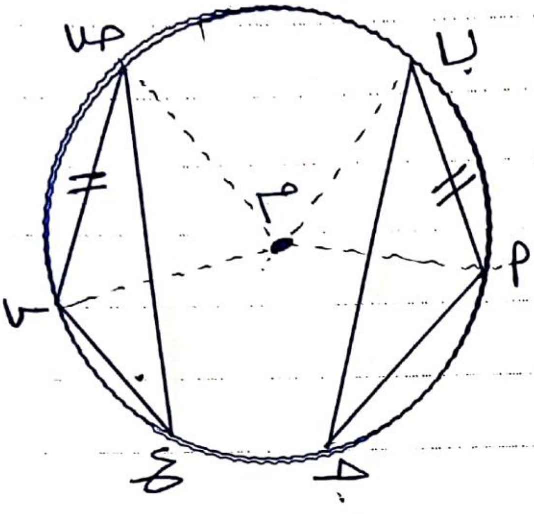
من ① ، ② نستنتج ان ق $\angle$ ب أ جـ = ق $\angle$ ب د جـ

تدريب (٥) :

يمثل الشكل ، دائرة مركزها م ، أب = س ص

أثبت أن ق ∡ أهـب = ق ∡ صعس

الحل :-



المعطيات :-

أب = س ص ، م : مركز الدائرة

المطلوب :-

اثبات أن ق ∡ أهـب = ق ∡ صعس

الاثبات

نصل م أ ، م ب ، م س ، م ص

المثلثان م أ ب ، م س ص :

م أ = م س (انصاف أقطار)

م ب = م ص (انصاف أقطار)

أ ب = ص س (معطى)

وعليه يتطابق المثلثان بثلاثة اضلاع

∴ ق ∡ أ م ب = ق ∡ س م ص ——— (١)

لكن :-

ق ∡ أهـب = $\frac{1}{2}$ ق ∡ أ م ب (مبرهنة) ——— (٢)

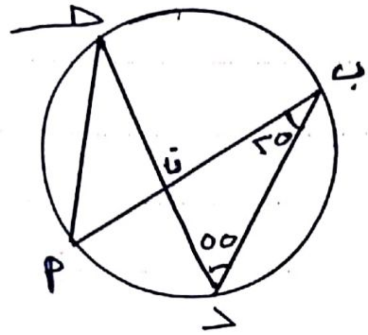
ق ∡ صعس = $\frac{1}{2}$ ق ∡ س م ص (مبرهنة) ——— (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ نستنتج أن :

ق ∡ أهـب = ق ∡ صعس

تدريب (٦) :

في الشكل ، قال عبدالرحمن بأن $ق∢$ جـ ن أ = ٧٠° هل توافق عبدالرحمن أم لا ؟ برر اجابتك



الحل :-

$ق∢$ د ب أ = $ق∢$ د جـ أ (محيطيتان على نفس القوس)

= ٢٥

$ق∢$ ب د جـ = $ق∢$ ب أ جـ = ٥٥° (محيطيتان على نفس القوس)

في المثلث جـ ن أ فان :.

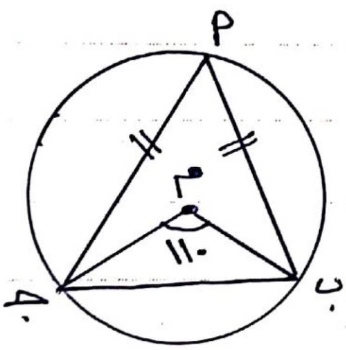
$ق∢$ جـ ن أ = ١٨٠ − (٢٥ + ٥٥) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠

الاسئلة

١) في الشكل ، دائرة مركزها م ، أب = أجـ جد قياس كل من :-

أ) ∢ ب أ جـ

ب) ∢ أ ب م



رافت صافي

الحل :-

المثلث م ب جـ متطابق الضلعين

$ق∢$ م ب جـ = $ق∢$ م جـ ب = $\frac{٧٠}{٢}$ = ٣٥°

$ق∢$ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ $ق∢$ ب م جـ (محيطية ومركزية على نفس القوس)

= $\frac{١}{٢}$ × ١١٠ = ٥٥°

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

$ق∢$ أ ب جـ = $ق∢$ أ جـ ب = $\frac{١٢٥}{٢}$ = ٦٢٫٥°

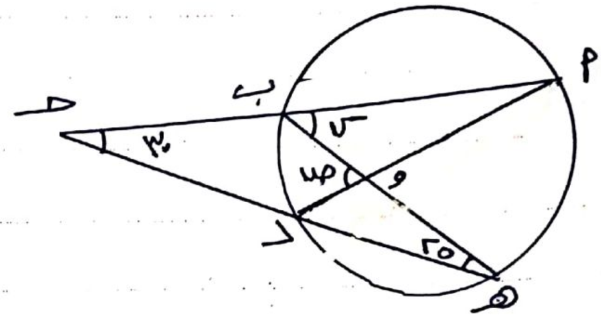
∴ $ق∢$ أ ب م = $ق∢$ أ ب جـ − $ق∢$ م ب جـ

= ٦٢٫٥ − ٣٥

= ٢٧٫٥°

بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤
رافت ابراهيم صافي

٢) في الشكل ، جد قياس كل من س ، ص :



دامت جهودكم

الحل : المثلث ب هـ جـ :

ق∡ هـ ب جـ = ١٨٠ − (٢٥ + ٣٠) = ١٢٥°

س = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥° (متجاورتان على خط مستقيم)

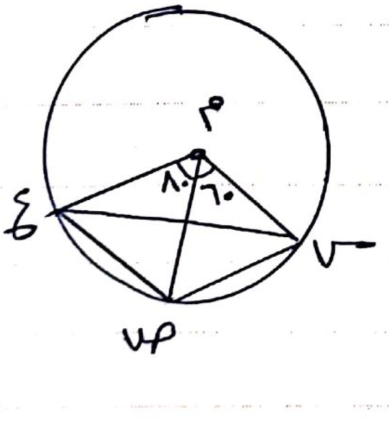
أو حل آخر س = ٢٥ + ٣٠ = ٥٥° (زاوية خارجية للمثلث)

ق∡ د أ ب = ق∡ د هـ ب = ٢٥° (محيطيتان على نفس القوس)

ص = ق∡ د أ ب + س = ٢٥ + ٥٥ = ٨٠° (زاوية خارجية للمثلث)

---

٣) في الشكل ، دائرة مركزها م ، أحسب قياسات زوايا المثلث س ص ع :



الحل :

ق∡ ص ع س = ½ ق∡ س م ص (محيطية ومركزية على نفس القوس)

= ½ × ٦٠ = ٣٠°

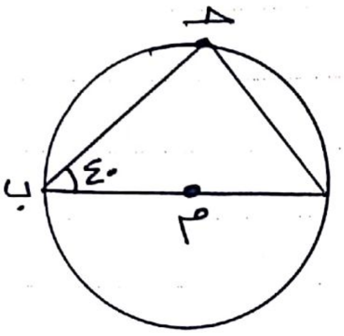
ق∡ ص س ع = ½ ق∡ ص م ع (محيطية ومركزية على نفس القوس)

= ½ × ٨٠ = ٤٠°

ق∡ س ص ع = ١٨٠ − (٣٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

٤) أب قطر في دائرة م، جـ نقطة على الدائرة م بحيث أن: ق∡أب جـ = ٤٠° جد قياس ∡ب أ جـ

الحل:



ق∡أ م ب = ١٨٠° (مركزية)

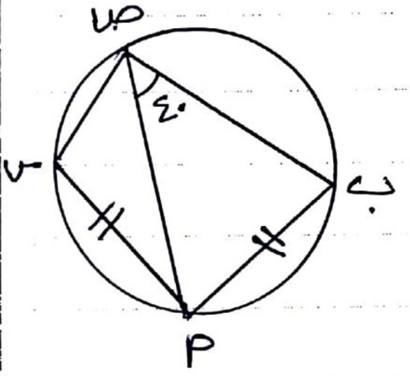
ق∡أ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ ق∡أ م ب (مركزية ومحيطية)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠ = ٩٠°

ق∡ب أ جـ = ١٨٠ − (٤٠ + ٩٠) = ٥٠°

---

٥) في الشكل، أب = أس، جد ق∡س ص ب



الحل:

ق∡أ ص س = ق∡ب ص أ = ٤٠° (محيطيتان على وترين متطابقين)

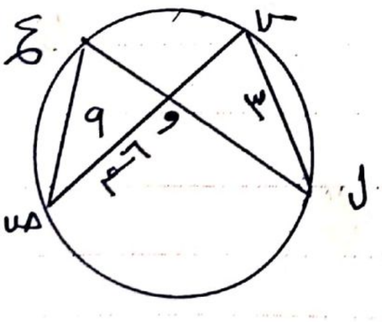
∴ ق∡س ص ب = ق∡أ ص س + ق∡ب ص أ

= ٤٠ + ٤٠ = ٨٠°

---

٦) س ص، ع ل وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و بحيث أن ع ص = ٩ سم، ص و = ٦ سم، س ل = ٣ سم

جد طول ل و



الحل:

المثلثان ع و ص، س و ل:

ق∡س ل ص = ق∡س ص ع (محيطيتان على نفس القوس)

ق∡ل س ص = ق∡ل ع ص (محيطيتان على نفس القوس)

ق∡س و ل = ق∡ع و ص (تقابل بالرأس)

وعليه المثلثان متشابهان، وينتج:

$\frac{ول}{وص} = \frac{سل}{عص}$ ← $\frac{ول}{٦} = \frac{٣}{٩}$ تبادلياً ← ٩ × ول = ٦ × ٣

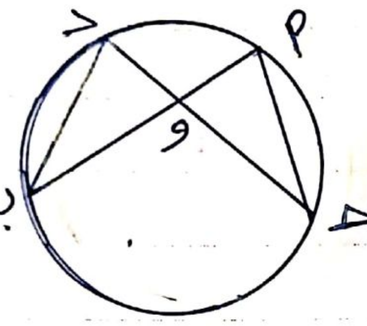
ول = $\frac{١٨}{٩}$ = ٢ سم

٧) أب ، جـ د وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و :

١) أثبت أن وأ × وب = وجـ × ود

٢) اذا كان وأ = ٤سم ، وب = ٦سم ، ود = ١٢سم
جد قيمة كل من وجـ ، جـ د

٣) اذا كان وأ = ٣سم ، وب = ٦سم ، جـ د = ١١سم
جد قيمة كل من وجـ ، ود .



الحل :-

١) في المثلثان جـ أ و ، د و ب فيهما

ق∡ جـ أ ب = ق∡ جـ د ب (محيطيتان على نفس القوس)

ق∡ أ جـ د = ق∡ أ ب د (محيطيتان على نفس القوس)

ق∡ أ و جـ = ق∡ د و ب (تقابل بالرأس)

المثلثان متشابهان وينتج من تشابه :

$\frac{\text{وأ}}{\text{ود}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{وب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دب}}$ ⟵ وأ × وب = ود × جـ و

٢) من تشابه ⟵ $\frac{٤}{١٢} = \frac{\text{جـ و}}{٦}$ تبادلي

٢٤ = ١٢ × جـ و ⟵ جـ و = $\frac{٢٤}{١٢}$ = ٢سم

جـ د = جـ و + ود = ٢ + ١٢ = ١٤سم

٣) من تشابه $\frac{\text{وأ}}{\text{ود}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{وب}}$

جـ د = جـ و + ود
١١ = جـ و + ود
لنفترض ود = س
١١ = جـ و + س
جـ و = ١١ − س

$\frac{٣}{\text{ود}} = \frac{\text{جـ و}}{٦}$

$\frac{٣}{\text{س}} = \frac{١١ - \text{س}}{٦}$ تبادلي

١١س − س² = ١٨ نرتب

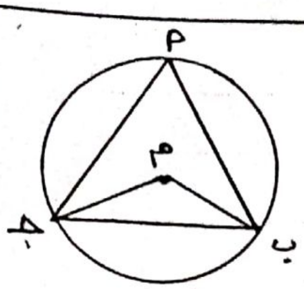
س² − ١١س + ١٨ = ٠

(س − ٩)(س − ٢) = ٠ ⟵ س = ٩ ، س = ٢

عند س = ٩ ⟵ ود = ٩سم ، جـ و = ١١ − س = ١١ − ٩ = ٢سم

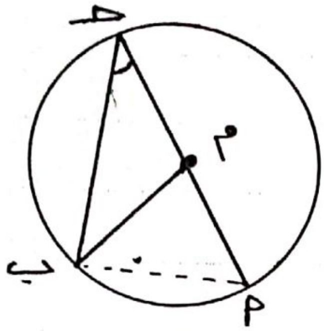
عند س = ٢ ⟵ ود = ٢سم ، جـ و = ١١ − س = ١١ − ٢ = ٩سم

ورقة عمل



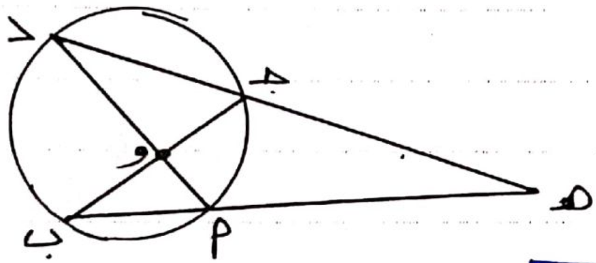
١) جد قياس ∢ ب أ جـ ، ∢ أ ب جـ حيث
ق ∢ ب م جـ = ١٢٠ ، ق ∢ أ جـ م = ٥٠
حيث م : مركز الدائرة

$\boxed{٦٠}$ ، $\boxed{٤٠}$



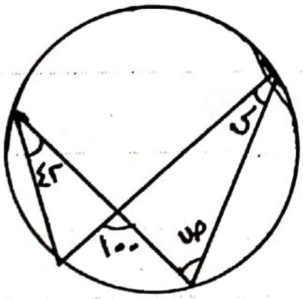
٢) في الشكل المجاور جد
قياس ∢ أ م ب حيث ق ∢ م جـ ب = ٣٣°
م: مركز الدائرة

$\boxed{٥٧}$



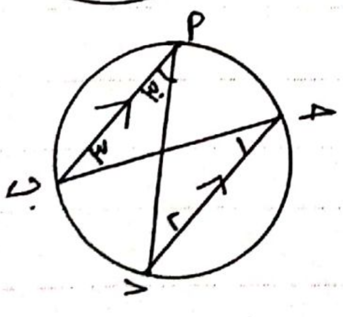
٣) في الشكل المجاور اذا علمت
ان ق ∢ د هـ ب = ٢٥
ق ∢ هـ ب أ = ٢٠ جد
قياس كل من ∢ د أ ب ، ∢ د و ب

$\boxed{٤٥}$ ، $\boxed{٦٥}$



٤) في الشكل المجاور ، جد
قيمة س ، ص

$\boxed{٤٢}$ ، $\boxed{٥٨}$

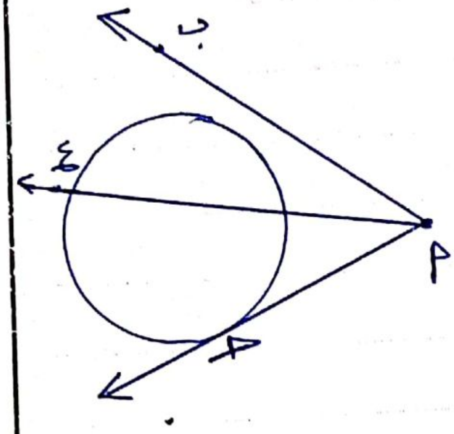


٥) أ ب // جـ د جد قياس
الزوايا المرقمة ١ ، ٢ ، ٣

$\boxed{٣٠}$ ، $\boxed{٣٠}$ ، $\boxed{٣٠}$

أولاً :

مماسات الدائرة



مقدمة :

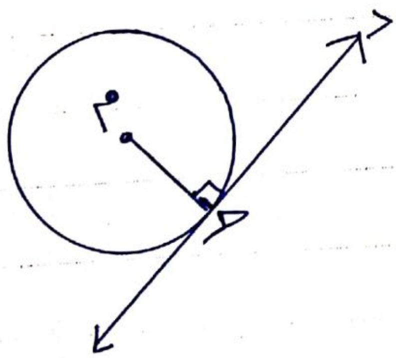
أ نقطة خارج الدائرة، عند رسم مستقيم يمر بالنقطة أ، توجد ثلاث احتمالات :

١) المستقيم أب خارج الدائرة ولا يقطعها

٢) المستقيم أع يقطع الدائرة في نقطتين حيث يسمى (قاطعاً) للدائرة

٣) المستقيم أهـ يقطع الدائرة في نقطة واحدة ويسمى (مماساً) للدائرة وتسمى النقطة هـ (نقطة التماس)

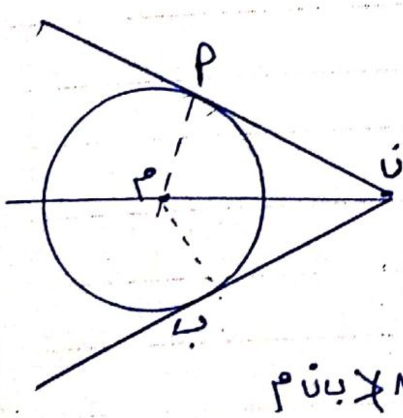
مبرهنة (١)



مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

م هـ ⊥ د هـ

مبرهنة (٢) :



اذا رسم مماسان لدائرة مركزها (م) من نقطة خارجها مثل ن وكانت نقطتا التماس هما أ، ب فإن :-

١) ن أ = ن ب

٢) م ن ينصف الزاوية بين المماسين ق∠أ ن م = ق∠ب ن م

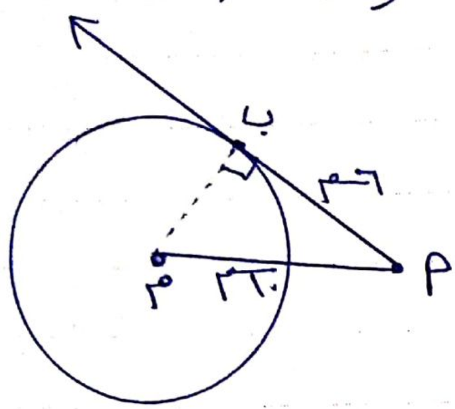
٣) م ن ينصف الزاوية بين نصفي القطرين ق∠أ م ن = ق∠ن م ب

تدريب (١) :-

$\overleftrightarrow{ن ٩}$ يمس دائرة مركزها م عند النقطة ب

٩ب = ٦سم ، ٩م = ١٠سم

جد طول قطر الدائرة



الحل :-

م ب ⊥ ٩ب (مبرهنة)

ق ∡ ٩ب م = ٩٠°

المثلث ٩ ب م قائم الزاوية :-

$(٩م)^٢ = (٩ب)^٢ + (ب م)^٢$

$١٠٠ = ٣٦ + (ب م)^٢$

$-٣٦ \quad \cancel{-٣٦}$

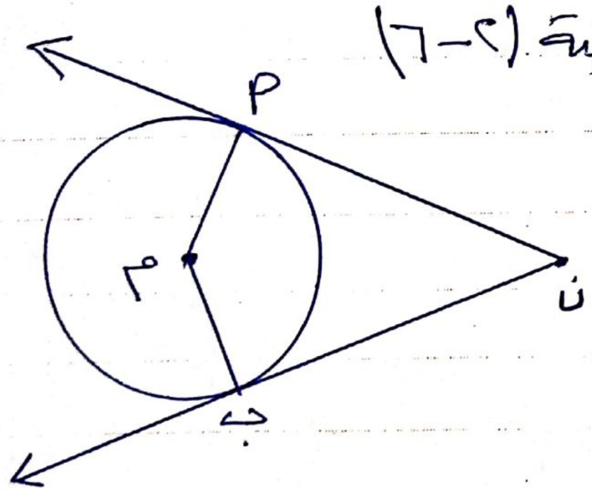
$٦٤ = (ب م)^٢ \leftarrow$ ب م = ٨ سم نصف القطر

طول القطر = ٢×٨ = ١٦ سم

تدريب (٢) :-

الشكل ، يمثل الحالة العامة لمبرهنة (٢-٦)

أثبت هذه المبرهنة



الحل :-

المعطيات :-

دائرة مركزها م

ن٩ ، ن ب مماسان

المطلوب :-

اثبات ان :-

١) ن٩ = ن ب

٢) $\overleftrightarrow{م ن}$ ينصف الزاوية بين مماسيها (∡ ٩ن ب)

٣) $\overleftrightarrow{م ن}$ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين (∡٩م ب)

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

البرهان :-

م أ ⊥ ن أ ، م ب ⊥ ن ب مبرهنة (1) ومنه ق∠ ن أ م = 90° ، ق∠ ن ب م = 90°

المثلثان م أ ن ، م ن ب فيهما :-

م أ = م ب انصاف اقطار

ن م : ضلع مشترك

ق∠ ن أ م = ق∠ ن ب م

وعليه المثلثان متطابقان ونستنتج :-

1) ن أ = ن ب

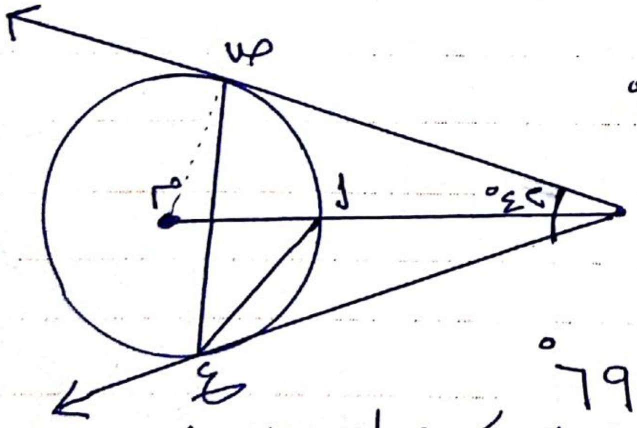
2) ق∠ أ ن م = ق∠ ب ن م

3) ق∠ أ م ن = ق∠ ب م ن

تدريب (3)

يمثل الشكل ، مماسين س ص ، س ع للدائرة التي مركزها م عند النقطتين ص ، ع على التوالي ، ق∠ ص س ع = 42°

جد ق∠ ل ع ص



الحل :-

ق∠ ع س م = ق∠ ص س م = $\frac{42}{2} = 21^\circ$

نصل م ص وعليه

ق∠ س ص م = 90°

لأنه م ص ⊥ س ص (مبرهنة)

ق∠ س م ص = $180 - (90 + 21) = 69^\circ$

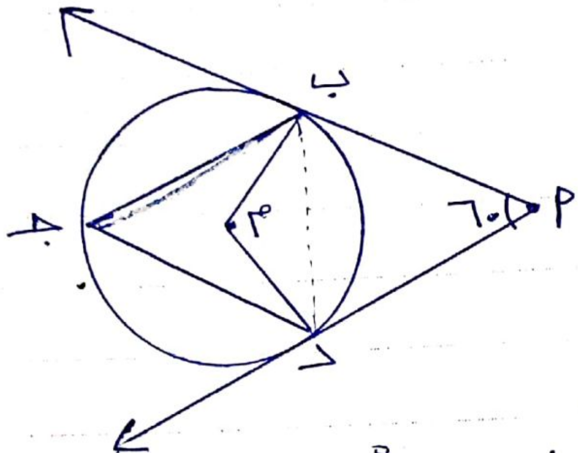
ق∠ ل ع ص = $\frac{1}{2}$ ق∠ ل م ص (محيطية ومركزية على نفس القوس)

= $\frac{1}{2} \times 69 = 34{,}5^\circ$

الاسئلة

١) يمثل الشكل ، دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أد}$ مماسان للدائرة عند النقطتين ب ، د على التوالي بحيث ق∡ب أد = ٦٠ جد قياس كل من ∡ أ ب د ، ∡ ب جـ د

الحل :

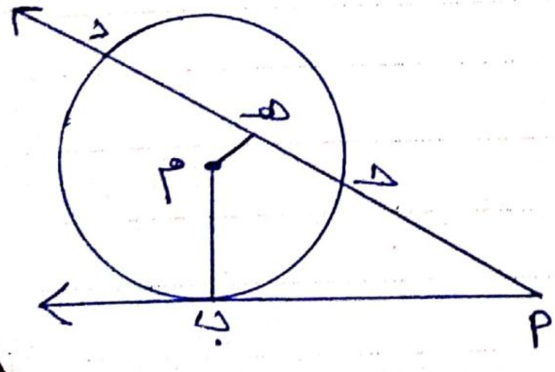


م ب ⊥ أ ب (مبرهنة)
ق∡م ب أ = ٩٠°
م د ⊥ أ د (مبرهنة)
ق∡ م د أ = ٩٠°
في الشكل الرباعي أ ب م د فان :-
ق∡ ب م د = ٣٦٠ − (٦٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٢٠°
ق∡ ب هـ د = $\frac{1}{2}$ ق∡ ب م د (محيطية ومركزية على نفس القوس)
= $\frac{1}{2}$ × ١٢٠ = ٦٠°
المثلث أ ب د متطابق الضلعين لان أ ب = أ د (مبرهنة)
ق∡ أ ب د = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠

---

٢) يمثل الشكل ، دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس لها عند نقطة ب $\overleftrightarrow{أد}$ قاطع لها في النقطتين هـ ، د النقطة هـ تقع على الوتر $\overline{هـد}$ بحيث ان الزاويتين ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتان . اثبت ان النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{هـد}$

الحل :



المعطيات :
دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overleftrightarrow{أد}$ قاطع
الزاويتان ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتان

المطلوب :
اثبات أن هـ تنصف الوتر $\overline{هـد}$

البرهان :-

م ب ⊥ أ ب (مبرهنة) ← ق∡ أ ب م = ٩٠°

في الشكل الرباعي أ ب م هـ :

ق∡ ب أ هـ + ق∡ ب م هـ = ١٨٠ (متكاملتان)

وبما أن مجموع زوايا الشكل الرباعي مجموعها ٣٦٠

∴ ق∡ م هـ أ = ٩٠°

م هـ ⊥ حـ د وعليه النقطة هـ : منتصف حـ د

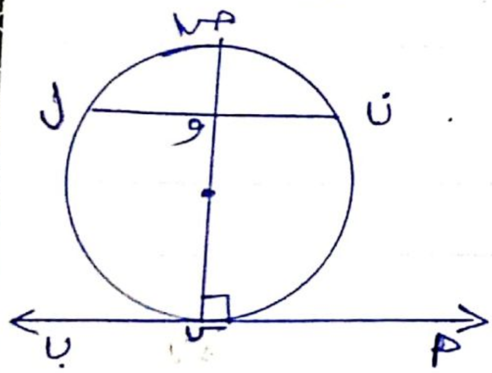
(العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه)

---

٣) س ص قطر في دائرة ، أ ب مماس لها عند النقطة س

رسم الوتر ن ل // أ ب ، اثبت أن القطر س ص

ينصف الوتر ن ل .



الحل :-

المعطيات :-

س ص قطر ، أ ب مماس

ن ل // أ ب

المطلوب :-

اثبات أن س ص ينصف الوتر ن ل

الحل :-

س ص ⊥ أ ب (مبرهنة) ← ق∡ أ س ص = ٩٠°

ق∡ ن و س = ٩٠° لأن ن ل // أ ب والزاويتان ن و س ، أ س ص

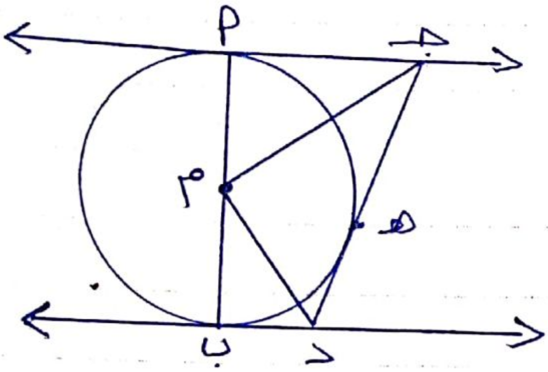
متحالفتان ومجموع قياسهما ١٨٠°

ق∡ ن و س = ٩٠ ← س ص ⊥ ن ل

وعليه القطر س ص ينصف الوتر ن ل (مبرهنة)

٤) مست دائرة مركزها م ، مستقيمين متوازيين في النقطتين أ ، ب ثم رسم مماس ثالث للدائرة فقطع المماسين المتوازيين في النقطتين جـ ، د
اثبت ان الزاوية جـ م د قائمة .

الحل :-



المعطيات :-

$\overleftrightarrow{أجـ} \parallel \overleftrightarrow{دب}$

$\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{دب}$ مماسان للدائرة

المطلوب

اثبات ان ق ∢ جـ م د = 90°

البرهان

من النقطة جـ ، المماسان جـ هـ ، جـ أ متساويان

$\overrightarrow{جـ م}$ ينصف الزاوية أ جـ هـ وعليه. ق ∢ أ جـ م = ق ∢ م جـ هـ

وبالمثل من النقطة د المماسان د هـ ، د ب متساويان

م د ينصف الزاوية هـ د ب وعليه ق ∢ هـ د م = ق ∢ م د ب

$\overline{أجـ} \parallel \overline{دب}$ ← ق ∢ أ جـ د + ق ∢ جـ د ب = 180° (التحالف)

وعليه في △ جـ م د فان :-

ق ∢ جـ م د + ق ∢ م د جـ = 90°

ومنه ق ∢ جـ م د = $180 - 90 = 90^\circ$

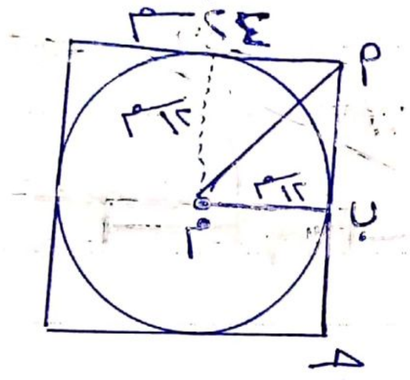
---

٥) ارسم المثلث أ ب جـ ، استخدم مضلعا المماسات في تحديد مركز الدائرة المرسومة داخله

الحل :- رسم ٣ مماسات ، ثم ننصف زوايا المثلث فتكون نقطة التقاء المنصفات (المركز الدائرة)

٦) وضع مصباح دائري الشكل ، في صندوق قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٤ سم ، بحيث ان محيط المصباح يمس جوانب الصندوق ، جد بعد مركز المصباح عن رأس قاعدة الصندوق

الحل :



م ب ⊥ أ جـ (مبرهنة)

م ب = ١٢ سم

نطبق فيثاغورس

$(أم)^2 = (ب م)^2 + (أب)^2$

$= ١٤٤ + ١٤٤$

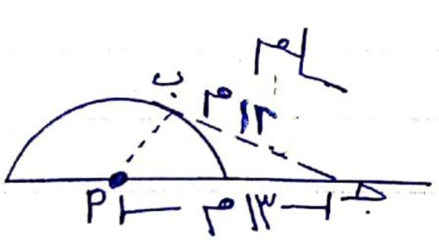
$= ٢٨٨$

$أم = \sqrt{٢٨٨} = \sqrt{٢ \times ١٤٤} = ١٢\sqrt{٢}$ سم

---

٧) يمثل الشكل ، سلماً طوله ١٢ م ، يرتكز بطرفه السفلي على ارض افقية ، ويرتكز بطرفه العلوي على قبة اسمنتية ، على شكل نصف كرة ، بحيث يبعد مركز الكرة ١٣ م عن طرف السلم السفلي جد طول نصف قطر القبة :

الحل :-



نصل م ب

م ب ⊥ جـ د مبرهنة

في المثلث القائم الزاوية أ ب جـ :-

$(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$

$١٦٩ = (أب)^2 + \cancel{١٤٤}$

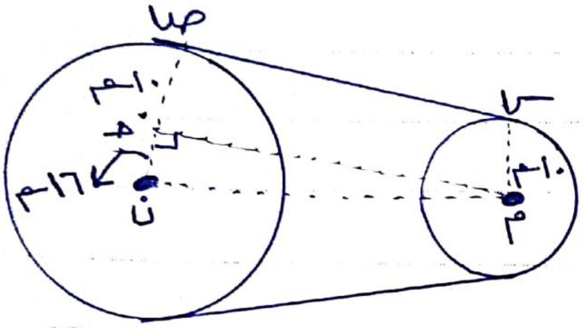
$-١٤٤ \qquad \cancel{-١٤٤}$

$٢٥ = (أب)^2$

أب = ٥ م

٨) يمثل الشكل حزاماً يمر على دولابين دائريين طول نصف قطر الدولاب الأصغر ١٠ سم، وطول نصف قطر الدولاب الأكبر ٢٦ سم، والبعد بين مركزيهما ٥٦ سم. جد طول الجزء المستقيم من الحزام بين النقطتين س، ص.

الحل :-



م س ⊥ س ص ← ق∡ م س ص = ٩٠

ن ص ⊥ س ص ← ق∡ ن ص س = ٩٠°

ننزل عمود من م على ن ص عند (هـ)

الشكل الرباعي س م هـ ص مستطيل

ومنه م هـ = س ص

المثلث م هـ ن قائم الزاوية :-

(م ن)^2 = (ن هـ)^2 + (م هـ)^2

(٥٦)^2 = (١٦)^2 + (م هـ)^2

٣١٣٦ = ٢٥٦ + (م هـ)^2

-٢٥٦   -٢٥٦

(م هـ)^2 = ٢٨٨٠ ← م هـ = $\sqrt{٢٨٨٠}$ سم = س ص

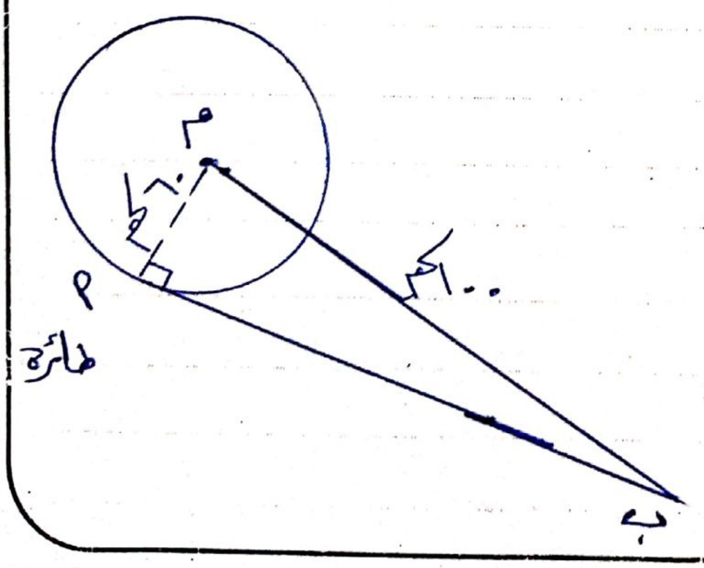
---

٩) حل المسألة الواردة في بداية الدرس

الحل :-

م أ ⊥ ب أ (مبرهنة)

نطبق فيثاغورس :-



(م ب)^2 = (م أ)^2 + (أ ب)^2

١٠٠٠٠ = ٣٦٠٠ + (أ ب)^2

(أ ب)^2 = ١٠٠٠٠ − ٣٦٠٠

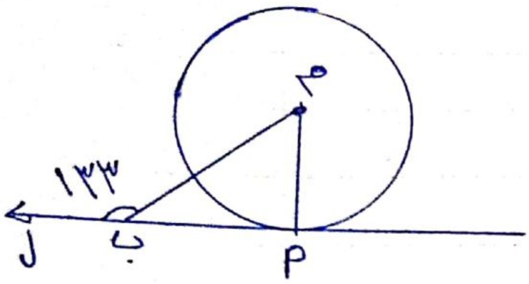
= ٦٤٠٠

أ ب = ٨٠ كم

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

ورقة عمل

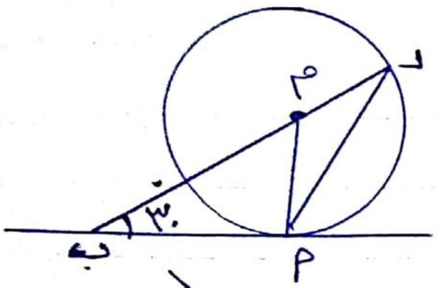
١) أب مماساً للدائرة التي مركزها م
جد ق ∡ أ م ب



$\boxed{٤٣}$

---

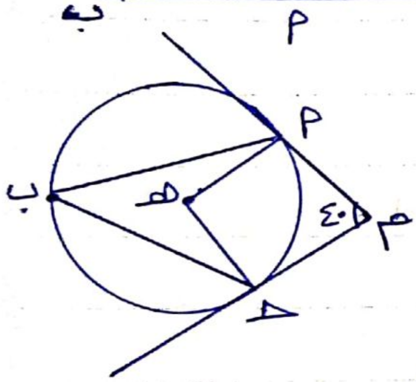
٢) اذا كان أب مماساً للدائرة التي مركزها م
جد ق ∡ أ د م



$\boxed{٣٠}$

---

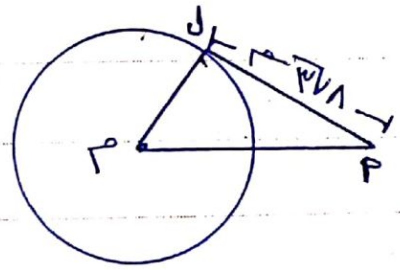
٣) جد ق ∡ أ ب جـ
ق ∡ أ هـ جـ



$\boxed{٧٠}$

---

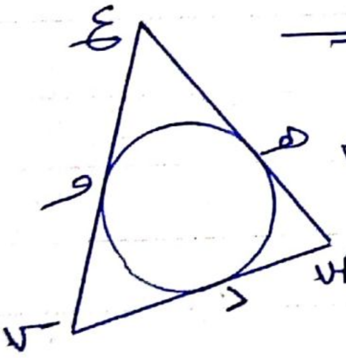
٤) جد طول م أ
حيث م : مركز الدائرة
وطول قطر الدائرة ١٦ سم
أل مماساً للدائرة.



$\boxed{٢٦.٧}$

---

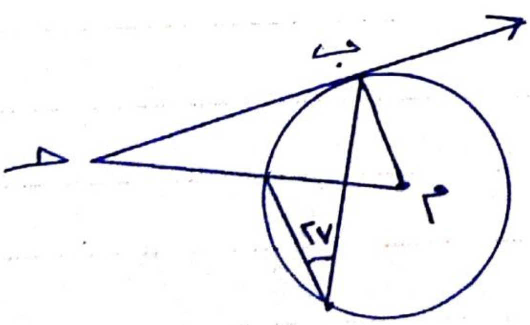
٥) في الشكل المجاور ، سو = ٧ سم ، ع هـ = ٥ سم ، ص س = ١٣ سم
جد محيط المثلث ع ص س



$\boxed{٣٦}$

---

٦) في الشكل المجاور
جد ق ∡ ب د م



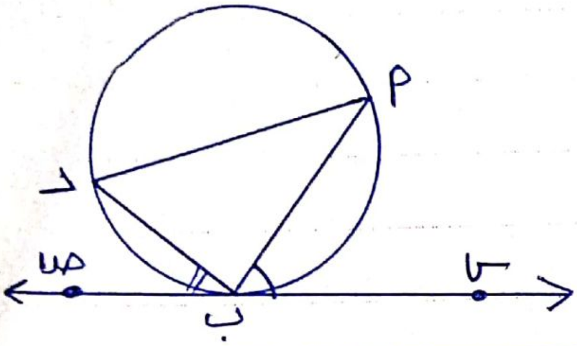
$\boxed{٣٦}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٨٢٤٤٦٤

ثانياً :- الزاوية المماسية

تعريف :-

الزاوية المماسية :- هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأي وتر فيها مار بنقطة التماس



من الشكل المجاور فإن :-

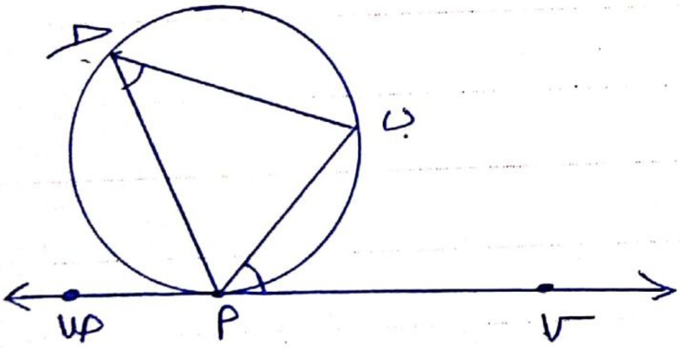
∡ أ ب س

∡ د ب ص

زوايا مماسية

مبرهنة

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.



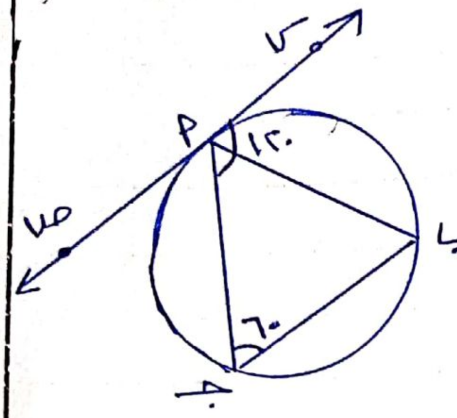
ق∡ ب أ س = ق∡ ب جـ أ

حيث الزاوية المماسية والمحيطية مرسومتان على القوس أ ب

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

تدريب (1) :-

في الشكل ، أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع



الحل :-

ق∡ أ جـ ب = ق∡ ب أ س = ٦٠° (محيطية ومماسية)

ق∡ ب أ جـ = ق∡ س أ جـ − ق∡ س أ ب

= ١٢٠° − ٦٠° = ٦٠°

في △ أ ب جـ فإن :

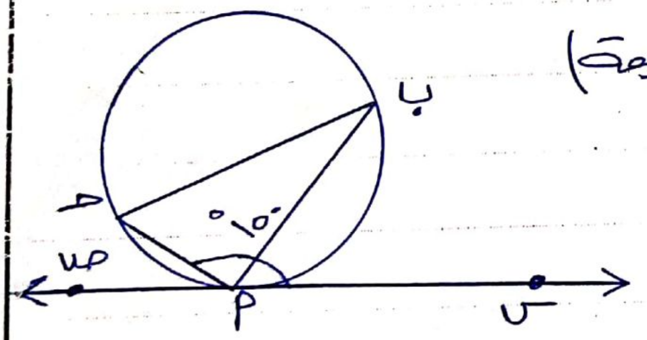
ق∡ أ ب جـ = ١٨٠ − (٦٠+٦٠) = ٦٠°

قياس جميع زوايا المثلث = ٦٠° وعليه △ أ ب جـ متطابق الأضلاع

المسائل

1) في الشكل ، جد قياس ∡ أ ب جـ

الحل :



ق∡ س أ ص = ١٨٠ (زاوية مستقيمة)

ق∡ جـ أ ص = ١٨٠ − ١٥٠ = ٣٠°

ق∡ أ ب جـ = ق∡ جـ أ ص

= ٣٠° (محيطية ومماسية)

2) في الشكل ، أثبت أن $(أ ب)^2$ = أ جـ × أ د

إرشاد : ابحث في تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ د ب

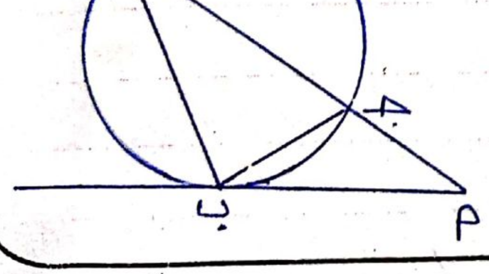
الحل :-

المعطيات :-

أ ب مماس للدائرة في النقطة ب

المطلوب

إثبات أن $(أ ب)^2$ = أ جـ × أ د



البرهان :. المثلثان أ ب جـ ، أ د ب :-

ق∢ أ في المثلثان مشتركة (مشتركة)

ق∢ جـ د ب = ق∢ أ ب جـ (مماسية ومحيطية على نفس القوس)

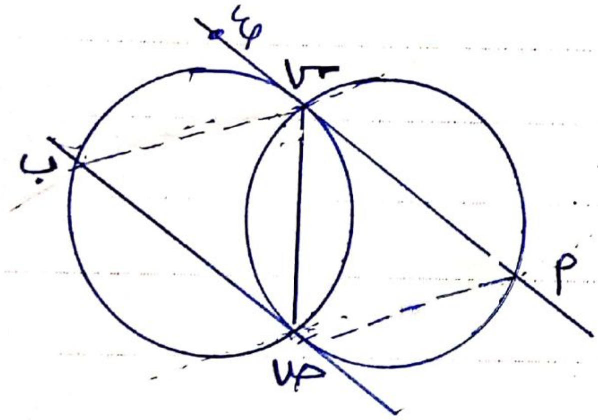
وعليه المثلثان متشابهان وينتج :-

$\frac{أب}{أد} = \frac{أجـ}{أب}$ تبادليا

$(أب)^2 = أجـ \times أد$

---

٣) تقاطعت دائرتان في س ، ص رسم الوتر $\overline{س أ}$ في احدى الدائرتين مماساً للأخرى في النقطة س ورسم الوتر $\overline{ص ب}$ في الدائرة الثانية مماساً للأولى في النقطة ص ، اثبت أن $\overleftrightarrow{س ب} \parallel \overleftrightarrow{ص أ}$



الحل :

المعطيات :-

دائرتان متقاطعتان في س ، ص

أ س مماس للدائرة ، ب ص مماس للدائرة الثانية

المطلوب :-

اثبات ان $\overleftrightarrow{س ب} \parallel \overleftrightarrow{ص أ}$

البرهان :-

ق∢ س أ ص = ق∢ س ص ب (محيطية ومماسية على نفس القوس)

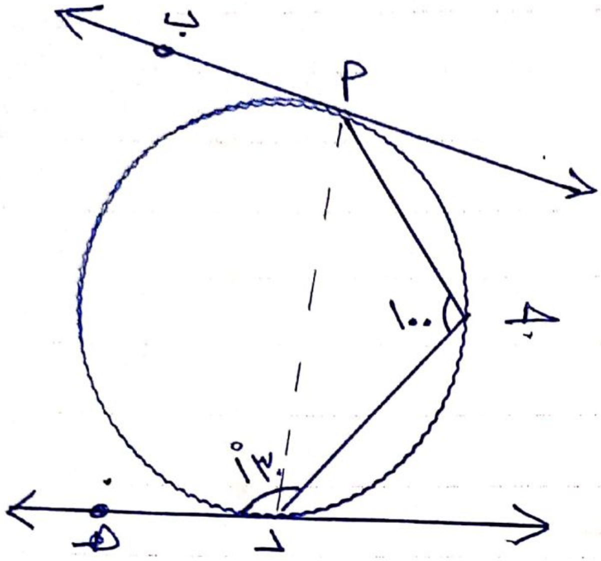
ق∢ س ص ب = ق∢ ب س ع (محيطية ومماسية على نفس القوس)

وعليه بالمقارنة فان ق∢ ب س ع = ق∢ س أ ص

وهما في وضع تناظر وعليه فان $\overleftrightarrow{س ب} \parallel \overleftrightarrow{أ ص}$

(٤) في الشكل ، جد ق∢ جـ أ ب :-

الحل :-



نصل أ د :-

ق∢ أ جـ د = ق∢ أ د هـ = ١٠٠
مماسية ومحيطية على نفس القوس

وعليه

ق∢ أ د جـ = ق∢ جـ د هـ - ق∢ أ د هـ
= ١٣٠ - ١٠٠ = ٣٠°

في △ أ جـ د فإن :-

ق∢ جـ أ د = ١٨٠ - (١٠٠ + ٣٠) = ٥٠°

ق∢ أ جـ د = ق∢ ب أ د = ١٠٠° .

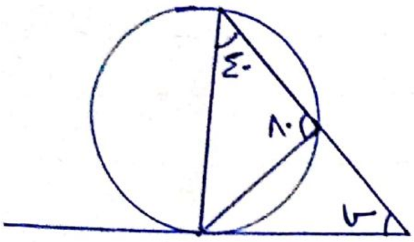
وعليه ق∢ جـ أ ب = ق∢ جـ أ د + ق∢ ب أ د
= ٥٠ + ١٠٠ = ١٥٠°

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٨٢٤٤٦٤

ورقة عمل

١) جد قيمة (س) في الشكل المجاور

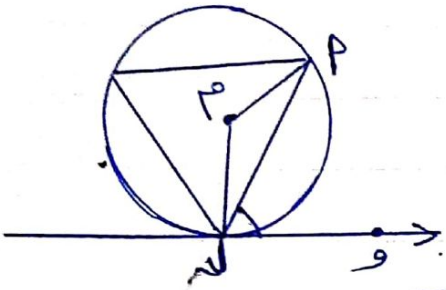
$\boxed{٤٠}$



٢) دائرة مركزها م ، ق∡ أ ل و = ٥٢

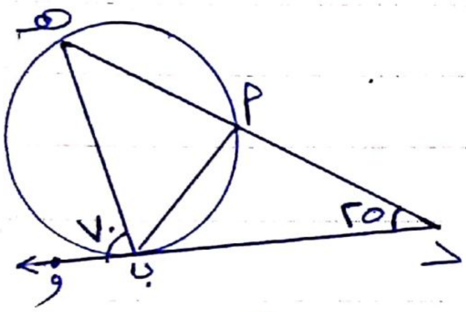
ق∡ أ م ل

$\boxed{١٠٤}$



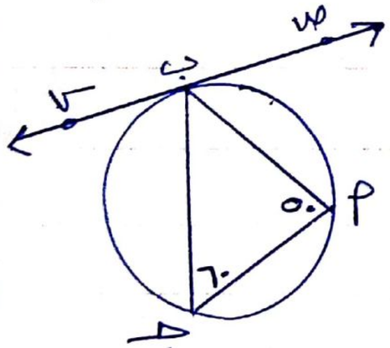
٣) في الشكل المجاور ، جد ق∡ أ ب د

$\boxed{٤٥}$



٤) في الشكل المجاور ، جد
ق∡ أ ب ص ، ق∡ ه ب س

$\boxed{٥٠ ، ٦٠}$



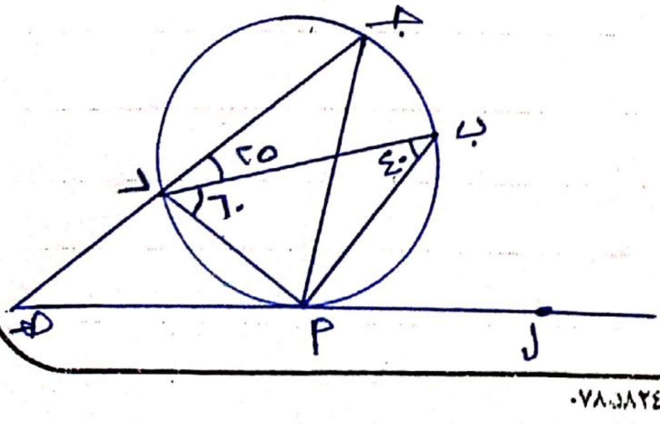
٥) معتمداً الشكل المجاور ، جد:

ق∡ أ ه د $\boxed{٤٠}$

ق∡ ب أ ل $\boxed{٦٠}$

ق∡ ب أ ه $\boxed{٢٥}$

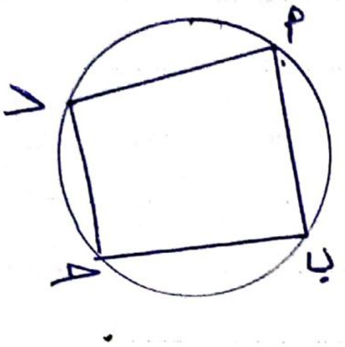
ق∡ د أ ه



رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

تعريف

الشكل الرباعي الدائري :- هو الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على دائرة.



مبرهنة (١)

في الشكل الرباعي الدائري ، مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي ١٨٠°

ق∡أ + ق∡جـ = ١٨٠

ق∡ب + ق∡د = ١٨٠

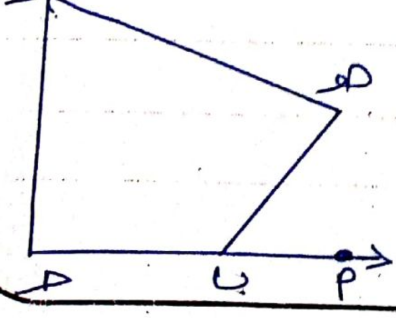
مبرهنة (٢)

اذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي ١٨٠° فان هذا الشكل يكون شكلاً رباعياً دائرياً.

ومن هذه المبرهنة (٢) نستفيد منها لاثبات أن الشكل الرباعي هو شكل رباعي دائري

تعريف

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي :- هي الزاوية المحصورة بين امتداد احد اضلاعه والضلع المجاور له



مبرهنة (٣) :-

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الداخلة المقابلة للمجاورة لها (ق∡هـ ب أ = ق∡د)

تدريب (١):

أ ب جـ د شكل رباعي دائري، فيه ق∢أ يساوي ثلاثة أمثال ق∢جـ. جد ق∢جـ.

الحل:

نفرض قياس الزاوية (جـ) يساوي س

ق∢أ + ق∢جـ = ١٨٠° مبرهنة

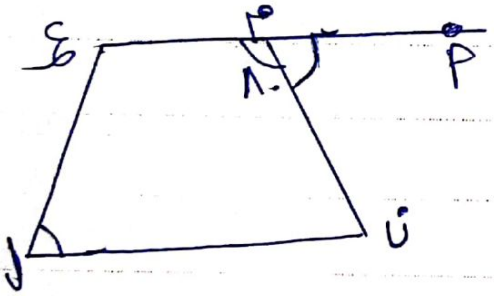
٣س + س = ١٨٠°

٤س = ١٨٠°

س = ٤٥°

تدريب (٢):

م ن ل ع شكل رباعي دائري، فيه ق∢م = ٨٠، مد ع م باتجاه م إلى نقطة أ. جد قياس كل من ∢ن ل ع، ∢ن م أ



الحل:

ق∢أ م ع = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

ق∢أ م ن = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

ق∢ن م ع + ق∢ع ل ن = ١٨٠ مبرهنة

٨٠ + ق∢ع ل ن = ١٨٠

ق∢ع ل ن = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

تدريب (٣)

أثبت المبرهنة (٢-٨) علماً فرضنا أن الرأس الرابع يقع خارج الدائرة

الحل:

الإثبات موجود في الكتاب

تدريب (٤):

هل يمكن رسم شكل رباعي دائري قياسات زواياه ٥٠، ١١٠، ١٣٥، ٦٥ برر اجابتك

الحل:

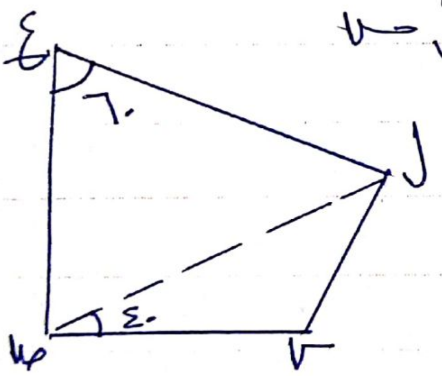
لا، لا يوجد فيها مجموع قياساتها = ١٨٠°

تدريب (٥):

س ص ع ل شكل رباعي دائري، فيه ق∡ص ع ل = ٦٠°

ق∡ س ص ل = ٤٠° جد ق∡ ص ل س

الحل:



ق∡س + ق∡ع = ١٨٠

ق∡س + ~~٦٠~~ = ١٨٠

−٦٠   −٦٠

ق∡س = ١٢٠°

في △ س ل ص فإن

ق∡ س ل ص = ١٨٠ − (٤٠ + ١٢٠)

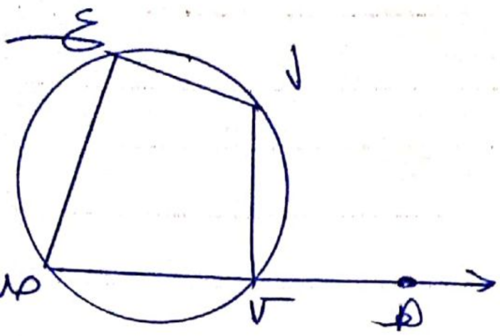
= ١٨٠ − ١٦٠

= ٢٠

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

تدريب (٦)

١) اثبت مبرهنة (٢ - ١٠)



الحل :-

المطلوب :-

اثبات ان :-

ق∡ل ب هـ = ق∡ل ع ص

البرهان :-

ق∡ل ب هـ + ق∡ل ب ص = ١٨٠ —— (١) متجاورتان على خط مستقيم

ق∡ل ب ص + ق∡ل ع ص = ١٨٠ —— (٢) مبرهنة

من (١) و (٢) نستنتج ان :-

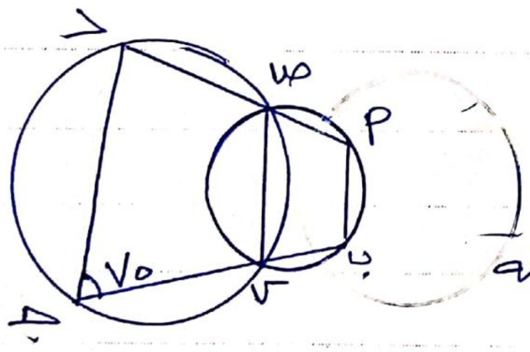
ق∡ل ب هـ = ق∡ل ع ص

تدريب (٧)

في الشكل ، جد قياس كل من

∡ أ ص ب ، ∡ أ ب ب

الحل :-



ق∡ أ ص ب = ق∡ ب ج د

= ٧٥° مبرهنة

ق∡ أ ب ب + ق∡ أ ص ب = ١٨٠ مبرهنة

ق∡ أ ب ب + ٧٥ = ١٨٠

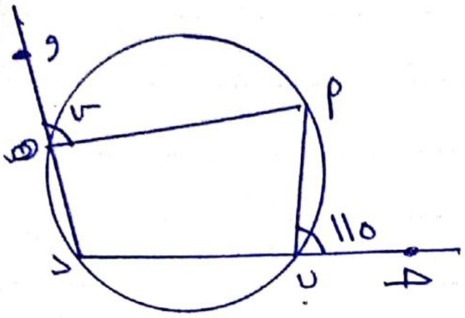
ق∡ أ ب ب = ١٨٠ - ٧٥

= ١٠٥

الأسئلة

١) جد قيمة س ، في كل شكل من الأشكال الآتية :-

الحل :-

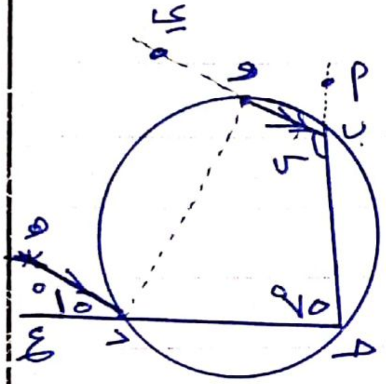


ق∡ أهـد = ق∡ أبحـ

= ١١٥ (مبرهنة)

س = ١٨٠ − ١١٥

= ٦٥°



ق∡ يود = ق∡ بحـد (مبرهنة)

= ٧٥°

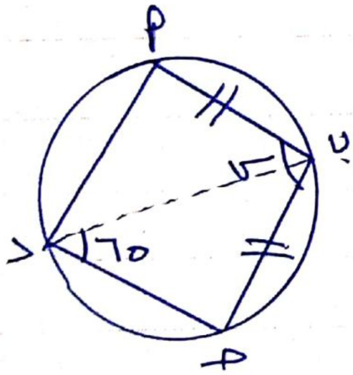
ق∡ يود + ق∡ ودهـ = ١٨٠° تحالف

٧٥ + ق∡ ودهـ = ١٨٠°

ق∡ ودهـ = ١٨٠ − ٧٥ = ١٠٥°

ق∡ ودع = ق∡ وبحـ مبرهنة

س = ١٥ + ١٠٥ = ١٢٠°



ق∡ بدأ = ق∡ بدحـ

= ٦٥ محيطيتان على وترين متساويين

ق∡ أدحـ = ٦٥ + ٦٥ = ١٣٠°

ق∡ أبحـ + ق∡ أدحـ = ١٨٠°

س + ١٣٠ = ١٨٠°

س = ٥٠°

٢) أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه ق∠أ = ٣ع + ١٠
ق∠جـ = ٢ع − ٣٠ جد قياس كل من ∠أ ، ∠جـ

الحل: ق∠أ + ق∠جـ = ١٨٠ (مبرهنة)

٣ع + ١٠ + ٢ع − ٣٠ = ١٨٠

٥ع − ٢٠ = ١٨٠

٥ع = ٢٠٠ نقسم على ٥

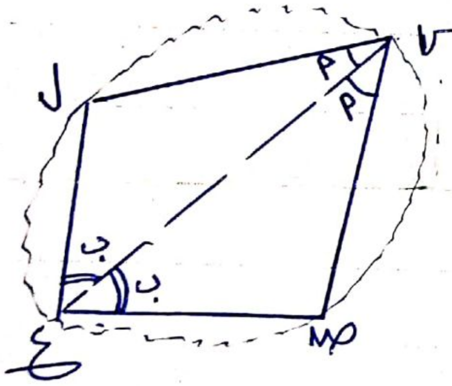
ع = ٤٠

ق∠أ = ٣ع + ١٠ = ٣ × ٤٠ + ١٠ = ١٣٠

ق∠جـ = ٢ع − ٣٠ = ٢ × ٤٠ − ٣٠ = ٥٠

---

٣) س ص ع ل شكل رباعي دائري فيه سع ينصف
كلاً من ∠س ، ∠ع اثبت ان سع
قطر للدائرة



الحل:

الاثبات:

٢أ + ٢ب = ١٨٠ (مبرهنة)

أ + ب = ٩٠

في المثلث س ل ع :

ق∠س ل ع = ١٨٠ − (أ + ب)

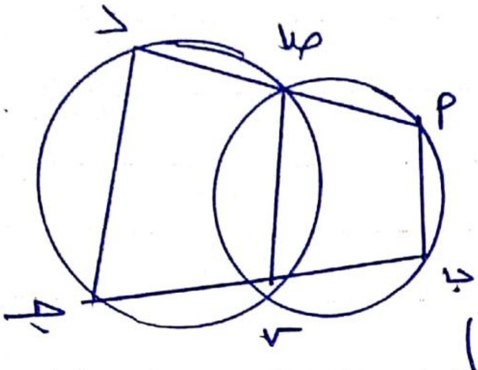
= ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠° وبالمثل ق∠س ص ع = ٩٠°

وهما محيطيتان مرسومتان على الوتر سع وبما
ان قياسهما ٩٠° فان الوتر هو قطر للدائرة

٤) في الشكل، اثبت ان أب // د هـ

الحل:

البرهان:



ق∢ أ ب س = ق∢ د ص س (مبرهنة)

ق∢ د هـ س = ق∢ أ ص س (مبرهنة)

ق∢ د ص س + ق∢ أ ص س = ١٨٠ (متتاليتان على خط مستقيم)

ق∢ أ ب س + ق∢ د هـ س = ١٨٠ بما ان الزاويتان داخليتان في جهة واحدة من القاطع وقياسهما ١٨٠° وعليه فان

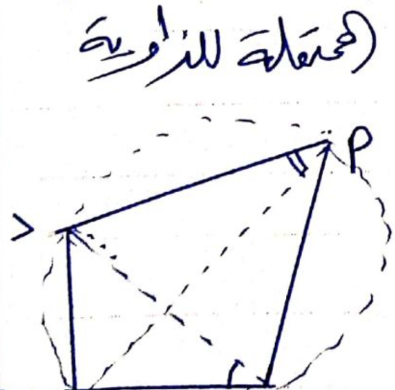
أب // د هـ

٥) بصورة عامة، يعد متوازي الأضلاع شكلاً رباعياً دائرياً. بيّن صحة هذه العبارة.

الحل: متوازي الاضلاع فيه كل زاويتان متقابلتان متساويتان وليس شرطاً مجموعهما ١٨٠°، وعليه العبارة ليست دائماً صحيحة

٦) أ ب جـ د شكل رباعي دائري، فيه ق∢ د ب جـ = س² − ٢س + ١٠

ق∢ جـ أ د = ١٠س − ٣٥ جد القياسات المحتملة للزاوية د ب جـ



الحل:

∢ د ب جـ ، ∢ جـ أ د محيطيتان مرسومتان على نفس الوتر

س² − ٢س + ١٠ = ١٠س − ٣٥ نرتب

س² − ١٢س + ٣٥ = ٠

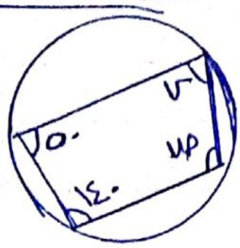
(س − ٧)(س − ٥) = ٠

س = ٧ ، س = ٥

٤٩ − ١٤ + ١٠ = ٤٥ ، ٢٥ − ١٠ + ١٠ = ٢٥

ورقة عمل

١) جد قيمة س ، ص في الشكل المجاور

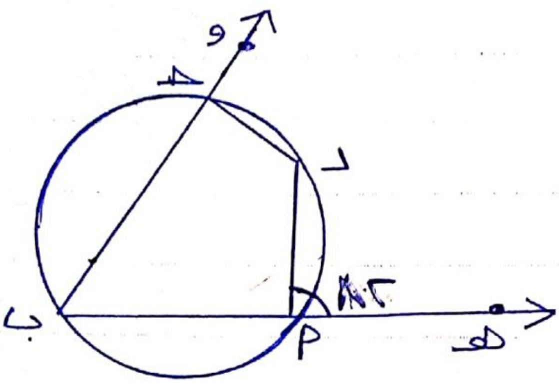


$\boxed{١٣ ، ٤٠}$

٢) في الشكل المجاور جد قيمة

ق∢ب جـ د ٨٢

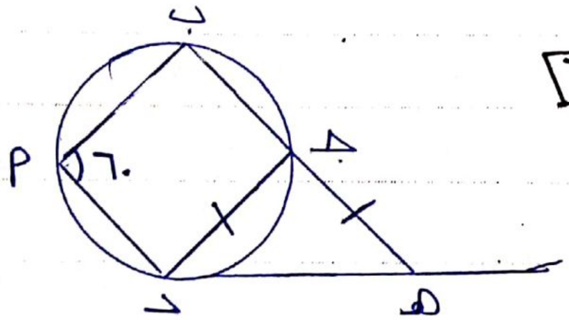
ق∢د أ ب ٩٨



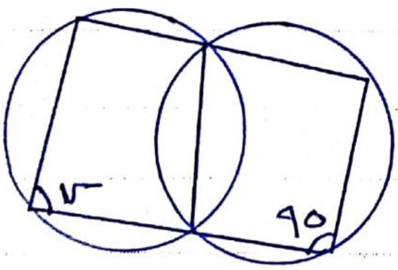
٣) أ ب جـ د شكل رباعي دائري ، فيه ق∢أ = ٦٠

جد ق∢جـ هـ د

$\boxed{٦٠}$



٤) جد قيمة (س) في الشكل المجاور

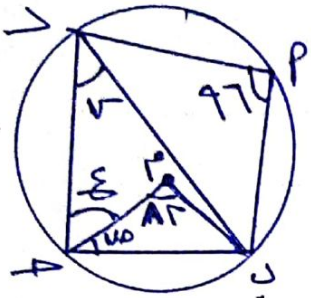


$\boxed{٨٥}$

أسئلة الوحدة

١) يمثل الشكل دائرة مركزها م جد قيمة كل من : س ، ص ، ع

الحل :



ق∢ ب د ح = ½ ق∢ ب م ح (محيطية ومركزية)

س = ½ × ٨٢ = ٤١°

المثلث م ب ح متطابق الضلعين

ص = $\frac{١٨٠ - ٨٢}{٢}$ = ٤٩°

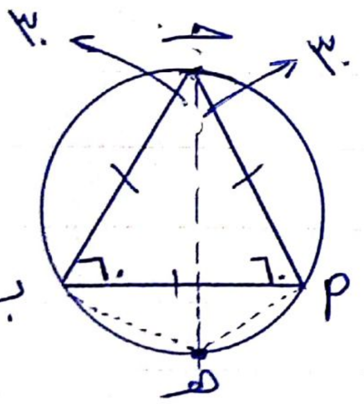
ق∢ أ + ق∢ ح = ١٨٠ مبرهنة

٩٦ + ق∢ ح = ١٨٠

ق∢ ح = ٨٤ ← ع = ٨٤ − ص = ٨٤ − ٤٩ = ٣٥°

٢) أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه عليها ، نصف القوس الأصغر أب في النقطة هـ اثبت ان ح هـ قطر للدائرة

الحل : البرهان



ق∢ أ ح هـ = ق∢ ب ح هـ = ٣٠°

محيطيتان مرسومتان على أوتار متساوية

ق∢ ب ح هـ = ق∢ ب أ هـ = ٣٠°

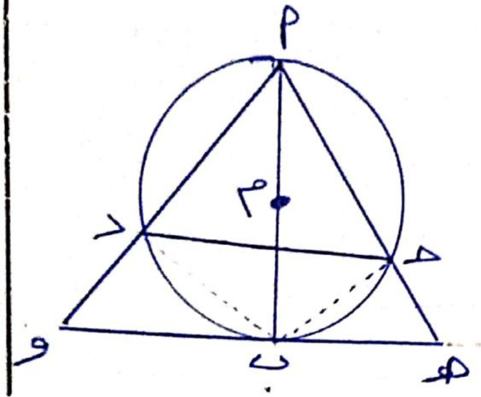
محيطيتان مرسومتان على نفس القوس

ق∢ ح أ هـ = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠°

وهي محيطية مرسومة على الوتر ح هـ

∴ وبما ان قياسها ٩٠ ← ح هـ قطر للدائرة

٣) أب قطر في دائرة م ، أجـ ، أد وتران فيها وعلى جهتين مختلفتين من القطر أب ، رسم مماس للدائرة عند النقطة ب بحيث لاقى امتداد أجـ في النقطة هـ ولاقى امتداد أد في النقطة و ، أثبت أن الشكل جـ د و هـ شكل رباعي دائري .



الحل :

البرهان :

أب ⊥ هـ و (مبرهنة)

ق∡ أب جـ + ق∡ جـ ب هـ = ٩٠ ——(١)

ق∡ أجـ ب = ٩٠° محيطية مرسومة على القطر

في △ أجـ ب فإن :

ق∡ جـ هـ ب + ق∡ جـ ب هـ = ٩٠° ——(٢) لأن ∡ أجـ ب خارجة المثلث وتساوي مجموع الزاويتين البعيدتين

من (١) ، (٢) نستنتج أن

ق∡ أب جـ = ق∡ جـ هـ ب ——(٣)

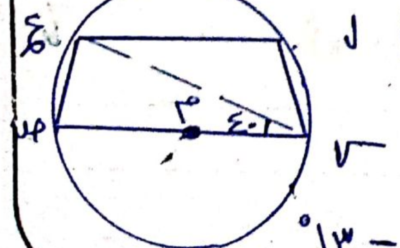
ق∡ أد جـ = ق∡ أب جـ ——(٤) محيطيتان على نفس القوس

من (٣) ، (٤) نستنتج أن :

ق∡ جـ هـ ب = ق∡ أد جـ لكن ∡ أد جـ زاوية خارجة للشكل الرباعي جـ د و هـ وتساوي قياس الزاوية المقابلة للمجاورة لها وعليه فإن الشكل جـ د و هـ رباعي دائري

---

٤) س ص ع ل شكل رباعي دائري ، فيه س ص قطر للدائرة ق∡ ع س ص = ٤٠ جد ق∡ س ل ع



الحل : ق∡ ص ع س = ٩٠ (محيطية مرسومة على القطر) ل

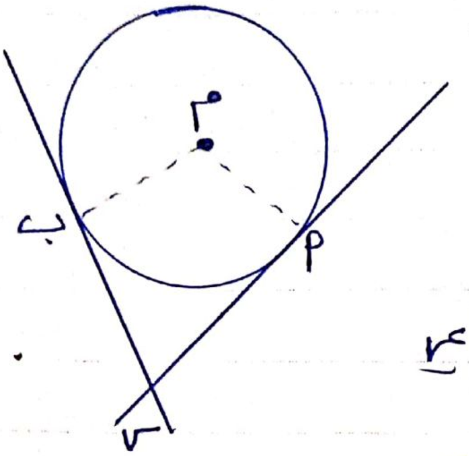
في △ س ع ص ← ق∡ س ص ع = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

ق∡ س ل ع + ق∡ س ص ع = ١٨٠ مبرهنة

ق∡ س ل ع + ٥٠ = ١٨٠ ← ق∡ س ل ع = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°

٥) دائرة مركزها م ، فيها س أ ، س ب مماسان عند النقطتين أ ، ب . اثبت ان الشكل س أ م ب شكل رباعي دائري .

الحل :-



م أ ⊥ س أ (مبرهنة)

ق∠ م أ س = ٩٠°

م ب ⊥ س ب (مبرهنة)

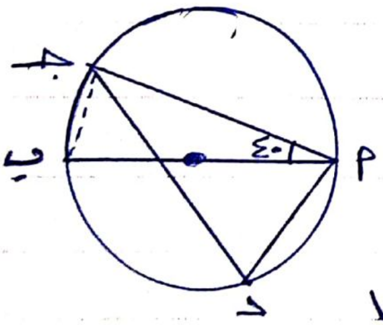
ق∠ م ب س = ٩٠°

بما انهما متقابلتان في شكل رباعي ومجموع قياسهما ١٨٠ فان الشكل س أ م ب شكل رباعي دائري

---

٦) أب قطر في دائرة ، النقطتان جـ ، د على الدائرة بحيث ان ق∠ جـ أ ب = ٤٠° جد ق∠ أ د جـ

الحل :-



ق∠ أ جـ ب = ٩٠° (محيطية مرسومة على القطر)

في المثلث أ ب جـ فان :-

ق∠ أ ب جـ = ١٨٠ − (٤٠ + ٩٠) = ٥٠°

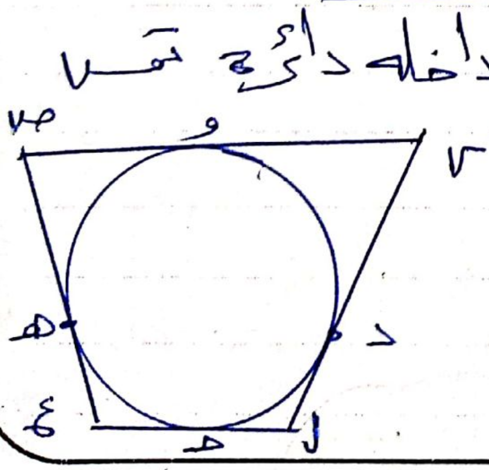
ق∠ أ د جـ = ق∠ أ ب جـ

= ٥٠ محيطيتان مرسومتان على نفس القوس

---

٧) س ص ع ل شكل رباعي مرسوم بداخله دائرة تمس اضلاعه ، اثبت ان :-

س ص + ع ل = ص ع + ل س



الحل : ل د = ل هـ ① مبرهنة

س د = س و ② مبرهنة

ع هـ = ع هـ ③ مبرهنة

ص و = ص هـ ④ مبرهنة

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

لكن: س ص = س و + و ص ——— (١)

ل ع = ل هـ + هـ ع ——— (٢)

نجمع (١) ، (٢)

س ص + ل ع = س و + و ص + ل هـ + هـ ع

س ل ، ص هـ ، ل د ، ع هـ

س ل ، ص ع

∴ س ص + ل ع = س ل + ص ع

---

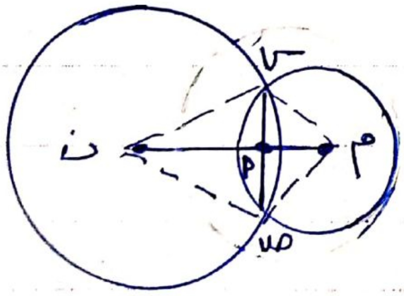
٨) تقاطعت دائرتان مركزاهما م ، ن في النقطتين س ، ص

النقطة أ منتصف $\overline{\text{س ص}}$

أ) أثبت أن النقاط م ، أ ، ن تقع على استقامة واحدة

ب) إذا كان س ص = ٨ سم ، طول نصف قطر الدائرة الأولى مركزها م = ٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة الثانية مركزها ن = ٧ سم جد م ن

الحل:



أ) م أ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ (مبرهنة)

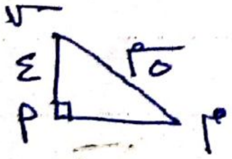
ق∡ م أ س = ٩٠°

ن أ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ (مبرهنة)

ق∡ ن أ س = ٩٠°

وعليه ق∡ م أ ن = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ زاوية مستقيمة

وعليه م ، أ ، ن تقع على استقامة واحدة



ب) (س م)² = (م أ)² + (أ س)²

٢٥ = (م أ)² + ١٦

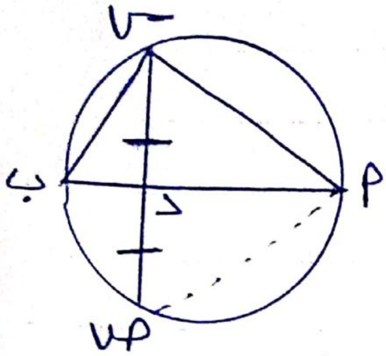
(م أ)² = ٢٥ − ١٦ = ٩ ← م أ = ٣ سم

(س ن)² = (أ س)² + (أ ن)²

٤٩ = ١٦ + (أ ن)² ← (أ ن)² = ٣٣ ← أ ن = √٣٣

طول م ن = ٣ + √٣٣ سم

١٩) أ ب قطر في دائرة ينصف الوتر س ص، أثبت أن
ق∢ أ ب س = ق∢ أ س ص



الحل:

أ د ⊥ س ص (مبرهنة)

ق∢ أ د س = ٩٠°

ق∢ أ د ص = ٩٠°

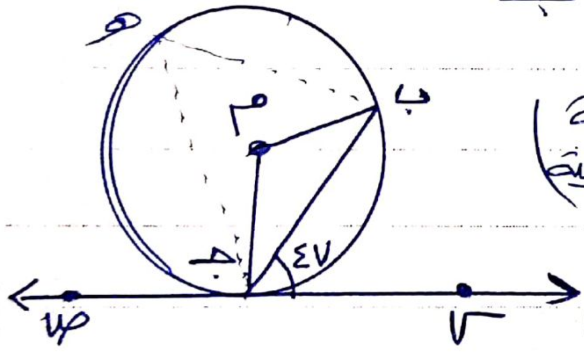
Δ أ س ص متطابق الضلعين فيه

أ س = أ ص (العمود النازل من رأس المثلث ينصف القاعدة من خصائص المثلث)

ق∢ أ ب س = ق∢ أ س ص محيطيتان مرسومتان على وترين متساويين.

---

١٠) في الشكل، دائرة مركزها م، س ص ↔ مماس لها عند النقطة جـ، جد ق∢ ب م جـ



الحل:

ق∢ ب هـ جـ = ق∢ ب جـ س (محيطية ومماسية)

= ٤٧

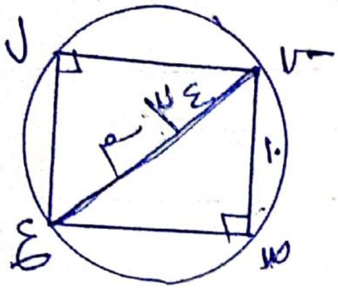
ق∢ ب م جـ = ٢ × ق∢ ب هـ جـ (مركزية ومحيطية)

= ٢ × ٤٧

= ٩٤°

---

١٢) س ص ع ل مستطيل مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ١٧ سم، بحيث تمس رؤوسه، إذا كان س ص = ١٠ سم، جد مساحة المستطيل س ص ع ل



الحل :- ق∢ س ص ع = ق∢ ل = ٩٠° زوايا مستطيل

ولهذا زوايتان محيطيتان مرسومتان على الوتر س ع ← س ع : القطر

نطبق فيثاغورس :-

$(٣٤)^٢ = (١٠)^٢ + (ص ع)^٢$

$١١٥٦ = ١٠٠ + (ص ع)^٢$

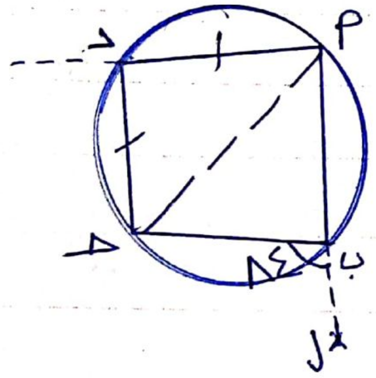
$(ص ع)^٢ = ١١٥٦ - ١٠٠ = ١٠٥٦$

$ص ع = \sqrt{١٠٥٦}$ ← م = الطول × العرض

$= ١٠ \times \sqrt{١٠٥٦}$ سم²

---

١١) أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه أ د = جـ د مد أ ب في اتجاه ب الى النقطة ل بحيث ان :- ق∢ جـ ب ل = ٨٤ ، جد ق∢ د جـ أ



الحل :-

ق∢ جـ ب ل = ق∢ أ د جـ (مبرهنة)

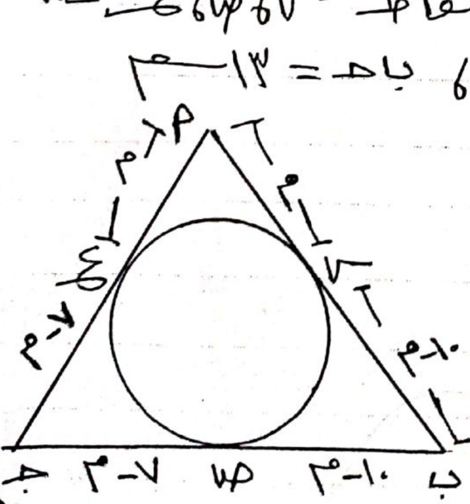
ق∢ أ د جـ = ٨٤°

المثلث أ د جـ متطابق الضلعين :-

$ق∢ د أ جـ = \frac{١٨٠ - ٨٤}{٢} = ٤٨°$

---

١٣) رسمت دائرة داخل المثلث أ ب جـ ، بحيث تمس اضلاعه أ ب ، ب جـ ، جـ أ في النقاط س ، ص ، ع على التوالي ، اذا كان أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم جـ أ = ٧ سم جد أ س .



الحل :

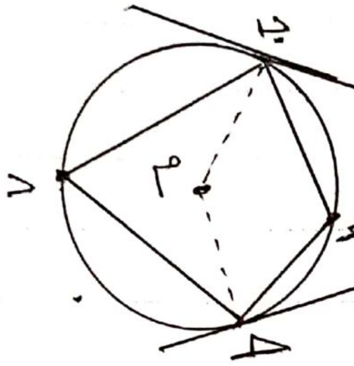
محيط المثلث = ٣٠

$\cancel{م} + \cancel{م} + ١٠ - م + ١٠ - م + ٧ - \cancel{م} + ٧ - \cancel{م} + م + م = ٣٠$

$٣٤ - ٢م = ٣٠ ← ٢م = ٤ ← م = ٢$

أ س =

١٤) أب ، أجـ مماسان لدائرة مركزها م ، عند النقطتين ب ، جـ
ق∢ب أ جـ = ٣٤ ، د نقطة على القوس الأكبر ب جـ
هـ نقطة على القوس الأصغر ب جـ جد قياس كل
من :- ∢ ب د جـ ، ∢ ب هـ جـ



الحل :-

صل ب م ، جـ م

ب م ⊥ أ ب (مبرهنة)

ق∢ م ب أ = ٩٠

م جـ ⊥ أ جـ (مبرهنة)

ق∢ م جـ أ = ٩٠°

لكن ق∢ م ب أ + ق∢ م جـ أ = ١٨٠ ← الشكل أ جـ م ب رباعي دائري

ق∢ ب م جـ + ق∢ ب أ جـ = ١٨٠

ق∢ ب م جـ + ٣٤ = ١٨٠

ق∢ ب م جـ = ١٨٠ − ٣٤ = ١٤٦

ق∢ ب د جـ = ½ ق∢ ب م جـ = ½ × ١٤٦ = ٧٣ محيطية ومماسية

في الشكل الرباعي الدائري ب هـ جـ د فإن :-

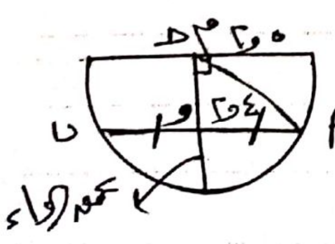
ق∢ ب هـ جـ + ق∢ ب د جـ = ١٨٠

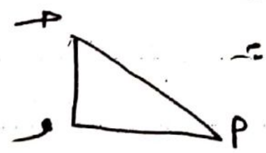
ق∢ ب هـ جـ + ٧٣ = ١٨٠

ق∢ ب هـ جـ = ١٨٠ − ٧٣ = ١٠٧

---

١٥) قناة مائية ، مقطعها العرضي على شكل نصف دائرة
طول قطرها ٥ م ، عرض سطح الماء فيها ٤,٨ م
جد عمق الماء في القناة.





الحل :- نطبق فيثاغورس :-

(أ جـ)² = (أ و)² + (جـ و)²

(٢,٥)² = (٢,٤)² + (جـ و)²

$(هو)^2 = (٢و٥)^2 - (٢و٤)^2 = ٠و٤٩ \leftarrow هو = ٠و٧$

عمق الماء = ٢و٥ − ٠و٧ = ١و٨ م

١٦) في الشكل ، جد قيمة س

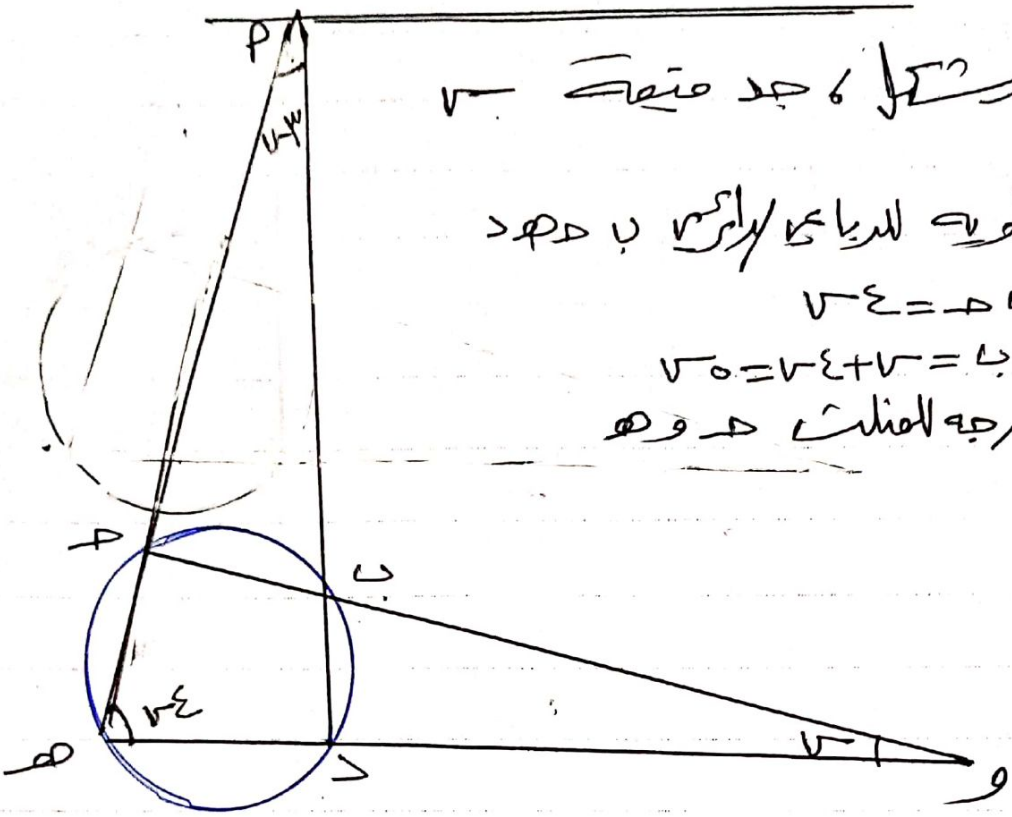
الحل :

∢ أ ب هـ زاوية للدائرية الرأسية ب هـ د

∴ ق∢ أ ب هـ = ٤س

ق∢ أ هـ ب = س + ٤س = ٥س

زاوية خارجية للمثلث هـ و هـ



مجموع زوايا المثلث أ ب هـ = ١٨٠

٣س + ٤س + ٥س = ١٨٠

١٢س = ١٨٠

س = ١٥°