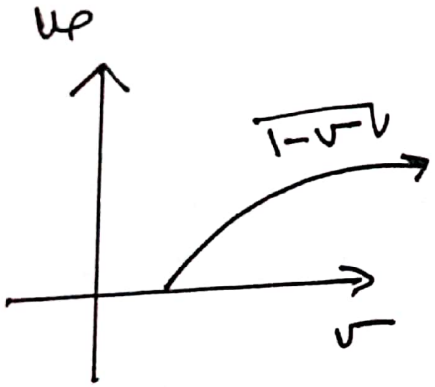
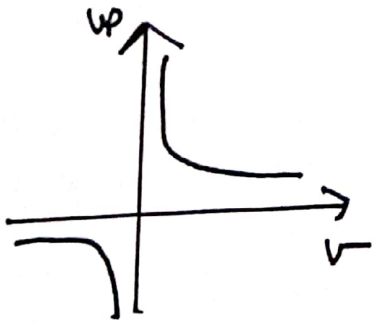
الرياضيات

الصف أ ـ ع

شرح مفصل للمادة
حل أسئلة الكتاب
اوراق عمل
امتحانات شهرية





$$ف(س) = ٤س^{٤} - ٣س^{٣} + ٥س - ٢$$

$$\sum_{ك=١}^{٥} ٢ك$$

Scanned by CamScanner

أولاً: قسمة كثيرات الحدود

$\frac{ن(س)}{ن(س)} = (س)(\frac{ق}{ق}) = (س)$

تذكير: $ن(س) = ٦س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧$ كثير حدود حيث قوة $(س)$ هي أعداد صحيحة موجبة $1, 2, 3, \ldots$ حيث درجته الحالة $= (\text{أعلى قوة لـ } (س))$ ونسمي $٦س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧$ معاملات كثير الحدود $٦، ٢، ٧$: الحد الثابت.

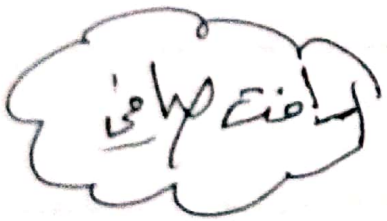
سنتعلم طريقتان للقسمة :-

١) القسمة الطويلة

* نرتب حدود المقترانين حسب الأعلى قوة
* نقسم الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه ونضع الناتج في خارج القسمة ثم نضربه بالمقسوم عليه ثم نقوم بالطرح مع المحافظة على الأكبر قوة في البداية
* نكرر الخطوات السابقة ونتوقف عندما تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

خارج القسمة
المقسوم عليه | المقسوم
الباقي

القسمة
المقسوم = القسمة × المقسوم عليه + الباقي



تذكير :-

* $٦س^{٢} = ٣س^{٢} \times ٢س^{٠}$ حيث نضرب المعاملات ونجمع الأسس

* نجمع أو نطرح فقط الحدود الجبرية المتشابهة وهي الحدود التي لها نفس القوة حيث :-

$٨س^{٣} = ٢س^{٣} + ٦س^{٣}$ ✓ فقط نجمع المعاملات مع بقاء المتغير نفسه

$٣س^{٥} + ٢س^{٦}$ لا تجمع ✗

Scanned by CamScanner

تدريب (١) :-

١) استخدم خوارزمية القسمة الطويلة لايجاد خارج قسمة
وباقي ق(س) = $س^{٣} - ٦س + ٤$ على هـ(س) = س - ٢

الحل :-
المقسوم والمقسوم عليه مرتبة حسب الأس من اليسار

$$\begin{array}{r|l} س^{٣} - ٦س + ٤ & س - ٢ \\ \hline س^{٣} - ٢س^{٢} & س^{٢} + ٢س - ٢ \\ \hline ٢س^{٢} - ٦س + ٤ & \\ ٢س^{٢} - ٤س & \\ \hline -٢س + ٤ & \\ -٢س + ٤ & \\ \hline ٠ & \end{array}$$

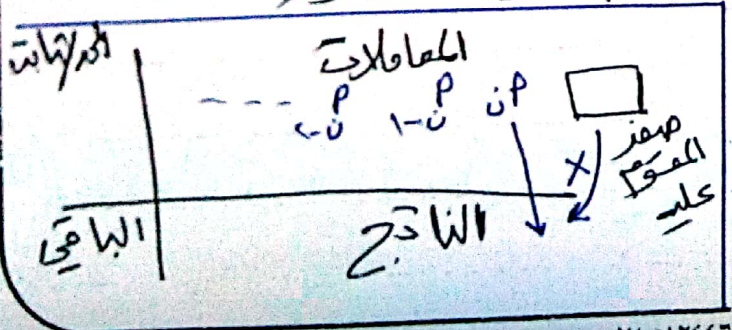
توضيح :-
الحد الأول من المقسوم $س^{٣}$
الحد الأول في المقسوم عليه س وعليه
نقسم :- $\frac{س^{٣}}{س} = س^{٢}$ حيث نضع
الناتج في خارج القسمة ...
ونكرر نفس الخطوات

خارج القسمة $س^{٢} + ٢س - ٢$ والباقي صفراً
دائماً درجة خارج القسمة = درجة المقسوم - درجة المقسوم عليه

٢) القسمة التركيبية

* شرطها :- المقسوم عليه من الدرجة الأولى هـ(س) = أ س + ب
خطواتها

١) ترتيب معاملات حدود المقسوم من الأكبر قوة لـ (س)
بحيث تتناقص واحد في كل مرة الى ان نصل الحد الثابت
حيث تضع أصفار مكان الحدود غير موجودة
٢) نجد صفر المقسوم عليه ((نضع هـ(س) = ٠)) ونأخذ مقلوبه (س)
ونضعها الى اليمين
٣) تنزل معامل الحد الأول ونضربه في صفر المقسوم عليه
ونضع الناتج تحت المعامل الثاني ثم نجمع ... ونكرر نفس
الخطوات



Scanned by CamScanner

تدريب (٢)

جد خارج وباقي قسمة $م(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ١$ على $هـ(س) = س + ١$ باستخدام القسمة التركيبية

الحل :-

أعلى قوة للمقسوم هي (٣) حيث نبدأ من $س^٣$ ثم $س^٢$ ثم $س$ ثابت

وكذلك صفر المقسوم عليه -١ ($س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١$)

بما أن المقسوم من الدرجة الثالثة فإن ناتج أقل قوة بواحد وباقي من الدرجة الصفرية

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	-٢	٠	-٣
-١		-١	٣	
	١	-٣	٣	-٢

الناتج — الباقي

خارج القسمة $= س^٢ - ٣س + ٣$

الباقي -٢ حيث باقي دائماً عدد ثابت

تدريب (٣) :-

إذا كان $م(س) = س^٤ - ٢س^٣ + ٨س + ٤$ ، $هـ(س) = س + ٢$ مجد

١) $(\frac{م}{هـ})(-٢)$ ٢) $(\frac{م}{هـ})(١)$

الحل :-

١) خارج القسمة :-

$س^٣ - ٤س^٢ + ٨س - ٤$

والباقي = ٠

	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	-٢	٠	٨	٤
-٢		-٢	٨	-١٦	
	١	-٤	٨	-٨	٠

$$٢) \left(\frac{م}{هـ}\right)(١) = \frac{م(١)}{هـ(١)} = \frac{١ - ١ + ٨ + ٤}{١ + ٢}$$

$$= \frac{١٢}{٣} = ٤$$

ملاحظة

بما أن الباقي صفراً فهذا يعني إيجاد $\frac{م}{هـ}(١)$ من خلال التعويض في خارج القسمة

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) إذا كان $م(س) = س^٥ - ٦س^٣ + س^٢ - ٨س - ٤$ ، $هـ(س) = س^٢ - س + ٢$

أوجد بدون قسمة ما يأتي :

أ) $(\frac{م}{هـ})(-١)$ ب) $(\frac{م}{هـ})(٣)$

الحل :

أ) $س^٢ - س + ٢ \overline{)\ س^٥ - ٦س^٣ + س^٢ - ٨س - ٤}$

$س^٥ - س^٤ + ٢س^٣$

$-س^٤ - ٨س^٣ + س^٢ - ٨س - ٤$

$-س^٤ + س^٣ - ٢س^٢$

$-٩س^٣ + ٣س^٢ - ٨س - ٤$

$-٩س^٣ + ٩س^٢ - ١٨س$

$-٦س^٢ + ١٠س - ٤$

$-٦س^٢ + ٦س - ١٢$

الباقي $\leftarrow$ $-٤س + ٨$

ب) $(\frac{م}{هـ})(٣) = \frac{م(٣)}{هـ(٣)}$

$= \frac{٢٤٣ - ٢١٦ + ٩ + ٤ - ٤}{٩ - ٣ + ٢}$

$= \frac{١١٠}{٨}$

$= \frac{٥٥}{٤}$

رافت صافي

$(\frac{م}{هـ})(س) = س^٣ + س^٢ - ٧س - ٨ + \frac{-٤س + ٨}{س^٢ - س + ٢}$

٢) جد خارج وباقي قسمة كثير الحدود م على كثير الحدود هـ في كل مما يأتي

أ) $م(س) = س^٣ - ٦س^٢ - ٤$ ، $هـ(س) = س^٢ + ١$

الحل :

$س - ٦ \overline{)\ س^٣ - ٦س^٢ - ٤}$

$س^٣ + س$

$-٦س^٢ - س - ٤$

$-٦س^٢ - ٦$

$-س + ٢$

خارج القسمة : $س - ٦$

الباقي $-س + ٢$

ب) $م(س) = س^٥ - ٣٢$ ، $هـ(س) = س - ٢$

الحل :

خارج القسمة $س^٤ + ٢س^٣ + ٤س^٢ + ٨س + ١٦$

وباقي القسمة صفراً

	$س^٥$	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٠	٠	٠	٠	-٣٢
٢		٢	٤	٨	١٦	٣٢
	١	٢	٤	٨	١٦	٠

Scanned by CamScanner

٣) استخدم القسمة التركيبية في ايجاد خارج وباقي قسمة كثير الحدود م(س) على كثير الحدود هـ اذا كان :-

أ) م(س) = $س^٤ - ٦س^٣ + ٥س^٢ + ١$ ، هـ(س) = $س - ٣$

الحل :-

خارج القسمة :-

$س^٣ - ٣س^٢ - ٤س - ١٢$

الباقي = ٣٥

	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	س	ثابت
٣	١	٦-	٥	٠	١
	١	٣-	٤-	١٢-	٣٥-

ب) م(س) = $س^٣ - ٨س^٢ + ٤س - ١٠$ ، هـ(س) = $س + ١$

الحل :-

خارج القسمة :-

$س^٢ - ٩س + ١٣$

الباقي = ٢٣-

	$س^٣$	$س^٢$	س	ثابت
١-	١	٨-	٤	١٠-
	١	٩-	١٣	٢٣-

---

٤) سجادة مستطيلة الشكل مساحتها تقطل بالامتار م(س) = $(س^٣ + ٣س^٢ + ١٦)$ م^٢. اذا كان طول السجادة م(س+٤) م فجد عرضها بدلالة س

الحل :-

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$س^٣ + ٣س^٢ + ١٦$ = (س+٤) × العرض

العرض = $\frac{س^٣ + ٣س^٢ + ١٦}{س + ٤}$

$= س^٢ - س + ٤$

عرض السجادة $(س^٢ - س + ٤)$ م

٤-	١	٣	٠	١٦
	١	٤-	٤	١٦
	١	١-	٤	٠

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

ثانياً :- نظرية الباقي والعامل

* توجد طريقة سريعة لايجاد باقي قسمة $م(س)$ على $هـ(س) = أ س + ب$ بشرط $هـ(س)$ كثير حدود من الدرجة الأولى، كما يلي :-

١) ضع $هـ(س) = 0$ وجد قيمة $س$ وليكن $س = ك$

٢) جد صورة $ك \longrightarrow م(ك)$ وهو يمثل الباقي

تدريب (١)

استخدم نظرية الباقي لايجاد باقي قسمة المقدار $م$ على $هـ$ في ما يأتي :-

١) $م(س) = س^3 - ٤س^2 - ٧$ ، $هـ(س) = س + ٢$

الحل :- $س + ٢ = 0$

$س = -٢$ صفر المقدار $هـ(س)$

$م(-٢) = -٨ - ١٦ - ٧ = -٣١$

باقي قسمة $م(س)$ على $هـ(س)$ يساوي -٣١

٢) $م(س) = س^3 - ٢س + ٢$ ، $هـ(س) = س - ١$

الحل :-

$س - ١ = 0$

$س = ١$ صفر المقدار $هـ(س)$

$م(١) = ١ - ٢ + ٢ =$ صفراً

باقي قسمة $م(س)$ على $هـ(س)$ يساوي صفراً

نظرية العامل

تذكير :- عوامل العدد ٦ هي ١، ٢، ٣، ٦ عند قسمة عوامل العدد ٦ على العدد ٦ يكون الباقي صفراً وعليه $هـ(س)$ عامل من عوامل $م(س)$ اذا كان الباقي صفراً (عند اجراء القسمة)

Scanned by CamScanner

توضيح :-

لمعرفة هل هـ(س) من عوامل م(س) ، نجد الباقي بحيث :-

١) الباقي صفراً ← من عوامله

٢) الباقي ليس صفراً ← ليس من عوامله

تدريب (٢) :-

اذا كان هـ(س) = س + ١ عاملاً من عوامل كثير الحدود

م(س) = $س^{٣}$ + ٢ب $س^{٢}$ − س − ٨ جد قيمة الثابت (ب)

الحل :-

بما أن هـ(س) من عوامل م(س) فان باقي القسمة صفراً

س + ١ = ٠

س = −١

باقي القسمة م(−١) = −١ + ٢ب + ١ − ٨ = ٢ب − ٨

باقي القسمة = صفراً

٢ب − ٨ = ٠

+٨ +٨

٢ب = ٨ ← **ب = ٤**

رافت ابراهيم صافي

تمارين وصائل

١) استخدم نظرية الباقي لايجاد باقي قسمة م على هـ

أ) م(س) = $س^{٣}$ − ٤$س^{٢}$ + ٣س ، هـ(س) = س + ١

ب) م(س) = $س^{٣}$ − ٣$س^{٢}$ − ٤س + ٤ ، هـ(س) = ٢س − ١

جـ) م(س) = ٩$س^{٣}$ + $س^{٢}$ − ٣س − ٨ ، هـ(س) = ٣س − ٢

الحل :-

أ) س + ١ = ٠ ← س = −١

م(−١) = −١ − ٤ − ٣ = −٨ باقي القسمة

ب) ٢س − ١ = ٠

+١ +١

٢س = ١

س = $\frac{١}{٢}$

م($\frac{١}{٢}$) = ٣ × $\frac{١}{١٦}$ − ١ + ٤ = $\frac{٣}{١٦}$ + ٣ = $\frac{٥١}{١٦}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

هـ) $3س - 2 = 0$

$+2 \quad +2$

$3س = 2$

$س = \frac{2}{3}$

$م(\frac{2}{3}) = 9 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{3} - 8 = 4 + 4 - 8 = -8$

---

٢) يكون $(س - ل)$ عاملاً من عوامل $م$ في كل حالة من الحالات الآتية :-

أ) $م(س) = 2س^3 + 5س^2 - 4$ ، $ل(س) = س + 2$

ب) $م(س) = 2س^4 - 3س^2 - 2$ ، $ل(س) = س - 2$

جـ) $م(س) = 4س^5 - 3س^4 + 5س - 2$ ، $ل(س) = س - 2$

الحل :-

أ) $س + 2 = 0$

$س = -2$

$م(-2) = 2 \times (-2)^3 + 5 \times (-2) + 4 = -16 + 10 + 4 = 0$ ← صفراً ← عامل

ب) $س - 2 = 0$

$س = 2$

$م(2) = 2 \times 16 - 2 \times 4 = 32 - 8 = 24$ ← صفراً ← عامل

جـ) $س - 2 = 0$

$س = 2$

$م(2) = 4 \times 16 - 8 + 10 - 2 = 60$ ← ليس عاملاً

---

٣) جد قيمة الثابت $ك$ التي تجعل العبارات الآتية صحيحة :-

أ) $س - 1$ عاملاً من عوامل $م(س) = س^4 - 3س^2 + ك س - 6$

ب) باقي قسمة $م(س) = ك س^2 + (ك + 3)س + 4$ على $هـ(س) = س + 2$ يساوي 8

الحل :-

أ) باقي القسمة صفراً

$س - 1 = 0$

$س = 1$

$م(1) = 1 - 3 + ك - 6 = ك - 8$

$ك - 8 = 0$ ← $ك = 8$

رافت صافي

Scanned by CamScanner

ب) $س + ٢ = ٠$

$س = -٢$

$م(-٢) = ٤ أ + (أ+٣) \times -٢ + ٤ = ٤ أ - ٢ أ - ٦ + ٤ = ٢ أ - ٢$

لكن باقي القسمة يساوي ٨

$٢ أ - ٢ = ٨$

$+٢ \quad +٢$

$٢ أ = ١٠ \leftarrow \boxed{أ = ٥}$

---

٤) متوازي مستطيلات حجمه $س^٣ - ٨ س + أ$ وحدة مربعة جد قيمة الثابت أ إذا تمثل $س - ١$ بعداً من أبعاده.

الحل :- أبعاد أي مجسم او شكل تمثل عواملة

$س - ١ = ٠$

$س = ١$ نفوض في الحجم :-

$١ - ٨ + أ = ٠$

$-٧ + أ = ٠ \leftarrow \boxed{أ = ٧}$

رافت ابراهيم

---

٥) اذا كان $م(س) = س^ن - أ^ن$ ، ن عدد صحيح $\neq ٠$ أثبت ان :

أ) عندما يكون ن عدداً زوجياً فان $س + أ$ ، $س - أ$ عاملان من عوامل م

ب) عندما يكون ن عدد فردي فان $س - أ$ من عوامل م.

الحل :- $س + أ = ٠ \leftarrow س = -أ$

$م(-أ) = (-أ)^ن - أ^ن$

$-أ + أ = ٠ \leftarrow س = أ$

$م(أ) = أ^ن - أ^ن = ٠$ صفراً

لكن ن فردي :- $(-أ)^ن = -أ^ن$

$(-أ)^ن - أ^ن = -٢ أ^ن$ ≠ صفراً

$س + أ$ ليس عاملاً ∵ ن : فردي

$س - أ$ عاملاً عند ن : فردي

ن زوجي $\leftarrow (-أ)^ن = (أ^ن)$

$(-أ)^ن - أ^ن =$ صفراً

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

١) اذا كان $م(س) = س^4 - 3س^2 + 1$ ، $هـ(س) = 2س + س^2$

جد :-

أ) $(\frac{م}{هـ})(س)$ ب) $(\frac{م}{هـ})(2)$

---

٢) هل يقبل $م(س) = 3س^3 + س^2 - 3س - 3$ القسمة على $هـ(س) = س + 1$

---

٣) جد خارج القسمة والباقي لكل مما يلي باستخدام طريقة القسمة التركيبية $هـ$ على $م$

أ) $هـ(س) = س^3 - 3س^2 + 5$ ، $م(س) = 2س - 8$

ب) $هـ(س) = س^4 + 3$ ، $م(س) = س - 3$

---

٤) متوازي مستطيلات يمثل حجمه بالأقران $م(س) = س^3 + 3س^2 - 3س$ اذا مساحة قاعدته $(س^2 + 2س - 3)$ م^2 جد ارتفاعه بدلالة $س$

تذكير :- حجم متوازي مستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

---

٥) جد باقي قسمة $م$ على $هـ$ دون اجراء القسمة

أ) $م(س) = س^3 - 3س + 3$ ، $هـ(س) = س - 6$

ب) $م(س) = س(س+1)^3 + 1$ ، $هـ(س) = س + 2$

---

٦) $م(س) = 3س^3 - س^2 + س - 3$ أي عامل مما يلي عامل من عوامل $م(س)$

أ) $هـ(س) = س + 1$ ب) $ل(س) = 2س - 6$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٣٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

٧) $هـ(س) = س + ١$ عاملاً من عوامل كثير الحدود
$و(س) = س^{٤} - ٤ب س^{٣} + ٢س - ٧$ حيث ب ثابت

٨) باقي قسمة $و(س) = ٩س^{٢} - (٤+ب)س + ٩$
على $هـ(س) = س - ٢$ يساوي ٥ جد ثابت ب

٩) جد خارج وباقي قسمة $و(س) = س(س^{٢}+١) - ٧$
على $هـ(س) = س + ٣$

١٠) اذا كان باقي قسمة $و(س) = س^{٢} + ٤س + ٢٠$
على $س - ٩$ مثل باقي قسمة $و(س)$ على $س + ٩$
حيث متغير الثابت ب

١١) اذا كان باقي قسمة كثير الحدود $و(س)$ على $هـ(س) = س + ١$
يساوي ٨ وكان $ل(س) = ٣و(س) + ١١س + ١٠$ جد $ل(-١)$

Scanned by CamScanner

ثالثاً:- تحليل كثيرات الحدود

مراجعه سابقه:-

المقصود بالتحليل هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب

(١) فرق بين مربعين

$$أ^2 - ب^2 = (أ - ب)(أ + ب)$$

جذر الحد الأول — جذر الحد الثاني

نقط صافي

* $س^2 - 9 = (س-3)(س+3)$
* $1 - س^2 = (1-س)(1+س)$
* $16 - 25ص^2 = (4-5ص)(4+5ص)$
* $9 - 4س^2 = (3-2س)(3+2س)$
* $(2س+1)^2 - 9 = (2س+1-3)(2س+1+3) = (2س-2)(2س+4)$
* $81 - (س+1)^2 = (9-(س+1))(9+(س+1)) = (8-س)(10+س)$
* $س^4 - 16 = (س^2-4)(س^2+4)$
$= (س-2)(س+2)(س^2+4)$

$س^2 + ص$ عدد موجب، $ن$ زوجي ← تحلل

(٢) فرق مكعبين

$$أ^3 - ب^3 = (أ - ب)(أ^2 + أب + ب^2)$$

جذر تكعيبي للحد الأول — جذر تكعيبي للحد الثاني — الأول في نفسه — الأول في الثاني — الثاني في نفسه

دائماً موجبة

* $س^3 - 8 = (س-2)(س^2+2س+4)$
* $27 - س^3 = (3-س)(9+3س+س^2)$
* $(س+2)^3 - 125 = (س+2-5)((س+2)^2+5(س+2)+25)$
$= (س-3)((س+2)^2+5(س+2)+25)$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

(٣) مجموع مكعبين

$$أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$$

(عكس) ← (دائماً موجب)

* $س^{٣} + ٢١٦ = (س + ٦)(س^{٢} - ٦س + ٣٦)$
* $\frac{١}{٨}س^{٣} + ١ = (\frac{١}{٢}س + ١)(\frac{١}{٤}س^{٢} - \frac{١}{٢}س + ١)$

(الله يسامحك)

(٤) الفقد الثلاثي

:- وجود $س^{٢}$ مع $س$ مع عدد لوحده يفصل بينهما الجمع والطرح.

حالة (١) :- $س^{٢} + ب س + حـ$:- معامل $(س^{٢})$ هو الواحد.

$$س^{٢} + ب س + حـ = (س \square)(س \square)$$

نبحث عن عددان حاصل الضرب (حـ) ومجموعهما (ب)

* $س^{٢} + ٢س - ٣ = (س + ٣)(س - ١)$ ← توضيح ← نبحث عن عددان ضربهما (-٣) ومجموعهما (٢)
* $س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س + ٤)(س + ٣)$
* $س^{٢} - ٥س + ٤ = (س - ١)(س - ٤)$ ← اذا (حـ) موجب فان العددان سالبان او موجبان وذلك حسب اشارة (ب)
* $س^{٢} - س - ٦ = (س - ٣)(س + ٢)$ ← اذا كانت (حـ) سالب فان العددان مختلفان بالاشارة والعدد الكبير باخذ اشارة (ب)

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

نحلل المدلول والمحور بشرط مجموع القريبان والبعيدان يعطيا الحد الاوسط

حاله (٢) :- معامل $س^2 \neq 1$ بعيدان

$أ س^2 + ب س + حـ = (\square س \square)(\square س \square)$

قريبان

* $٢س^2 - ٣س + ١ = (٢س - ١)(س - ١)$

لاحظ :- $-٢س$ البعيدان
$-١س$ القريبان
المجموع $-٣س$ الحد الاوسط

* $٣س^2 - س - ١٤ = (٣س - ٧)(س + ٢)$

رافت صافي

(٥) عامل مشترك

اذا كان المقدار الجبري ليس فرق مربعين/مكعبين/مقدار ثلاثي :- في هذه الحالة نلجأ الى اخراج عامل مشترك يتكون من عدد يقبل القسمة على المعاملات (ان وجد) واقل قوة للمتغيرات ان وجد في كل حد

ملاحظة اذا كانت قوة (س) واحد مطلوع أو مضاف اليها عدد نحلل دائماً باخراج معاملها فقط عامل مشترك (ان امكن).

* $٣س - ١٢ = ٣(س - ٤)$

$س = \frac{٣س}{٣}$ ، $٤ = \frac{١٢}{٣}$

* $٢س^2 - ٨ = ٢(س^2 - ٤)$
$= ٢(س - ٢)(س + ٢)$

* $س^3 - ٢س^2 - ١٥س = س(س^2 - ٢س - ١٥)$
$= س(س - ٥)(س + ٣)$

* $٢س^2 - ٢س - ٤ = ٢(س^2 - س - ٢)$
$= ٢(س - ٢)(س + ١)$

* $٢س^4 + ٥٤س = ٢س(س^3 + ٢٧) = ٢س(س + ٣)(س^2 - ٣س + ٩)$ (١٣)

توضيح
عند اخراج العامل المشترك نقوم بقسمة كل حد عليه

Scanned by CamScanner

ملاحظات :-

١) المقدار التالي اذا كان مميزه سالب فانه لا يحلل

مثلاً :- $س^٢ + ٢س + ٧$

$أ = ١$ معامل $س^٢$
$ب = ٢$ معامل $س$
$حـ = ٧$ الحد المطلق

$\Delta = ب^٢ - ٤ أ حـ$
$= ٤ - ٤ \times ١ \times ٧ = -٢٤$ (سالب)

وفي هذه الحالة نقول أن $س^٢ + ٢س + ٧$ عاملاً أولياً لأننا لم نستطع تحليله الى عوامل جبرية اقل منه بدرجة

٢) معامل الجبرقوة كثيرة الحدود يسمى المعامل الرئيسي

في هذا الدرس سنتعلم تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة مما فوقه لكونها ٣ حدود على الاقل مع وجود ثابت

عند اعطاء اقتران كثير حدود من الدرجة ٣ أو ٤ ... وأردنا البحث عن اصفاره ، في هذه الحالة نتابع الى وقت وجهد كبير بالتجريب ، لكن توجد نظرية سريعة تعطينا طريقة ايجاد الاصفار المحتملة لتوفر لنا الجهد في التجريب .

نظرية الاصفار النسبية :-

$ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ$ كثير حدود جميع معاملاته اعداد صحيحة ، اذا كان العدد النسبي $\frac{ب}{حـ}$ صفراً من اصفار الاقتران ق فان ب عامل من عوامل الحد الثابت أ ، حـ عامل من عوامل المعامل الرئيسي

باختصار :-

١) نجد عوامل الحد الثابت وعوامل المعامل الرئيسي ونقسمهم

٢) المعامل الرئيسي (١) ← فقط عوامل الحد الثابت

Scanned by CamScanner

تدريب (١) :-
جد الاصفار النسبية المحتملة لكل من المقدارات الآتية :

١) $م(س) = س^{٣} - ٨س^{٢} + س - ١٨$

٢) $ك(س) = ٢س^{٥} - ٣س^{٤} + ٢س^{٣} + ١٢س + ١٢$

الحل :- ١) قيم ب :- $\pm ١٨ ، \pm ٩ ، \pm ٦ ، \pm ٣ ، \pm ٢ ، \pm ١$

وهي الاصفار المحتملة لان (معامل الرئيسي (١)

٢) قيم ب :- $\pm ١٢ ، \pm ٦ ، \pm ٤ ، \pm ٣ ، \pm ٢ ، \pm ١$

قيم ﺟ :- $\pm ٢ ، \pm ١$

قيم $\frac{ب}{ﺟ}$:- $\pm ١ ، \pm \frac{١}{٢} ، \pm ٢ ، \pm ٣ ، \pm \frac{٣}{٢} ، \pm ٤ ، \pm ٦ ، \pm ١٢$

كيف نحلل :-

١) نجد اولاً صفراً للمقدار من خلال الاستفادة من نظرية الاصفار النسبية وليكن (ﻫ)

٢) يكون $س - ﻫ$ عامل من عوامل $م(س)$

٣) نقوم بالقسمة التركيبية من خلال قسمة $م(س)$ على $(س - ﻫ)$ ثم نكرر الى ان نصل الى العوامل الاولية

كذكير ١) الدرجة الاولى ← اولية

٢) الدرجة الثانية لذي مميزه سالب ← اولية

٣) قبل التحليل ابحث عن عامل مشترك وخاصة ان وجد في كل حد $(س)$

تدريب (٢)

حلل كثير حدود $م(س) = س^{٦} - ٢س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} - س - ٢$

الحل :-

الاصفار المحتملة :- $\pm ١ ، \pm ٢$ بالتجريب $م(-١) = صفراً$

$س - (-١) = (س + ١)$ عامل من عوامل $م(س)$

نجد خارج قسمة $م(س)$ على $س + ١$

	$س^{٦}$	$س^{٥}$	$س^{٤}$	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س^{١}$	$س^{٠}$
	١	١	-٢	١	١	-٢	
-١		-١	٠	٢	-٣	٢	
	١	٠	-٢	٣	-٢	٠	

الناتج $س^{٤} - ٢س^{٢} + ٣س - ٢$

نكرر نفس الخطوات

Scanned by CamScanner

الأصفار المحتملة : $\pm 1, \pm 2$ بالتجربة $ق(1) = 0$

$(س - 1)$ من عوامل $س^4 - 2س^3 + س^2 + 3س - 3$

الناتج $س^3 + س^2 - س + 3$

نكرر نفس الخطوات

	$س^4$	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	0	-2	3	-3
		1	1	-1	3
	1	1	-1	3	0

الأصفار المحتملة $\pm 1, \pm 3$

$ق(-3) =$ صفراً

$س + 3$ عامل من عوامل $س^3 + س^2 - س + 3$

الناتج $س^2 - س + 1$ لا يحلل لأن المميز سالب

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
-3	1	1	-1	3
		-3	6	-15
	1	-2	5	-12

$\therefore س^5 + س^4 - 2س^3 + س^2 + س - 2 = (س + 1)(س - 1)(س + 2)(س - 3)(س^2 - س + 1)$

تمارين ومسائل

1) جد الأصفار المحتملة لكل من كثيرات الحدود الآتية :-

أ) $ق(س) = 6س^3 - 8س^2 + 12س$

ب) $هـ(س) = 2س^4 - 8س^3 + 20س + 30$

ج) $ل(س) = س^5 - 4س^4 - 3س^2 - 10$

الحل : أ) قيم ب :- $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12$

قيم ﻫ :- $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\frac{ب}{ﻫ}$: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 2, \pm \frac{4}{3}, \pm 4, \pm 6$

ب) قيم ب : $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

قيم ﻫ : $\pm 1, \pm 2$

$\frac{ب}{ﻫ} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

ج) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5$ العامل الرئيسي = 1

نقطة قيم ب

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

* مرجع (٥) من السؤال (٢) في نهاية الحل

٢) حلل كثيرات الحدود الآتية الى عواملها الأولية :-

أ) $ق(س) = س^٤ - ٨١$

الحل :-

$س^٤ - ٨١ = (س^٢ - ٩)(س^٢ + ٩)$ ← لا تحلل المميز سالب

$= (س - ٣)(س + ٣)(س^٢ + ٩)$

ب) $ع(س) = ٥س^٦ - ٤٠س^٣$ عامل مشترك

الحل :-

$٥س^٦ - ٤٠س^٣ = ٥س^٣(س^٣ - ٨)$ ← فرق مكعبين

$= ٥س^٣(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

ج) $م(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٣س + ٦$

الحل :-

الاصفار المحتملة $\pm ١ ، \pm ٢ ، \pm ٣ ، \pm ٦$ بالتجريب $ق(-١) =$ صفر

$س + ١$ عامل من عوامل $ق(س)$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	-٢	٣	٦
-١		-١	٣	-٦
	١	-٣	٦	٠

الناتج $س^٢ - ٣س + ٦$ لا تحلل لان المميز سالب

$س^٣ - ٢س^٢ + ٣س + ٦ = (س + ١)(س^٢ - ٣س + ٦)$

---

٣) جد قيمة $ع$ التي تجعل $س - ١$ عاملاً من عوامل

$ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ع س - ٤$

الحل :- $س - ١ = ٠$

$س = ١$

$ق(١) = ١ - ٣ + ع - ٤ = ع - ٦$ ← الباقي صفراً لان عامل من عوامل $ق(س)$

$ع - ٦ = ٠$

$\boxed{ع = ٦}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

٤) بناية على شكل متوازي مستطيلات حجمها :-
$س^3 + 2س^2 - 4س - 8$ وحدة مكعبة اذا كان احد أبعاد البناية $س - 2$ وحدة جد جميعها اذا عرفت بدلالة $س$

الحل :-

$س - 2$ من عوامل الحجم

لتحلل $س^2 + 4س + 4$

$س^2 + 4س + 4 = (س + 2)(س + 2)$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
2	1	2	-4	-8
		2	8	8
	1	4	4	0

$س^3 + 2س^2 - 4س - 8 = (س - 2)(س + 2)(س + 2)$

البعدان الآخران : $س + 2$ ، $س + 2$

---

٥) جد كثير حدود من الدرجة الثالثة اصفاره

1 ، -2 ، 4

الحل :-

$1 \longleftarrow س - 1$

$-2 \longleftarrow س + 2$ عوامل $م(س)$

$4 \longleftarrow س - 4$

$م(س) = (س - 1)(س + 2)(س - 4)$

$م(س) = (س^2 + س - 2)(س - 4)$

$م(س) = س^3 - 4س^2 + س^2 - 4س - 2س + 8$

$م(س) = س^3 - 3س^2 - 6س + 8$

$س^2 + 2س - س - 2$

$س^2 + س - 2$

---

٦) د) $س^3 + س - 2$

الحل :-

$س^3 + س - 2 = (س - 1)(س^2 + س + 2)$

أولي مميزه سالب

$م(1) = 0$

$س - 1$ من عوامل $م(س)$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	0	1	-2
	1	1	1	2
	1	1	2	0

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

١) جد الأصفار لكل من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س^3 - 2س^2 - 11س + 12$ ب) $ق(س) = س^4 + 3س^3 - 9س^2 - 3س + 6$

٢) حلل كثيرات الحدود:-

أ) $ق(س) = س^4 - 16$

ب) $ق(س) = س^5 - 5س^3 - 5س^2$

ج) $ق(س) = س^3 - 3س - 2$

د) $ق(س) = 2س^6 - 16 - س^3$

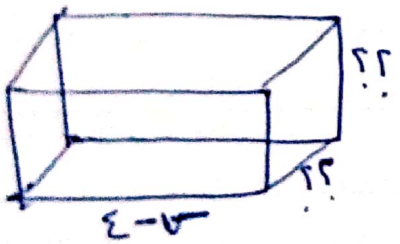
هـ) $ق(س) = س^5 - 2س^4 - 5س^3 + 14س + 12$

و) $ق(س) = 2س^3 - س^2 - 8س - 5$

٣) متوازي مستطيلات حجمه $ح(س) = س^3 + 3س^2 - 6س + 32$

إذا كان $س - 4$ أحد أبعاده

جد بعديه الآخرين بدلالة $(س)$



٤) حلل $ق(س) = 2س^3 - 5س - 6$ عاملي كواملة

مقدمة :-

$\frac{ه(س)}{ل(س)}$ = ق(س) كثير حدود بشرط ان درجة س اعداد صحيحة موجبة 1، 2، 3، ... وبشرط عدم وجود قوة سالبة او تكون س تحت جذر او في المقام

يقال بان ق(س) اقتران نسبي اذا كان كل من ه(س)، ل(س) كثيرا حدود ل(س) ≠ 0 لجميع قيم س في مجال ق(س)

كيف نكتب صيغة مكافئة او نكتب الاقتران النسبي في ابسط صورة :-

1) نحلل كل من بسط ومقام (ان امكن)
2) نختصر العوامل المشتركة

ملاحظة

ان كان ل(س) مقاربا جميع الاولى بجذبا في المقدمة هـ على ل. حيث ان كان صفراً نحلل ه(س) أما ليس صفراً نتوقف ويكون المقدار في ابسط صورة

تدريب (1) :- أي الاقترانات الآتية نسبي وايها غير نسبي مع ذكر السبب :-

1) ق(س) = $\frac{س^3 - س^3}{س + 4}$

2) ق(س) = $\frac{1 + س^3}{2س - 4}$

3) ق(س) = $\frac{س^{-1} + س}{س^3 - 3س + 1}$

4) ق(س) = $\frac{1 + س^3 - 6س^{-4}}{1 + 4س - س^2}$

الحل :-

ق(س) نسبي لان البسط والمقام كثيرا حدود

ق(س) غير نسبي لان $س^{-1} + س$ ليس كثير حدود $\frac{1}{4}س^3 - س^3 + س$

Scanned by CamScanner

تدريب (٢) :-
اكتب صيغاً مكافئة لكل من الاقترانات النسبية الآتية بابط صورة ممكنة :.

البسط :- مقدار الأس
المقام :- نستخدم الاقتران النسبية

١) $ق(س) = \frac{س^2 - ٥س + ٦}{س^3 - ٢س^2 + س - ٣}$

الحل :-
$ق(س) = \frac{(س-٣)(س-٢)}{(س-٣)(س^2+١)} = \frac{س-٢}{س^2+١}$

٢) $ل(س) = \frac{س^4 + ٢س^3 + س}{س^2 + ٣س}$

الحل :-
$ل(س) = \frac{س(س^3+٢س^2+١)}{س(س+٣)} = \frac{س^3+٢س^2+١}{س+٣}$

ابسط صورة لان باقي صفة البسط على المقام ليست صفرا

٣) $ع(س) = \frac{س^3 - ٨}{س^2 - ٤}$

الحل :-
$ع(س) = \frac{(س-٢)(س^2+٢س+٤)}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{س^2+٢س+٤}{س+٢}$

تدريب (٣)
اذا كان اقتران الايراد الكلي لمبيعات س من الوحدات المنتجة من سلعة ما هو $د(س) = -٢س^2 + ٦٠س$ فاكتب المقدار $\frac{د(ع) - د(٢)}{ع - ٢}$ بابط صورة

الحل :-
$\frac{د(ع)-د(٢)}{ع-٢} = \frac{-٢ع^2 + ٦٠ع - ١١٢}{ع-٢} = \frac{-٢(ع^2 - ٣٠ع + ٥٦)}{ع-٢}$
$= \frac{-٢(ع-٢)(ع-٢٨)}{ع-٢}$
$= -٢ع + ٥٦$

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) اكتب الدالة الآتية امثلة على اقترانات نسبية :-

الحل :-

$$ق(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٦}{س^٣ + ٧}$$ ، $$ك(س) = \frac{س + \frac{٣}{٤}س^٦}{س + ٢}$$ ، $$ل(س) = \frac{س^٦ + ١}{س^٥ + ١}$$

٢) ميّز الاقترانات النسبية من غيرها مع السبب

أ) $$ق_١(س) = \frac{س^٢ + \frac{١}{٤}س + ٥}{س + ٨}$$ ب) $$ق_٢(س) = \frac{١ - س - ٨}{٣ + ٢س^٣ + ٣س^٤}$$

ج) $$ق_٣(س) = \frac{س^٣ + س + ٢٧}{٧س^٢ + س}$$ د) $$ق_٤(س) = \frac{س + ٦س}{٦ - س^٣}$$

هـ) $$ق_٥(س) = \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ - ٢٥}{س^٤ + ٤س^٢ - ١}$$

الحل :-

$ق_١ ، ق_٣ ، ق_٥$ نسبي لأن كل من البسط والمقام كثيرا حدود

$ق_٢ ، ق_٤$ غير نسبي لأن $٣س^٢ + ٣$ ، $س + ٦س$ ليسا كثيرا حدود

٣) اكتب صيغاً مكافئة لكل من الاقترانات النسبية الآتية بابسط صورة ممكنة

البسط : اكثر من حد
المقام : كثير حدود

أ) $$ق(س) = \frac{س^٣ + ٣س^٢ - س + ٢}{س^٢ - س + ٢}$$

الحل :-

$$ق(س) = \frac{(س + ٢)(س^٢ - س + ١)}{(س + ٢)(س - ١)} = \frac{س^٢ - س + ١}{س - ١}$$

البسط : عامل مشترك
المقام : عامل مشترك

ب) $$ق(س) = \frac{س^٤ - ٤س^٣ + ٣س^٢}{س^٣ - س}$$

الحل :- $$ق(س) = \frac{س^٢(س^٢ - ٤س + ٣)}{س(س^٢ - ١)} = \frac{س^٢(س - ٣)(س - ١)}{س(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \frac{س(س - ٣)}{س + ١}$$

Scanned by CamScanner

هـ) $م(س) = \frac{س^٣ + ٢س^٢ + ٥س + ١٢}{س - ٤}$

الحل :-

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٢	٥	١٢
٤		٤	٨	١٢
	١	٦	١٣	٢٤

$م(س) = (س - ٤)(س^٢ + ٦س + ١٣) + ٢٤$

$م(س) = س^٢ + ٦س + ١٣$

البواقي :- أولي لأن المميز سالب

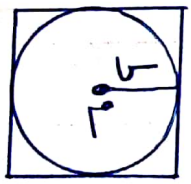
د) $م(س) = \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٦س + ٢}{س^٣ - ٣س^٢ - ٣س}$

الحل :-

$م(س) = \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٦س + ٢}{س(س^٢ - ٣س - ٣)}$ بالقسمة طويلة

$= \frac{س^٢ + ٦س + ٣}{(س + ١)(س - ١)(س - ٣)}$

هـ) رسمت دائرة داخل مربع بحيث تمس أضلاعه
أوجد العلاقة إذا كان طول ضلع المربع (س) وحدة
أوجد النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة
بأبسط صورة :-



الحل :-

مساحة المربع = (طول الضلع)^٢

$= س \times ٢س \times ٢ = ٤س^٢$

مساحة الدائرة = π نق^٢

$= \pi س^٢$

$\frac{٤س^٢}{\pi س^٢} = \frac{٤}{\pi}$

Scanned by CamScanner

٥) بئر ماء على شكل متوازي مستطيلات طوله ٤ م وعرضه ٣ م وارتفاعه ٢ م أجريت عليه توسعة بحيث تم زيادة ابعاده بمقدار متساوٍ من الأمتار

أ) اكتب الاقتران النسبي الذي يمثل حجم البئر بعد التوسعة ومقامه ارتفاع البئر بعد التوسعة بأبسط صورة

ب) ماذا يمثل الاقتران في الفرع (أ).

رافعة لامعة

الحل :- الطول ٤ ← ٤ + س

أ) العرض ٣ ← ٣ + س بعد التوسعة

الارتفاع ٢ ← ٢ + س

$$\text{الحجم بعد التوسعة} = (٤+س)(٣+س)(٢+س) \text{ م}^٣$$

$$\text{الارتفاع} = (٢+س) \text{ م}$$

$$\text{ق}(س) = \frac{(٤+س)(٣+س)(٢+س)}{(٢+س)} = (٤+س)(٣+س) \text{ م}^٢$$

ب) نسبي المساحة قاعدة البئر بعد التوسعة

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

١) أي الاقترانات الآتية هو اقتران نسبي

أ) $ل(س) = \frac{س^٨ + ٨}{١ - س^٢}$

ب) $هـ(س) = \frac{س^٥ + ٢س - ٧}{٦ - س}$

ج) $م(س) = \frac{-٧}{١ + ٢س - س^٣}$

د) $ع(س) = \frac{٣ + ١٢س}{١ + ٦س}$

٢) اكتب صيغة مكافئة لكل مما يلي بأبسط صورة

أ) $ه(س) = \frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٢س}{١ - س^٢}$

ب) $ه(س) = \frac{س^٣ - ٢س^٢ - س + ٢}{٦ + ٥س - س^٢}$

ج) $ه(س) = \frac{س^٣ - ٢٧}{٦ - ٢س}$

د) $ه(س) = \frac{س^٤ + ٢س^٣ + س^٢ + ٢س}{٤ - س^٢}$

هـ) $ه(س) = \frac{س^٣ + ٢س - ٣}{٦ + س}$

و) $ه(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ١٨}{١٢ + ٧س - س^٢}$

Scanned by CamScanner

أولاً :- حل المعادلات الجبرية بمتغير واحد

مقدمة :-
المعادلة هي جملة رياضية تحوي متغيرات مع اشارة المساواة = وحلها يعتمد على ايجاد قيمة المتغير (أو المتغيرات) التي تجعل طرفا المعادلة متساويين.

خطوات الحل بشكل عام
١) فك اقواس (ان وجدت)
٢) نجعل الطرف الآخر (صفراً)
٣) نحلل بالطرق المختلفة
٤) ناخذ المعاملات ونساويها بالصفر ونجد قيم (س)

تذكير ① المعادلة التربيعية التي مميزها سالب ليس لها حلول (جذور)
② $س^2 + ب = 0$ حيث ب: موجب "ليس لها جذور"
③ نعلم أن :-
$س^2 - ٤ = (س-٢)(س+٢)$ فرق موجبين
وعليه نستطيع تحليل :-
$س^2 - ٩ = (س-٣)(س+٣)$
$س^2 - ٧ = (س-\sqrt{٧})(س+\sqrt{٧})$
④ توجد طريقة لحل المعادلات من الدرجة الرابعة والسادسة ولكنها معقدة مع وجود ٣ حدود
حيث :-

٦	٣	ثابت
٤	٢	ثابت

حيث نستخدم الفرضية

◎ عند اعطاء رسمة لا تتذكر ان اكبر اس للمعادلة ← عدد قيم س التي تقطع محور السينات = يكون جذور المعادلة

Scanned by CamScanner

تدريب (١) :-

حل المعادلة $س^3 - 2س^2 - 5س + 6 = 0$ ∴

الحل :- نحلل الاقتران المرافق للمعادلة :-

$ق(س) = س^3 - 2س^2 - 5س + 6$

العوامل المحتملة : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ بالتجريب $ق(1) = 0$

$س - 1$ عامل من عوامل $ق(س)$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

ناتج القسمة $س^2 - س - 6$

$س^2 - س - 6 = (س - 3)(س + 2)$

وعليه

$س^3 - 2س^2 - 5س + 6 = (س - 1)(س - 3)(س + 2) = 0$

$س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$

$س - 3 = 0 \leftarrow س = 3$

$س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$

جذور المعادلة $1, 3, -2$

تدريب (٢) :-

حل المعادلة $س^5 - 8س^2 = 0$ ∴

الحل :- $س^5 - 8س^2 = س^2(س^3 - 8) = 0$ ← عند سالب

$= س^2(س - 2)(س^2 + 2س + 4) = 0$ ∴

$س^2 = 0 \leftarrow س = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

جذور المعادلة $0, 2$

تدريب (٣) :- حل كلاً من المعادلات التالية :-

١) $س^6 - 7س^3 - 8 = 0$ ∴

الحل :- $(س^3)^2 - 7س^3 - 8 = 0$

$ص^2 - 7ص - 8 = 0$

$(ص - 8)(ص + 1) = 0$ نعيد تعويض ص

$(س^3 - 8)(س^3 + 1) = 0$

$(س - 2)(س^2 + 2س + 1)(س + 1)(س^2 - س + 1) = 0$

عند سالب ← عند سالب

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

$س + 1 = 0 \leftarrow س = -1$

جذور المعادلة

لاحظ أن $س^6 = (س^3)^2$ مع ثابت $ص = س^3$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

لاحظ ع ≠ ٠
مع ثابت
نفرض ص = س²

ز) $س^4 - 3س^2 - 4 = 0$ ∴

الحل :- $(س^2)^2 - 3س^2 - 4 = 0$

$ص^2 - 3ص - 4 = 0$ ∴

$(ص - 4)(ص + 1) = 0$ تعيد قيمة ص

$(س^2 - 4)(س^2 + 1) = 0$ لاحظ سالب

$(س - 2)(س + 2)(س^2 + 1) = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$ جذور المعادلة

$س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$

تمارين ومسائل

١) اكتب مثالاً على اقتران كثير حدود على الصورة القياسية من الدرجة الأولى والثانية والثالثة ثم اكتب المعادلة المرافقة لكل اقتران .

الحل :- $ق(س) = 5س + 3 = 0$ ← درجة أولى ← معادلة

$ق(س) = س^2 - 16 = 0$ ← درجة ثانية

$ق(س) = س^3 - 3س^2 = 0$ ← درجة ثالثة

---

٢) حل المعادلات الآتية :-

أ) $س^3 - 6س^2 + 8س = 0$ ∴

الحل :- $س^3 - 6س^2 + 8س = 0$

$س(س^2 - 6س + 8) = 0$

$س(س - 4)(س - 2) = 0$

$س = 0$

$س - 4 = 0 \leftarrow س = 4$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

جذور المعادلة ٠، ٢، ٤

للتحقق نعوض بدل س في المعادلة فينتج 2 صفراً للطرفين

ب) $س^3 + س^2 - 5س + 3 = 0$ ∴

الحل :- نحلل اقتران $ق(س) = س^3 + س^2 - 5س + 3$ لمعرفة المعادلة

لاضعاف المحققة : $\pm 1 \pm 3$ بالتجريب $ق(1) = 0$

$س - 1$ عامل من عوامل $ق(س)$

الناتج $س^2 + 2س - 3$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	1	5-	3
		1	2	3-
	1	2	3-	0

Scanned by CamScanner

$س^3 + س^2 - 5س + 3 = (س-1)(س^2 + 2س - 3) = 0$

$= (س-1)(س+3)(س-1) = 0$

$س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$ جذور المعادلة 1، 1، -3

$س + 3 = 0 \leftarrow س = -3$

ب) $س^5 - 16س = 0$ ∴

الحل :- $س^5 - 16س = س(س^4 - 16) = 0$ ← ضعها صائب

$= س(س^2 - 4)(س^2 + 4) = 0$

$= س(س-2)(س+2)(س^2+4) = 0$

$س = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$ جذور المعادلة 0، 2، -2

$س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$

ج) $س^5 + س^4 - 6س^3 + س^2 - س - 6 = 0$ ∴

الحل :- الجذور المحتملة $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ بالتجريب $ق(-1) = 0$

$س + 1$ عامل

	$س^5$	$س^4$	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
-1	1	1	-6	1	1	-6
		-1	0	6	-7	6
	1	0	-6	7	-6	0

$س^4 - 6س^2 + 7س - 6$

الجذور المحتملة :- $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

بالتجريب $ق(2) = 0$

$س - 2$ عامل

	$س^4$	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
2	1	0	-6	7	-6
		2	4	-4	6
	1	2	-2	3	0

$س^3 + 2س^2 - 2س + 3$

الجذور المحتملة $\pm 1, \pm 3$

بالتجريب $ق(-3) = 0 \leftarrow س + 3$ عامل

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
-3	1	2	-2	3
		-3	3	-3
	1	-1	1	0

$س^2 - س + 1$ ضعها صائب

$س^5 + س^4 - 6س^3 + س^2 - س - 6 = (س+1)(س-2)(س+3)(س^2 - س + 1) = 0$

$س + 1 = 0 \leftarrow س = -1$ جذور المعادلة $-1, 2, -3$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$

$س + 3 = 0 \leftarrow س = -3$

Scanned by CamScanner

هـ) $س^٦ = ٦٤$

الحل : $س^٦ - ٦٤ = ٠$

$(س^٣ - ٨)(س^٣ + ٨) = ٠$

$(س-٢)(س^٢+٢س+٤)(س+٢)(س^٢-٢س+٤) = ٠$

مميز سالب — مميز سالب

$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$ جذور المعادلة $٢, -٢$

$س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$

و) $س^٥ + ٦س^٤ + ٥س^٣ = ٠$

الحل : $س^٣(س^٢ + ٦س + ٥) = ٠$

$س^٣(س+١)(س+٥) = ٠$

$س^٣ = ٠ \leftarrow س = ٠$ جذور المعادلة $٠, -١, -٥$

$س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١$

$س + ٥ = ٠ \leftarrow س = -٥$

ز) $س^٣ - ٥س^٢ + ٤س = ٠$

الحل : $س(س^٢ - ٥س + ٤) = ٠$

$س(س-١)(س-٤) = ٠$

$س = ٠$ جذور المعادلة $٠, ١, ٤$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$

$س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

ح) $س^٣(س+١) = ٤س(س+١)$

الحل : $س^٣(س+١) - ٤س(س+١) = ٠$

$(س+١)(س^٣ - ٤س) = ٠$

$(س+١) \times س(س^٢ - ٤) = ٠$

$(س+١) \times س \times (س-٢)(س+٢) = ٠$

$س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١$ جذور المعادلة $-١, ٠, ٢, -٢$

$س = ٠$

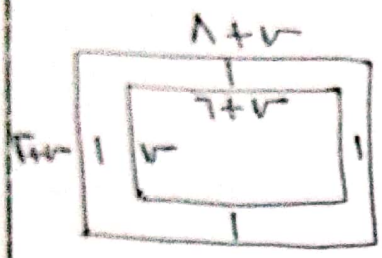
$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$

$س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$

Scanned by CamScanner

٣) بركة سباحة قاعدتها مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٦ م. يحيط بها ممر عرضه ١ م فاذا كانت مساحة البركة ٩١ م٢ ، جد بعدي البركة.

الحل :- طول البركة : س + ٦ ، عرض البركة = س



فك أقواس $(س+٨)(س+٦) = ٩١$

نبسط $س^٢ + ٦س + ٨س + ٤٨ - ٩١ = ٠$

$س^٢ + ١٤س - ٤٣ = ٠$

$(س + ١٥)(س - ٣) = ٠$

$س = ٣ \leftarrow س - ٣ = ٠$

$س = -١٥ \leftarrow س + ١٥ = ٠$ مرفوضة "لا يوجد بعد سالب"

ابعاد البركة ١١ ، ٥

---

٤) وجد محل لبيع قطع الحاسوب ان الربح اليومي لمبيعاته تتمثل بالاقتران $ر(س) = -س^٣ + ٥س^٢ + ٤س$ حيث س عدد القطع المباعة ، ر(س) الربح بالدينار . فاذا كان ربح المحل في احد الايام ٢٠ دينارا ، فكم عدد القطع المباعة في ذلك اليوم

الحل :- $ر(س) = ٢٠$

$-س^٣ + ٥س^٢ + ٤س = ٢٠$ نحلل الاقتران الموافق للمعادلة

$-س^٣ + ٥س^٢ + ٤س - ٢٠ = ٠$

العوامل المحتملة $\pm ١ ، \pm ٢ ، \pm ٤ ، \pm ٥ ، \pm ١٠ ، \pm ٢٠$

بالتجريب $ر(٥) = ٠$

$س - ٥$ عامل

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
٥	١	-٥	٤	-٢٠
		٥	٠	٢٠
	١	٠	٤	٠

$-س^٣ + ٥س^٢ + ٤س - ٢٠ = (س - ٥)(-س^٢ + ٤) = ٠$

نخرج سالب

$س - ٥ = ٠$

$س = ٥$ جذر المعادلة

عدد القطع المباعة في ذلك اليوم ٥

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

١) حل المعادلات الآتية :-

١) $س^{٣} + ٦س^{٢} + ١١س + ٦ = ٠$

٢) $س^{٦} - ٩س^{٣} + ٨ = ٠$

٣) $س^{٣} - ٢س^{٢} - ٤س + ٨ = ٠$

٤) $س^{٥} - ٢٥٦س = ٠$

٥) $س^{٥} + ٦س^{٤} + ٥س^{٣} = ٠$

٦) $س(س^{٢} - ٦س) = ٦ - ١١س$

---

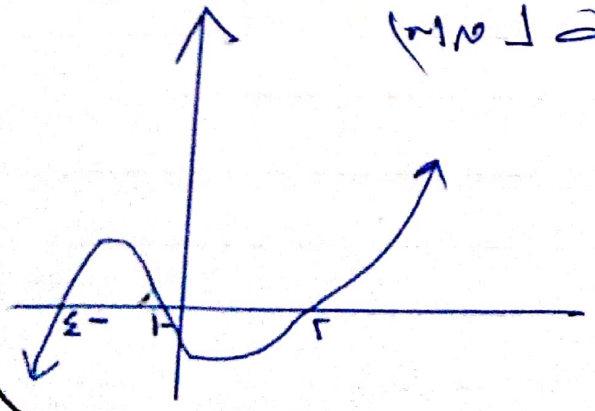
٢) جاذبة مستطيلة شكل تقطع مساحتها بالمتران
$م(س) = س^{٢} - ٣س + ٦$ حيث متغيرة $س$ بالمتر فجد
مساحة الجاذبة ٨٠

---

٣) مكعب حجمه يحيط بالعلاقة $ح(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ١٢س$
حيث مجموعة متمم $س$ بالمتر فجد حجم المكعب؟؟

---

٤) شكل المجاور يمثل منحنى كثير الحدود $م(س)$ من الدرجة
الثالثة ولديه معامله الرئيسي (١) و $م(٠) = -٨$ أجب عما يلي
أ) جد مجموعة حل المعادلة المرافقة لـ $م(س)$
ب) اكتب عوامل $م(س)$
ج) جد قاعدة $م(س)$



Scanned by CamScanner

ثانياً : المتباينات غير الخطية بمتغير واحد

مقدمة

$س^2 + 3س = 9$ معادلة عند استبدال (=) بـ $<، \leq، >، \geq$ تصبح متباينة

المتباينة :- جملة مفتوحة تحتوي على رمز أو أكثر من الرموز

$<، \leq، >، \geq$

في هذا الدرس سنقوم بحل متباينات غير خطية ((المقصود (س) ليست (1)))

الخطوات :

1) نكتبها على الصورة القياسية ← الطرف الذي يمين صفراً
2) نحلل الى العوامل الأولية ونرسم اشارة كل عامل

ملاحظات :

1) $س \leq 6 \leq س$ هنا الفترة مغلقة $[\ 6\ ]$
2) $س < 6 < س$ هنا الفترة مفتوحة $(\ 6\ )$ وكذلك عند $\infty، 6، -\infty$
3) العبارة الأولية التي لا يمكن تحليلها (المميز سالب) تكون اشارتها دائماً حسب اشارة معامل $(س^2)$
4) عند ضرب طرفي المعادلة بعدد سالب أو قسمة طرفي المعادلة على عدد سالب ← نقلب اشارة المتباينة.

تدريب (1)

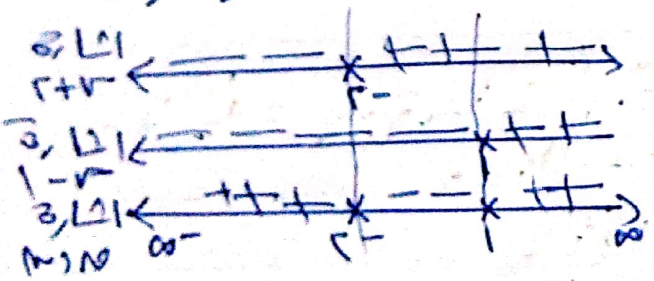
حل المتباينة $س^2 + س - 2 > 0$ ومثلها على خط الأعداد

الحل :-

$م(س) = س^2 + س - 2$

$= (س + 2)(س - 1)$

بصفرا $م(س) = 0$ ينتج $س = -2، 1$



مجموعة الحل $= (-\infty، -2) \cup (1، \infty)$

Scanned by CamScanner

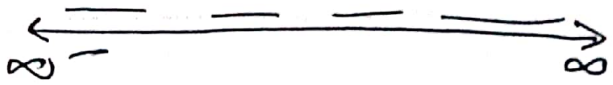
تدريب (٢)

حل المتباينة $س^٦ - س^٢ - ١٠ < ٠$ ∴ ممثلها على خط الأعداد

الحل :-

$س^٦ - س^٢ - ١٠$ أولية لا تحلل لأن حدها الحر سالب

وإشارتها حسب إشارة معامل $س^٢$



مجموعة الحل :- ح

تدريب (٣)

حل المتباينة $س^٣ > ١٦ س$

الحل :- $س^٣ - ١٦ س < ٠$

$= س(س^٢ - ١٦)$

$= س(س-٤)(س+٤)$

كتابتها على الصورة الضمنية

نحلل

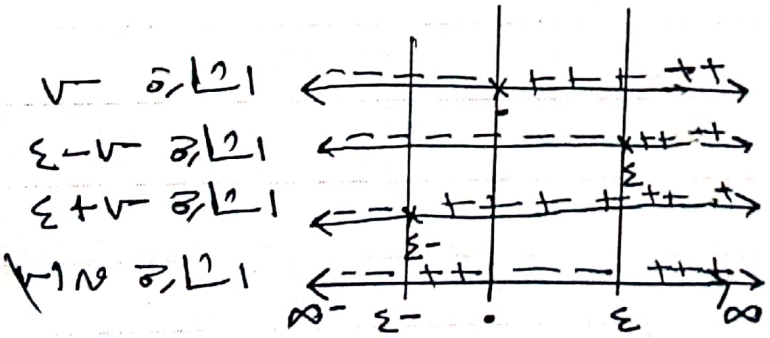
نجد أصفار

$س = ٠$

$س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

$س + ٤ = ٠ \leftarrow س = -٤$

ندرس إشارة العوامل



مجموعة الحل :-

$(-٤، ٠) \cup (٤، \infty)$

ملحوظة :- وضعنا فترة مفتوحة لوجود < بدون مساواة ولذلك اخترنا المنطقة الموجبة لأن المطلوب <

Scanned by CamScanner

تدريب (٤)

حل المتباينة $2س^3 + 5س^2 - 12س \geq 0$ وتمثيلها على خط الأعداد

الحل :-

$2س^3 + 5س^2 - 12س \geq 0$

نحلل $\quad ق(س) = 2س^3 + 5س^2 - 12س$

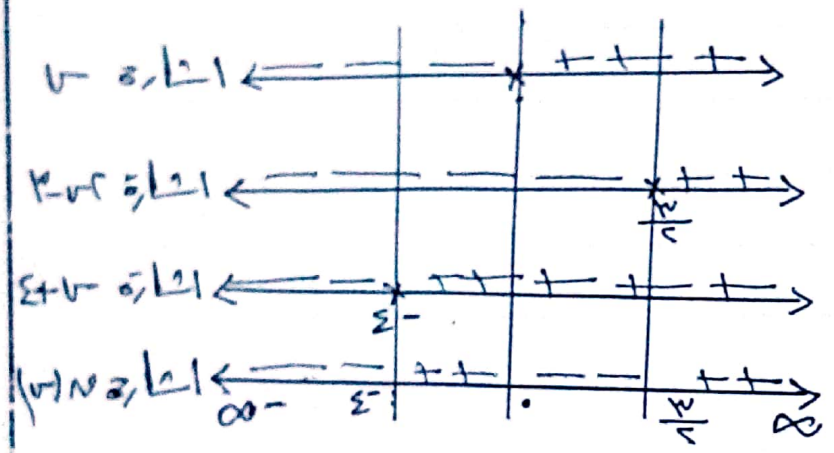
$= س(2س^2 + 5س - 12)$

$= س(2س - 3)(س + 4)$

$س = 0$

$2س - 3 = 0 \leftarrow س = \frac{3}{2}$ أصفار $ق(س)$

$س + 4 = 0 \leftarrow س = -4$



مجموعة الحل :-

$(-\infty, -4] \cup [0, \frac{3}{2}]$

تمارين ومسائل

١) عرف المتباينة ، وما معنى مجموعة الحل.

الحل :- جملة مفتوحة تحوي على رمز او اكثر من $> ، < ، \geq ، \leq$ وايجاد قيم المتغير التي تجعلها صحيحة يسمى حل المتباينة

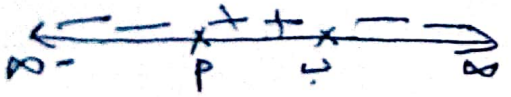
---

٢) اذا كان $ق(س)$ كثير حدود من الدرجة الثانية وكانت مجموعة حل المتباينة $ق(س) \leq 0$ هي الفترة $[ب ، ا]$ فجد ما يأتي

أ) اصفار الاقتران $ق(س)$

ب) مجموعة حل المتباينة $ق(س) < 0$.

الحل :-



أ) اصفار ا ، ب

ب) حل $ق(س) < 0 \leftarrow (-\infty, ا) ، (ب ، \infty)$

Scanned by CamScanner

٣) اكتب الكثيرات الحدية الآتية على صورتها القياسية ثم جد
أصفار كل متغيرة المرافقة لكل منها

١) $س^٢ + ٣س \leq ٤$

الحل : $س^٢ + ٣س - ٤ \leq ٠$

$ق(س) = س^٢ + ٣س - ٤$

$= (س + ٤)(س - ١)$

أصفار $ق(س)$: $-٤ ، ١$

$س + ٤ = ٠ \leftarrow س = -٤$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$

٢) $س^٢ \geq ١٦$

الحل : $س^٢ - ١٦ \geq ٠$

$ق(س) = س^٢ - ١٦$

$= (س - ٤)(س + ٤)$

أصفار $ق(س)$: $٤ ، -٤$

$س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

$س + ٤ = ٠ \leftarrow س = -٤$

٣) $س^٣ - ٦س^٢ + ٣س + ٨ > ٠$

الحل : $س^٣ - ٣س^٢ - ٦س^٢ + ٨ > ٠$

$ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ - ٦س^٢ + ٨$

نحلل

لإيجاد أصفار المعادلة $ق(س) = ٠$ بالتجريب $ق(١) = ٠$

$س - ١$ من عوامل $ق(س)$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	الثابت
١	١	-٣	-٦	٨
		١	-٢	-٨
	١	-٢	-٨	٠

$س^٣ - ٣س^٢ - ٦س + ٨ = (س - ١)(س^٢ - ٢س - ٨)$

$= (س - ١)(س - ٤)(س + ٢)$

أصفار $ق(س)$: $١ ، ٤ ، -٢$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$

$س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

$س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$

Scanned by CamScanner

٤) جد مجموعة حل كل من المتباينات مثل الحل على خط الأعداد:

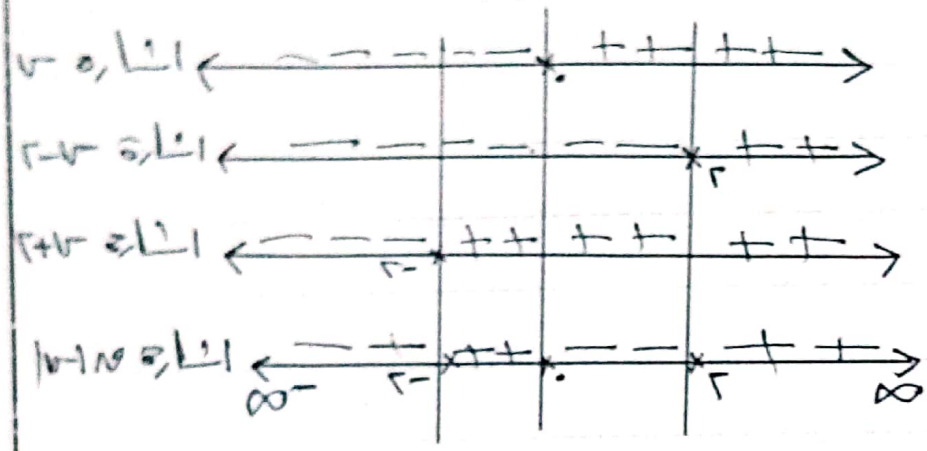
أ) $س^3 - ٤س \leq ٠$

الحل: $م(س) = س^3 - ٤س$

$= س(س^2 - ٤)$

$= س(س-٢)(س+٢)$

أصفار $م(س)$: $٠، ٢، -٢$



مجموعة الحل:

$(-\infty، -٢] \cup [٠، ٢]$

ب) $٤س^2 + س \geq ٢ - ٢س^2$

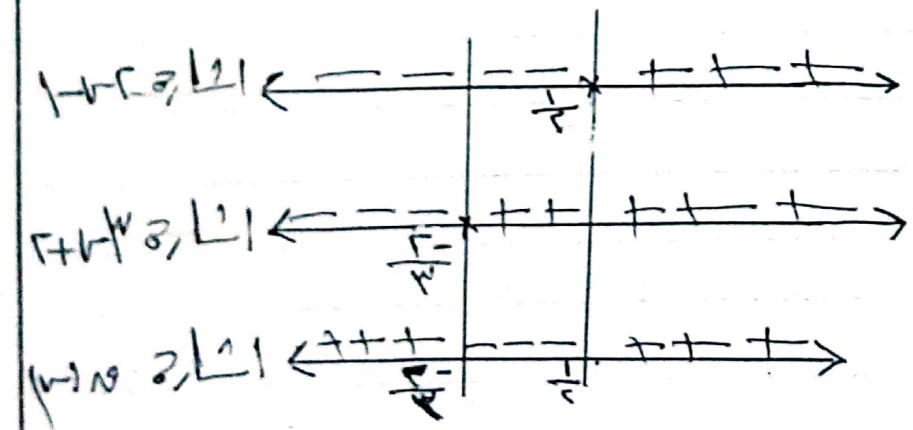
الحل: $٤س^2 + ٢س^2 + س - ٢ \geq ٠$ نبسط

$٦س^2 + س - ٢ \geq ٠$

$م(س) = ٦س^2 + س - ٢$

$= (٢س - ١)(٣س + ٢)$

أصفار $م(س)$: $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٢}{٣}$



مجموعة الحل

$[-\frac{٢}{٣}، \frac{١}{٢}]$

Scanned by CamScanner

ج) $2س^3 + 8س > 10س^2$

الحل :-

$2س^3 - 10س^2 + 8س > 0$

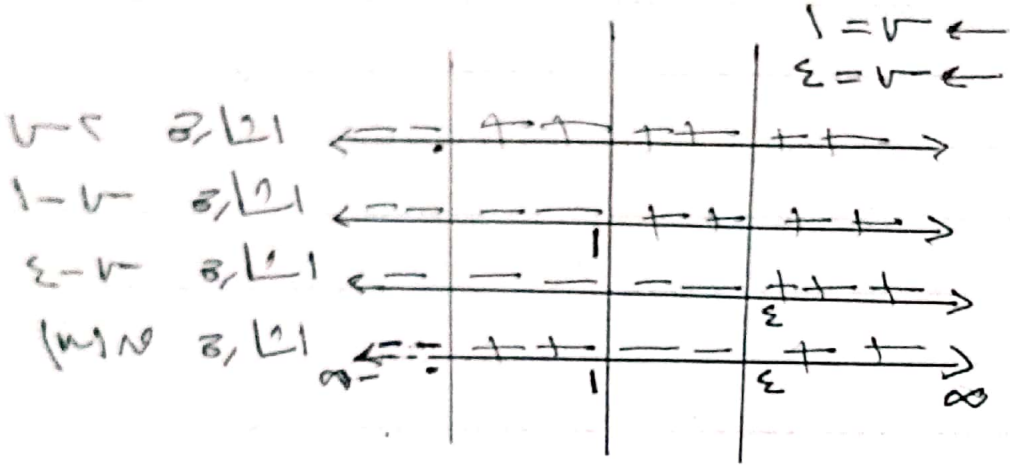
$2س(س^2 - 5س + 4) = 8س$

$= 2س(س - 1)(س - 4)$

$2س = 0 \leftarrow س = 0$

$س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$

$س - 4 = 0 \leftarrow س = 4$



مجموعة الحل

$(-\infty, 0] \cup [1, 4]$

المقدار / بسيط الذي مميزها صفراً تكون مربع كامل

د) $س^2 - 6س + 9 \leq 0$

الحل :

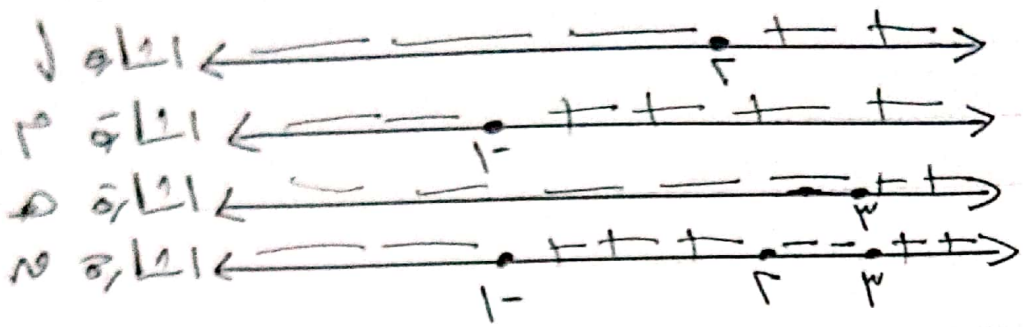
$س^2 - 6س + 9 = (س - 3)(س - 3)$

$= (س - 3)^2 \geq 0$

مجموعة الحل $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

٥) اعتماداً على الأشكال الآتية التي توضح اشارة كل من المقدارات ل ، م ، هـ ، ن المعرف على ح.
اجب عما يليها



أ) اكتب قاعدة كل من المقدارات الخطية ل ، م ، هـ محللا بان العامل الرئيسي لكل منها ١

ب) اذا كان ن = ل × م × هـ فاكتب قاعدة ن

جـ) هل يمكن ان يكون المقدار ل غير خطي وتبقى اشارته كما هو موضح أعلاه؟ برر اجابتك ان كانت الاجابة لا وان كانت الاجابة نعم فاعط مثالا واحدا مجموعة حل المتباينة ن(س) < ٠ والمتباينة ن(س) ≥ ٠

الحل :-

أ) ل(س) = س - ٢ ، م(س) = س + ١ ، هـ(س) = ٣ - س

ب) ن(س) = (س - ٢)(س + ١)(٣ - س) = -س^٣ + ٢س^٢ + ٥س - ٦

جـ) ن(س) < ٠ ← (-∞ ، -١) ∪ (٢ ، ٣)

ن(س) ≥ ٠ ← [-١ ، ∞) ∩ [٢ ، ٣]

د) نعم ← ل(س) = س^٣ - ٨ ← (س - ٢) ← أي عدد فردي ← ٣

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

حل المتباينات الآتية :-

١) $س^{٢} - ٤ \geq ٠$

٢) $س^{٢} - ١٠س + ٢٥ > ٠$ ، صفر

٣) $س^{٢} - ١٠س + ٣ \geq ٣س^{٢} - ٦س - ١٢$

٤) $س^{٣} - ٢س^{٢} + ٨ < س^{٢} + ٦س$

٥) $س^{٣} - س^{٢} < ٠$ ، صفر

٦) $س^{٣} - ٢س^{٢} \leq ٦س - ١٢$

٧) $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ < ٠$

٨) $س^{٢} - ٨ \leq ٢س$

٩) $س^{٢} - ٢ \geq ٠$

Scanned by CamScanner

ثالثاً :- الكسور الجزئية

تذكير :- جد ناتج $\frac{٢}{س+٣} + \frac{٤}{س+١}$

$$= \frac{٢(س+١)+٤(س+٣)}{(س+١)(س+٣)} = \frac{٢س+٢+٤س+١٢}{س^٢+٣س+س+٣} = \frac{٦س+١٤}{س^٢+٤س+٣}$$

سنتعلم في هذا الدرس كيف نكتب $\frac{٦س+١٤}{س^٢+٤س+٣}$ على شكل مجموع كسور جبرية ، وهذا ما يسمى بتجزئة الكسر

الخطوات

① حلل المقام الى عوامله الأولية

② نضع العوامل في المقام ونسميها البواقي $ب_١$ ، $ب_٢$ ، ...

③ نوحد مقامات العوامل

④ نقارن بسط الكسر الأصلي مع البسط للعوامل بعد توحيد المقامات

⑤ نجد اصفار المقام ونعوضها لحساب $ب_١$ ، $ب_٢$ ، ...

ملاحظة :-

قبل التجزئة ، اذا كانت درجة البسط اكبر أو تساوي درجة المقام ، نقوم اولاً بالقسمة الطويلة ثم نجزئ الباقي على المقسوم عليه

تدريب (١) جزئ الصيغة النسبية $\frac{س^٣-٢س^٢-٦س+١٢}{س^٢-٣س-٤}$

الحل :- درجة البسط > درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} س^٣-٢س^٢-٦س+١٢ & س^٢-٣س-٤ \\ \hline -(س^٣-٣س^٢-٤س) & س+١ \\ \hline س^٢-٢س+١٢ & \\ -(س^٢-٣س-٤) & \\ \hline ١٦+س & \end{array}$$

$$\frac{س^٣-٢س^٢-٦س+١٢}{س^٢-٣س-٤} = س+١+\frac{١٦+س}{س^٢-٣س-٤}$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

تجزئ $\frac{س+١٦}{س^{٣}-٤س}$ ..... بخلل المقام

$$\frac{س+١٦}{س^{٣}-٤س}=\frac{س+١٦}{(س-٢)(س+٢)}=\frac{أ}{س-٢}+\frac{ب}{س+٢}$$

$$=\frac{أ(س+٢)+ب(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$$

بالمقارنة

$س+١٦=أ(س+٢)+ب(س-٢)$ أصفار المقام $٢، -٢$

عند $س=٢ \leftarrow ٢٠=٥أ \leftarrow أ=٤$

$س=-٢ \leftarrow ١٠=-٥ب \leftarrow ب=-٢$

$$\therefore \frac{س+١٦}{س^{٣}-٤س}=\frac{٤}{س-٢}+\frac{-٢}{س+٢}$$

$$\text{وعليه } \frac{س^{٣}-٢س^{٢}-٦س+١٢}{س^{٣}-٤س}=س+٢+\frac{٤}{س-٢}+\frac{-٢}{س+٢}$$

تمارين ومسائل

١) جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة

أ) $\frac{٣}{س+١}+\frac{٥}{س}$ الحل: $\frac{٣س+٥س+٥}{س^{٢}+س}=\frac{٨س+٥}{س^{٢}+س}$

ب) $\frac{٢}{س+١}-\frac{١}{س}$ الحل: $\frac{٢س-س-١}{س^{٢}+س}=\frac{س-١}{س^{٢}+س}$

ج) $\frac{٢}{س^{٢}+٣س}-\frac{٤}{١-س}$ الحل: $\frac{٢س^{٢}-٢س+٨س-١٢}{س^{٣}-س^{٢}+٣س-٣}=\frac{-٦س-١٤}{س^{٢}-س-٣}$

د) $\frac{٦}{٤+س}+\frac{٣}{٧+س}$ الحل: $\frac{٦س+٤٢+٣س+١٢}{س^{٢}+٧س+٤س+٢٨}=\frac{٩س+٥٤}{س^{٢}+١١س+٢٨}$

Scanned by CamScanner

٢) جزيء كلا من الكسور الآتية :-

التحليل ← المقام ← عامل

أ) $\frac{٨س - ١٧}{(س-١)(٤-س)}$

الحل :-

$$\frac{٨س-١٧}{(س-١)(٤-س)} = \frac{ب}{٤-س} + \frac{ا}{١-س} = \frac{ب(١-س) + ا(٤-س)}{(٤-س)(١-س)}$$

بالمقارنة :-

$٨س - ١٧ = ا(٤-س) + ب(١-س)$

اضفار المقام ٤ ، ١

عند $س = ١ \leftarrow -٩ = ٣ا \leftarrow ا = -٣$

عند $س = ٤ \leftarrow ١٥ = ٣ب \leftarrow ب = ٥$

$$\frac{٨س-١٧}{(س-١)(٤-س)} = \frac{٣}{س-١} + \frac{٥}{٤-س}$$

التحليل ← المقام ← عامل

ب) $\frac{س-١}{س(س+١)}$

الحل :- $\frac{س-١}{س(س+١)} = \frac{ا}{س} + \frac{ب}{س+١} = \frac{ا(س+١) + ب س}{س(س+١)}$

بالمقارنة :-

$س - ١ = ا(س+١) + ب س$

اضفار المقام -١ ، ٠

عند $س = ٠ \leftarrow -١ = ا \leftarrow ا = -١$

عند $س = -١ \leftarrow -٢ = -ب \leftarrow ب = ٢$

$$\frac{س-١}{س(س+١)} = \frac{-١}{س} + \frac{٢}{س+١}$$

تحليل المقام

ج) $\frac{س+١}{س^٢-١}$

الحل :- $\frac{س+١}{س^٢-١} = \frac{س+١}{(س+١)(س-١)} = \frac{ا}{س-١} + \frac{ب}{س+١} = \frac{ا(س+١) + ب(س-١)}{(س+١)(س-١)}$

بالمقارنة :- $س + ١ = ا(س+١) + ب(س-١)$

عند $س = ١ \leftarrow ٢ = ٢ا \leftarrow ا = ١$

عند $س = -١ \leftarrow ٠ = -٢ب \leftarrow ب = ٠$

$$\frac{س+١}{س^٢-١} = \frac{١}{س-١}$$

Scanned by CamScanner

د) $\frac{س}{س^2+س-2}$

الحل :- $\frac{س}{س^2+س-2} = \frac{س}{(س+2)(س-1)} = \frac{أ}{س+2} + \frac{ب}{س-1} = \frac{أ(س-1)+ب(س+2)}{(س+2)(س-1)}$

بالمقارنة :-

$س = أ(س-1)+ب(س+2)$ أضعاف المقام (2-، 1)

عند $س = 1 \leftarrow 1 = 3ب \leftarrow ب = \frac{1}{3}$

$س = -2 \leftarrow -2 = -3أ \leftarrow أ = \frac{2}{3}$

$$\frac{س}{س^2+س-2} = \frac{\frac{2}{3}}{س+2} + \frac{\frac{1}{3}}{س-1}$$

هـ) $\frac{1}{س^2-25}$

الحل :- $\frac{1}{س^2-25} = \frac{1}{(س+5)(س-5)} = \frac{أ}{س-5} + \frac{ب}{س+5} = \frac{أ(س+5)+ب(س-5)}{(س-5)(س+5)}$

بالمقارنة :-

$1 = أ(س+5)+ب(س-5)$ أضعاف المقام 5، 5-

عند $س = 5 \leftarrow 1 = 10أ \leftarrow أ = \frac{1}{10}$

$س = -5 \leftarrow 1 = -10ب \leftarrow ب = \frac{-1}{10}$

$$\frac{1}{س^2-25} = \frac{\frac{1}{10}}{س-5} + \frac{\frac{-1}{10}}{س+5}$$

و) $\frac{12س^2+23س+2}{-6س^2-7س+3}$

$-6س^2-7س+3 \overline{)12س^2+23س+2}$ $\quad -2$

$12س^2+14س-6$

$9س+8$

الحل :-

$$\frac{12س^2+23س+2}{-6س^2-7س+3} = -2 + \frac{9س+8}{-6س^2-7س+3}$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

$$\frac{9س+8}{-6س^2-7س+3}=\frac{9س+8}{(-2س-3)(3س-1)}=\frac{ص}{-2س-3}+\frac{ك}{3س-1}=\frac{ك(3س-1)+ص(-2س-3)}{(-2س-3)(3س-1)}$$

بالمقارنة: $9س+8=ك(3س-1)+ص(-2س-3)$ أضعف المقام $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{3}{2}$

عندما $س=\frac{1}{3}\leftarrow 11=\frac{-11}{3}ص\leftarrow ص=-3$

$س=-\frac{3}{2}\leftarrow \frac{-11}{2}=\frac{-11}{2}ك\leftarrow ك=1$

$$\frac{12س^2+23س+2}{3-8س-6س^2}=-2+\frac{1}{-2س-3}+\frac{-3}{3س-1}$$

ز) $\frac{2س^3-4س^2-15س+5}{س^2-2س-8}$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} 2س^3-4س^2-15س+5 & س^2-2س-8 \\ \hline -2س^3-4س^2-16س & 2س \\ \hline 5+س & \end{array}$$

$$\frac{2س^3-4س^2-15س+5}{س^2-2س-8}=2س+\frac{س+5}{س^2-2س-8}$$

$$\frac{س+5}{س^2-2س-8}=\frac{س+5}{(س-4)(س+2)}=\frac{ك}{س-4}+\frac{ص}{س+2}=\frac{ك(س+2)+ص(س-4)}{(س-4)(س+2)}$$

أضعف المقام $س=4$ ، -2

عندما $س=4\leftarrow 9=6ك\leftarrow ك=\frac{3}{2}$

$س=-2\leftarrow 3=-6ص\leftarrow ص=\frac{-1}{2}$

$$\frac{2س^3-4س^2-15س+5}{س^2-2س-8}=2س+\frac{\frac{3}{2}}{س-4}+\frac{\frac{-1}{2}}{س+2}$$

ح) $\frac{س^2+12س+12}{س^3-4س}$

الحل: $\frac{س^2+12س+12}{س(س-2)(س+2)}=\frac{ك}{س}+\frac{ص}{س-2}+\frac{ع}{س+2}$

$$=\frac{ك(س-2)(س+2)+ص(س)(س+2)+ع(س)(س-2)}{س(س-2)(س+2)}$$

$س^2+12س+12=ك(س-2)(س+2)+ص(س)(س+2)+ع(س)(س-2)$

عندما $س=0\leftarrow 12=-4ك\leftarrow ك=-3$

Scanned by CamScanner

عند $س = 2 \leftarrow ٤٠ = ٨ ب \leftarrow ب = ٥$

$س = -2 \leftarrow -٨ = ٨ د \leftarrow د = -١$

$$\frac{س^2 + ١٢س + ١٢}{س^3 - ٤س} = \frac{-٣}{س} + \frac{٥}{س - 2} + \frac{-١}{س + 2}$$

ط) $\frac{١}{س^2 - ٩ص^2}$

الحل :

$$\frac{١}{س^2 - ٩ص^2} = \frac{١}{(س + ٣ص)(س - ٣ص)} = \frac{ب}{س - ٣ص} + \frac{د}{س + ٣ص} = \frac{ب(س + ٣ص) + د(س - ٣ص)}{(س + ٣ص)(س - ٣ص)}$$

$١ = ب(س + ٣ص) + د(س - ٣ص)$ اصفار المقام $٣ص$ ، $-٣ص$

عند $س = ٣ص \leftarrow ١ = ٦ص ب \leftarrow ب = \frac{١}{٦ص}$

$س = -٣ص \leftarrow ١ = -٦ص د \leftarrow د = \frac{-١}{٦ص}$

$$\frac{\frac{-١}{٦ص}}{س + ٣ص} + \frac{\frac{١}{٦ص}}{س - ٣ص} = \frac{١}{س^2 - ٩ص^2}$$

ج) $\frac{س^2}{١ - س^2}$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} س^2 & س^2 - ١ \\ \hline -س^2 + ١ & -١ \\ \hline ١ & \end{array}$$

$$\frac{س^2}{١ - س^2} = -١ + \frac{١}{١ - س^2}$$

$$\frac{١}{١ - س^2} = \frac{١}{(١ + س)(١ - س)} = \frac{ب}{١ + س} + \frac{ا}{١ - س} = \frac{ا(١ - س) + ب(١ + س)}{(١ + س)(١ - س)}$$

$١ = ا(١ + س) + ب(١ - س)$ اصفار المقام $١ ، -١$

عند $س = ١ \leftarrow ١ = ٢ب \leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

$س = -١ \leftarrow ١ = ٢ا \leftarrow ا = \frac{١}{٢}$

$$\frac{\frac{١}{٢}}{١ + س} + \frac{\frac{١}{٢}}{١ - س} + ١ - = \frac{س^2}{١ - س^2}$$

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

جزء الصيغ النسبية الجبرية :-

١) $\frac{س^{٢}-٢س-٣}{س+١}$ ٢) $\frac{س^{٢}-٢س+٣}{س^{٢}-٧س+١٢}$

٣) $\frac{س^{٣}-١س+٣}{س^{٢}-س+٢}$ ٤) $\frac{س-١١}{س^{٣}+٢س^{٢}-٥س-٦}$

٥) $\frac{س+٦}{س^{٢}-٣س-١٠}$ ٦) $\frac{٤-س}{١٥+س٨-س^{٢}}$

٧) $\frac{س^{٣}+س^{٢}-١١}{٢س^{٢}-س-٣}$ ٨) $\frac{٢س^{٣}-٤س^{٢}-س-٣}{س^{٢}-٢س-٣}$

٩) $\frac{س^{٣}+١٠س^{٢}+٣س+٦}{س^{٣}-س^{٢}-٤س+٤}$

Scanned by CamScanner

أسئلة الوحدة

١) جد خارج وباقي القسمة في مايأتي

أ) $(٥س^{٣}-١٣س^{٢}+١٠س-٨) \div (س-٢)$

الحل :-

خارج القسمة :-

$٥س^{٢}-٣س+٤$

الباقي = صفراً

	٥	-١٣	١٠	-٨
٢		١٠	-٦	٨
	٥	-٣	٤	٠

ب) $(٨س^{٤}-٤س^{٣}+س^{٢}+س+٤) \div (٢س+١)$

الحل :-

خارج القسمة :-

$٤س^{٣}-٢س^{٢}-س+١$

$٢س+١ \overline{)٨س^{٤}-٤س^{٣}+س^{٢}+س+٤}$

$-٨س^{٤}+٤س^{٣}$

$-٤س^{٣}+س^{٢}+س+٤$

$-٤س^{٣}-٢س^{٢}$

$-٢س^{٢}+س+٤$

$-٢س^{٢}-س$

$٢س+٤$

$٢س+١$

٣

الباقي : ٣

٢) اكتب مثال على كثير حدود باقي قسمته اصغر ما يمكن على $ح(س)$

الحل :- $ف(س) = س^{٣}+١٠س-٦$ ، $ح(س) = س-١$

٣) اكتب صيغة مكافئة لكل من المقدارات الآتية (ان أمكن)

أ) $ف(س) = \frac{س^{٤}+٢س^{٣}+س^{٢}+٢س}{س+٢}$ ، $س \neq -٢$

الحل :-

$ف(س) = \frac{س(س^{٣}+٢س^{٢}+س+٢)}{س+٢}$

	١	٢	١	٢
-٢		-٢	٠	-٢
	١	٠	١	٠

$= \frac{س(س+٢)(س^{٢}+١)}{س+٢} = س(س^{٢}+١) = س^{٣}+س$ ، $س \neq -٢$

راقت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner

ب) $ق(س) = \frac{س^5 - 7س^3 + س + 1}{س + 3}$ ، $س \neq -3$

الحل :

القسمة ليست مضبوطة لأن الباقي ≠ صفر

فيكون مكتوب بالصورة

ج) $ق(س) = \frac{س^4 - س^2 + س - 1}{1 - س}$ ، $س \neq 1$

الحل :-

$$ق(س) = \frac{(س-1)(س^3 + س^2 + 1)}{1 - س}$$

$$= س^3 + س^2 + 1$$

	$س^4$	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	0	-1	1	-1
		1	1	0	1
	1	1	0	1	0

٤) حل المعادلات الآتية :-

أ) $س^3 + 3س^2 - س - 3 = 0$

الحل :- الصفار المحتملة $\pm 1, \pm 3$ بالتجريب $ق(1) = 0$

$\therefore$ $(س - 1)$ عوامل $ق(س)$

$$س^3 + 3س^2 - س - 3 = (س-1)(س^2 + 4س + 3) = 0$$

$$= (س-1)(س+1)(س+3) = 0$$

$س - 1 = 0 \leftarrow س = 1$

$س + 1 = 0 \leftarrow س = -1$

$س + 3 = 0 \leftarrow س = -3$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
1	1	3	-1	-3
		1	4	3
	1	4	3	0

جذور المعادلة $-3, -1, 1$

ب) $س^4 - 12س^2 + 32 = 0$

الحل : $(س^2)^2 - 12س^2 + 32 = 0$

$ص^2 - 12ص + 32 = 0$

$(ص - 8)(ص - 4) = 0$

$(س^2 - 8)(س^2 - 4) = 0$

$(س - 2\sqrt{2})(س + 2\sqrt{2})(س - 2)(س + 2) = 0$

جذور المعادلة $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2, -2$

مع ثابت 4 2

$ص = س^2$

Scanned by CamScanner

حل $س^4 - 3س^2 - 4 = 0$ ..... $ص = س^2$

الحل: $(س^2)^2 - 3س^2 - 4 = 0$

$ص^2 - 3ص - 4 = 0$

$(ص - 4)(ص + 1) = 0$ ← مميزها سالب

$(س^2 - 4)(س^2 + 1) = 0$

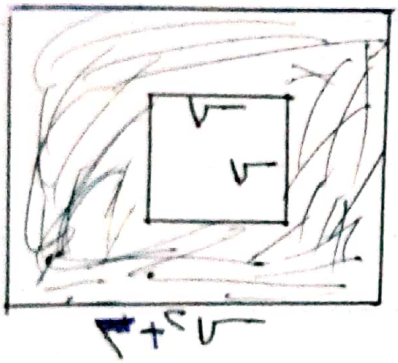
$(س - 2)(س + 2)(س^2 + 1) = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$ جذور المعادلة $2، -2$

$س + 2 = 0 \leftarrow س = -2$

---

٥) في الشكل (١-٣) ماذا علمت أن طول ضلع المربع الخارجي $(س^2 + 2)$ سم وطول ضلع المربع الداخلي $(س)$ فأجب عن كل مما يأتي:



أ) اكتب قاعدة تعبر عن الدالة على مساحة المنطقة المظللة

ب) إذا كانت مساحة المنطقة المظللة 32 سم^2 فجد طول ضلع كل من المربع الداخلي والمربع الخارجي

الحل: أ) $ق(س)$ = المربع الخارجي − المربع الداخلي

$= (س^2 + 2)^2 - س^2$ فك الأقواس

$= س^4 + 4س^2 + 4 - س^2$ نبسط

$= س^4 + 3س^2 + 4$

ب) $س^4 + 3س^2 + 4 = 32$

$س^4 + 3س^2 - 28 = 0$

$ص^2 + 3ص - 28 = 0$ $ص = س^2$

$(ص + 7)(ص - 4) = 0$ مميزها سالب

$(س^2 + 7)(س^2 - 4) = 0$

$(س^2 + 7)(س + 2)(س - 2) = 0$

$س - 2 = 0 \leftarrow س = 2$ جذور المعادلة

"نرفض السالب لأنه لا يوجد طول سالب"

طول المربع الداخلي $س = 2$ سم والخارجي $س^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ سم

Scanned by CamScanner

٦) حل كلاً من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد

أ) $س^٢ - ٤س + ٣ < ٠$

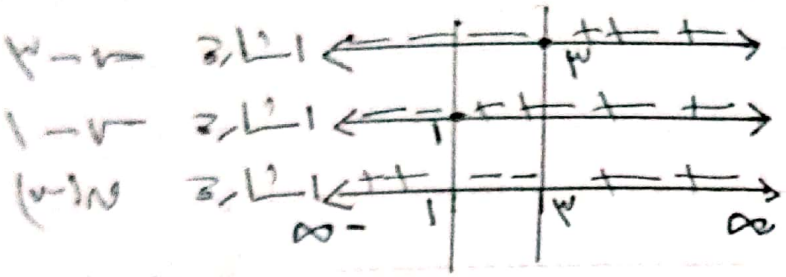
الحل :

$م(س) = س^٢ - ٤س + ٣$

$= (س - ٣)(س - ١)$

$س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



مجموعة الحل :

$(١ ، ٣)$

راقت ابراهيم صافي

ب) $س^٣ - ٤س \geq س^٢ - ٤$

الحل :- $س^٣ - س^٢ - ٤س + ٤ \geq ٠$

$م(س) = س^٣ - س^٢ - ٤س + ٤$

$م(١) = ١ - ١ - ٤ + ٤ = ٠$ بالتجريب

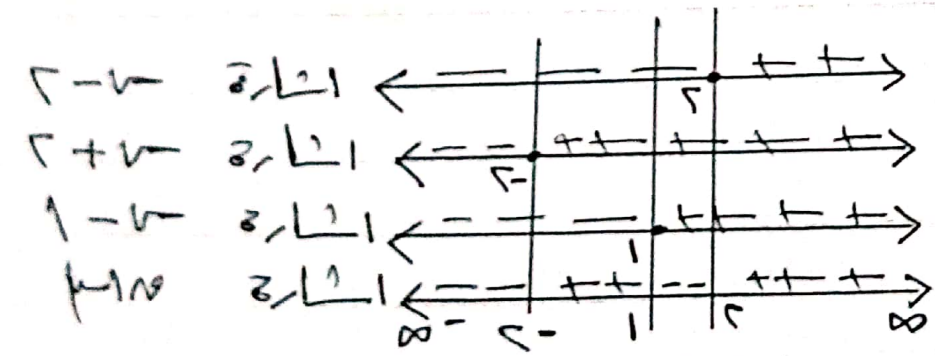
$\therefore$ صفار المقطوعة $\pm ١ ، \pm ٢ ، \pm ٤$

$س - ١$ عامل من عوامل $م(س)$

$س^٣ - س^٢ - ٤س + ٤ = (س - ١)(س^٢ + س - ٤)$

$= (س - ١)(س + ٢)(س - ٢)$

	$س$	$س^٢$	$س^٣$	ثابت
١	١	-١	-٤	٤
-٤	٢	٢		
	١	١	-٢	٠



مجموعة الحل :-

$[-٢ ، ١] \cup [٢ ، \infty)$

هـ) $س^٣ - ٣س^٢ \leq س - ٣$

الحل :-

$س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣ \leq ٠$

Scanned by CamScanner

$$م(س) = س^3 - 3س^2 - س + 3$$

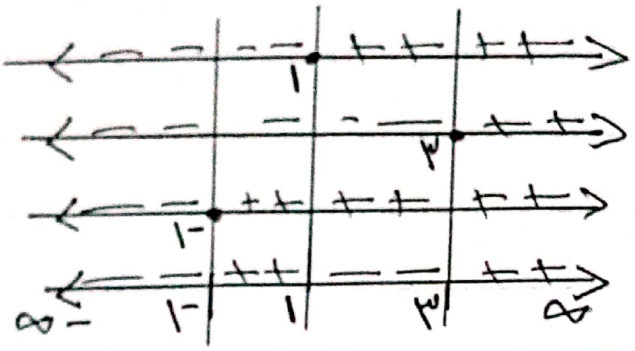
اصفار المقام ± 1 ، ± 3 بالتجريب $م(1) = 0$

$س - 1$ عامل من عوامل $م(س)$

$$س^3 - 3س^2 - س + 3 = (س-1)(س^2 - 2س - 3)$$
$$= (س-1)(س-3)(س+1)$$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
3	1	-3	-1	
-1		1	-2	
	1	-2	-3	0

مجموعة الحل :- $[-1, 1] \cup [3, \infty)$



٧) جزئ الصيغ النسبية الآتية :-

أ) $\frac{8س - 24}{س^2 + 3س - 18}$

الحل :-

$$\frac{8س - 24}{س^2 + 3س - 18} = \frac{8س - 24}{(س-3)(س+6)} = \frac{ب}{س-3} + \frac{ا}{س+6} = \frac{ا(س-3) + ب(س+6)}{(س-3)(س+6)}$$

$8س - 24 = ا(س-3) + ب(س+6)$ اصفار المقام $3 ، -6$

$س = 3 \leftarrow 18 = 9ب \leftarrow ب = 2$

$س = -6 \leftarrow -72 = -9ا \leftarrow ا = 8$

$$\frac{8س - 24}{س^2 + 3س - 18} = \frac{8}{س+6} + \frac{2}{س-3}$$

ب) $\frac{س^2 - س + 3}{س^2 - س - 2}$

$$\begin{array}{r|l} س^2 - س + 3 & س^2 - س - 2 \\ \hline -س^2 + س + 2 & 1 \\ \hline 5 & \end{array}$$

الحل :- $\frac{س^2 - س + 3}{س^2 - س - 2} = 1 + \frac{5}{س^2 - س - 2}$

Scanned by CamScanner

$$\frac{-2س+5}{س^2+س-2}=\frac{-2س+5}{(س+2)(س-1)}=\frac{ب}{س-1}+\frac{ا}{س+2}=\frac{ا(س-1)+ب(س+2)}{(س-1)(س+2)}$$

اضعاف المقام $س=1$ ، $س=-2$

$-2س+5=ا(س-1)+ب(س+2)$

$س=1 \leftarrow 3=3ب \leftarrow ب=1$

$س=-2 \leftarrow 9=-3ا \leftarrow ا=-3$

$$\frac{-2س+5}{س^2+س-2}=\frac{-3}{س+2}+\frac{1}{س-1}+1$$

٥) $\frac{3س-1}{3+س-5س^2+2س^3}$

الحل :-

$$\frac{3س-1}{3+س-5س^2+2س^3}=\frac{3س-1}{(س-1)(2س-3)(س+1)}=\frac{ا}{س+1}+\frac{ب}{2س-3}+\frac{ج(س-1)}{(2س-3)(س-1)}$$

اضعاف المقام $س=\frac{3}{2}$ ، $س=1$

$3س-1=ا(2س-3)+ب(س-1)$

$س=1 \leftarrow 2=ا \leftarrow ا=2$

$س=\frac{3}{2} \leftarrow \frac{7}{2}=\frac{1}{2}ب \leftarrow ب=7$

$$\frac{3س-1}{3+س-5س^2+2س^3}=\frac{2}{س+1}+\frac{7}{2س-3}+\frac{-2}{س-1}$$

---

١٨ اذا كان خارج قسمة كثير الحدود $ه(س)$ على $س-3$ يساوي $س^2-6س+9$ وكان الباقي -1 اكتب قاعدة الاقتران.

الحل :-

$$ه(س)=(س-3)(س^2-6س+9)+(-1)$$

$$ه(س)=س^3-6س^2+9س-3س^2+18س-27-1$$

$$ه(س)=س^3-9س^2+27س-28$$

$$\begin{array}{r|l} س^3-9س^2+27س-28 & س-3 \\ \vdots & \\ -1 \leftarrow \text{الباقي} & \end{array}$$

Scanned by CamScanner

٩) اكتب صيغة مكافئة للاقتران $ق(س) = \frac{س^٤ + ٤س^٢ - ٣س^٣}{١ - س^٢}$

الحل :-

$$ق(س) = \frac{س(س^٣ + ٤س - ٣س^٢ - ٣)}{(١ + س)(١ - س)}$$

نكتب :- $س^٣ + ٤س - ٣س^٢ - ٣$ ، $س + ١$ عامل لـ

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	حاصل
-١	١	-٤	٠	-٣
٣		-١	-٣	
	١	-٣	-٣	٠

$$ق(س) = \frac{س(س + ١)(س^٢ - ٣س - ٣)}{(١ + س)(١ - س)}$$

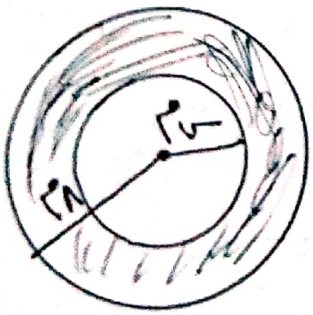
$$ق(س) = \frac{س(س^٢ - ٣س - ٣)}{١ - س}$$

---

١٠) دوار دائري الشكل طول نصف قطره ٨ م ، تم عمل نافورة ماء دائرية الشكل طول نصف قطرها $(س)$ متر بوسط الدوار. بحيث كان مركزها مركز الدوار نفسه ، أجب عن كل مما يأتي :-

أ) اكتب اقتران النسبي الذي يمثل مساحة الجزء المتبقي من الدوار ومقامه المسافة بين نهايتي قطري الدوار والنافورة

ب) اذا كانت مساحة الجزء المتبقي من الدوار ١٠π م^٢ جد طول نصف قطر النافورة.



الحل :- أ) $ق(س) =$ مساحة الدائرة الكبرى - مساحة الدائرة الصغرى / $٨ - س$

$$ق(س) = \frac{٦٤\pi - س^٢\pi}{٨ - س}$$

ب) $٦٤\pi - س^٢\pi = ١٠\pi$ نقسم على π

$$٦٤ - س^٢ = ١٠$$

$$-س^٢ = -٥٤$$

$$س = \sqrt{٥٤}$$

Scanned by CamScanner

١١) إذا كان $ق(س) = س^{ن} - ٣م^{٢}س + ن$ حيث ن، م ثابتان وكان أحد أصفار $ق$ يختلف بمقدار ٢ عن صفره الآخر، أثبت أن $م^{٢} = ن + ١$

الحل :-

$ب$: الصفر الأول ← $ب + ٢$ الصفر الثاني

مجموع الصفرين $٢ب + ٢$

حاصل ضرب الصفرين $ب(ب+٢) = ب^{٢} + ٢ب$

بالمقارنة بالمعادلة المرافقة للاقتران التربيعي :-

$ب^{٢} + ٢ب = ن$ ← (١)

$٢ب + ٢ = ٢م^{٢}$ ← (٢) ← $ب = م^{٢} - ١$ نعوضها في (١) :

$(م^{٢}-١)^{٢} + ٢(م^{٢}-١) = ن$

$م^{٤} - ٢م^{٢} + ١ + ٢م^{٢} - ٢ = ن$

$م^{٤} - ١ = ن$ ← $م^{٢} = ن + ١$

---

١٢) ضع دائرة :-

١) باقي قسمة $ق(س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٢س + ٢$ على $(س+١)$ يساوي ٥ فما قيمة الثابت $د$:

أ) -٣ ب) ٣ ج) ٧ د) -٢

٢) إذا كان $ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٦$: فإن قيمة $\frac{ق(٢-ب)}{ق(ب)}$ =

أ) ١ ب) -١ ج) $١-ب$ د) صفر

٣) إذا كان $\frac{س}{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤} = \frac{ب}{س} + \frac{ج}{س - ٤}$ فما قيمة $ب + ج$ على الترتيب

أ) ١٠، ١٦ ب) ١٦، ١٠ ج) -١٦، ١ د) -١، ١٦

٤) أي مما يأتي يعد عاملاً من عوامل $س^{٣} - ٧س + ٦$

أ) $س + ٣$ ب) $س + ١$

ج) $س - ٦$ د) $س + ٢$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

Scanned by CamScanner