بسم الله الرحمن الرحيم

دوسية " الخير فينا "

لدراسة الامتحان التنافسي

تخصص: الرياضيات

اعداد مجموعة شباب متطوعين

بالتنسيق مع قروب "الخير فينا" على موقع الفيسبوك

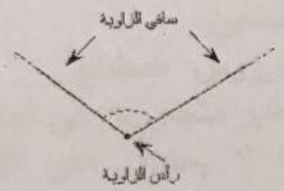
الفصل الأول
الهندسة المستوية

النقطة : تشير إلى مكان في الفراغ ولا يوجد لها سمك ولا عرض ولا طول . (لا يوجد لها أبعاد).

صفات المستقيم : ليس له بداية وليس له نهاية
من نقطة واحدة يمر ما لا نهاية من المستـ
في نقطتين مختلفتين يمر مستقيم واحد فـ
على المستقيم ما لا نهاية من النقاط

القطعة المستقيمة : هي جزء من مستقيم محدود بنقطتين (أي يوجد لها بداية

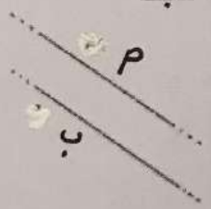
الشعاع : هو جزء من مستقيم له بداية وليس له



الزاوية : تنتج عن شعاعين يخرجان من رأس مشترك

الخط المنكسر : مبني من قطع مستقيمة تتصل ببعضها البعض في سلسلة ليست على استقـ
واحدة.

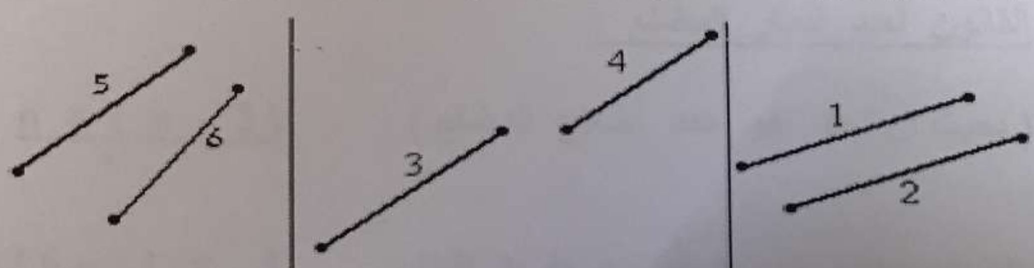
المستقيمان المتوازيان :هما المستقيمان اللذان لا يلتقيان أبداً أي البعد بينهما ثابت



اشارة التوازي هي: ∥

م ∥ ب يعني أن المستقيمين م وَ ب متوازيان

القطعتان المتوازيتان :هما قطعتان واقعتان على مستقيمين متوازيين



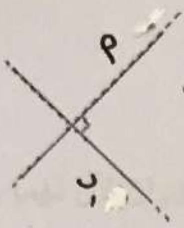
القطعتان 1 وَ 2 متوازيتان

القطعتان 3 وَ 4 متوازيتان

القطعتان 5 وَ 6 غير متوازيتين (لأن المستقيمين اللذين يمران بهما غير متوازيين).

المستقيمان المتعامدان:

هما مستقيمان متقاطعان يُكونان بينهما زاوية قائمة
إنتبهوا:
المستقيمان قد يقعان في كل اتجاه، شرط أن تكون الزاوية بينهما قائمة.



إشارة التعامد هي: $\perp$

أ $\perp$ ب يعني أن "المستقيمين أ وَ ب متعامدان".

المضلع :

التعريف : هو خط منكسر مغلق
في كل مضلع يوجد :
١. أضلاع : هي القطع المستقيمة التي تركب المضلع
٢. رؤوس : هي نقاط الإلتقاء بين كل ضلعين .
٣. زوايا : تتكون في كل رأس من رؤوس المضلع .
٤. قطر : هو قطعة تصل بين رأسين غير متجاورين في المضلع.
(إنتبه : طبعا المثلث هو مضلع لكنه لا يحتوي على اقطار)
٥. عدد الأضلاع = عدد الرؤوس = عدد الزوايا

تصنف المضلعات حسب عدد الأضلاع :

١. المثلثات : ولها ٣ أضلاع ٣ رؤوس ٣ زوايا
٢. الأشكال الرباعية : ولها ٤ أضلاع ٤ رؤوس ٤ زوايا
٣. الأشكال الخماسية : ولها ٥ أضلاع ٥ رؤوس ٥ زوايا
٤. الأشكال السداسية : ولها ٦ أضلاع ٦ رؤوس ٦ زوايا
٥. الأشكال السباعية : ولها ٧ أضلاع ٧ رؤوس ٧ زوايا
وهكذا ....

القانون لعدد أقطار المضلع :

(بحيث ان n هو عدد أضلاع المضلع) $\frac{n \times (n - 3)}{٢}$

مثال : مضلع ذو ٦ أضلاع له ٩ أقطار $\frac{6 \times (6-3)}{2} = ٩$

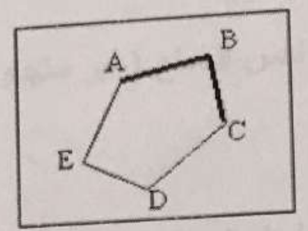
القانون لعدد الاقطار من الرأس الواحد :

(بحيث ان n هو عدد أضلاع المضلع) $n - 3$

مثال : مضلع ذو ٧ أضلاع له ٤ أقطار من كل رأس $7 - 3 = 4$

الضلعان المتجاوران (في المضلع) :

هما ضلعان في المضلع لهما رأس مُشترك.
مثال: الضلعان A B وَ B C في الشكل الخماسي هذا هما متجاوران لأن لهما رأسًا مشتركًا B.

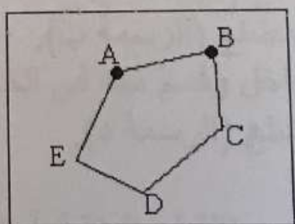


الرأسان المتجاوران (في المضلع) :

هما رأسان في المضلع ينتميان إلى نفس الضلع (أي يربط بينهما ضلع مشترك)
في كل رأس من رؤوس المضلع تتكوّن زاوية للمضلع.
عندما نتحدّث عن زوايا المضلع فإننا نقصد فقط لزواياه الداخلية.

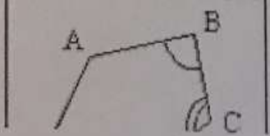
مثال: الرأس A والرأس B هما رأسان متجاوران ينتميان إلى نفس الضلع AB

بكلمات أخرى الرأس B يجاور الرأس A



الزاويتان المتجاورتان (في المضلع) :

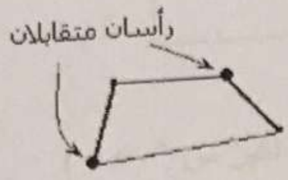
هما زاويتان في المضلع رأساهما متجاوران (يربط بينهما ضلع مشترك).
في المضلع في الرسمة، الزاويتان المعلّمتان (∢B وَ ∢C) هما زاويتان متجاورتان
بكلمات أخرى : الزاوية B تجاور الزاوية C



الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي :

هما ضلعان لا يوجد بينهما رأس مشترك (غير متجاورين).

الرأسان المتقابلان في الشكل الرباعي :



هما رأسان لا ينتميان إلى نفس الضلع (غير متجاورين)

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي :

هما زاويتان رأساهما متقابلان (غير متجاورين)

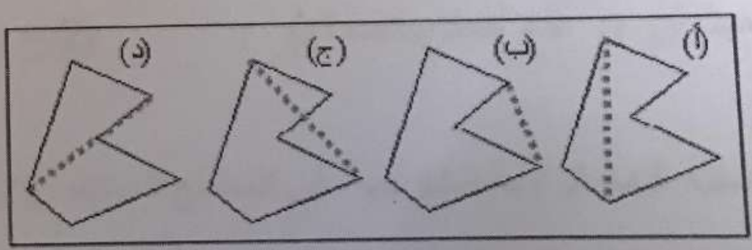
القطر في المضلع :

هو قطعة تصل بين رأسين غير متجاورين في المضلع.

هناك أربع إمكانيات لموقع القطر في المضلع:

- أن يقع بكامله في المضلع (الرسمة أ).
- أن يقع بكامله خارج المضلع (الرسمة ب).
- أن يقع قسمٌ منه في الداخل وقسمٌ منه في الخارج (الرسمة ج).
- أن يقع قسم منه على ضلع (الرسمة د).

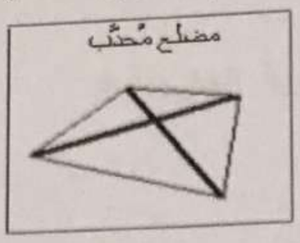
أمثلة: (القطع المتقطعة هي أمثلة لأقطار).



في المثلث لا يوجد أقطار لأن كل رأسين فيه هما متجاوران.

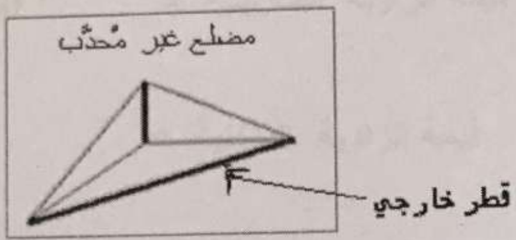
المضلع المُحدَّب:

هو مضلع يحوي في داخله كلَّ أقطاره وهو مضلع كل زاوية داخلية فيه أصغر من ١٨٠°.



(المضلع الغير محدب المقعّر) :

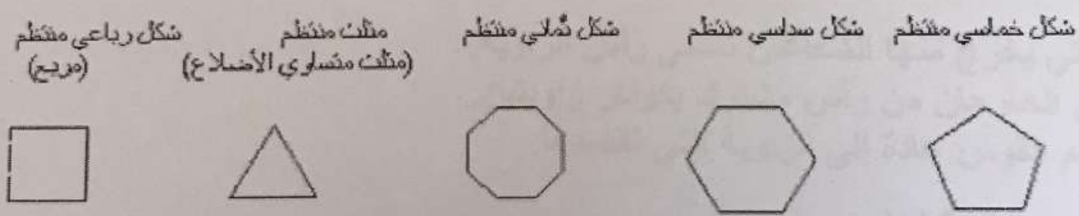
(هو مضلع يقع أحد أقطاره خارجه (فيه زاوية منعكسة أكبر من ١٨٠°)



المضلع المنتظِم :

هو مضلع كل أضلاعه متساوية وكل زواياه متساوية.

أمثلة:



قانون لحساب قيمة الزاوية الداخلية في المضلع المنتظم :

$$\frac{180 \times (n-2)}{n}$$ (بحيث أن n عدد أضلاع المضلع)

قانون لحساب قيمة الزاوية الخارجية في المضلع المنتظم (تذكر : جميع أضلاعه وزواياه متساوية)

$$\frac{360}{N}$$ (بحيث أن n عدد أضلاع المضلع)

مثال ١ :

في المثلث المتساوي الأضلاع قيمة الزاوية الداخلية = $\frac{180 \times (3-2)}{3} = 60°$

في المثلث المتساوي الأضلاع قيمة الزاوية الخارجية = $\frac{360}{3} = 120°$

مثال 2 :

في المربع قيمة الزاوية الداخلية = $\frac{180 \times (4-2)}{4} = 90°$

في المربع قيمة الزاوية الخارجية = $\frac{360}{٤} = 90°$

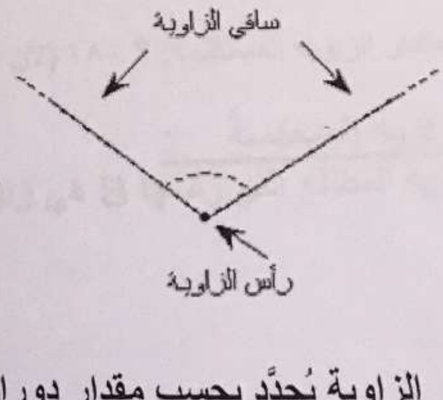
في المخمس قيمة الزاوية الداخلية = $\frac{180 \times (5-2)}{5} = 108°$

الزوايا

تعريف الزاوية : تتكوّن من شعاعَين خارجين من نقطة مشتركة.

تُسمي الشعاعين ساقي الزاوية.

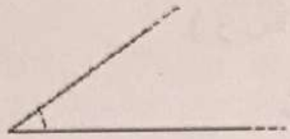
النقطة التي يخرج منها الشعاعان تُسمى رأس الزاوية.
الشعاعان الخارجان من رأس مُشترك يكونان زاويتين.
يشير رسم القوس عادة إلى الزاوية التي نقصدها.



كُبْر الزاوية يُحدَّد بحسب مقدار دوران أحد الشعاعين بالنسبة للآخر («الفتحة» بين الساقين).

تُصنف الزوايا إلى أنواع مختلفة:

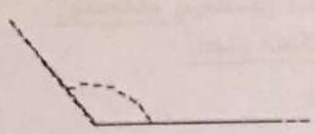
الزاوية الحادّة :



هي زاوية أصغر من زاوية قائمة.

مقدار الزاوية الحادة أصغر من ° ٩٠.

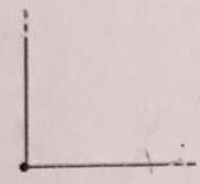
الزاوية المنفرجة :



هي زاوية أكبر من الزاوية القائمة وأصغر من الزاوية المستقيمة.

مقدار الزاوية المنفرجة هو بين ° ٩٠ و °١٨٠ (لا يشملهما).

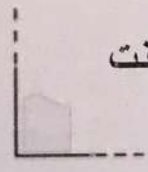
الزاوية القائمة :



هي كل زاوية من الزاويتين الناتجتين من تنصيف زاوية مستقيمة.

مقدار الزاوية القائمة: ° ٩٠.

في الرسم نُشير عادة إلى الزاوية القائمة هكذا:



يمكن فحص الزاوية القائمة بواسطة قرنة مستطيلة أيّا كانت (مثلا، بطاقة مستطيلة) هكذا:

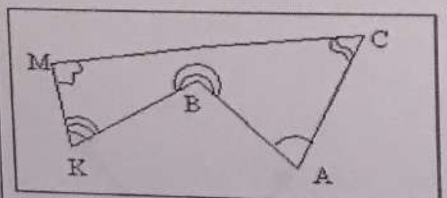
الزاوية المستقيمة :

هي الزاوية التي يُشكِّل ساقاها مستقيمًا.

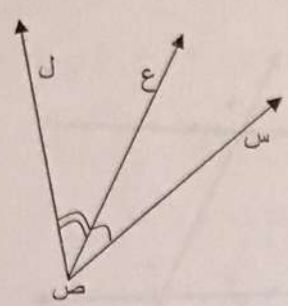
مقدار الزاوية المستقيمة: ° ١٨٠ (لأن الدورة الكاملة فيها ° ٣٦٠).

الزاوية المنعكسة :

زاوية المضلع التي رأسها B هي زاوية أكبر من °١٨٠ (منعكسة).



الزاويتان المتجاورتان :



تكون الزاويتان س صَ ع ، ع صَ ل متجاورتان إذا كان :

لهما رأس واحدة (ص) ، ولهما ضلع مشترك (ص ع).

الضلعان المتطرفان (ص س ، ص ل) في جهتين

مختلفتين من الضلع المشترك (ص ع) .

الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع نقطه بدايته تقع على هذا المستقيم <u>متكاملتان</u>
اذا كانت الزاويتان متجاورتان متكاملتان فان ضلعيهما المتطرفين يكونان على <u>استقامه واحدة</u>
اذا كانت الزاويتان المتجاورتان متتامتين فان ضلعيهما المتطرفين يكونان <u>متعامدين</u>

مجموع قياس الزوايا المتجاورة على مستقيم يساوي ١٨٠° .

مجموع قياس الزوايا المجتمعة حول نقطة يساوي ٣٦٠° .

الزاويتان المتقابلتان بالرأس :

إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتان متقابلتان بالرأس متطابقتان

(متساويتان في القياس).

الزاويتان المتتامتان :

تكون الزاويتان متتامتان إذا كان مجموع قياسهما ٩٠° .

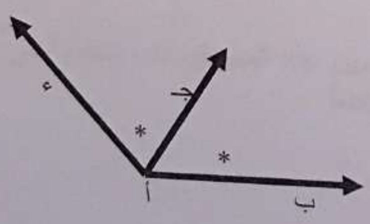
الزاويتان المتكاملتان :

تكون الزاويتان متكاملتان إذا كان مجموع قياسهما ١٨٠° .

لاحظ أن

الزاوية الحادة تكملها زاوية منفرجة
الزاوية المنفرجة تكملها زاوية حادة
الزاوية القائمة تكملها زاوية قائمة
الزاوية المستقيمة تكملها زاوية صفرية
الزاوية الحادة تتممها زاوية حادة
الزاوية القائمة تتممها زاوية صفرية

منصف الزاوية :-



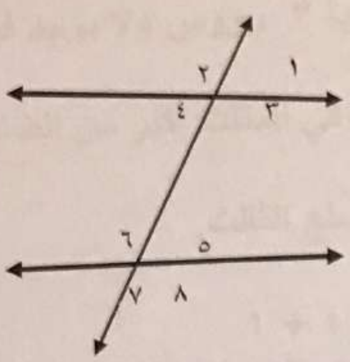
هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين

متساويتان فى القياس

إذا كان ق (ب أ جـ) = ق (جـ أ ء)

فإن أ جـ يسمى منصف للزاوية ب أ ء

أنواع الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم مستقيمين



إذا قطع مستقيم مستقيمين ينتج
ثلاث أنواع من الزوايا
(١) زوايا متبادلة
مثل ٤ ، ٥ أو ٣ ، ٦
(٢) زوايا متناظرة
مثل ١ ، ٥ أو ٢ ، ٦
أو ٣ ، ٨ أو ٤ ، ٧
(٣) زوايا داخلة
مثل ٣ ، ٥ / ٤ ، ٦

إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فإن

١-كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس

٢-كل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس

٣-كل زاويتين داخليتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان

شروط توازى مستقيمين

يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وحدثت إحدى الحالات الاتية
١- زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس
٢- زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس
زاويتان داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع ومتكاملتان
ملاحظات
(١) المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين فى المستوى يكون عمودى على الأخر
أى أن إذا كان $ل_١ // ل_٢$ ، $ل_٣ \perp ل_١$ فإن $ل_٣ \perp ل_٢$
(٢) إذا كان كلا من مستقيمين عمودى على مستقيم ثالث كان هذا المستقيمان متوازيان
أى أن إذا كان $ل_١ \perp ل_٣$ ، $ل_٢ \perp ل_٣$ فإن $ل_١ // ل_٢$
(٣) إذا وازى مستقيمان مستقيماً ثالثاً كان هذا المستقيمان متوازيان
بصورة أخرى
المستقيمان الموازيان لثالث متوزيان
أى ان إذا كان $ل_١ // ل_٣$ ، $ل_٢ // ل_٣$ فإن $ل_١ // ل_٢$
(٤) إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول فإن الاجزاء المحصورة بينها لاى قاطع أخر تكون متساوية فى الطول أيضاً

المثلث

تعريف المثلث: هو عبارة عن مضلع ذو ٣ أضلاع ٣ زوايا ٣ رؤوس ولا يوجد فيه أقطار.

قانون أساسي لبناء مثلث :هو أن يكون مجموع كل ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث.

شرط مكافئ : أن يكون مجموع أصغر ضلعين أكبر من الضلع الثالث.

مثال ١ : من هذه الاضلاع ٤ ٦ ١ لا نستطيع بناء مثلث لأن ٦ > ٤ + ١

مثال ٢ : من هذه الأضلاع ٣ ٥ ٧ نستطيع بناء مثلث لأن ٧ < ٣+ ٥

نظريات المثلث

نظرية (١) :

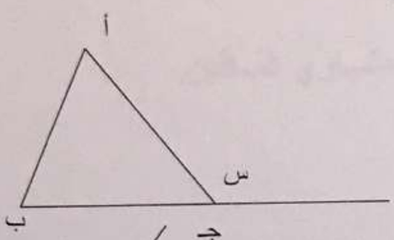
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوي ١٨٠°

أي أن ق (أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠°

نظرية (٢) :

إذا مد أحد أضلاع مثلث فإن قياس الزاوية الخارجة الناتجة تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين للمثلث ما عدا المجاورة لها

أي أن ق (س) = ق (أ) + ق (ب)

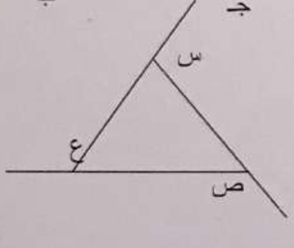


 # نتائج :

نتيجة (١) :

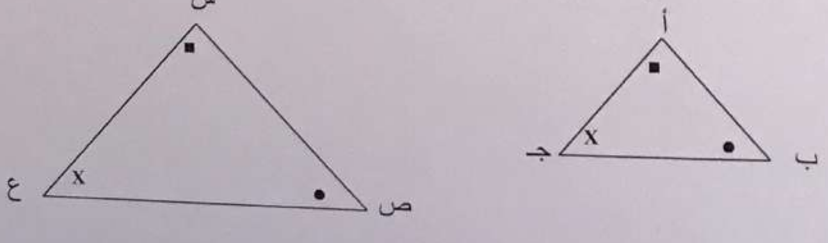
مجموع قياسات زوايا المثلث الخارجة تساوي ٣٦٠°

أي أن : ق (س) + ق (ص) + ق (ع) = ٣٦٠°



نتيجة (٢) :

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتان في مثلث آخر تطابقت الزاوية الثالثة في كل منهما



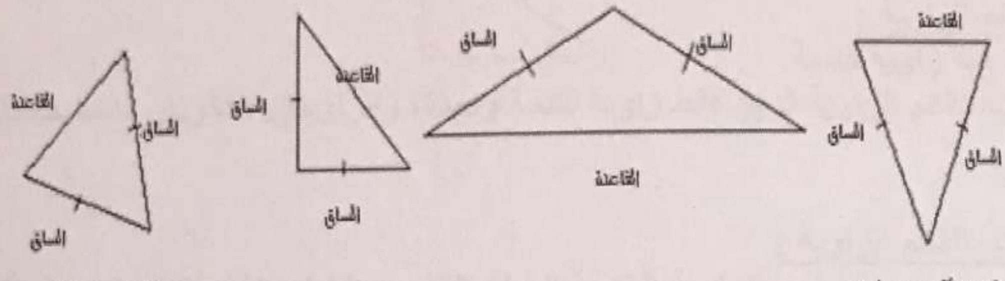
تصنيف المثلثات حسب الأضلاع :

مثلث متساوى الساقين :

تعريف : هو مثلث فيه ضلعان متساويان في الطول.

الضلعان المتساويان في المثلث المتساوي الساقين يُسميان الساقين والضلع الثالث يُسمى القاعدة.
إنتبهوا: القاعدة قد تكون أطول من الساقين، أو أقصر منهما أو تُساويهما في الطول.

أمثلة لمثلثات متساوية الساقين:



القاعدة أقصر من الساق

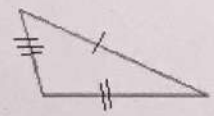
القاعدة أطول من الساق

القاعدة تساوي الساق

مثلث متساوى الأضلاع :

هو مثلث كل أضلاعه متساوية في الطول.
إنتبهوا: المثلث المتساوي الأضلاع هو، حالة خاصة من المثلث المتساوي الساقين.

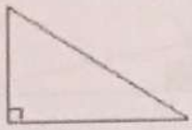
مثلث مختلف الأضلاع :



هو مثلث أضلاعه مختلفة في أطوالهـ.

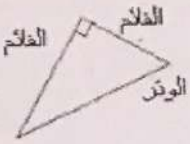
تصنيف المثلثات حسب الزوايا :

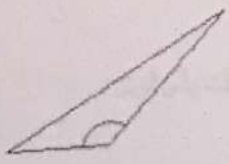
مثلث حاد الزوايا :
هو مثلث كل زواياه حادّة.
أحيانًا نُسمي هذا المثلث "مثلث حاد الزاوية".
نقصد من المصطلحين – "مثلث حاد الزوايا" و"مثلث حاد الزاوية" - نفس المثلث الذي فيه كل الزوايا حادة.



مثلث قائم الزاوية :
هو مثلث فيه زاوية قائمة.
في المثلث القائم الزاوية توجد فقط زاوية قائمة واحدة، والزاويتان الأخريان دائمًا حادّتان.

في المثلث القائم الزاوية :
نُسمي كل ضلع من ضلعي الزاوية القائمة الضلع القائم، والضلع الذي يُقابل الزاوية القائمة الوتر.





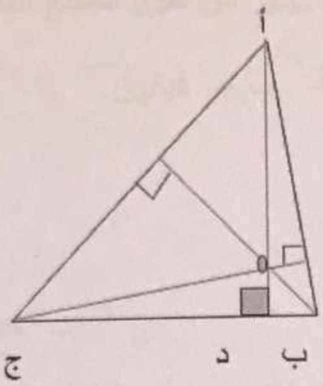
مثلث منفرج الزاوية :
هو مثلث فيه زاوية منفرجة.
في المثلث المنفرج الزاوية توجد فقط زاوية منفرجة واحدة، والزاويتان الأخريان دائمًا حادّتان.

الإرتفاع :

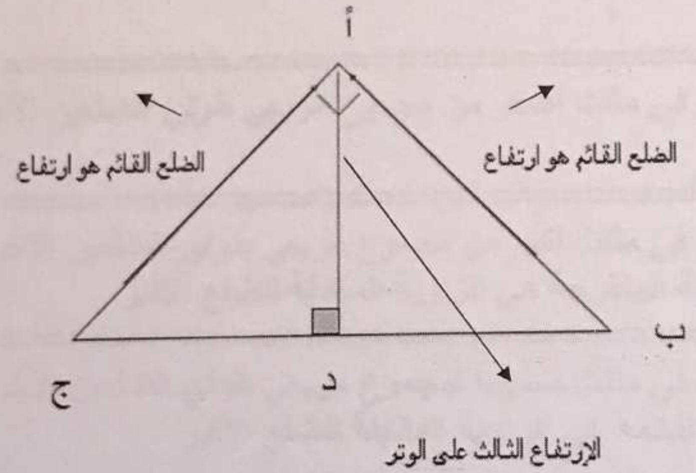
تعريفه : هو قطعة مستقيمة أحد طرفيها موجود في أحد الرؤوس ، وطرفها الآخر على الضلع المقابل أو على امتداده وهو عمودي على هذا الضلع .
في بعض المثلثات قد يكون الضلع نفسه هو أيضاً ارتفاع .

- في المثلث توجد ٣ ارتفاعات يرمز للارتفاع بالحرف h
- لكل مثلث ٣ ارتفاعات ، توجد نقطة مشتركة للارتفاعات الثلاثة أو امتداداتها .

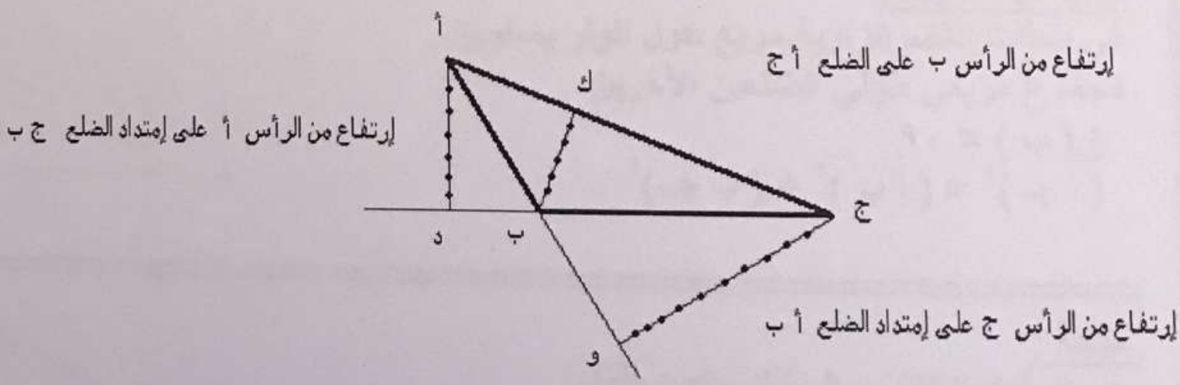
الإرتفاع فى المثلث حاد الزاوية



الإرتفاع فى المثلث قائم الزاوية :



الإرتفاع فى المثلث منفرج الزاوية :



متباينة المثلث :

مجموع طولي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

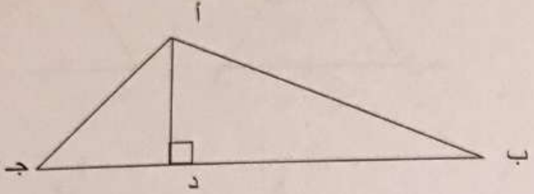
ويمكن اثبات ذلك :

في المثلث أ ب جـ نرسم $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فيكون

أ ب > ب د .... (١)

أ جـ > جـ د .... (٢)

بالجمع أ ب + أ جـ > ب جـ



إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر والعكس صحيح

إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث أصغر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث حاد الزوايا

إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث منفرج الزاوية وتكون الزاوية المنفرجة هي الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية وتكون الزاوية القائمة هي الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

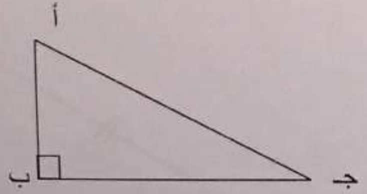
((عكس نظرية فيثاغورث))

نظرية فيثاغورث :

في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

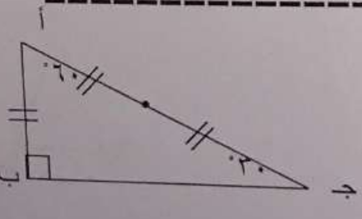
ق(ب) = ٩٠°

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

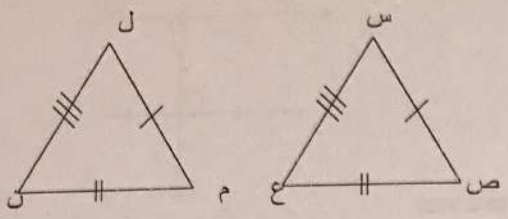


نتيجة :

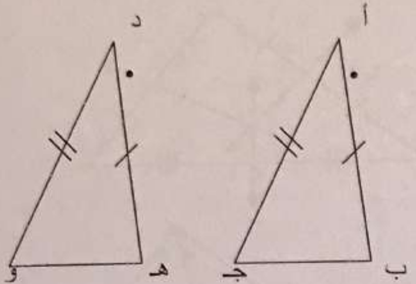
في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي نصف طول الوتر



حالات تطابق المثلثين :

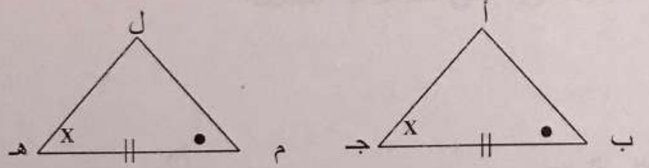


(١) يتطابق المثلثات إذا تطابق كل ضلع في أحدهما مع نظيره في الآخر
(ض . ض . ض)

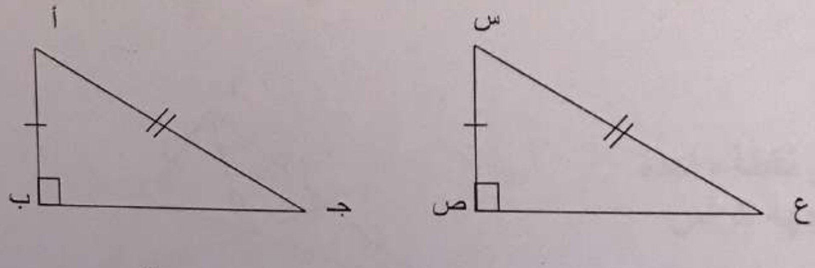


(٢) يتطابق المثلثان إذا تطابق في أحدهما ضلعان والزاوية المشتركة معهما في الرأس مع نظائرها في المثلث الآخر
(ض . ز . ض)

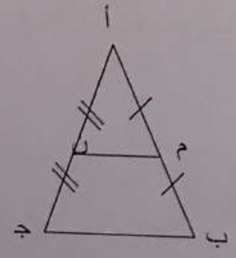
(٣) يتطابق المثلثان إذا تطابق في أحدهما زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما مع نظائرها في المثلث الآخر
(ز . ض . ز)



(٤) يتطابق المثلثان قائما الزاوية إذا تطابق في أحدهما وتر وضلع مع نظائرهما في المثلث الآخر

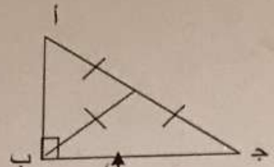


بعض نظريات المثلث :

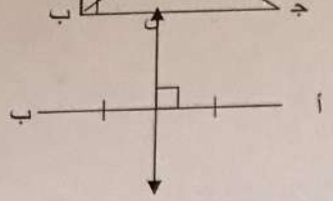


نظرية (١) :
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعي في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله

نظرية (٢) :
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة
إلى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر

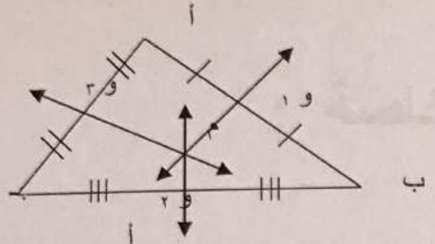


<u>محاور أضلاع المثلث :</u>
محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها
محاور أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة

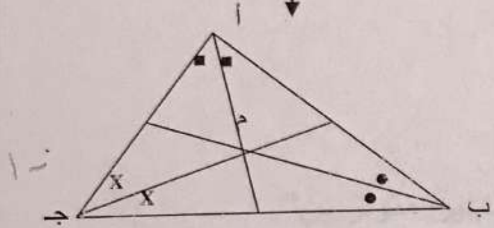


====================

نظرية (٣) :
الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث
من منتصفاتها تتقاطع في نقطة واحدة



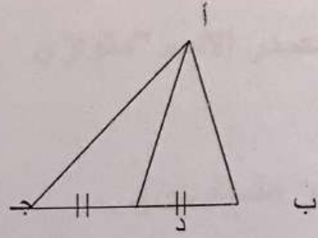
نظرية (٤) :
منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة



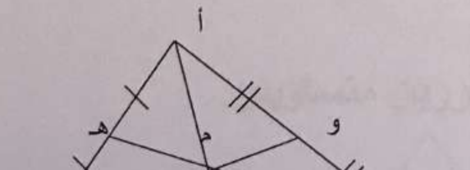
<u># نتيجة :</u>
نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة

<u>القطع المتوسطة للمثلث</u>

القطعة المتوسطة للمثلث : هي القطعة المستقيمة التي
تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل
أ د قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ



نظرية (٥) :
القطع المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة
تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

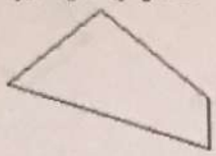


الأشكال الرباعية :

<u>تعريف :</u> هي مضلعات لها ٤ أضلاع ٤ رؤوس ٤ زوايا وَ ٢ أقطار

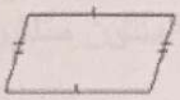
مجموع الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي هو °٣٦٠
نُميِّز بين أشكال رباعية خاصّة - متوازي الأضلاع، الدلتون، المُعين، المستطيل، المربع، شبه المنحرف
وبين أشكال رباعية غير خاصّة، أي أنها لا تنتمي إلى أحد الأنواع السابقة.

مثال:



الأشكال الرباعية الخاصة :

متوازي الأضلاع :



<u>تعريفه :</u> هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويان.

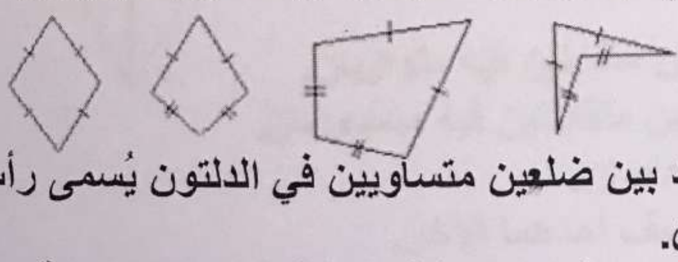
<u>تعريف مكافئ :</u> "هو شكل رباعي فيه زوجان من ضلعين متقابلين متوازيين".

<u>صفات متوازي الأضلاع:</u>

- كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان (هذا هو أيضا مصدر الاسم "متوازي أضلاع").
- كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان.
- قطراه يُنصِّف أحدهما الآخر (أي أن كل قُطر يقسم الآخر إلى قسمين متساويين).
- فيه تماثل دوراني مركزه نقطة تقاطع قطريه.

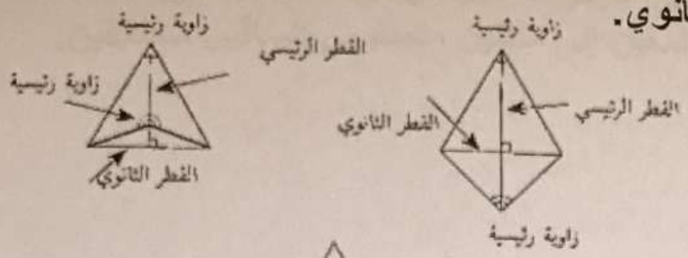
الدالتون :

هو شكل رباعي فيه زوجان منفردان من ضلعين متجاورين متساويين.

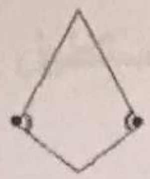


الرأس الموجود بين ضلعين متساويين في الدلتون يُسمى رأسًا رئيسيًا. في الدلتون يوجد رأسان رئيسيان.
زاوية الدلتون التي رأسها " رأسًا رئيسيًا" تسمى "زاوية رئيسية"

القطر الذي يصل الرأسين الرئيسيين في الدلتون يُسمى القطر الرئيسي، بينما يُسمى القُطر الآخر القُطر الثانوي.

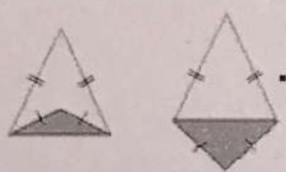


صفات الدلتون:



- زاوياته الجانبيتان متساويتان.
- قطراه متعامدان.
- قطره الرئيسي يُنصّف قطره الثانوي.
- قُطره الرئيسي يقسم الدلتون إلى مثلثين متطابقين.
- فيه تماثل انعكاسي بالنسبة لقطره الرئيسي.
- قطره الثانوي يُكوِن في الدلتون مثلثين متساويي الساقين، قاعدتهما المشتركة هي القطر الثانوي.

(إذا كان الدلتون غير محدب، يقع أحد المثلثين داخل الآخر).



مساحة الدالتون = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

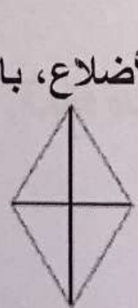
محيط الدالتون = مجموع أضلاعه

المُعيّن :

<u>تعريفه :</u> هو متوازي أضلاع خاص وأيضًا دلتون خاص.

لذلك فيه كل صفات الدلتون وصفات متوازي الأضلاع، بالإضافة إلى صفاتٍ خاصة به.

صفات المُعيّن:

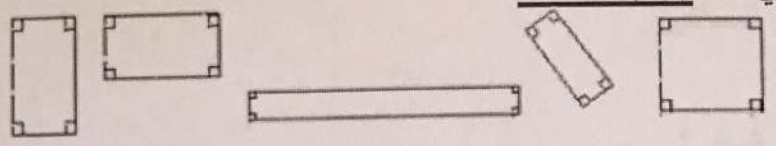


- كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.
- كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان.
- قطراه متعامدان.
- قطراه ينصّف أحدهما الآخر.
- كل قُطر فيه ينصف زاويتين متقابلتين.

- فيه تماثل انعكاسي بالنسبة لكل قطر من قطريه.
- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء قطريه.
- كل قطر يقسم المعين إلى مثلثين متساويي الساقين متطابقين.

المستطيل

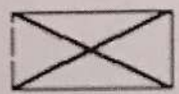
هو شكل رباعي كل زواياه قائمة.



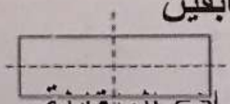
المستطيل هو متوازي أضلاع خاص، ولذلك فيه كل صفات متوازي الأضلاع بالإضافة إلى صفاتٍ خاصة به.

صفات المستطيل:

- كل ضلعين متقابلين فيه متساويان.
- كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.
- ٤ زوايا متساوية، قوائم.
- قطراه متساويان.
- قطراه ينصف أحدهما الآخر.

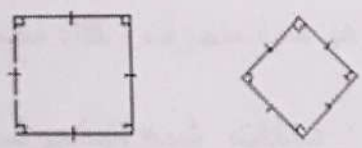


- كل قطر فيه يقسم المستطيل إلى مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقين
- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء القطرين.
- فيه تماثل انعكاسي؛ فيه خطّا تماثل يمران في منتصفات الأضلاع المتقابلة



المربع:

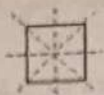
هو شكل رباعي كل أضلاعه متساوية وكل زواياه قائمة.



المربع هو شكل رباعي منتظم؛ المربع أيضًا هو متوازي أضلاع خاص، وكذلك مستطيل خاص ودلتون خاص ومعين خاص. لكل مربع توجد صفات متوازي الأضلاع، المستطيل، الدلتون والمعين بالإضافة إلى صفات خاصة به.

صفات المربع: فيه زوجان من ضلعين متقابلين متوازيين.

- فيه ٤ زوايا متساوية، قوائم (كل زاوية قيمتها ٩٠°)
- قطراه متساويان.
- قطراه متعامدان.
- قطراه ينصّف أحدهما الآخر.

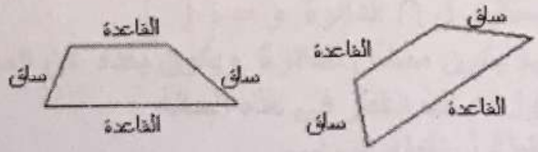


- فيه تماثل انعكاسي؛ فيه ٤ خطوط تماثل.
- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء قطرية.
- كل قُطر من قُطريه يقسم المربع إلى مثلثين متطابقين، كل منهما قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

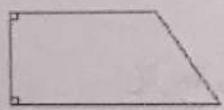
شبه المنحرف :

هو شكل رباعي فيه فقط زوج واحد من ضلعين متوازيين.
نُميّز في أضلاع شبه المنحرف بين قاعدتين وساقين:

القاعدتان - هما الضلعان المتوازيان.
الساقان - هما الضلعان الآخران (أي: الضُلعان المتقابلان غير المتوازيين).

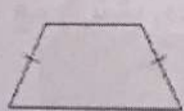


شبه منحرف قائم الزاوية :

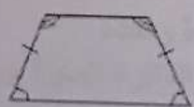


هو شبه منحرف أحد ساقيه عمودي على القاعدتين.

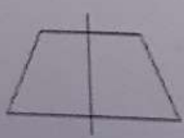
شبه منحرف متساوي الساقين :



هو شبه منحرف ساقاه متساويان.



صفات شبه المنحرف المتساوى الساقين:

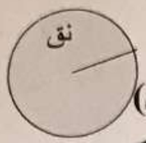


- قُطراهُ متساويان.
- الزاويتان بين الساقين وكل قاعدة من القاعدتين متساويتان.
- فيه تماثل انعكاسي ؛ خط تماثله يمر في منتصفي قاعدتيه.

الفصل الثاني هندسة الدائرة

(١) الدائرة : هي المنحنى المغلق الذي جميع نقطة على بعد متساو من نقطة معلومة في مستواه تسمى مركز الدائرة .

(٢) نصف القطر : هو القطعة المستقيمة التي أحد طرفيها مركز الدائرة والطرف الأخر نقطة تنتمي إلى الدائرة .(نق)



(٣) الوتر : هو قطعة مستقيمة نهايتاها على الدائرة .

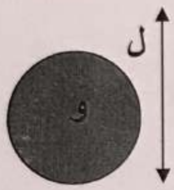
(٤) القطر: هو وتر مار بمركز الدائرة = ٢ نق

ملاحظات

أطول وتر في الدائرة هو القطر

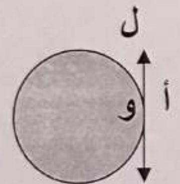
أي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تناظر لها الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التناظر .

وضع مستقيم بالنسبة إلى الدائرة

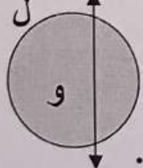


(١) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و = Φ
فإن المستقيم يكون خارج الدائرة ويكون بعده عن المركز أكبر من نصف القطر في هذه الحالة

(٢) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و = { أ }
فإن المستقيم يكون مماس للدائرة ويكون بعده عن المركز مساويا لطول نصف القطر في هذه الحالة
وتسمى النقطة أ بنقطة التماس.



(٣) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و= { أ ، ب }
فإن المستقيم يكون قاطع للدائرة ويكون بعده عن المركز أصغر من طول نصف القطر في هذه الحالة .



ملاحظة

المماس : هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة .

نظرية (١)

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحده

نتيجة

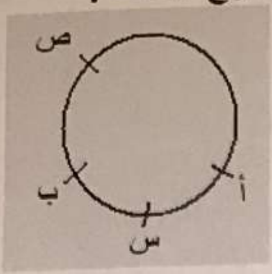
نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث هي مركز الدائرة المارة برؤوسه .

ملاحظات

(١) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث الحاد الزوايا يقع داخل المثلث

(٢) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث القائم الزاوية يقع على المثلث (نقطة تنتمي للمثلث)

(٣) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث .

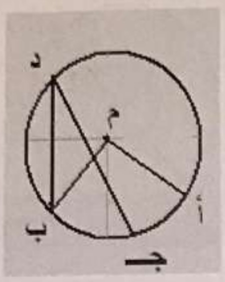


١) القوس:

هو مجموعة النقط المحصورة بين نقطتين على الدائرة فمثلا" أ س ب يمثل القوس الأصغر

أ ص ب يمثل القوس الأصغر

ملحوظة: الرمز أ ب يعنى القوس الأصغر ما لم يذكر خلاف ذلك



٢) الزاوية المركزية:

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.

< أ م ب زاوية مركزية يقابلها القوس أ جـ ب

< أ م ب زاوية مركزيه منعكسة يقابلها القوس أ د ب

٣) الزاوية المحيطية :

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترا" فى الدائرة فمثلا" : < جـ د ب زاوية محيطية يقابلها القوس جـ ب

٤)قياس القوس: هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له .

٥) طول القوس : هو جزء من محيط الدائرة .

نتائج هامة:

١) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح .

٢) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

٣) الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.

٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.

نظرية:-

الأوتار المتساوية في الدائرة تبعد أبعاد متساوية عن المركز.

نظرية عكسية:

الأوتار التي تبعد أبعادا متساوية عن المركز تكون متساوية.

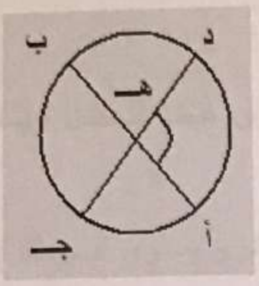
نظرية

" قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس "

ق(<أجــ ب) = ٢/١ ق(< أم ب)

<u>نتيجة(١)</u> قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها .

<u>نتيجة(٢)</u> الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة .



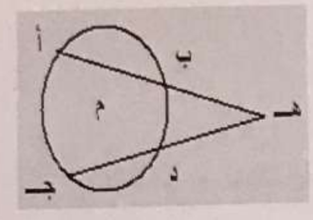
<u>تمرين مشهور(١):</u>

إذا كان أب ، جــ د وتران فى الدائرة م

أ ب ∩ جــ د = { هــ } فإن :

ق(<أهــ جــ) = ٢/١ {ق(أجــ)+ق(د ب) }

= ٢/١ { ق(أ د) + ق(ب جــ) }



<u>تمرين مشهور(٢) :</u>

إذا كان أ ب ، جــ د وتران فى الدائرة م

أ ب ∩ جــ د ={ هــ } حيث هــ خارج الدائرة فإن

ق(<هــ) = ٢/١ { ق(أ جــ) – ق(ب د) }

نظرية

" الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة متساوية فى القياس "

ق(<جــ)=ق(<د)=ق(<هــ)

<u>نتيجة :</u> الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسا" متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو (عدة دوائر) متساوية فى القياس .

عكس نظرية

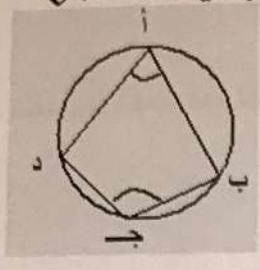
" إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحده وفى جهة واحده منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحده وتكون هذا القاعدة وترا" فيها "

نظرية

" إذا كان الشكل الرباعي دائريا" فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان "

(١) ق(<أ) + ق(<جـ)=١٨٠ °

(٢) ق(ب) + ق(د) = ١٨٠ °



عكس نظرية

" إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتين فى شكل رباعي كان هذا الشكل رباعي دائري "

نتيجة : قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

حالات الشكل الرباعي الدائري

يكون الشكل الرباعي دائريا" فى إحدى الحالات الآتية :

١) إذا وجدت نقطة فى المستوى داخله تبعد عن كل رأس من رؤوسه بمقدار ثابت أو إذا كانت رؤوسه الأربعة على بعد ثابت من نقطة ثابتة

٢) إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة ومتساويتان فى القياس .

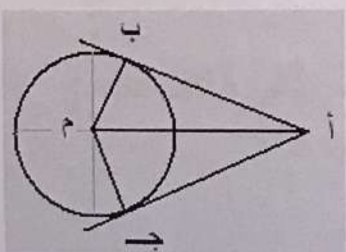
٣) إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان.

٤) إذا وجدت زاوية خارجه عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

نظرية

" القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول "

أ ب = أ جـ



نتائج النظرية :

إذا كان أ ب ، أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م فإن

١) م أ محور ب جـ (م أ ⊥ ب جـ وينصفه)

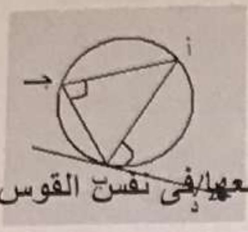
٢) أ م ينصف < ب أ جـ ، م أ ينصف < ب م جـ

تعريف :

الدائرة الداخلة للمثلث هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل ويكون مركزها نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية

نظرية

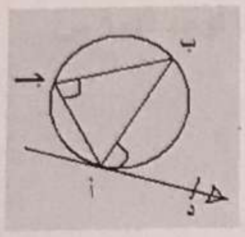
" قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس "



نتيجة:

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

عكس نظرية (٣ – ٣)



" إذا رسم أ د من إحدى نهايتى الوتر أ ب

فى الدائرة م بحيث كان

ق(< د أ ب)=ق(< جـ) فإن

أ د مماس للدائرة عند أ

ملاحظة

(١) طول القوس هو طول جزء من محيط الدائرة .

طول الدائرة = محيطها = ٢ π نق ، قياس الدائرة = ٣٦٠ °

طول نصف دائرة = π نق ، قياس نصف دائرة = ١٨٠ °

طول $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ π نق = $\frac{٣}{٢}$ π نق

قياس $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٣٦٠ = ٢٧٠ °

(٢) طول القوس = $\frac{\text{قياس الزاوية المركزية المقابلة}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

نق نصف قطر الدائرة ، π = $\frac{٢٢}{٧}$ (ما لم يذكر خلاف ذلك)

البعد بين نقطتين

إذا كانت أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢ ، ص٢) فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يتعين من العلاقة

$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢} = \sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$$

إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٦) أوجد البعد بين أ ، ب

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ وحدات}$$

مثال إذا كان أ = (١ ، ٢) ، ب = (س ، ٦) وكان طول أ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحـــــــل

أ ب = ٥

$$\sqrt{(\text{س} - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٥ \text{ بالتربيع}$$

$$(\text{س} - ١)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$$

$$\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ + ١٦ - ٢٥ = ٠$$

$$\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨ = ٠$$

$$(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢) = ٠$$

س = ٤ س = -٢

مثال اثبت أن النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٤) ، جـ(٣ ، ١) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م (١ ، ٢) وأوجد طول نصف قطرها ومحيطها ومساحتها .

الحـــــــل

$$\text{م أ} = \sqrt{(١ + ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

$$\text{م ب} = \sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٤ - ٢)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$$

$$\text{م جـ} = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

م أ = م ب = م جـ أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة واحدة ويكون نق = $\sqrt{٥}$

$$\text{محيط الدائرة} = ٢\pi\,\text{نق} = ٢ \times \pi \times \sqrt{٥} = ١٤ \text{سم}^٢$$

$$\text{مساحة الدائرة} = \pi\,\text{نق}^٢ = \pi(\sqrt{٥})^٢ = \pi \times ٥ = ١٥,٧ \text{سم}^٢$$

أحداثيات نقطة التنصيف

إذا كانت إحداثيات أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ،، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن

إحداثيات منتصف أ ب = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢} \right)$

مثال إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد منتصف أ ب

الحـــــــل

منتصف أ ب = $\left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢} \right) = \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢} \right) = (٢ ، ٤)$

مثال إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٥ ، -١) ، جـ(٦ ، ٥) ، ء = (٣ ، ٧) اثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

الحـــــــل

منتصف أ جـ = $\left(\frac{٢+٦}{٢} ، \frac{١+٥}{٢} \right) = (٤ ، ٣)$

منتصف ب ء = $\left(\frac{٥+٣}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢} \right) = (٤ ، ٣)$

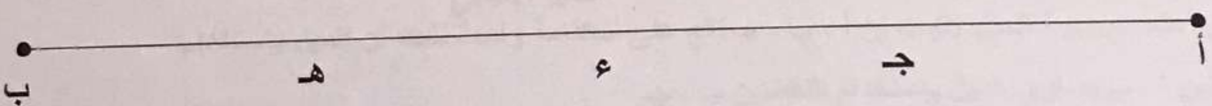
منتصف أ جـ = منتصف ب ء

∴ أ جـ ، ب ء ينصف كلا منهما الاخر

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

مثال إذا كانت أ=(-٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٥) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب إلى أربعة أجزاء متساوية

الحـــــــل



ء منتصف أ ب = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{١+٥}{٢} \right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٦}{٢} \right) = (١ ، ٣)$

جـ منتصف أ ء = $\left(\frac{-٣+١}{٢} ، \frac{١+٣}{٢} \right) = \left(\frac{-٢}{٢} ، \frac{٤}{٢} \right) = (-١ ، ٢)$

هـ منتصف ء ب = $\left(\frac{-١+٥}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢} \right) = \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢} \right) = (٢ ، ٤)$

مثال أوجد مركز الدائرة التى أ ب قطر فيها أ = (١ ، ٢) ، ب = (-٥ ، ٤)

الحـــــــل

مركز الدائرة = $\left(\frac{١+(-٥)}{٢} ، \frac{٢+٤}{٢} \right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{٦}{٢} \right) = (-٢ ، ٣)$

الميـــــــــــل

ميل مستقيم بمعلومية نقطتين

المستقيم المار بالنقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) يتعين من العلاقة م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

مثال أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٢) ، (٤ ، ٧)

الحـــــــــل

م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{٧ - ٢}{٤ - ١}$ = $\frac{٥}{٣}$

مثال أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

أ = (-١ ، -٢) ، ب = (-٥ ، ١)

الحـــــــــل

م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{١ - (-٢)}{-٥ - (-١)}$ = $\frac{٣}{-٤}$ = -١

(١) ميل المستقيم يكون عدد حقيقى موجب أو سالب أو صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى (يوازى محور السينات) = صفر وهو المستقيم الذى معادلته (ص=ثابت)

(٣) ميل أى مستقيم رأسى(يوازى محور اصادات) = ($\frac{١}{٠}$ غير معرف) وهو المستقيم الذى معادلته (س=ثابت)

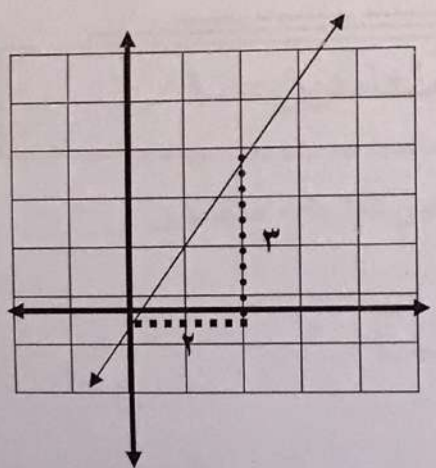
(٤) إذا كان ميل المستقيم موجب يكون شكله (↗) أما إذا كان الميل سالب يكون شكله(↘)

أما إذا كان ميله = ٠ يكون شكله (⟷) وإذا كان ميله غير معرف يكون شكله(↕)

(٥) يمكن إيجاد ميل مستقيم بيانيا عن طريق القانون م = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الافقى}}$

(٦) يمكن أستخدام فكرة الميل لاثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة نثبت أن الميل بإستخدام النقطتين أ ، ب يساوى الميل بإستخدام النقطتين ب ، جـ

مثال من الشكل المقابل اوجد ميل المستقيم ل



الحـــــــــل

الميل = $\frac{\text{التغير الراسى}}{\text{التغير الافقى}}$ = $\frac{٣}{٢}$

إذا توازى مستقيمين تساوى ميلاهما

مثال إثبت أن المستقيمان ٦س – ٣ص +٥ = ٠ ، ص = ٢س +٧ متوازيان

الحل

$م_١ = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

$م_٢ = ٢$

$م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان

مثال إذا كان المستقيمان أ س – ٦ ص +٥ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٣ ، ٣) متوازيان أوجد قيمة أ

الحل

المستقيمان متوازيان

$م_١ = م_٢$

$\frac{-أ}{-٦} = \frac{٣ - ١}{٣ - ٠}$

$\frac{أ}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٣ أ = ١٢

أ = ٤

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٢) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) (٥ ، ٤)

الحل

$م_{الموازى} = \frac{٤ - ١}{٥ - ٠} = \frac{٣}{٥}$ $م_{المطلوب} = \frac{٣}{٥}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة(-١ ، ٢) وميله= $\frac{٣}{٥}$

$\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{٣}{٥}$

٥ ص – ١٠ = ٣س + ٣

٥ص – ٣ س – ١٣ = ٠

حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين=-١

مثال إثبت أن المستقيمان ٢س – ٣ ص +٥ = ٠ ، ٦ س + ٤ ص +١ = ٠ متعامدين

الحل

$م_١ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$م_٢ = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

$م_١ \times م_٢ = \frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

التقســـــــسيم

إذا كانت أ = (س١، ص١)، ب = (س٢، ص٢) وكانت جـ تقسم أ ب بنسبة م١ : م٢ فإن أحداثيات جـ تتعين من العلاقتين

إذا كان التقسيم من الداخل

$$\text{س} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{س}_{٢} + \text{م}_{٢} \times \text{س}_{١}}{\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}}$$

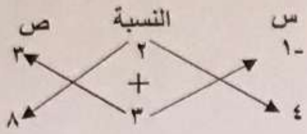
$$\text{ص} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{ص}_{٢} + \text{م}_{٢} \times \text{ص}_{١}}{\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}}$$

إذا كان التقسيم من الخارج

$$\text{س} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{س}_{٢} - \text{م}_{٢} \times \text{س}_{١}}{\text{م}_{١} - \text{م}_{٢}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{ص}_{٢} - \text{م}_{٢} \times \text{ص}_{١}}{\text{م}_{١} - \text{م}_{٢}}$$

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد أحداثيات جـ التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٢ : ٣



الحـــــل

بفرض أن جـ = (س ، ص)

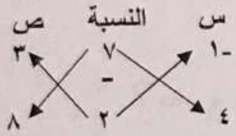
$$\text{س} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١ \text{ ، ص} = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{١٦ + ٩}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

أحداثيات جـ = (١ ، ٥)

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد جـ التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٢

الحـــــــــــــــل

بفرض أن جـ = (س ، ص)



$$\text{س} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{س}_{٢} - \text{م}_{٢} \times \text{س}_{١}}{\text{م}_{١} - \text{م}_{٢}} = \frac{٧ \times ٤ - ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٢٨ + ٢}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{ص}_{٢} - \text{م}_{٢} \times \text{ص}_{١}}{\text{م}_{١} - \text{م}_{٢}} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٦ - ٦}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

أحداثيات جـ = (٦ ، ١٠)

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧) ، جـ = (س ، ٤) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحـــــــــــــل

جـ = (س ، ٤) ، أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧)

ص = ٤ ، ص١ = ٢ ، ص٢ = ٧

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_{١} \times \text{ص}_{٢} + \text{م}_{٢} \times \text{ص}_{١}}{\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}}$$

$$٤ = \frac{\text{م}_{١} \times ٧ + \text{م}_{٢} \times ٢}{\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}}$$

$$٧\,\text{م}_{١} - ٤\,\text{م}_{١} = ٤\,\text{م}_{٢} - ٢\,\text{م}_{٢}$$

$$٣\,\text{م}_{١} = ٢\,\text{م}_{٢} \qquad \frac{\text{م}_{١}}{\text{م}_{٢}} = \frac{٢}{٣}$$

٢ : ٣ من الداخل

$$\text{س} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

٧ م١ + ٢ م٢ = ٤ م١ + ٤ م٢

مثال : إذا كانت أ = (٢ ، -٤) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها أ ب بواسطة محورى الاحداثيات

الحـــــــــــــــــــــــــل

بواسطة محور السينات

جـ = (س ، ٠)

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_1 \times \text{ص}_2 + \text{م}_2 \times \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$$٠ = \frac{\text{م}_1 \times ٥ + \text{م}_2 \times -٤}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

٥م١ − ٤ م٢ = ٠

٥م١ = ٤ م٢

$$\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{٤}{٥}$$

أ ب تنقسم بمحور السينات بنسبة ٤ : ٥ من الداخل

بواسطة محور الصادات

جـ = (٠ ، ص)

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \times \text{ص}_2 + \text{م}_2 \times \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$$٠ = \frac{\text{م}_1 \times ٣ + \text{م}_2 \times ٢}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

٣ م١ + ٢ م٢ = ٠

٣ م١ = -٢ م٢

$$\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{-٢}{٣}$$

أ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الخارج

ملاحظات

١) إذا كانت جـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ فان جـ تقسم أ ب من الداخل

٢) إذا كانت جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ فان جـ تقسم أ ب من الخارج

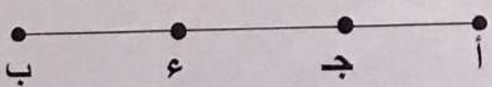
٤) إذا كانت جـ تقسم أ ب بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٣}{٢}$ فان م١ = ٣ ، م٢ = ٢

إذا كانت أ = (-١ ، ١) ، ب = (٢ ، ٧) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحـــــــــــــــــــــــــل

جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ١ : ٢

جـ = (س ، ص)



$$\text{س} = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times -١}{١+٢} = \frac{\text{صفر}}{٣} = ٠ \quad ،،، \quad \text{ص} = \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ١}{١+٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

جـ = (٠ ، ٣)

ع منتصف جـ ب

$$\text{ع} = \left(\frac{٠+٢}{٢} ، \frac{٣+٧}{٢}\right) = (١ ، ٥)$$

معادلة الخط المستقيم

* بمعلومية نقطة يمر بها وميله
المستقيم الذى يمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) وميله = م تتعين معادلته من العلاقة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

* بمعلومية نقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) تتعين معادلته من العلاقة

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

* بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات
ص = م س + جـ حيث ميله = م ، جـ هى الجزء المقطوع من محورى الاحداثيات
* بمعلومية الجزئين المقطوعين من محورى الاحداثيات $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$
حيث أ هى الجزء المقطوع من محور السينات
، ب هى الجزء المقطوع من محور الصادات
* لايجاد المقطوعة السينية أو نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠
* لايجاد المقطوعة الصادية أو نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

الميل

* بمعلومية نقطتين $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$
* بمعلومية زاوية الميل م = ظا هـ حيث هـ الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
* بمعلومية معادلة المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$$

ملاحظات

* ميل محور السينات وأى مستقيم يوازيه = صفر
* ميل محور الصادات وأى مستقيم يوازيه = غير معرف
* شرط توازى مستقيمين هو $م_١ = م_٢$
* شرط تعامد مستقيمين $م_١ \times م_٢ = -١$
* المستقيم الذى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله = عدد موجب
* المستقيم الذى يصنع زاويةمنفرجة مع الاتجاه الموجب لمحورالسينات يكون ميله = عدد سالب

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٣) وميله = $\frac{٣}{٥}$

الحــــــــــــل

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م \Leftarrow \frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{٣}{٥}$$

$$\Leftarrow ٣ س + ٣ = ٥ ص - ١٥ \Leftarrow ٣ س - ٥ ص + ١٨ = ٠$$

أو معادلة الخط المستقيم
ص − ص١ = م (س − س١)
ص − ٣ = ٣/٥ (س + ١)
٣س − ٥ص + ١٨ = صفر

حل آخر

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٢}{٥ - ١} = \frac{٥}{٤}$

$ص - ٢ = \frac{٥}{٤}(س - ١)$

$٤ص - ٨ = ٥س - ٥$

$٥س - ٤ص + ٣ = صفر$

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٧)

الحـــــــــــــــــــــــــل

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \Leftarrow \frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٧ - ٢}{٥ - ١}$

$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٥}{٤} \Leftarrow ٥س - ٥ = ٤ص - ٨ \Leftarrow ٥س - ٤ص + ٣ = ٠$

****

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٣ ويقطع خمس وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

حل آخر

النقطة (٠ ، ٥) م = ٣

$ص - ٥ = ٣(س - ٠)$

$ص = ٣س + ٥$

الحـــــــــــــــــــــــــل

$ص = م س + جـ = ٣س + ٥$

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، ٣) ويوازى المستقيم ٤ س – ٧ ص + ٣ = ٠

الحـــــــــــــــــــــــــل

$م_{الموازى} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧} \Leftarrow م_{المطلوب} = \frac{٤}{٧}$

$\frac{ص - ٣}{س + ٢} = \frac{٤}{٧} \Leftarrow ٤س + ٨ = ٧ص - ٢١ \Leftarrow ٤س - ٧ص + ٢٩ = ٠$

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويكون عمودى على المستقيم ٥س+٧ص = ١

الحـــــــــــــــــــــــــل

$م_{العمودى} = \frac{-٥}{٧}$ $م_{المطلوب} = \frac{٧}{٥}$

$\frac{ص - ٤}{س - ٣} = \frac{٧}{٥} \Leftarrow ٧س - ٢١ = ٥ص - ٢٠ \Leftarrow ٧س - ٥ص - ١ = ٠$

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين
(١ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

الحـــــــــــــــــــــــــل

$م_{الموازى} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٢}{٣}$ $م_{المطلوب} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ص + ٤}{س - ١} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٢س - ٢ = ٣ص + ١٢ \Leftarrow ٢س - ٣ص - ١٤ = ٠$

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، -٤) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين
(-١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــــــــــــــــــــــل

$م_{العمودى} = \frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ $م_{المطلوب} = \frac{-٤}{٣}$

$\frac{\text{ص + ٤}}{\text{س + ٢}} = \frac{\text{٤-}}{\text{٣}}$ ⟸ ٣ ص + ١٢ = - ٤ س – ٨ ⟸ ٣ص+٤س+٢٠ = ٠

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات ، ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

(٠،٤) (٢،٠)

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

$\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{ص}}{\text{٤-}} = ١$ ×١٢ ٤ س – ٣ ص = ١٢

م = $\frac{\text{ص٢ - ص١}}{\text{س٢ - س١}}$

م = $\frac{\text{-٤ - ٠}}{\text{٠ - ٢}} = \frac{\text{-٤}}{\text{-٢}}$

أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم ٢ س – ٥ ص = ١٠

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

لايجاد المقطوعة السينية نضع ص = ٠ ٢ س = ١٠ س = ٥

المقطوعة السينية = ٥

لايجاد المقطوعة الصادية نضع س = ٠ - ٥ ص = ١٠ ص = -٢

المقطوعة الصادية = - ٢

إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تنتمى للمستقيم ٢ س + ٥ ص – ١٧ = ٠ أوجد قيمة أ

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

بالتعويض فى المعادلة ٢ أ + ٥ (٣) – ١٧ = ٠ ⟸ ٢ أ +١٥ – ١٧ = ٠

٢ أ – ٢ = ٠ ⟸ ٢ أ = ٢ ⟸ أ = ١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ميل المستقيم = ميل محور السينات = ٠

$\frac{\text{ص – ٣}}{\text{س – ٢}} = ٠$ ⟸ ص – ٣ = ٠ ⟸ ص = ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور الصادات

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ميل المستقيم = ميل محور الصادات = $\frac{\text{١}}{\text{٠}}$

$\frac{\text{ص – ٣}}{\text{س – ٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٠}}$ ⟸ س – ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٣س – ٢ ص + ١١ = ٠ على التعامد عندما س = ١

الحل

عندما س = ١

٣(١) – ٢ ص + ١١ = ٠

٣ – ٢ ص + ١١ = ٠

-٢ ص + ١٤ = ٠

-٢ ص = -١٤

ص = ٧

م المستقيم $= \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ، م العمودى $= \frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (١ ، ٧) وميله $= \frac{-٢}{٣}$

$\frac{\text{ص} - ٧}{\text{س} - ١} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص – ٢١ = -٢س + ٢ ⟸ ٣ص + ٢س – ٢٣ = ٠

إذا كان أ = (-٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد محور تماثل أ ب

الحل

محور القطعة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

منتصف أ ب $= (\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{١+٧}{٢}) = (١ ، ٤)$

ميل أ ب $= \frac{٧ - ١}{٥+٣} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

محور التماثل يمر بالنقطة (١ ، ٤) وميله $= \frac{-٤}{٣}$

$\frac{\text{ص} - ٤}{\text{س} - ١} = \frac{-٤}{٣}$

٣ ص – ١٢ = -٤س + ٤

٣ص – ١٢ + ٤س – ٤ = ٠

٣ص + ٤ س – ١٦ = ٠

إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م حيث أ = (-٤ ، ١) ، ب = (-٢ ، ٤) أوجد معادلة المماس للدائرة م عند أ

الحل

المماس لدائرة يكون عمودياً على القطر المرسوم من نقطة التماس

ميل أ ب $= \frac{٤ - ١}{-٢+٤} = \frac{٣}{٢}$

ميل المماس $= \frac{-٢}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (-٤ ، ١) وميله $= \frac{-٢}{٣}$

$\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} + ٤} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص – ٣ = -٢ س - ٨

٣ص – ٣ + ٢س + ٨ = ٠

٣ص + ٢ س + ٥ = ٠

إذا كان أجـ قطر فى المربع أ ب جـ ء حيث أ = (٣ ، ٥) ، جـ = (-١ ، -١) أوجد معادلة القطر ب ء

الحـــــــــــــل

القطر ب ء يمر بمنتصف القطر أ جـ وعمودى عليه

منتصف أ جـ $= \left(\frac{\text{٣}+(\text{-١})}{\text{٢}} ، \frac{\text{٥}+(\text{-١})}{\text{٢}} \right) = (\text{١} ، \text{٢})$

ميل أ جـ $= \frac{\text{-١} - \text{٥}}{\text{-١} - \text{٣}} = \frac{\text{-٦}}{\text{-٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

ميل ب ء $= \frac{\text{-٢}}{\text{٣}}$

القطر ب ء يمر بالنقطة (١ ، ٢) وميله $= \frac{\text{-٢}}{\text{٣}}$

$\frac{\text{ص} - \text{٢}}{\text{س} - \text{١}} = \frac{\text{-٢}}{\text{٣}}$

٣ص – ٦ = -٢ س +٢

٣ص – ٦ +٢س – ٢ = ٠

٣ص +٢س – ٨ = ٠

الزاوية بين مستقيمين

* أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٢ س – ٣ ص +١ = ٠ ، س – ٥ ص +٧ = ٠

الحـــــــــــــل

م١ $= \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ، م٢ $= \frac{\text{١}}{\text{٥}}$

$$\text{ظاهـ} = \pm \frac{\text{م}_\text{١} - \text{م}_\text{٢}}{\text{١} + \text{م}_\text{١}\text{م}_\text{٢}} = \frac{\frac{\text{٢}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٥}}}{\text{١} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}}} = \frac{\frac{\text{٢}}{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{٥}}}{\text{١} + \frac{\text{٢}}{\text{١٥}}} = \frac{\frac{\text{١٠} - \text{٣}}{\text{١٥}}}{\frac{\text{١٥} + \text{٢}}{\text{١٥}}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٧}}$$

ق (هـ) = ٢٢° ٢٢´

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٣ س – ص = ٥ ، ٢ س + ص – ٧ = ٠

الحـــــل

م١ = ٣ ، م٢ = -٢

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{٣ - (-٢)}{١ + ٣ \times -٢} = \frac{٥}{-٥} = -١ \qquad \text{ق(هـ)} = ١٣٥^\circ$$

إذا كانت أ = (١ ، ٤) ، ب=(٢ ، ١) ، جـ= (٤ ، ٢) أوجد ق (ب أ جـ) المنفرجة

الحـــــل

$$\text{م}_١ = \text{م}_{\text{أب}} = \frac{٤ - ١}{١ - ٢} = -٣ \quad ، \quad \text{م}_٢ = \text{م}_{\text{أجـ}} = \frac{٤ - ٢}{١ - ٤} = \frac{٢}{-٣} = \frac{-٢}{٣}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{-٣ - \frac{-٢}{٣}}{١ + -٣ \times \frac{-٢}{٣}} = \frac{-٣ + \frac{٢}{٣}}{١ + ٢} = \frac{\frac{-٩ + ٢}{٣}}{٣} = \frac{-٧}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{-٧}{٩}$$

ق (ب أ جـ) = ١٤٢° ٧′

أوجد قياس الزاوية بين المستقيم ٣س – ٢ ص +١ = ٠ والمستقيم الذى ميله = $\frac{١}{٥}$

الحـــــل

$$\text{ظاهـ} = \pm \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥}} = \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{١٠}} = \frac{\frac{١٥-٢}{١٠}}{\frac{١٠+٣}{١٠}} = \frac{١٣}{١٣} = \pm ١$$

ظاهـ = ١ ، ق(هـ) = ٤٥°

ظاهـ = -١ ، ق(هـ) = ١٣٥°

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين س – ك ص +٢ = ٠ ، س – ٣ ص +٤ = ٠ تساوى ٤٥°

أوجد قيمة ك

الحـــــل

$$\text{م}_١ = \frac{-١}{-\text{ك}} = \frac{١}{\text{ك}} \quad ، \quad \text{م}_٢ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

هـ = ٤٥

ظاهـ = ±١

$$\frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \pm ١$$

$$\frac{\frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك}}}{\frac{٣\text{ك} + ١}{٣\text{ك}}} = \pm ١$$

$$\frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} = ١ \qquad \frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} = -١$$

$$\frac{\frac{١}{\text{ك}} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{١}{\text{ك}} \times \frac{١}{٣}} = \pm ١$$

$$\frac{\frac{١}{\text{ك}} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{١}{٣\text{ك}}} = \pm ١$$

$٣\text{ك} + ١ = ٣ - \text{ك}$

$٣\text{ك} + \text{ك} = ٣ - ١$

$٤\text{ك} = ٢$

$\text{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$-٣\text{ك} - ١ = ٣ - \text{ك}$

$-٣\text{ك} + \text{ك} = ٣ + ١$

$-٢\text{ك} = ٤$

$\text{ك} = -٢$

إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل الاول = ٢ أوجد ميل الثانى

الحـــــــــــل

نفرض أن ميل الثانى = م

$\text{هـ} = ٤٥°$

$$\frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \pm ١$$

$$\frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢ \times \text{م}} = \pm ١$$

$$\frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢\text{م}} = \pm ١$$

$\frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢\text{م}} = ١$

$١ + ٢\text{م} = ٢ - \text{م}$

$٢\text{م} + \text{م} = ٢ - ١$

$٣\text{م} = ١$

$\text{م} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٢ - \text{م}}{١ + ٢\text{م}} = -١$

$-١ - ٢\text{م} = ٢ - \text{م}$

$-٢\text{م} + \text{م} = ٢ + ١$

$-\text{م} = ٣$

$\text{م} = -٣$

البعد العمودى

لايجاد طول العمود النازل من النقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ على المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

نستخدم القانون

$$\text{ع} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

مثال أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٤ س − ٣ ص + ١١ = ٠

الحـــــــــــل

$$\text{ع} = \frac{|٤(٢) - ٣(١) + ١١|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|٨ - ٣ + ١١|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٦}{٥}$$

مثال إذا كان طول العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيم ٤ س – ٣ ص + ك = ٠ يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحل

ع = ٣

|٤ (٠) – ٣ (٠) + ك| ÷ √(١٦ + ٩) = ٣

ك ÷ ٥ = ٣

ك = ٥ × ٣ = ١٥

مثال إذا كان طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٣ س – ك ص + ٨ = ٠ يساوى ٢ أوجد قيمة ك

الحل

ع = ٢

|٣(٢) – ك (١) + ٨| ÷ √(٩ + ك²) = ٢

(٦ – ك + ٨) ÷ √(٩ + ك²) = ٢

(١٤ – ك) ÷ √(٩ + ك²) = ٢

٢ √(٩ + ك²) = ١٤ – ك بالتربيع

٤ (٩ + ك²) = ١٩٦ – ٢٨ ك + ك²

٣٦ + ٤ ك² – ١٩٦ + ٢٨ك – ك² = ٠

٣ ك² + ٢٨ ك – ١٦٠ = ٠

(ك – ٤) (٣ك + ٤٠) = ٠

ك = ٤ ، ك = -٤٠ ÷ ٣

مثال إذا كانت أ = (٢ ، -٢) ، ب = (-١ ، ١) ، جـ = (-٤ ، ٥) أوجد

(١) طول ب جـ (٢) معادلة ب جـ

(٣) طول العمود النازل من أ على ب جـ (٤) مساحة المثلث أ ب جـ

الحل

ب جـ = √((-١+٤)² + (١ – ٥)²) = √(٩ + ١٦) = √٢٥ = ٥ وحدات

معادلة ب جـ

(ص – ١) ÷ (س + ١) = (٥ – ١) ÷ (-٤ + ١)

(ص – ١) ÷ (س + ١) = ٤ ÷ -٣

٤ س + ٤ = -٣ ص + ٣

٤ س + ٣ ص + ١ = ٠

** طول العمود النازل من أ على ب جـ

ع = |٤ (٢) + ٣ (-٢) + ١| ÷ √(١٦ + ٩) = |٨ – ٦ + ١| ÷ ٥ = ٣ ÷ ٥

** مساحة المثلث أ ب جـ

مساحة المثلث = ١/٢ القاعدة × الارتفاع = ١/٢ × ب جـ × ع = ١/٢ × ٥ × ٣/٥ = ١,٥ سم²

مثال أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، -٣) والمستقيم ١٢س – ٥ ص -١ = ٠ مماس لها واوجد محيطها ومساحتها

الحل

نق = ع = |١٢(١) -٥(-٣) – ١| / √(١٤٤ + ٢٥) = (١٢ + ١٥ – ١) / ١٣ = ٢٦/١٣ = ٢ وحدة طولية

محيطها = ٢π نق = ٢π × ٢ = ٤π

مساحتها = π نق² = π × (٢)² = ٤π

مثال إثبت أن المستقيمان ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ ، ٦ س – ٨ ص + ١ = ٠ متوازيان واوجد البعد بينهما

الحل

م١ = -٣/-٤ = ٣/٤ ، م٢ = -٦/-٨ = ٣/٤ م١ = م٢ المستقيمان متوازيان

لايجاد البعد بينهما نوجد نقطة على أحدهما ثم نوجد البعد بينها وبين المستقيم الاخر

فى المستقيم الاول نضع ص = ٠ نجد ان ٣ س – ٦ = ٠ ٣س = ٦ س = ٢

النقطة (٢ ، ٠) تنتمى للمستقيم الاول نوجد البعد بينها وبين المستقيم الثانى

ع = |٦(٢) – ٨(٠) + ١| / √(٣٦ + ٦٤) = |١٢ + ٠ + ١| / √١٠٠ = ١٣/١٠ = ١,٣ وحدة طولية

مثال إثبت أن المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٢ = ٠ يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) وطول نصف قطرها ٤ سم

الحل

نوجد طول العمود النازل من المركز على المستقيم ٤ س + ٣ ص +٢ = ٠

ع = |٤(٣) + ٣(٢) + ٢| / √(١٦ + ٩) = |١٢ + ٦ + ٢| / √٢٥ = ٢٠/٥ = ٤

ع = نق المستقيم يمس الدائرة

مثال إثبت أن النقطة (١ ، ٤) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين

س + ص +٣ = ٠ ، س – ٧ ص -١٣ = ٠

الحـــــــــــــــــــــــل

نثبت أن النقطة تقع على نفس البعد بين المستقيمين

$$ع_١ = \frac{|١(١) + ١(٤) + ٣|}{\sqrt{١ + ١}} = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢}$$

$$ع_٢ = \frac{|١(١) - ٧(٤) - ١٣|}{\sqrt{١ + ٤٩}} = \frac{|١ - ٢٨ - ١٣|}{\sqrt{٥٠}} = \frac{٤٠}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢}$$

$\because$ ع١ = ع٢ $\therefore$ النقطة تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين

إثبت أن النقطتين أ (٣ ، ١) ، ب = (-٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفتين من المستقيم

٣ س – ٤ ص +٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

الحـــــــــــــــــــــــل

نوجد طول العمود الساقط من أ (٣ ، ١) على المستقيم ٣س - ٤ ص + ٦ = ٠

$$ع_١ = \frac{|٣(٣) - ٤(١) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢ \text{ وحدة طول}$$

نوجد طول العمود الساقط من ب (-٣ ، ٢) على المستقيم

$$ع_١ = \frac{|٣(-٣) - ٤(٢) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢ \text{ وحدة طول}$$

المقدار ٣س – ٤ ص +٦ له أشارتين مختلفتين ١١ ، -١١ عند التعويض بالنقطتين

$\therefore$ النقطتان فى جهتين مختلفتين من المستقيم ٣س – ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

معادلة مستقيم بمعلومية نقطة تقاطع مستقيمين

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

① ٢ س + ص = ١١ ، ② س + ص = ٨ ويوازى المستقيم ③ ٤ س – ٧ ص + ١ = ٠

الحـــــــــــــل

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ~~ص~~ = ١١

س + ~~ص~~ = ٨ بالطرح

س = ٣

بالتعويض فى ②

٣ + ص = ٨

ص = ٥ (٣ ، ٥)

م الموازى = $\frac{٤}{٧}$ م المطلوب = $\frac{٤}{٧}$

$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{٤}{٧}$

٤ س − ١٢ = ٧ ص − ٣٥

٤ س − ٧ ص +٢٣ = ٠

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

① ٢ س + ص = ١١ ، ② س − ص = ١ وعمودى على المستقيم ③ ٣ س − ٥ ص +١ = ٠

الحـــــــــــــل

٢ س + ~~ص~~ = ١١

س - ~~ص~~ = ١ بالجمع

....

٣س = ١٢

س = ٤

بالتعويض فى ①

٢(٤) + ص = ١١

٨ + ص = ١١

ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٤ ، ٣)

م العمودى = $\frac{٣}{٥}$ م المطلوب = $\frac{-٥}{٣}$

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٤} = \frac{-٥}{٣}$

٣ ص − ٩ = -٥ س + ٢٠

٣ س + ٥ ص -٢٩ = ٠

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

① ٢ س + ص = ٧ ، ② س + ٢ ص = ٨ وبالنقطة (٥ ، ٤)

الحـــــــــــــل

بضرب الاولى × ٢

٤س + ~~٢ ص~~ = ١٤

س + ~~٢ ص~~ = ٨ بالطرح

....

٣ س = ٦ س = ٢

بالتعويض فى ②

٢ + ٢ ص = ٨

٢ص = ٦ ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٢ ، ٣)

المستقيم المطلوب يمر بالنقطتين

(٢ ، ٣) ، (٥ ، ٤)

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٤ - ٣}{٥ - ٢} = \frac{١}{٣}$

س − ٢ = ٣ ص − ٩

س − ٣ ص + ٧ = ٠

أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين س+ص=٥ ، س – ص = ١ على المستقيم ٨س +٦ ص + ٥ = ٠ .

الحل

نوجد أولا نقطة تقاطع المستقيمين

س + ص = ٥

س – ص = ١

بالجمع

٢س = ٦

س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد أن ص = ٢

نوجد طول العمود النازل من النقطة (٣ ، ٢)
على المستقيم ٨س+٦ص +٥ = ٠ .

$$ع = \frac{|٨(٣) + ٦(٢) + ٥|}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{|٢٤+١٢+٥|}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= \frac{٤١}{١٠} = ٤,١$$ وحدة طولية

إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) أوجد معادلة المستقيم العمودى على أ ب من منتصفه

الحل

منتصف أ ب = $\left(\frac{-١+٣}{٢} ، \frac{٢+٨}{٢}\right) = (١ ، ٥)$

ميل أ ب = $\frac{٨-٢}{٣+١} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة(١ ، ٥) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$$

٣ص – ١٥ = -٢س +٢

٣ص – ١٥ +٢س – ٢ = ٠

٣ص +٢س – ١٧ = ٠

إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزهام حيث أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد معادلة المماس للدائرة عند أ

الحل

ميل أ ب = $\frac{٥-٢}{٣+١} = \frac{٣}{٤}$

المماس عمودى على القطر

ميل المماس = $\frac{-٤}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (-١ ، ٢) وميله = $\frac{-٤}{٣}$

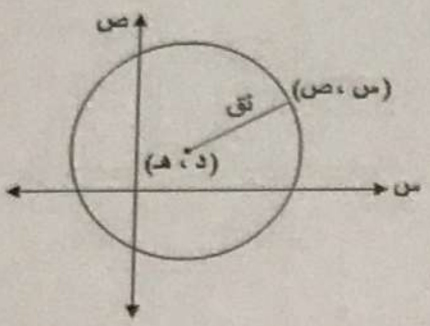
$$\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٤}{٣}$$

٣ص – ٦ = - ٤ س – ٤

٣ص – ٦ +٤ س +٤ = ٠

٣ص +٤ س – ٢ = ٠

الصورة العامة لمعادلة الدائرة



معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق هي:

(س – د)٢ + (ص – هـ)٢ = نق٢   نق نصف قطر الدائرة

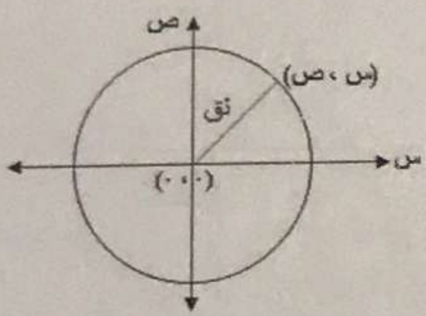
نحصل على هذه المعادلة من استخدام قانون البعد بين نقطتين

مربع البعد بين النقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هو:

مربع البعد بين النقطتين = (س٢ – س١)٢ + (ص٢ – ص١)٢

وبتطبيقه على البعد نق الواصل بين (س ، ص) ، (د ، هـ)

مع ملاحظة (د ، هـ) أي نقطة في مستوى الإحداثيات الديكارتيه والشكل المرفق توضيح لذلك.



معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق

وفي حال كون د = ٠ ، هـ = ٠ أي (د ، هـ) تكون نقطة الأصل

فإن معادلة الدائرة تؤول إلى س٢ + ص٢ = نق٢

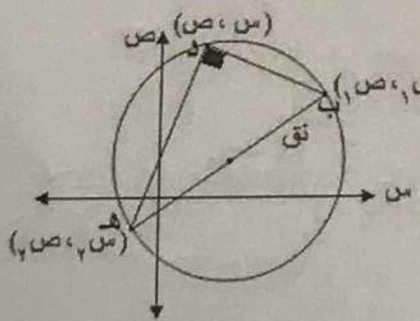
وهي معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق

ويمكن الحصول عليها مباشرة من الشكل باستخدام نفس القانون

السابق وهو البعد بين نقطتين.

معادلة الدائرة التي طرفا قطر فيها (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هي:

(س – س١) (س – س٢) + (ص – ص١)(ص – ص٢) = ٠



يمكن الحصول عليها من:

ق∠ د = ٩٠   ∠ د مرسومة في نصف دائرة لاحظ الشكل

ميل ب د × ميل د هـ = – ١   تعامد مستقيمين

الميل لمستقيم مار بنقطتين = فرق الصادات ÷ فرق السينات

$$\frac{ص - ص١}{س - س١} \times \frac{ص - ص٣}{س - س٢} = -١$$

(س – س١) (س – س٢) = –(ص – ص١)(ص – ص٢)

(س – س١) (س – س٢) + (ص – ص١)(ص – ص٢) = ٠

الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

من: (س – د)٢ + (ص – هـ)٢ = نق٢ وبفك الأقواس نحصل على

س٢ + ص٢ – ٢ د س – ٢ هـ ص + د٢ + هـ٢ – نق٢ = ٠ وبوضع د = – ل ، هـ = – ك ، د٢ + هـ٢ – نق٢ = حـ يكون:

س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ مركزها (– ل ، – ك) ونصف قطرها نق حيث نق٢ = ل٢ + ك٢ – حـ

لاحـــــظ:

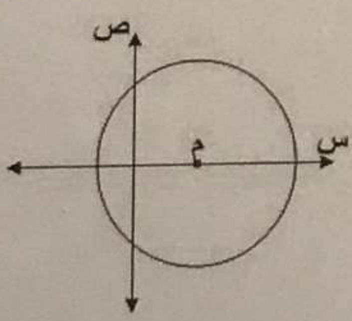
١) لإيجاد المركز من المعادلة نجعل معامل س٢ = معامل ص٢ = ١ ثم المركز = (– معامل س ÷ ٢ ، – معامل ص ÷ ٢)

٢) إذا مرَّ محيط الدائرة بنقطة الأصل فإن حـ = ٠ والعكس صحيح لأن س = ص = ٠ وتؤول المعادلة إلى:

س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠

حالات خاصة:

١) إذا وقع المركز م = (– ل ، – ك) على محور السينات



فإن ك = ٠ (إي نقطة تقع على محور الصادات إحداثها السيني = ٠)

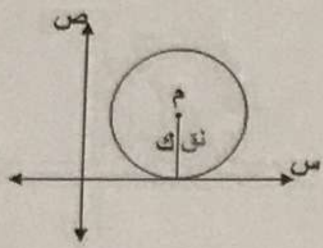
أي م = (– ل ، ٠) وتصبح معادلة الدائرة:

س٢ + ص٢ + ٢ ل س + حـ = ٠

ويكون ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢ (ك = ٠)

أي أن: ل٢ – حـ = نق٢

٢) إذا وقع المركز م = (– ل ، – ك) على محور الصادات



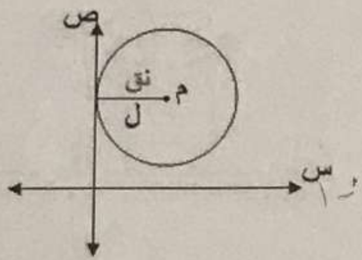
فإن ل = ٠ (إي نقطة تقع على محور الصادات إحداثها السيني = ٠)

أي م = (٠ ، – ك) وتؤول معادلة الدائرة:

س٢ + ص٢ + ٢ ك ص + حـ = ٠

ويكون ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢   (ل = ٠)

أي أن: ك٢ – حـ = نق٢



<u>٣) إذا مسَ محيط الدائرة محور السينات</u>

فإن ك = نق

أي ك٢ = نق٢

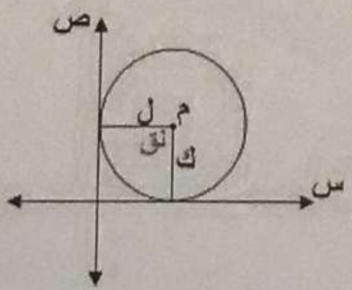
ومن: ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢

ل٢ – حـ = ٠

ل٢ = حـ

<u>٣) إذا مسَ محيط الدائرة محور السينات فإن ك = ل = نق</u>

والمركز هنا (نق ، نق) وتوجد ٤ دوائر حسب موقع المركز في أي ربع من الأرباع الأربعة.



(س – نق)٢ + (ص – نق)٢ = نق٢

(س + نق)٢ + (ص – نق)٢ = نق٢

(س + نق)٢ + (ص + نق)٢ = نق٢

(س – نق)٢ + (ص + نق)٢ = نق٢

المنشور

تعريفه :- هو كثيروجوه له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان وكل منهما مضلع والأوجه الجانبية متوازيات أضلاع

ملاحظات

١ – الأحرف الجانبية للمنشور متساوية الطول ومتوازية .

٢ – يسمى المنشور حسب عدد أضلاع القاعدة .

٣ – ارتفاع المنشور : هو البعد بين قاعدتيه أو المستقيم العمودي على كلاً من قاعدتيه .

٤ - المنشور القائم : تكون الأحرف الجانبية عمودية على القاعدتين الارتفاع يساوي الحرف الجانبي والأوجه الجانبية مستطيلات .

٥ – المنشور المائل : هو الذي تكون الأحرف الجانبية مائلة على قاعدتيه

والارتفاع = طول الحرف × حاهـ (هـ زاوية ميل الأحرف على القاعدة)

تعريف المقطع القائم : هو سطح ناتج عن تقاطع مستو يعامد أحرف المنشور

ملحوظة : إذا قطع منشور بمستوى يوازي أحد أحرفه الجانبية (أو أحد أوجهه الجانبية فإن المقطع الناتج يكون متوازي أضلاع)

حالات خاصة من المنشور

١ – إذا كان المنشور رباعي قائم قاعدته مستطيل سمى متوازي مستطيلات

٢- إذا كان المنشور رباعي مائل قاعدته متوازي أضلاع سمى متوازي سطوح

٣- إذا كان المنشور رباعي قائم جميع أوجهه مربعات (أو أحرفه كلها متساوية) سمى مكعب

ملخص قوانين المنشور

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المنشور	مجموع مساحات أوجه أو محيط المقطع القائم × طول الحرف الجانبي	المساحة الجانية + مجموع مساحتي القاعدتين	مساحة المقطع القائم × طول الحرف الجانبي
المنشور القائم	محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع

تمـــــارين

١ – أو جد مساحة الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه ل سم ؟

الحل:-

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ × ل^{٢} × ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$

مساحة الخماسي المنتظم = $\frac{٥}{٤}$ ل^{٢} ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$

$$= \frac{٥}{٤}\ \text{ل}^{٢}\ \text{ظتا}\ ٣٦^{\circ}$$

متممة

$$= \frac{٥}{٤}\ \text{ل}^{٢}\ \text{ظا}\ ٥٤^{\circ}$$

= ١,٧٢ ل٢ سم٢

٢ – أحسب المساحة الجانبية والكلية لمنشور خماسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٢٥سم ؟

الحل :-

مساحة القاعدة (خماسي منتظم) = $\frac{\text{ن}}{٤}$ ل٢ ظتا $\frac{١٨٠}{\text{ن}}$ = $\frac{٥}{\cancel{٤}}$ × $\overset{٢٥}{\cancel{١٠}}$ × ١٠ × ظتا $\frac{١٨٠}{٥}$

= ١٢٥ ظتا ٣٦° = ١٢٥ ظا ٥٤°

= ١٧٢ سم٢

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × طول الارتفاع

= (٥ × ١٠) × ٢٥ = ١٢٥٠سم٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ١٢٥٠ + ٢ × ١٧٢ = ١٢٥٠ + ٣٤٤

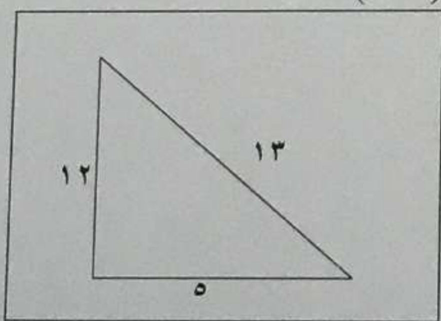
= ١٥٩٤ سم٢

٣- منشور ثلاثي مائل طول حرفه الجانبي ٦سم وقاعدته مثلث اضلاعه ١٣سم ، ١٢سم ، ٥سم إذا كانت مساحته الكلية ٢٤٠ سم٢ فكم محيط مقطعه القائم ؟

الحل :-

(١٢)٢ + (٥)٢ = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩ = (١٣)٢

المثلث قائم الزاوية



مساحة القاعدة (المثلث) = ½ طول القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

٢٤٠ = المساحة الجانبية + ٦٠

المساحة الجانبية = ٢٤٠ − ٦٠ = ١٨٠سم^{٢}

المساحة الجانبية لمنشور مائل = محيط المقطع القائم × طول الحرف

١٨٠= محيط المقطع القائم × ٦ محيط المقطع القائم = $\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠

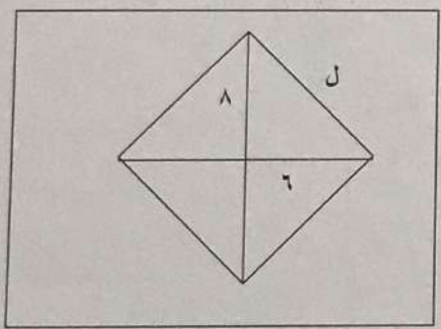
٤ – **منشور قائم ارتفاعه ٤سم وقاعدته على شكل معين قطراه ١٢سم ، ١٦ سم . كم مساحته الكلية ؟**

الحل

مساحة القاعدة (المعين) = ½ حاصل ضرب طولي قطرية

=½ × ١٢ × ١٦ + ٩٦ سم^{٢}

من فثياغورس : ل^{٢} = ٦^{٢} + ٨^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ل (طول ضلع القاعدة) = ١٠سم



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٤ × ١٠) × ٤ = ١٦٠ سم^{٢}

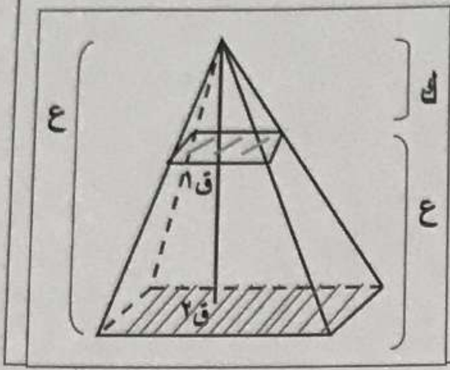
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

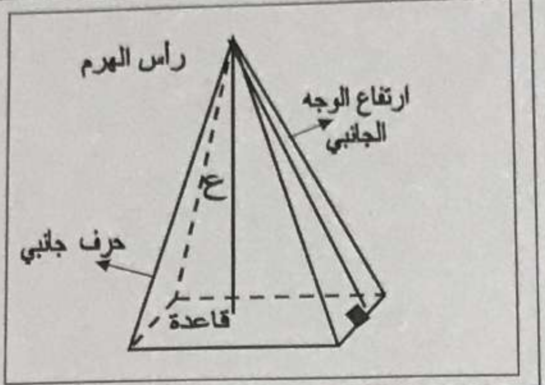
= ١٦٠ + ٢ × ٦٩ = ١٦٠ + ١٩٢

= ٣٥٢ سم^{٢}

الهرم

تعريفه : هو كثير وجوه أحد وجوهه مضلع وبقيه الوجوه مثلثات تلتقي في نقطه واحدة هي رأس الهرم





ملاحظات :

<u>الهرم القائم</u> هو هرم قاعدته مضلع منتظم خواصه

١ – جميع الأوجه الجانبية متطابقة .   ٢- ارتفاعه هو البعد بين رأسه ومركز قاعدته .

٣ – ارتفاعات أوجهه الجانبية متساوية في الطول .

الهرم الثلاثي يسمى رباعي وجوه وإذا كانت حروفه متساوية في الطول سمى رباعي وجوه منتظم .

في رباعي الوجوه المنتظم : أوجهه الاربعه (بما في ذلك القاعدة) مثلثات متطابقة الأضلاع وجميعها متطابقة .

قوانين الهرم

الحجم	المساحة الكلية	المساحة الجانية	المجسم
٣/ مساحة القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	½ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي	الهرم القائم
ح $\frac{1}{3}$ عَ(ق١+ق٢ + ق١ ق٢) حيث عَ الارتفاع ق١ ق٢ مساحة القاعدتين	المساحة الجانبية + مجموع مساحة القاعدتين	½ مجموع محيط القاعدتين × ارتفاع الوجه الجانبية	الهرم الناقص

ملاحظات

إذا قطعت الاحرف الجانبية للهرم بمستو // قاعدته فإن الجزء المحصور يبين قاعدة الهرم والمستوي القاطع يسمى هرم ناقص متوازي القاعدتين

بحيث $\frac{\text{ق}_١}{\text{ق}_٢} = \frac{(\text{ع} - \text{عَ})^٢}{\text{ع}^٢}$ بحيث

ق١ مساحة القاعدة الصغرى

ق٢ مساحة القاعدة الكبرى

ع ارتفاع الهرم الكامل

عَ ارتفاع الناقص

١- ما هي المساحة الكلية الرباعي وجوه منتظم طول حرف ل ؟

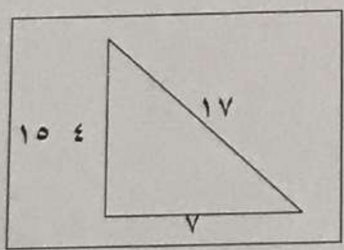
الحل :- مساحة الوجه الواحد = مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ل

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} \text{ل}^٢$

المساحة الكلية = ٤ × مساحة الوجه الواحد

$= ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤} \text{ل}^٢ = \sqrt{٣} \text{ ل}^٢ \text{ سم}^٢$

٢ – هرم ثلاثي ارتفاعه ١٥سم وقاعدته مثلث أضلاعه ٧سم ، ١٧سم ، ٤ فما هو حجمه ؟



الحل :- $٧^٢ + (٤\sqrt{١٥})^٢ = ٤٩ + ١٤٠ = ٢٨٩ = ١٧^٢$

القاعدة مثلث قائم

مساحة القاعدة $= \frac{1}{2} \times ٧ \times ٤\sqrt{١٥} = ١٤\sqrt{١٥} \text{ سم}^٢$

حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ١٤\sqrt{١٥} \times ١٥ = ٧٠\sqrt{١٥} \text{ سم}^٣$

الحل :- مساحة القاعدة (المعين) = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه

$= \frac{1}{2} \times ٦ \times ٨ = ٢٤$ سم^{2}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ٢٤ \times ١٦ = ١٢٨$ سم^{3}

٣ - قطع هرم مساحة قاعدته ١٩٦سم^{2} بمستوي يوازي القاعدة ويبعد عنها مسافة ١٠ سم إذا كانت مساحته المقطع الناتج ١٤٤سم^{2} فأحسب ارتفاع الهرم وحجمه .

الحل :- $ق_1$: (مساحة المقطع) = ١٤٤ ، $ق_2$: (مساحة القاعدة) = ١٩٦

عَ : البعد بين المقطع والقاعدة = ١٠ ، ع : ارتفاع الهرم = ؟

$$\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{(ع - عَ)^2}{ع^2} \qquad \frac{١٤٤}{١٩٦} = \frac{(ع - ١٠)^2}{ع^2}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\frac{١٢}{١٤} = \frac{ع - ١٠}{ع} \qquad ١٤ع - ١٤٠ = ١٢ع$$

٢ع = ١٤٠ ع = ٧٠سم

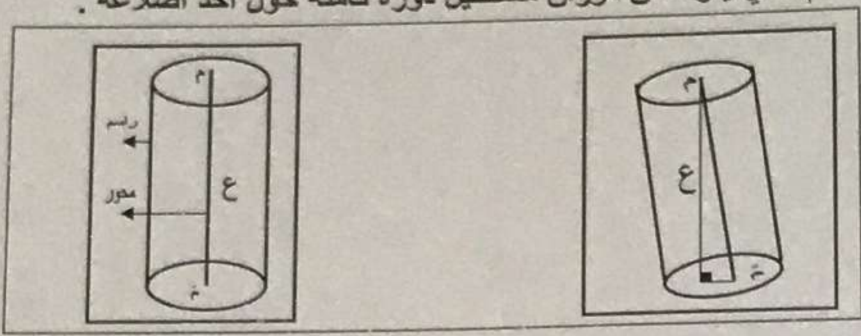
حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ١٩٦ \times ٧٠ = ٤٥٧٣,٣$سم^{3}

الاسطوانة والمخروط

أولاً الاسطوانة الدائرية القائمة :

تعريف :- هي الجسم الذي يتولد من دوران مستطيل دوره كاملة حول أحد أضلاعه .



ملاحظات هامة

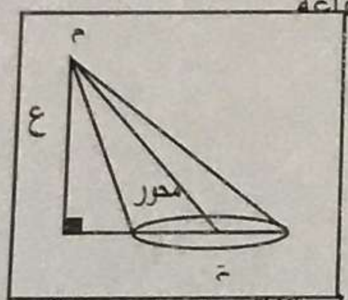
١- إذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستو يوازي القاعدة فالمقطع الناتج هو قرص دائري مساحته تساوي مساحة القاعدة

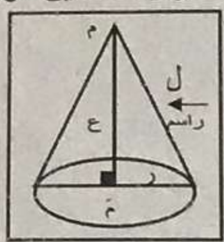
٢- إذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستو يحتوي محورها فالمقطع الناتج هو مستطيل مساحته (٢ر ع) حيث ر نصف قطر الاسطوانة ، ع ارتفاعها .

ثانياً : المخروط :-

تعريفه :- هو جسم له قاعدة عبارة عن سطح مستو دائري وسطحه الجانبي أملس غير مستو

والمخروط الدائري القائم :- يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة . أو من دوران مثلث متساوى الساقين دورة كاملة حول ارتفاعه





ملاحظات هامة :-

١-إذا قطع المخروط الدائري القائم بمقطع يوازي القاعدة فالمقطع الناتج هو قرص دائري

تتحدد مساحته من العلاقة : $\frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة القاعدة}} = \frac{(ع - عَ)^2}{ع^2}$

حيث عَ هي البعد بين المقطع والقاعدة (ارتفاع المخروط الدائري القائم الناقص)

١ – إذا قطع المخروط الدائري القائم بمستو يحتوي المحور فالمقطع الناتج هو مثلث متطابق الضلعين مساحته تساوي ½ ر ع

ر= نق

ملخص قوانين الاسطوانة والمخروط

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الاسطوانة الدائرية القائمة	محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π ر ع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين ٢ π ر ع + ط ر^{٢}	مساحة القاعدة × الارتفاع = π ر^{٢} × ع
المخروط الدائري القائم	½ محيط القاعدة × طول الراسم = π ر ل	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = π ر ع + π ر^{٢}	$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ π ر^{٢} ع
المخروط الدائري القائم الناقص	½ مجموع محيطي القاعدتين × طول الراسم π (ر$_{١}$ + ر$_{٢}$) ل حيث ر$_{١}$، ر$_{٢}$ نصف قطري قاعدتيه ع ارتفاعه ل طول راسمه	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$\frac{١}{٣}$ π ع (ر$_{١}^{٢}$ + ر$_{٢}^{٢}$ + ر$_{١}$ر$_{٢}$)

١ – طول أنبوبة معدنية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ١ م . إذا كان قطرها الخارجي ٤٠ سم و الداخلي ٣٠ سم. فما حجم المعدن ؟

الحل :- حجم المعدن = حجم الاسطوانة الخارجية – حجم الاسطوانة الداخلية

= π ر^{٢} ع – π ر^{٢} ع

= π (٢٠)^{٢} × ١٠٠ – π (١٥)^{٢} × ١٠٠

= π × ٤٠٠ × ١٠٠ – π × ٢٢٥ × ١٠٠

= ٤٠٠٠٠ π – ٢٢٥٠٠ π = ١٧٥٠٠ ط سم^{٣}

٢ – قطعت اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٣٨سم بمستو يمر بمحورها م ن فكانت مساحة المقطع الناتج ٥٣٢سم^{٢} . أحسب حجم الاسطوانة ومساحة سطحها الجانبي (π = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

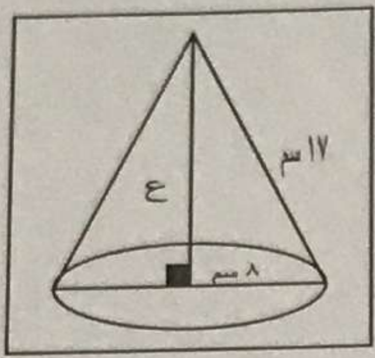
الحل :- المقطع الناتج هو مستطيل مساحته ٢ ر ع

⇐ ٢ × ٣٨ ر = ٥٣٢ ⇐ ٧٦ ر = ٥٣٢ ⇐ ر = $\frac{٥٣٢}{٧٦}$ = ٧سم

حجم الاسطوانة = π ر^{٢} ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ٣٨ = ٥٨٥٢سم^{٣}

مساحة السطح الجانبي = ٢ π ر ع = ع × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٣٨ = ١٦٧٢ سم^{٢}

٣ – في مخروط دائري قائم طول نصف قطر القاعدة ٨سم وطول الراسم ١٧سم أحسب الحجم والمساحة الكلية .



الحل : – من فيثاغورث

ع٢ = ١٧٢ – ٨٢ = ٢٨٩ – ٦٤

= ٢٥٥ ⇐

ع = √٢٢٥ = ١٥ سم

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ π ر٢ ع

= $\frac{1}{3}$ π × ٦٤ × ١٥ = ٣٢٠π سم٣

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

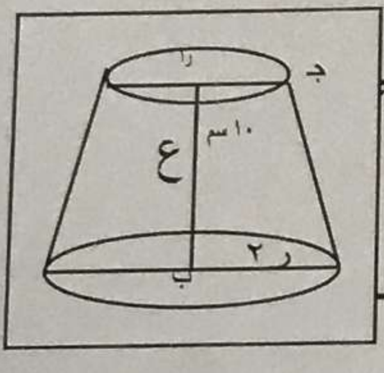
= π ر ل + π ر٢

= π × ٨ × ١٧ + π × ٦٤ = ١٣٦π + ٦٤π = ٢٠٠π سم٢

الكره

تعريف الكره :- هي جسم محدود بسطح منحني مقفل جميع نقطة على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة (م) تسمى المركز .

((ويسمى البعد الثابت نصف قطر الكره ورمزه ر))



المنطقة الكروية :- هو الجزء المحصور بين مستويين متوازيين

وارتفاعها (ع) هو البعد بين القاعدتين

القبة الكروية : إذا قطعت الكرة بمستو فإن كلاً من الجزأين النـ كروية .

القطاع الكروي

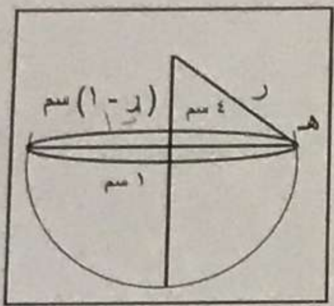
هو جزء من كره مكون من قبة كروية ومخروط دائري قائم رأسه مركز الكره وقاعدته هو قاعدة القبة

المجسم	المساحة	الحجم	ملاحظات
الكره	$٤ \pi ر^{٢}$	$\frac{٤}{٣} \pi ر^{٣}$	في جميع القواسين هـ نصف قطر الكره
القبة الكروية	$٢ \pi ر ع$	$\frac{١}{٣} \pi ع^{٢} (٣ر - ع)$	
المنطقة الكروية	$٢ \pi ر ع$	هو الفرق بين حجم قين	

تمارين على الكرة

قبه كرويه ارتفاعها ٢سم وطول قطرها ٨سم أوجد ما يلي :-

١ – مساحة القبة الكروية   ٢ – حجم القبة الكروية



الحل :-

حسب فيثاغورث :

$ر^{٢} = ٤^{٢} + (ر - ٢)^{٢}$

$ر^{٢} = ١٦ + ر^{٢} - ٤ر + ٤$

$\Leftarrow ٤ر = ٢٠ \quad \Leftarrow \quad ر = ٥$ (نصف قطر الكره)

مساحة القبة الكروية $= ٢ \pi ر ع$

$= ٢ \pi \times ٥ \times ٢ = ٢٠ \pi$ سم^{٢} # ١

حجم القبة الكروية $= \frac{\pi}{٣} ع^{٢} (٣ر - ع)$

$= \frac{\pi}{٣} \times ٤ (١٥ - ٢)$

$= \frac{\pi}{٣} \times ٤ \times ١٣ = \frac{٥٢}{٣} \pi$ سم^{٣} # ٢

التباديل

$$ل(ن،ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

التوافيق

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{ر!}$$

حيث $ن! = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots ١×٢×٣$

نظرية ذات الحدين

$$ل(س=ر) = \binom{ن}{ر} م^{ر} (١-م)^{ن-ر}$$

من كتاب توجيهي أدبي
المستوى الرابع
الوحدة الثانية

المحددات

تعريف المحدد:-

المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الاعمدة وينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات فى ن من المعادلات الخطية ويكتب رمزيا على الشكل الاتى

$$\text{مـ}_{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \cdots\cdots & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{١٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{١\text{ن}} & \cdots\cdots & \text{أ}_{٢\text{ن}} & \text{أ}_{١\text{ن}} \end{vmatrix}$$

$\text{أ}_{\text{ص ع}} \in$ ح

ص ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ن

أنواع المحددات :-

(١) محدد ١ × ١ هو يتكون من صف واحد وعمود واحد $|\text{أ}_{١١}|$

(٢) محدد من الدرجة ٢ × ٢ [صفين وعمودين] وهو كالاتى

$$\text{مـ}_{٢ \times ٢} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$$

(٣) محدد من الدرجة ٣ × ٣ [٣ صفوف ، ٣ أعمدة]

$$\text{مـ}_{٣ \times ٣} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

كيفية إيجاد قيمة المحدد :-

(أولا) إيجاد قيمة المحدد ٢ × ٢

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{١٢} \times \text{أ}_{٢١}$$

مثال أوجد قيمة كلا من المحددات الاتية

(١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ٥ × ٤ − ٣ × ٢

= ٢٠ − ٦ = ١٤

(٢) $\begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ٣ × ٤ − (٥ × -٢)

= ١٢ + ١٠ = ٢٢

(٣) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ٠ × ٤ − ٣ × ٠

= ٠ − ٠ = ٠

(٤) $\begin{vmatrix} -٤ & ٧ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ٧ × -١ − (٣ × -٤)

= -٧ + ١٢ = ٥

(٥) $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ١ × ٤ − ٣ × ٠

= ٤ − ٠ = ٤

(٦) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل

قيمة المحدد = ٥ × -١ − (٣ × ٢)

= -٥ − ٦ = -١١

(ثانيا) إيجاد قيمة المحدد من رتبة ٣ × ٣

$\begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

يمكن الفك باستخدام الصف الاول

$$= أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن الفك بالصف الثانى كالاتى

$$= - أ_{١٢} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٢٢} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٣٢} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن الفك بأى صف أو عمود [من الافضل عند فك محدد ٣ × ٣ الفك باستخدام الصف أو العمود المحتوى على أكبر أصفار]

لاحظ إشارات كل عنصر من عناصر المحدد ٣ × ٣

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$$

١-

الحـــــل

$$\text{المحدد} = ١ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ١ (٣ \times -١ - ٥ \times ١) + ١ (-٢ \times -١ - ٤ \times ١) + ٢ (-٢ \times ٥ - ٤ \times ٣)$$

$$= (-٣ - ٥) + (٢ - ٤) + ٢ (-١٠ - ١٢)$$

$$= -٨ - ٢ + ٢ \times -٢٢ = -٨ - ٢ - ٤٤ = -٥٤$$

****

مثال أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{قاس} & \text{ظا}^{٢}\text{س} \\ ١ & \text{قاس} \end{vmatrix}$$

الحـــــل

المحدد = قاس × قاس − ١ × ظا² س = قا² س − ظا² س = ١

تذكر أن

١ + ظا² س = قا² س

١ + ظتا² س = قتا² س

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & -١ \\ ٣ & \text{س} & ٤ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٠$$

الحل

بفك المحدد ومساواته بـ ١٠

$$\text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + (-١) \begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$$

س (س − ٨) − ١ (٦ − ٢ س) = ١٠

س² − ٨ س − ٦ + ٢س − ١٠ = ٠

س² − ٦ س − ١٦ = ٠

(س − ٨)(س + ٢) = ٠

س = ٨   س = −٢

مثال إذا علم أن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٣$ أوجد قيمة كلا مما يأتى

(١) $\begin{vmatrix} ٣\text{جـ} & ٦\text{أ} \\ ٢\text{ء} & ٤\text{ب} \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{جـ} & \text{ب}+\text{ء} \\ ٧\,\text{جـ} & ٧\,\text{ء} \end{vmatrix}$

الحل

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٣$ ⇦ أ ء − ب جـ = ٣

قيمة المحدد الاول = ٣جـ × ٤ ب − ٢ ء × ٦ أ = ١٢ جـ ب − ١٢ ء أ

= ١٢ (جـ ب − ء أ) = ١٢ × −٣ = −٣٦

قيمة المحدد الثانى = (أ + جـ) × ٧ ء − ٧ جـ (ب + ء)

= ٧ أ ء + ٧ جـ ء − ٧ جـ ب − ٧ جـ ء

= ٧ أ ء − ٧ جـ ب = ٧ (أ ء − ب جـ) = ٧ × ٣ = ٢١

مثال بأستخدام طريقة كرامر أوجد مجموعة الحل للمعادلات الاتية

س − ص + ع = ٢ ، ٢س + ٣ص − ع = ٥ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = −١

الحــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (6-5) + (4+3) + (-10-9) = 1 + 7 - 19 = -11$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6-5) + (10-1) + (-25+3) = 2 + 9 - 22 = -11$$

١-

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (10-1) - 2(4+3) + (-2-15) = 9 - 14 - 17 = -22$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-3+25) + (-2-15) + 2(-10-9) = 22 - 17 - 38 = -33$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1 \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3$$

م ٠ ح = {(١ ، ٢ ، ٣)}

مدوّر المصفوفة : لأي مصفوفة أ علي النظم م × ن إذا جعلنا الصفوف أعمدة . و الأعمدة صفوف فإننا نحصل علي مدور المصفوفة [أ] و رمزها ($أ^{مد}$) و تكون علي النظم ن × م ..

*** ملاحظة :** $(أ^{مد})^{مد} = أ$

مثال : -
إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & ١- \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$ ، $جـ^{مد}$

الحل :

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١- & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $جـ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$ ....

*** تساوي مصفوفتين :-** ـ تتساوي المصفوفتان أ ، ب إذا كان

[١] لهما نفس النظم [٢] كل عنصر في أ يساوي نظيره في ب أي أن $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$ ..

مثال١ : إذا كانت $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٧ \\ ع & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & س & ٧ \\ ٤ & ٣ & ص \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص ، ع

الحل :- من التساوي :. س = ٢ ، ص = ٥ ، ع = ٤

٢- إذا كانت

$\begin{pmatrix} جـ-د & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & هـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ جـ+د & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد جـ ، د ، هـ

الحل :-
من التساوي : جـ - د = ٥ ...[١] ، جـ + د = ١ .... [٢] بجمع ١ ، ٢ :. ٢ جـ = ٦ ← جـ = ٣
، من [٢] ٣ + د = ١ ← د = -٢ ، من التساوي هـ = ٧

٣- إثبت أنه لجميع قيم س ، ص لا يمكن أن تتحقق المساواة الأتية .

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & س \\ ٤ & ٣ & ٨ \\ ٢- & ص & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ س+ص & ٣ & ٨ \\ ٢- & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

الحل:- من التساوي : س = ٥ ، ص = ٤
، من التساوي س + ص = ٤ (٣)
لكن بالتعويض عن قيم س ، ص يكون س + ص = ٥+٤ = ٩ ≠ ٤
أي أن س ، ص لا تحققان المعادلة (٣) :. لا يمكن التساوي ..

العمليات على المصفوفات :-

أولاً الجمع و الطرح :- لجمع (أو طرح) مصفوفتين لابد و أن يكونا علي نفس النظم و يكون الناتج عن طريق جمع (أو طرح) العناصر المتناظرة فيهما ..

مثال١ : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١- & ٧ \\ ٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب

الحل :.

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ١- & ٩ \\ ١٠ & ٢ \end{pmatrix}$ و ذلك بجمع العناصر المتناظرة فيهما ..

٢- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣- & ٠ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب^{مد}

الحل:-

أ + ب^{مد} = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٦ & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ١٠ & ١- \end{pmatrix}$

---

* **ملاحظات هامة** : [١] (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد} : يمكن الإثبات من المثال السابق ..

[٢] يمكن ضرب أي مصفوفة في أي عدد مثل ك حيث ك ≠ صفر

[٣] المعكوس الجمعي للمصفوفة (أ) هو (- أ) بحيث أ + (- أ) = $\boxed{}$

[٤] أ + ب = ب + أ ، أ + $\boxed{}$ = أ

٣- إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ١- & ١ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد ٣س - ٢ص

الحل :-

٣س – ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ - ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ١- & ١ & ٧ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤- & ٢ & ٨- \\ ٢ & ٢- & ١٤- \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٤- & ٨ & ٥- \\ ١١ & ٢- & ٨- \end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات :- إذا كانت أ مصفوفة علي النظم م × ن ، ب مصفوفة علي النظم ن× ر

فإنه يمكن ضرب أ × ب و يكون الناتج مصفوفة علي النظم (م × ر)

- شرط ضرب مصفوفتين : عدد أعمدة الأولي = عدد صفوف الثانية .. [تساوي الوسطين]
- نظم المصفوفة الناتجة = عدد صفوف الأولي × عدد أعمدة الثانية .. [نظم الطرفين]

مثال١ :- أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ -فأوجد أ ب ، ب أ

الحل :-

أ ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١+١٢+٢ & ٣+٦+٤ \\ ٢+٤+١ & ٦+٢+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & ١٣ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$

- لاحظ أن : أ علي النظم ٢ × ٣ ، ب علي النظم ٣ × ٢ ، أ ب علي النظم ٢ × ٢ [حذف الوسطين]

ب أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢+٢ & ١+٦ & ١+٤ \\ ٨+٢ & ٤+٦ & ٤+٤ \\ ٢+٣ & ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ & ٥ \\ ١٠ & ١٠ & ٨ \\ ٥ & ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

٢- إذا كانت

أ = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب= $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$ - إثبت أن أ (ب+ج) = أ ب + أ ج

الحل :-

∴ أ (ب + ج) = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ٩ & ١٢ \end{pmatrix}$ (1)

∴ أ ب + ب ج = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٥- & ٢ \\ ٦- & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١١ & ٤ \\ ١٥ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ٩ & ١٢ \end{pmatrix}$ (٢) ∴ أ (ب+ج) = أ ب + أ ج

ملاحظات هامة جداً :

١- (أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد} ٢- أ^{٢} = أ × أ ، أ^{٤} = أ^{٢} × أ^{٢} [حيث أ مصفوفة مربعة]

٣- مصفوفة الوحدة (I)

- هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها = ١ ، و باقي العناصر أصفار .

مثل I = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، I = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ....

البرمجة الخطـــية

- حل متباينات الدرجة الأولى في متغير واحد ..

- أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية في ح و مثل الحل على خط الأعداد .

(١) ٣ س - ٤ ≥ ٢

الحل :-

٣ س ≥ ٢+٤

٣س ≥ ٦ ، ÷ ٣

∴ س ≥ ٢

م ح = [٢ ، ∞ [

-∞ ∞

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

(٢) ٢ س + ٥ ≤ ٧

٢ س ≤ ٧ - ٥

٢ س ≤ ٢ ؛ ÷٢

∴ س ≤ ١

م ح =] -∞ ، ١]

-∞ ∞

-١ ٠ ١ ٢ ٣

(٣) -٥ < ٤ س + ٣ ≤ ١١

-٥ - ٣ < ٤ س ≤ ١١ - ٣

-٨ < ٤ س ≤ ٨ ، ÷ ٤

∴ -٢ < س ≤ ٢

م ح =] -٢ ، ٢]

-∞ ∞

-٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣

- حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين :-

١- حل المتباينة : ٢س + ص > ٦

الحل :- نرسم المستقيم الحدي : ٢س+ص = ٦ و ذلك بالتعويض بأي قيمتين لـ س و نحسب قيم ص المناظرة لها - و يفضل وضع س = ٠ و نحسب ص ثم نضع ص = ٠ و نحسب س

- المستقيم يقسم المستوي إلي جزئين ف١ ، ف٢ - نعوض بنقطة تقع في كل منهما و التي تحقق المتباينة يكون عندها الحل و يفضل التعويض بنقطة الأصل (٠،٠)

ملاحظة : إذا كانت علامة التباين [< أ، >] يكون المستقيم متقطع

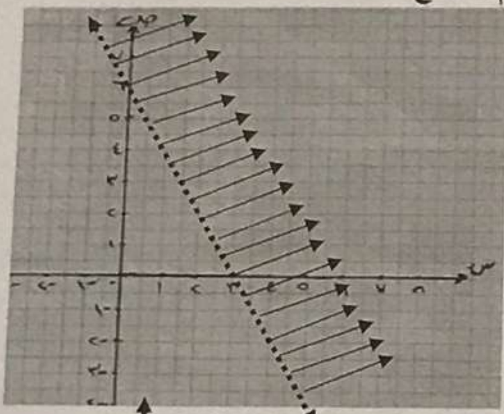
- إذا كانت علامة التباين [≤ أ، ≥] يكون الخط متصل .

∵ ل : ٢س+ ص = ٦ يمر بالنقطتين

(٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

∵ النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ٢س+ ص > ٦

∴ الحل هو المنطقة المظللة ..

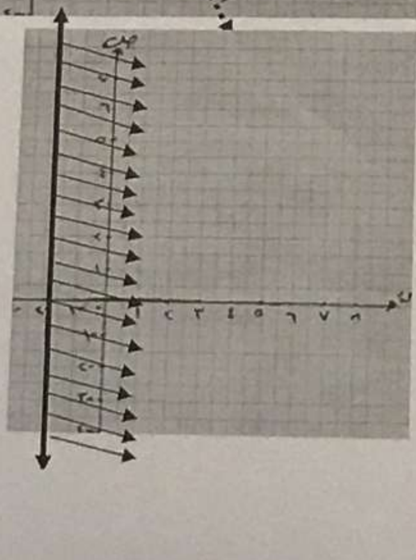


٢- حل المتباينة س ≥ -٢

الحل :- المستقيم الحدي ل : س = -٢ يمثله خط مستقيم يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (-٢ ، ٠)

∵ نقطة الأصل تحقق المتباينة س ≥ -٢

حيث ٠ ≥ -٢ ∴ الحل هو المنطقة المظللة ...



٢- أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢س + ص ≤ ٤

الحل :-

$ل_1$: س = ٠ هو محور الصادات ، $ل_2$: ص = ٠ هو محور السينات

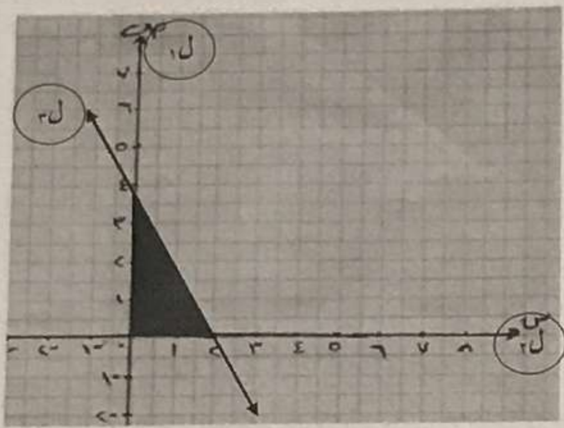
و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

- $ل_3$: ٢س + ص= ٤ يمر بالنقط

(٠ ، ٤) ، (٢، ٠)

- النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

∴ الحل هو المنطقة المظللة ..



٣- أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٢س+ ص ≤ ٦

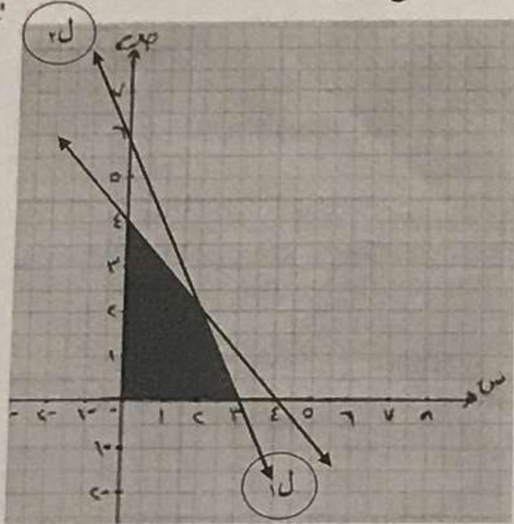
الحل :-

- كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

$ل_1$: س+ ص = ٤ يمر بـ (٤،٠) ، (٠ ، ٤)

$ل_2$: ٢س+ ص= ٦ يمر بـ (٠،٦) ، (٣، ٠)

الحل هو المنطقة المظللة ..



البرمجة الخطية :- - -

- هي وسيلة لإعطاء أفضل قرار في حل مشكلة .
- أو هي الحل الأمثل لتحقيق هدف معين علي صورة دالة خطية [ر = أ س + ب ص]

و لإيجاد الحل المطلوب (أكبر قيمة أو أصغر قيمة) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها رؤوس مضلع ..

- و بالتعويض بهذه الرؤوس في دالة الهدف نحصل علي النقطة التي تحقق المطلوب (دالة الهدف)

((و الأمثلة التالية توضح ذلك)) ←

مثال١ : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص- س ≤ ٣ ، ٢ص+٥ س ≤ ٢٠

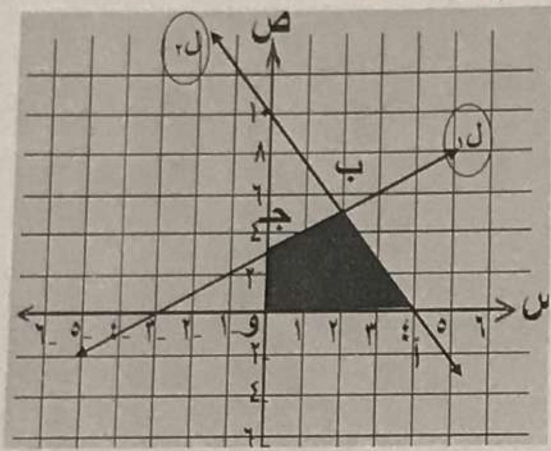
ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل ل أكبر ما يمكن حيث ل = ٥س+٣ص ..

الحل :-

ـ كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ـ ل١ : ص- س = ٣ يمر بـ (٠ ، ٣) ، (١ ، ٤)

ـ ل٢ : ٢ص+ ٥س = ٢٠ يمر بـ (٠ ، ١٠) ، (٤ ، ٠)



ـ فضاء الحل هو المضلع أ و جـ ب

حيث أ (٤ ، ٠)، و (٠،٠) ،جـ (٠ ، ٣)، ب(٥،٢)

∴ دالة الهدف ل = ٥س+٣ص ..

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ ل أ = ٥×٤+ ٣×٠ = ٢٠

، ل ب = ٥×٢+ ٣×٥ = ٢٥

، ل جـ = ٥×٠ + ٣×٣ = ٩

، ل و = ٥×٠+ ٣×٠ = صفر

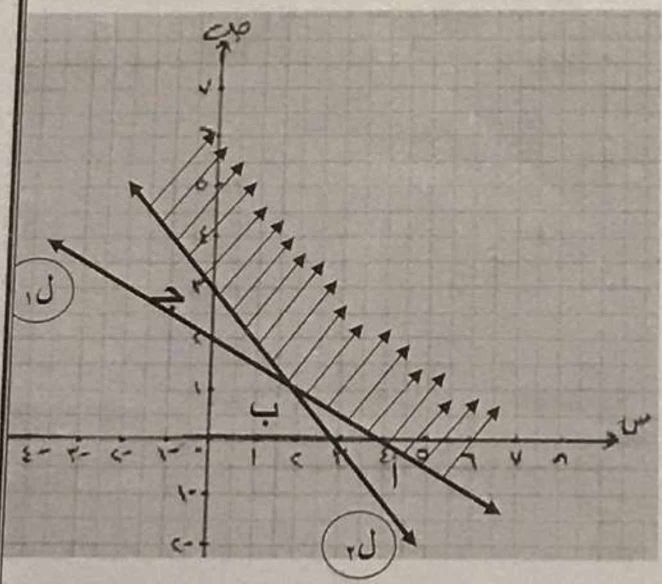
∴ ل أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ٥)

٢ـ أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الأتية

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س+ ٢ص ≥ ٤ ، س + ص ≥ ٣

ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ر) أقل ما يمكن حيث ر = ٥س+ ٤ص .

الحل :-



ـ ل١ : س + ٢ص = ٤ يمر بـ (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٠)

ـ ل٢: س+ ص= ٣ يمر بـ (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

∴ الحل هو المنطقة المحددة بأسفل

بالنقط أ (٤ ، ٠) ، ب(٢ ، ١) ، جـ (٠ ، ٣)

∴ ر = ٥س+ ٤ص

∴ ر أ = ٥× ٤ + ٤×٠ = ٢٠

، ر ب = ٥×٢+ ٤×١= ١٤

، ر جـ = ٥×٠+ ٤×٣= ١٢

∴ أقل قيمة عند جـ = (٠ ، ٣)

٣ـ مطحن لديه ٨٠ كجم من الذرة ، ١٢٠ كجم من القمح ـ ينتج نوعين من الدقيق و يضعه في أكياس ، بحيث يلزم للكيس من النوع الأول كيلو واحد من الذرة ، ٣ كجم من القمح ـ يلزم للكيس من النوع الثاني ٢ كجم من

الذرة ، ٢ كجم من القمح . أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحن ليكون دخله أكبر ما يمكن ، علماً بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٤ جنيه ، النوع الثاني ٢ جـ .

الحل :-

	النوع الأول	النوع الثاني	الكمية المتاحة
ذرة	١	٢	٨٠
قمح	٣	٢	١٢٠
الثمن	٤	٢	ــــــ

.·. س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨٠ ، ٣س+ ٢ص ≤ ١٢٠

، دالة الهدف : ر = ٤س+ ٢ص ..

- ل١: س+٢ص= ٨٠ يمر بـ (٠ ، ٤٠) ، (٨٠ ، ٠)

- ل٢: ٣س+٢ص= ١٢٠ يمر بـ (٠ ، ٦٠) ، (٤٠ ، ٠)

- منطقة الحل هو المضلع أ و جـ ب حيث

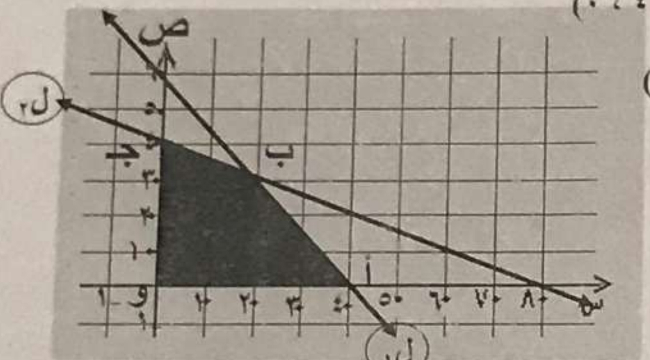
أ(٤٠ ، ٠) ، و(٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٤٠) ، ب(٢٠ ، ٣٠)

، دالة الهدف : ر= ٤س+٢ص

ر أ = ١٦٠ ، ر و = ٠ ، ر جـ = ٨٠ ، ر ب = ١٤٠

يكون الدخل أكبر ما يمكن عند أ (٤٠ ، ٠)

أي أن المطحن ينتج ٤٠ كيس من النوع الأول



٤ـ يراد وضع نوعين من الكتب أ ، ب علي رف مكتبة طوله ٩٦سم ، و حمولته القصوي ٢٠كجم ، فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١كجم ، و سمك الكتاب من النوع أ هو ٦سم ، و من النوع ب ٤سم . أوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع علي الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن .

الحل:-

	النوع أ	النوع ب	القيمة العظمى
الوزن	١	١	٢٠
السمك	٦	٤	٩٦

.: س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س+ ص ≤ ٢٠ ، ٦س+٤ص ≤ ٩٦ ، دالة الهدف ر = س+ ص

∴ ل١ : س+ص= ٢٠ يمر بـ (٠ ، ٢٠) ، (٢٠ ، ٠)

، ـ ل٢ : ٦س+٤ص= ٩٦ يمر بـ (٠ ، ٢٤) ، (١٦ ، ٠)

الحل هو المنطقة المضلعة أ و جـ ب

حيث أ(١٦ ، ٠) ، و(٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٢٠) ، ب(٨ ، ١٢)

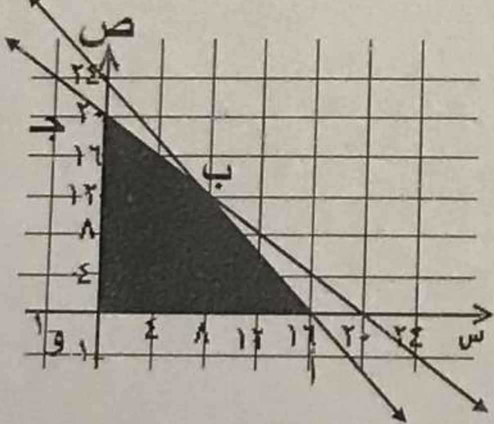
، .·. ر = س+ ص

∴ ر أ = ١٦ ، ر و = ٠ ، ر جـ = ٢٠ ، ر ب = ٢٠

∴ أكبر قيمة عند جـ (٠ ، ٢٠) ، ب (٨ ، ١٢)

ـ أي أنه نضع ٢٠ كتاب من النوع الثاني فقط

أو نضع ٨ كتب من النوع الأول ، ١٢ من النوع الثاني ..



الباب الرابع / الإحصاء

طرق حساب الوسط الحسابي:

أولاً

(١) في حالة البيانات غير المبوبة (٢) في حاله البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

أولا: في حالة البيانات غير المبوبة.

مثال (١)

إذا كانت درجات مجموعة من الطلبة في كلية التقنية بالمجمعة في مادة الإحصاء هي:
٣٠ و٦٠ و٤٠ و٧٠ و ١٠٠
فأوجد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب.

الحل: الوسط الحسابي لمجموعة من القيم $= \frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عددهم}}$

الوسط الحسابي ($\overline{س}$) $= \frac{١٠٠ + ٧٠ + ٤٠ + ٦٠ + ٣٠}{٥}$

$= \frac{٣٠٠}{٥}$

$=$ ٦٠ درجة.

أمثلة أخرى:-

يمكنك استخدام مهارة الطالب في وضع مثال كما فعلت أمامه لأن هدفنا هو الطالب حتى نخرج من أسلوب التلقين إلي أسلوب المشاركة الفعالة فهو أساس العملية التعليمية وأن كان أمامك ٣٠ طالب مثلا فأنت لديك ٣٠ مثال أو مسألة وتبني جسر من الثقة بينك وبين الطالب من جهة وبين الطالب ونفسه من جهة أخرى حتى تخرج مادة الرياضيات إلي المعايشة.

مثال (٢)

إذا كانت درجات ستة طلاب في احد المواد هي
٦٣و٨٠ و٤٠ و٧٢ و٦٠ و ٢٥
أحسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب

مثال (٣)

الوسط الحسابي للعددين ٤ و ٦ هو................

مثال (٤)

الوسط الحسابي لمجموعه من القيم هو ....

مثال (٥)

أوجد الوسط الحسابي للقيم ١,٥ و٢,٦ و ٣,٥ و ٤,٤ و ٥,٧ و٨,٣

ثانياً : في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

يبين الجدول التالي أجور ٤٠ عامل في أحد المصانع وكانت كالآتي:

الفئات	٣-٩	١٠-١٦	١٧-٢٣	٢٤-٣٠	٣١-٣٧	٣٨-٤٤	المجموع
التكرار	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

الحل:

الفئات	التكرار(ك)	مراكز الفئات (س)	ك×س
٣- ٩	١٠	٦	٦٠
١٠- ١٦	١٢	١٣	١٥٦
١٧- ٢٣	٨	٢٠	١٦٠
٢٤- ٣٠	٦	٢٧	١٦٢
٣١- ٣٧	٣	٣٤	١٠٢
٣٨- ٤٤	١	٤١	٤١
المجموع	٤٠		٦٨١

الوسط الحسابي (س) $= \frac{\sum ك \times س}{\sum ك}$

$= \frac{٦٨١}{٤٠}$

= ١٧,٤٥ ريالاً.

طبعاً الحل مكتوب على صورة ٤ أعمدة: فالعمود الأول(الفئات) والعمود الثاني (التكرار) وهم من ورقة الأسئلة أو المعطيات أما العمود الثالث (مراكز الفئات(س)) نحصل عليه بأكثر من طريقة فمنها أن نعرف طول الفئة في المسألة . وهي تختلف من مسألة لآخري ففي مثالنا السابق طول الفئة هو (أعرف أنك ربما تقول ١٠ . لا، طبعاً!)

طول الفئة = ٩-٣ = ١٠-١٦ = ١٧-٢٣ ..... = ٦

نمسك طول الفئة وهو ٦ ونقسمه على ٢ (ثابتة) فينتج ٣

نمسك خارج القسمة وهي ٣ ونضيفها إلى الفئات لتعطي مراكز الفئات(س)

أما العمود الرابع والأخير فهو حاصل ضرب ك(التكرار) في س (مراكز الفئات) وبعد ذلك مجموع ك في س نقسمه علي مجموع ك(التكرار) فينتج الوسط الحسابي

أي الوسط الحسابي ($\overline{س}$) $= \frac{\sum ك \times س}{\sum ك}$

$= \frac{٦٨١}{٤٠}$

$=$ ١٧,٤٥ ريالاً.

من عيوب الوسط الحسابي أنـه لا يمكن إيجاده بالرسم ويتـأثر بـالقيم الشاذة أما مزاياه فمنها السهولة في الحساب ولذلك فهو أكثر المتوسطات استخداما كما تدخل جميع قيم المجموعة في حسابه.

ويمكنك مع طلابك أيا كانت أعمـارهم أن تجعلهم يكونـون مسائل تختلف في طول المجموعة وتنبههم إن تكون طول الفئة واحده في نفس المسألة أما التكرار فلهم حرية الاختيار حسب طالب وأخر طبعا ويكون عندك بنك من المسائل التي تم تكوينها من جانب الطلاب الذي نتمنى الأمل فيهم بإذن الله سبحانه وتعالي .

ثانيا:الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازلياً أي انه القيمة التي يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها.

طرق حسابه :-

(١) جبريا (٢) بيانيا

الطريقة الجبرية:

سوف أتكلم عن الطريقة الجبرية ولا حقا نتكلم عن الطريقة البيانية مع معالجة الطريقة البيانية لمقاييس النزعة المركزية كلها معاً. ويمكن حسابه أيضاً في حالة البيانات غير المبوبة و في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

(أ) في حالة البيانات غير المبوبة:

مثال: أوجد الوسيط لمجموعة القيم ٣٠ و ٦٠ و٢٠ و ٤٠ و ٧٠

الحل: أولاً لابد من ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ونختار القيمة التي بالمنتصف طبعا أذا كان عدد المفردات فردي، كالتالي:

القيم بعد الترتيب: ٢٠ و ٣٠ و ٤٠ و ٦٠ و ٧٠
الوسيط هو: ٤٠

مثال آخر: أوجد الوسيط للقيم ١٢ و ٤ و ١ و ٦ و ١١ و ٨

الحل:
القيم بعد الترتيب :   ١ و ٤ و ٦ و ٨ و ١١ و ١٢

$$\text{الوسيط} = \frac{٦ + ٨}{٢}$$

$$= \frac{١٤}{٢}$$

$$= ٧$$

في المثال السابق أولا نرتب القيم ترتيبا تصاعديا (تنازليا) ثم نختار القيمتان التي بالمنتصف وهما ٦ و ٨ ونجمعهم ونقسمهم علي ٢ (وهي قيمه ثابتة) والناتج من خارج القسمة هو قيمة الوسيط في حالة البيانات الغير مبوبه وفي مثالنا السابق عدد المفردات زوجي.

مزيد من الأمثلة والمسائل اجعل طلابك هم الذين يقومون بتكوين هذه الأمثلة والمسائل مع توجيهك لهم إن كل طالب عليه أعطاء مثال لقيم عدد مفرداتها فردي وقيم أخري عدد مفرداتها زوجي.

فمثلا ببساطة أوجد الوسيط للقيم الآتية:

(١) ٦ و ٤ و ٨
(٢) ٦ و ٤ و ٨ و ١٠

(ب) في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

مثال:
أوجد الوسيط للجدول التكراري الأتي الذي يبين أجور العمال في أحد المصانع وكانت بالريال

الفئات	٣ - ٩	١٠ - ١٦	١٧ - ٢٣	٢٤ - ٣٠	٣١ - ٣٧	٣٨ - ٤٤	المجموع
التكرار	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

الحل:
أولا نكوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري البسيط المعطى في المسألة وهو عبارة عن عمودين فقط العمود الأول الفئات والثاني التكرار المتجمع الصاعد للفئات. الفئات تكتب كما هي بالجدول التكراري البسيط أما التكرار المتجمع الصاعد فنبدأ بالصفر (ثابت) ثم

نضيف على الصفر أول تكرار وهو ١٠ في هذه المسألة ثم ١٢ على أخر مجموع ثم نضيف ٨ ثم ٦ ثم ٣ ثم ١ فنحصل على ٤٠ وهو مجموع التكرار وهذا يدل على أن الجمع صحيح وإذا كان المجموع غير مطابق لمجموع التكرار فنعيد الجمع مرة ثانية حتى يكون نتيجة الجمع مساوية لمجموع التكرار كما يلي :

التكرار التراكمي

الفئات		التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأعلى للفئة
أقل من ٣		صفر	
أقل من ٩	(البداية)	١٠ (التكرار السابق)	٩,٥
أقل من ١٥		٢٢ (التكرار اللاحق)	١٦,٥
أقل من ٢١		٣٠	٢٣,٥
أقل من ٢٧		٣٦	٣٠,٥
أقل من ٣٣		٣٩	٣٧,٥
أقل من ٣٩		٤٠	٤٤,٥

٢٠ رتبة الوسيط ← س

حل آخر

نحصل على ترتيب الوسيط بقسمة المجموع على ٢

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{المجموع}}{٢} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$$

$$\text{قيمة الوسيط} = \text{بداية الفئة الوسيطة} + \frac{\text{رتبة الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٩ + \frac{٢٠ - ١٠}{٢٢ - ١٠} \times ٦$$

$$= ٩ + \frac{١٠}{١٢} \times ٦$$

= ١٤,٩ ريال

≃ ١٥

$$\frac{٩,٥ - س}{٩,٥ - ١٦,٥} = \frac{٢٠ - ١٠}{٢٢ - ١٠}$$

$$\frac{٩,٥ - س}{٧} = \frac{١٠}{١٢}$$

١١٤ - ١٢س = ٧٠

$$\frac{١٢س}{١٢} = \frac{١٨٤}{١٢}$$

س ≃ ١٥

حل آخر في كتاب الصف العاشر والتاسع

رتبة الوسيط	=	٢٠
بداية الفئة الوسيطة	=	٩
التكرار السابق	=	١٠
التكرار اللاحق	=	٢٢
طول الفئة	=	٦

من مزايا الوسيط أنه لا يتأثر بالقيم الشاذة ويمكن الحصول عليه بالرسم ومن عيوبه أنه لا يدخل في حسابه سوى قراءة واحدة أو قراءتين من المجموعة كلها.

* المنوال = الفئة الأكثر تكرارا ١٠ - ١٦

$$\Leftarrow \frac{١٠ + ١٦}{٢} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$$

الفصل الثاني

◈ **المجـــــال** : مجمــــوعة العنـــاصر التى يأخــذها المتغـير س بحـيث يكــون النـاتـج كمية معرفة " عدد حقيقى " .

◈ **قواعـد هـامة** :

١) مجال أى دالة كثيرة الحدود مهما كان درجتها = ح .

٢) مجال الدالة الكسرية = ح - أصفـــار المقـــام .

◈ **حــالة خــاصة** : ⇦ مجال الدالة الكسرية = ح فى الحالات الأتية :

* المقام دالة ثابتة . * المقام على الصورة س^{ن} + أ حيث ن ← زوجى ، أ ∋ ح$_{+}$

* المقام على الصورة أ س^{٢} + ب س + جـ : حيث المميز يكون سالباً .

٣) **مجال الدالة الجذرية** :

أولاً : عندما يكون دليل الجذر فـردياً :

* مجال د (س) = ح د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س - ٣}}$ ← مجال د (س) = ح

ثانياً : عندما يكون دليل الجذر زوجيا :

* مجال د (س) هو مجموعة العناصر الحقيقة التى تجعل ما تحت الجذر كمية غير سالبة (≥ ٠). مهم

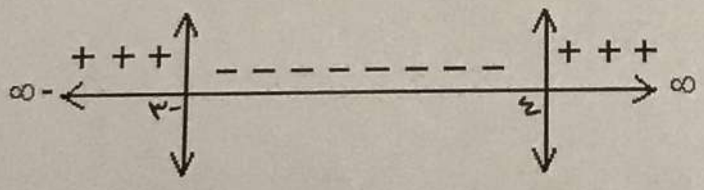
د (س) = $\sqrt[٤]{\text{س - ٥}}$

الحـــــل

∵ س + ٥ ≥ ٠ ← س ≥ - ٥ ← مجال د (س) = [- ٥ ، ∞ [

د (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}\text{ - س - ١٢}}$

الحـــــل



س^{٢} - س - ١٢ = ٠

(س - ٤) (س + ٣) = ٠

س - ٤ = ٠ | س + ٣ = ٠

س = ٤ | س = - ٣

∵ مجال الدالة الجذرية كمية غير سالبة (≥ ٠) .

∴ مجال د (س) = [٤ ، ∞ [U] - ∞ ، - ٣] -

العمليات على الـــدوال

◈ إذا كانت : $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالهما $م_1$ ، $م_2$ حيث :

$د_1 : م_1 \leftarrow ح$ ، $د_2 : م_2 \leftarrow ح$ ، $م_1 \cap م_2 \neq \emptyset$ فـــإن :

♦ $(د_1 \pm د_2) : م_1 \cap م_2 \leftarrow ح$

♦ $(د_1 . د_2) : م_1 \cap م_2 \leftarrow ح$

♦ $(\frac{د_1}{د_2}) : م_1 \cap م_2 - ف\{د_2\} \leftarrow ح$ حيث ف $(د_2)$ هى مجموعة أصفار المقام .

◈ نلاحـظ من هذا التعريف أن مجموع أو فرق أو ضرب دالتين هو دالة جديدة بشرط $(م_1 \cap م_2 \neq \emptyset)$ حيث مجالها هو المجال المشترك للدالتين $د_1$ ، $د_2$ أما مجال خارج قسمة دالتين هو المجال المشترك للدالتين مستبعدا منه أصفار المقام .

أمثلـــــة محلـــــولة

◈ أوجـــد مجال الدوال الآتية :

● $د(س) = \sqrt{س - ٢} - \sqrt{٥ - س}$

الحـــــل ١

نفرض أن : $د_1(س) = \sqrt{س - ٢}$

$س - ٢ \geq ٠ \leftarrow س \geq ٢ \leftarrow$ مجال $د_1(س) = [٢ ، \infty[$

$د_2(س) = \sqrt{٥ - س}$

$٥ - س \geq ٠ \leftarrow ٥ \geq س \leftarrow س \leq ٥ \leftarrow$ مجال $د_2(س) =]-\infty ، ٥]$

$\therefore$ مجال $د(س) = [٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٥]$

● $د(س) = \frac{\sqrt{س + ٣}}{س - ٢}$

الحـــــل

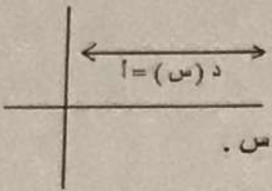
$د_1(س) = \sqrt{س + ٣} \Leftarrow س + ٣ \geq ٠ \Leftarrow س \geq -٣ \Leftarrow$ مجال $د_1(س) = [-٣ ، \infty[$

$د_2(س) = س - ٢ \Leftarrow$ مجال $د_2(س) = ح$ ، ف $(د_2) = \{٢\}$

$\therefore$ مجال $د(س) = [-٣ ، \infty[\cap ح - \{٢\} = [-٣ ، \infty[- \{٢\}$

◈ (الدالة الثابته) ⇦ يقال للدالة أنها ثابته فى الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∈ [أ ، ب]
يتحقق الشرط الآتى :

إذا كان س ١ > س ٢ ⇦ د (س ١) = د (س ٢) = أ



⇦ وبصفة عامـــة : د (س) تكون ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما كانت قيمة س .

مهم (القيمة المطلقة)

◈ (مفهوم المطلق) ⇦ هو عدد حقيقى غير سالب (≥ ٠)

◈ (مطلق العـدد) ⇦ هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد .

** مثال : | - ٥ | = ٥ ، | ٠ | = ٠ ، | ١/٢ | = ١/٢

◈ (تعريف " فـك " المطلق) :

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ }

| س - ٢ | = { س - ٢ ← س ≥ ٢ ، - س + ٢ ← س < ٢ }

| ٢ س + ٦ | = { ٢ س + ٦ ← س ≥ - ٣ ، - ٢ س - ٦ ← س < - ٣ }

◈ (خواص المطلق) :

♣١ | س | ≥ ٠ ، | س | = ٠ إذا كان س = ٠

♣٢ مطلق العدد = مطلق معكوسه الجمعى .

⇦ | أ | = | - أ | ، | ٣ | = | - ٣ | ، | س - ٢ | = | - (٢ - س) | = | ٢ - س | ، | س - ٥ | = | ٥ - س |

♣٣ | س + ص | ≤ | س | + | ص |

♣٤ مطلق حاصل ضرب عددين = حاصل ضرب مطلقيهما . ⇦ | س ص | = | س | × | ص |

⇦ | - ٣ س | = | - ٣ | × | س | = ٣ | س |

⇦ | - ٢ (س - ٥) | = | - ٢ | × | س - ٥ | = ٢ | س - ٥ |

⇦ | س² - ٤ | = | (س - ٢) (س + ٢) | = | س - ٢ | | س + ٢ |

♣٥ مطلق خارج قسمة عددين = خارج قسمة مطلقيهما

☜ $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ ، $\frac{|س + ١|}{|س - ٣|} = \left|\frac{س + ١}{س - ٣}\right|$

♣٦ مطلق العدد = الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد .

☜ $|أ| = \sqrt{أ^٢}$ ، $|٥| = \sqrt{٢٥} = ٥$

♣٧ $(|أ|)^٢ = أ^٢$ ، $(|-٣|)^٢ = ٩$

◈ (**أوجد مجموعة الحل لكل مما يلى**) :

☜ $\frac{|س + ٣|}{|س + ١|} = ٢$ مهم جبر ١٧

(الحـــل)

$\left|\frac{س + ٣}{س + ١}\right| = ٢$ ⇦ $\frac{س + ٣}{س + ١} = \pm ٢$

$\frac{س + ٣}{س + ١} = ٢$

٢ س + ٢ = س + ٣

س = ١ " تحقق "

$\frac{س + ٣}{س + ١} = -٢$

س + ٣ = - ٢ س - ٢

س = $\frac{-٥}{٣}$ " تحقق " م . ح = { ١ ، $\frac{-٥}{٣}$ }

☜ $|س + ١||س - ١| = ٣$ ١٧

(الحـــل)

$|(س + ١)(س - ١)| = ٣$ ⇦ $|س^٢ - ١| = ٣$ ⇦ $س^٢ - ١ = \pm ٣$

$س^٢ - ١ = ٣$

$س^٢ = ٤$

س = ± ٢ " تحقق "

$س^٢ - ١ = -٣$

$س^٢ = - ٢$ " مرفوض "

∴ م . ح = { ٢ ، - ٢ }

☜ $|س + ٥| - |س - ٣| = ٠$

(الحـــل)

$|س + ٥| = |س - ٣|$ ⇦ بتربيع الطرفين ⇦ $(س + ٥)^٢ = (س - ٣)^٢$

$س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = س^٢ - ٦ س + ٩$

١٠ س + ٦ س = ٩ - ٢٥

١٦ س = - ١٦

س = - ١ " تحقق " م . ح { - ١ }

| ٢ س - ٣ | > | س + ١ | ،   س ≥ ١,٥

(الحــل)

س > ١,٥   ⇐   س > - ١

∵ | ٢ س - ٣ | = ٢ س - ٣   ، | س + ١ | = س + ١

∴ | ٢ س - ٣ | > | س + ١ |

٢ س - ٣ > س + ١

٢ س - س > ١ + ٣

س > ٤   م . ح =] ٤ ، ∞ [

(رســـم المنحنيــات)

◈ ارسم الشكل البيانى للدوال الآتية ومن الرسم أوجد المجال والمدى ونوع (تزايدية أم تناقص)

١ د (س) = س٢ / | س |

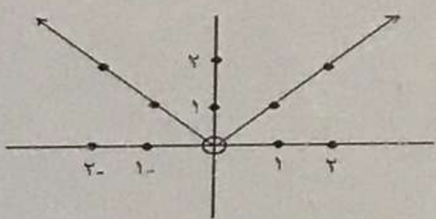
(الحــل)

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ }   ،   د (س) = { س٢ / س ← س > ٠ ، س٢ / - س ← س < ٠ }

د (س) = { س ← س > ٠ ، - س ← س < ٠ }

د (س) = س ، س > ٠   د (س) = - س ، س < ٠

س	٢	١	⊙	⊙	-١	-٢
ص	٢	١	⊙	⊙	١	٢



المجال = ح - { ٠ } = ح *

المدى =] ٠ ، ∞ [، الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

د (س) تزايدية فى الفترة] ٠ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] - ∞ ، ٠ [

---

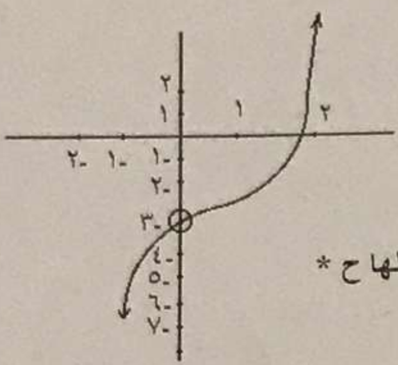
٢ د (س) = $\frac{س^{٣}}{|س|}$ - ٣

(الحــل)

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ }   ، د (س) = { $\frac{س^{٣}}{س}$ - ٣ ← س > ٠ ، $\frac{س^{٣}}{-س}$ - ٣ ← س < ٠ }

د (س) = { س ٢ - ٣ ← س > ٠ ، - س ٢ - ٣ ← س < ٠ }

د (س) = س ٢ - ٣ ، س > ٠   د (س) = - س ٢ - ٣ ، س < ٠



س	٢	١	⊙	⊙	-١	-٢
ص	١	-٢	-٣	-٣	-٤	-٧

المجال = ح - { ٠ } = ح * ، المدى = ح - { - ٣ }

د (س) تزايدية فى الفترتين] ٠ ، ∞ [،] - ∞ ، ٠ [، تزايديه على مجالها ح *

الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات

وغير متماثلة حول نقطة الأصل .

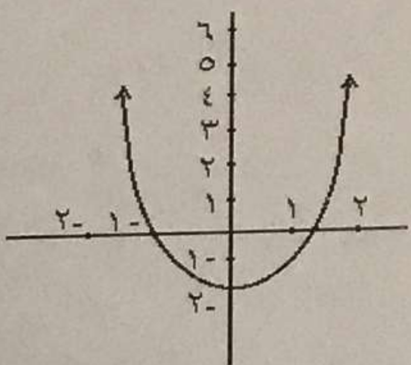
٣ د (س) = س ٢ | س | - ٢

(الحــل)

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ }   د (س) = { س ٢ × س - ٢ ← س ≥ ٠ ، س ٢ × - س - ٢ ← س < ٠ }

د (س) = { س ٣ - ٢ ← س ≥ ٠ ، - س ٣ - ٢ ← س < ٠ }

د (س) = س ٣ - ٢ ، س ≥ ٠   د (س) = - س ٣ - ٢ ، س < ٠



س	٢	١	⊙	⊙	-١	-٢
ص	٦	-١	-٢	-٢	-١	٦

المجال = ح

المدى = [- ٢ ، ∞ [، الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

د (س) تزايدية فى الفترة [٠ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] - ∞ ، ٠]

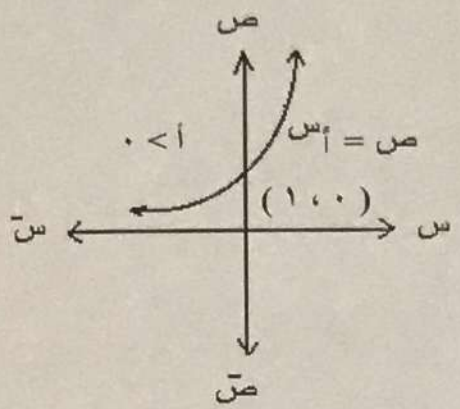
(الأسس واللوغاريتمات)

١- الدالة الأسية

◈ **تعريف** : إذا كانت أ عددا حقيقيا موجبا ≠ ١ فإن الدالة د : ح ← ح₊ حيث د (س) = $أ^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها أ .

◈ **التمثيل البيانى للدالة الأسية** : (د : ح ← $ح_+$)

(أولاً)



المجال = ح المجال = ح

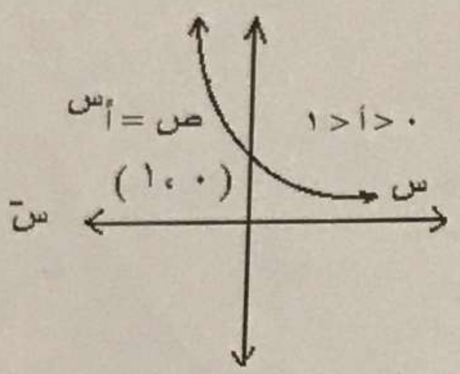
المدى = $ح_+$ =] ٠ ، ∞ [

الدالة تزايدية على مجالها ح

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

الدالة ليست زوجية وليست فردية لعدم التماثل

(ثانياً)



المدى = $ح_+$ =] ٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على مجالها ح

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

الدالة ليست زوجية وليست فردية لعدم التماثل

** **ملحوظة هامة** : تتمتع الدالة الأسية بالخواص الآتية لجميع قيم م ، ن الحقيقية :

❶ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ❷ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ ❸ $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

◈ الأسس ◈

◈ **مراجعة الأسس الصحيحة** :

❶ $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times ..... \times أ$ ∀ ن ∋ $ص_+$

❷ $أ^{٠} = ١$ ∀ أ ∋ $ح^*$

❸ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ∀ أ ∋ $ح^*$

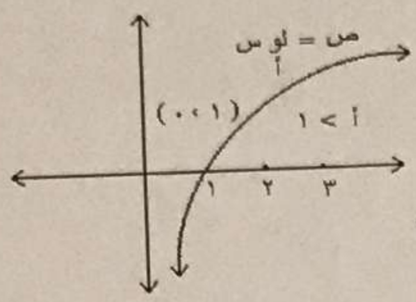
◈ ثانياً : الدالة اللوغاريتمية ◈

د : ح$_+$ ← ح

◈ **تعريف** : إذا كانت أ ∈ ح$_+$ - {١} ، ص ∈ ح$_+$ فإن : ص = أ^{س} ↔ لو$_{أ}$ ص = س

◈ التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية (د : ح$_+$ ← ح) ◈

تزايد



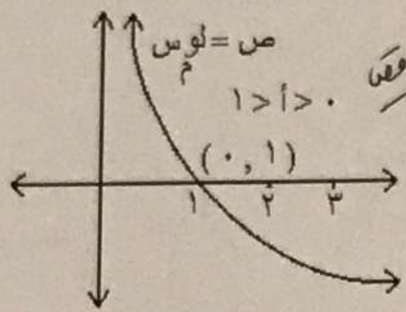
المجال = ح$_+$ =] ٠ ، ∞ [

المجال المقابل = ح

الدالة تزايدية على مجالها ح$_+$

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

متناقص



المجال = ح$_+$

المجال المقابل = ح

الدالة تناقصية على مجالها ح$_+$

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

◈ قوانين اللوغاريتمات ◈

◈ إذا كانت : س ، ص ∈ ح$_+$ ، أ ∈ ح$_+$ - {١} فإن :

١) لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص ٢) لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص

٣) لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س ٤) لو$_{أ}$ أ = ١ ٥) لو$_{أ}$ ١ = صفر

** **ملحـــوظة هامـــة** : اللوغاريتمات المعتادة " العشرية " هى اللوغاريتمات التى أساسها ١٠ ولا يكتب .

◈ مسائل محلولة ◈

① إذا كانـت : د (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$ ، ر (س) = هـ^{س} - هـ$^{-س}$

فأثبت أن : [د (س)]^{٢} - [ر (س)]^{٢} = ٤

(الحـــل)

= [د (س)]^{٢} - [ر (س)]^{٢} = [د (س) - ر (س)] [د (س) + ر (س)] = ٤

② حل المعادلة الآتية : لو (س^{٢} - س) - ٢ = ٠

(الحـــل)

لو$_{٢\sqrt{٣}}$ (س^{٢} - س) = ٢ ⬅ س^{٢} - س = (٢$\sqrt{٣}$)^{٢} ⬅ س^{٢} - س = ١٢

⬅ س^{٢} - س - ١٢ = ٠ ⬅ (س - ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ س = -٣ ⬅ م.ح = { ٤ ، -٣ }

③ حل المعادلة الآتية : لو$_{٢}$ س = ٢ - لو$_{٢}$ (س - ٣)

(الحـــل)

لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س - ٣) = ٢ ⬅ لو$_{٢}$ س (س - ٣) = ٢ ⬅ س^{٢} - ٣ س = ٢^{٢} = ٤

س^{٢} - ٣ س - ٤ = ٠

(س - ٤) (س + ١) = ٠

س - ٤ = ٠	س + ١ = ٠
س = ٤	س = - ١ " مرفوض "

⬅ م.ح = { ٤ }

---

④ أوجد قيمة س إذا كان : $\frac{١}{٩}$ × ٣^{س} = لو $\frac{١٤}{٣}$ - لو ٣ + ٢ لو ٥ - لو $\frac{٦}{٧}$ ١٧ + ٢ لو $\frac{٢٥}{١٧}$

(الحـــل)

٣$^{-٢}$ × ٣^{س} = لو $\frac{١٤}{٣}$ - لو ٣ + لو ٢٥ - لو $\frac{١٢٥}{٧}$ + لو $\frac{٢٢٥}{٤٩}$

٣$^{س-٢}$ = لو $\frac{١٤ \times ٢٥ \times ٧ \times ٢٢٥}{٣ \times ٣ \times ١٢٥ \times ٤٩}$

٣$^{س-٢}$ = لو١٠ ⬅ ٣$^{س-٢}$ = ١ ⬅ ٣$^{س-٢}$ = ٣^{٠} ⬅ س - ٢ = ٠ ⬅ س = ٢

---

⑤ حل المعادلة الآتية : ٧$^{٢س-١}$ = ٢$^{٣س+١}$

(الحـــل)

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين : ∴ لو ٧$^{٢س-١}$ = لو ٢$^{٣س+١}$

(٢ س - ١) لو ٧ = (٣ س + ١) لو ٢

٢ س لو ٧ - لو ٧ = ٣ س لو ٢ + لو ٢

٢ س لو ٧ - ٣ س لو ٢ = لو ٢ + لو ٧

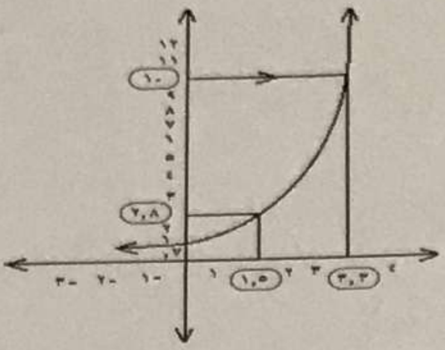
س (٢ لو ٧ - ٣ لو ٢) = لو ٢ + لو ٧

س = $\frac{\text{لو ٢ + لو ٧}}{\text{٢ لو ٧ - ٣ لو ٢}}$ = ١,٤٥ ⬅ م.ح = { ١,٤٥ }

⑥ ارسم الدالة د : ح ← $ح^{+}$ حيث : د (س) = $٢^{س}$ ، س ∈ [-٣ ، ٤] ومن الرسم أوجد :

❶ د (١,٥) ، د (- ٠,٥)

❷ قيمة تقريبية لـ س عندما د (س) = ١٠



(الحـــل)

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$					
				١	٢	٤	٨	١٦

* من الرسم نجد أن :

❶ د (١,٥) = ٢,٨ ، د (- ٠,٥) = ٠,٧

❷ عندما د (س) = ص = ١٠ نجد أن س = ٣,٣

⑦ ارسم منحنى الدالة د : $ح_{+}$ ← ح حيث : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س ، س ∈ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨]

ومن الرسم أوجد : لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

(الحـــل)

ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

عند س = $\frac{١}{٨}$ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٨}$ = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ = ٣ لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٢}$ = ٣

عند س = $\frac{١}{٤}$ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٤}$ = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = ٢ لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٢}$ = ٢

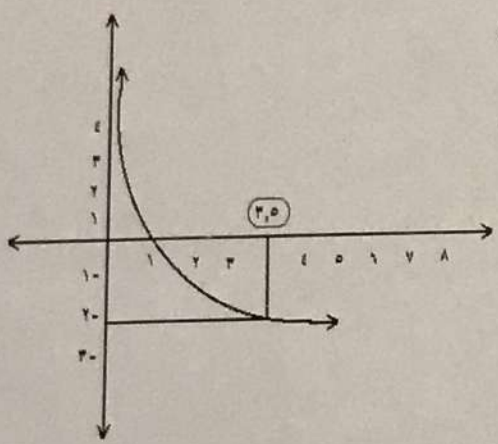
عند س = $\frac{١}{٢}$ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٢}$ = ١

عند س = ١ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١ = صفر

عند س = ٢ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢ = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $(\frac{١}{٢})^{-١}$ = -١

عند س = ٤ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٤ = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $(\frac{١}{٢})^{-٢}$ = -٢

عند س = ٨ ← ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٨ = لو$_{\frac{١}{٢}}$ $(\frac{١}{٢})^{-٣}$ = -٣



س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ص	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣

** لإيجاد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ من الرسم : ❶ نأخذ س = ٣,٥ على محور السينات .

❷ نرسم منها مستقيم // الصادات فيقطع منحنى الدالة فى نقطة .

❸ نقرأ قيمة ص المناظرة لهذه النقطة على محور الصادات فنجدها = - ١,٨

◈ المتتـــاليـــات ◈

◈ تعريف (المتتالية الحقيقة) : هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص + أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن } ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية . أى :

د : من (ص +) ------ إلى-------> (ح)

" المتتالية غير منتهية " المجال " رتب الحدود " " قيم الحدود "

** بصيغة أخرى : د : { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن } ← ح

◄ إذا كانت المتتالية منتهية أى حدها الأخير معلوم

* الحد النونى " العام " للمتتالية ح ن : هو دالة فى ن يمكن بواسطته ايجاد أى حد من حدود المتتالية كما يمكن الحصول على المتتالية نفسها .

((ملحوظة)) : لاحظ الفرق بين (ح ن) ، ح ن حيث (ح ن) ترمز للمتتالية بينما ح ن ترمز للحد النونى لها .

◈ اطـــراد المتتاليـات ◈

ثابتة	تناقصية	تزايدية
ح ن+١ - ح ن = ٠	ح ن+١ - ح ن < ٠ سالب	ح ن+١ - ح ن > ٠ موجب

☜ ح ن+١ - ح ن تعنى الفرق بين أى حد والسابق له مباشرة .

◈ المتتاليـات الحسابية ◈

◈ (تعريف) ⇦ تسمى المتتالية (ح ن) م . ح إذا كان : ح ن+١ - ح ن = مقدار ثابت ∀ ن ∋ ص +

ويسمى المقدار الثابت بأساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز د

☜ فإذا كانت : (ح ن) م . ح فإن أساس هذه المتتالية هو د = ح ن+١ - ح ن

أى أن : أساس المتتالية الحسابية = أى حد فيها - الحد السابق له مباشرة .

◈ (الصورة العامة للمتتالية الحسابية) ⇦ إذا رمزنا للحد الأول بالرمز أ ، الأساس بالرمز د فإنه يمكن كتابة المتتالية الحسابية على الصورة :

م . ح ← (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، أ + ٣ د ، .... ، ∞) " إذا كانت المتتالية غير منتهية "

م . ح ← (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، أ + ٣ د ، .... ، ل - ٢ د ، ل - د ، ل) " إذا كانت المتتالية منتهية "

حيث ل هو الحد الأخير

(الحد العام فى المتتالية الحسابية)

$\boxed{\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}}$

الحد العام ، الحد الأول ، رتبة الحد ، الأساس

((**ملحوظة هامة جدا**)) :

إذا كان عدد حدود المتتالية الحسابية = ن فإن حدها الأخير هو $\text{ح}_{\text{ن}}$ ويرمز له بالرمز ل

* أى أن : عدد حدود المتتالية الحسابية المنتهية = رتبة الحد الأخير

* أى أن : ل = $\text{ح}_{\text{ن}}$ = أ + (ن - ١) د

فمثلا : إذا كان عدد حدود المتتالية الحسابية = ٢٠ حدا فإن الحد الأخير هو الحد العشرون

* أى أن : ل = $\text{ح}_{٢٠}$ = أ + (٢٠ - ١) د = أ + ١٩ د

الأوساط الحسابية

إذا كان : أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من م . ح فإن ضعف الوسط الحسابى = مجموع الطرفين .

و . ح $\boxed{٢\,\text{ب} = \text{أ} + \text{جـ}}$ ومنها ب = $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}$

أى أن : الوسط الحسابى = المجموع ÷ ٢ " يستخدم إذا ذكر كلمة الوسط الحسابى "

فمثلا : إذا كان الوسط الحسابى لعددين = ٣

نفرض أن العددين هما س ، ص ∴ $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ = ٣ ∴ س + ص = ٦

مجموع حدود المتتالية الحسابية

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \begin{cases} \frac{\text{ن}}{٢}\,[\,\text{أ} + \text{ل}\,] & \text{إذا علم الحد الأخير} \\ \frac{\text{ن}}{٢}\,[\,٢\,\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\,] & \text{إذا علم الأساس} \end{cases}$

المتتالية الهندسية

◈ الصورة العامة للمتتاليات الهندسية ◈

إذا رمزنا للحد الأول بالرمز أ ، والأساس بالرمز ر فإنه يمكن كتابة المتتالية الهندسية على الصورة :

(أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، .... ، ∞) " إذا كانت المتتالية غير منتهية "

، (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل) " إذا كانت المتتالية منتهية "

◈ الحد العام فى المتتالية الهندسية ◈

$ح_ن = ل = أ ر^{ن-١}$

∀ ن ∋ $ص_+$

أ ◄ الحد الأول
ن ◄ رتبة الحد
ر ◄ الأســاس

◈ الأوساط الهندسية ◈

◈ إذا كان : أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من م . هـ فإن مربع الوسط الهندسى = حاصل ضرب الطرفين .

و . هـ $\boxed{ب^٢ = أ × جـ}$ ومنها ب = ± $\sqrt{أ جـ}$

⇦ أى أن : الوسط الهندسى = ± $\sqrt{\text{حاصل ضرب العددين}}$ " الحدين " " يستخدم إذا ذكر كلمة الوسط الهندسى "

فمثلا : إذا كان الوسط الهندسى لعددين = ٧

نفرض أن العددين هما أ ، ب ∴ $\sqrt{أ ب}$ = ٧ " بتربيع الطرفين " ∴ أ ب = ٤٩

◈ نظرية هامة ◈

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

◈ مجموع حدود المتتالية الهندسية ◈

$$جـ_ن = \begin{cases} \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} & \text{حيث } ر > ١ \\ \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} & \text{حيث } ر < ١ \end{cases}$$

(إذا علم عدد الحدود " ن ")

$$جـ_ن = \begin{cases} \frac{ل ر - أ}{ر - ١} & \text{حيث } ر > ١ \\ \frac{أ - ل ر}{١ - ر} & \text{حيث } ر < ١ \end{cases}$$

(إذا علم الحد الأخير)

♣ **مجموع عدد لا نهائى " غير منته " من الحدود :**

الشرط اللازم لإيجاد مجموع عدد غير منته من حدود م . هـ هو | ر | < ١ أو -١ < ر < ١

وفى هذه الحالة يكون $جـ_{\infty} = \frac{\text{الحد الأول}}{\text{١ - الأساس}}$ = $جـ_{\infty} = \frac{\text{أ}}{\text{١ - ر}}$

♣ **تذكـــر أن :**

١- الوسط الحسابى لعددين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

٢- إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث كميات موجبة فى تتابع حسابى فإن : ب > $\sqrt{\text{أ جـ}}$

" نثبت الوسط الحسابى ونعرف الوسط الهندسى "

٣- إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث كميات موجبة فى تتابع هندسى فإن : $\frac{\text{أ + جـ}}{\text{٢}}$ > ب

" نثبت الوسط الهندسى ونعرف الوسط الحسابى "

◈ تمارين على المتتاليات ◈

◈ أولاً : على المتتالية الحسابية :

♣١ م . ح فيها مجموع الحدين الثالث والخامس يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتالية .

(الحـــل)

∵ ح٣ + ح٥ = ٢٤

أ + ٢د + أ + ٤د = ٢٤

٢أ + ٦د = ٢٤ بالقسمة ÷ ٢

أ + ٣د = ١٢ بالضرب × -١

-أ - ٣د = -١٢ ←

أ + ٥د = ١٨ ←

٢د = ٦

د = ٣

أ + ٩ = ١٢

أ = ٣

↓

م . ح = (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....)

∵ ح٦² = ٣٢٤

(أ + ٥د)² = ٣٢٤

أ + ٥د = ±١٨

-أ - ٣د = -١٢

\+ أ + ٥د = -١٨

٢د = -٣٠

د = -١٥

أ - ٤٥ = ١٢

أ = ٥٧

↓

م . ح = (٥٧ ، ٤٢ ، ٢٧ ، .....)

♣٢ م . ح حدودها أعداد صحيحة ، حاصل ضرب الحدين الثالث والسادس ٤٠٦ ، وخارج قسمة الحد التاســـع على الحد الرابع منها يساوى ٢ والباقى - ٦ أوجد المتتابعة .

(الحـــل)

∵ ح٣ × ح٦ = ٤٠٦

(أ + ٢ د) (أ + ٥ د) = ٤٠٦ ← ❶

بالتعويض من ❷ فى ❶

(٢د - ٦ + ٢ د) (٢ د - ٦ + ٥ د) = ٤٠٦

(٤ د - ٦) (٧ د - ٦) = ٤٠٦

∵ ح٩ - ٢ ح٤ = -٦

أ + ٨ د - ٢ (أ + ٣ د) = -٦

أ + ٨ د - ٢ أ - ٦ د = -٦

-أ + ٢ د = -٦

أ = ٢ د + ٦ ← ❷

٢٨ د² - ٢٤ د - ٤٢ د + ٣٦ = ٤٠٦ ← ٢٨ د² - ٦٦ د - ٣٧٠ = ٠

١٤ د² - ٣٣ د - ١٨٥ = ٠ ← (١٤ د - ٣٧) (د + ٥) = ٠

١٤ د = ٣٧

د = ٣٧/١٤

" مرفوض "

لأن المتتابعة حدودها صحيحة

د = -٥

أ = -١٠ + ٦ = -٤

م . ح = (-٤ ، -٩ ، -١٤ ، .....)

♣٣ م . ح فيها مجموع الحدود الأربعة الأولى منها = ٥٦ ، ومجموع الحدود الأربعة الأخيرة منها = ١١٢ ، وحدها الأول = ١١ أوجد المتتابعة وعدد حدودها .

(الحـــل)

∵ جـ٤ الأولى = ٥٦

جـن = ن/٢ [٢ أ + (ن - ١) د]

جـن = ٤/٢ [٢ أ + ٣ د] = ٥٦

٢ (٢ أ + ٣ د) = ٥٦ بالقسمة ÷ ٢

٢ أ + ٣ د = ٢٨ ← ❶

∵ أ = ١١

∴ ٢٢ + ٣ د = ٢٨

٣ د = ٦ ← د = ٢

م . ح = (١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ....)

∵ جـ٤ الأخيرة = ١١٢

ل + ل - د + ل - ٢ د + ل - ٣ د = ١١٢

٤ ل - ٦ د = ١١٢

٤ ل - ١٢ = ١١٢

٤ ل = ١٢٤ ← ل = ٣١

حن = ل = ٣١ ← أ + (ن - ١) د = ٣١

١١ + (ن - ١) × ٢ = ٣١

١١ + ٢ ن - ٢ = ٣١

٢ ن = ٢٢

ن = ١١ حدا

قوانين الاحتمال

$$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$$

وهو يعنى لفظيا – احتمال وقوع أ أو ب
- احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

$$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$$

وهو يعنى لفظيا احتمال وقوع أحد الحدثين معا

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

وهو يعنى - احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب
- احتمال وقوع أ فقط

لاحظ أن $ل(أ \cap ب^{/}) = ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب$$

وهو يعنى - احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ
- احتمال وقوع ب فقط

لاحظ أن $ل(ب \cap أ^{/}) = ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$$ل(أ^{/}) = 1 - ل(أ)$$

وهو يعنى احتمال عدم وقوع أ

لاحظ أن ل(الحدث)$^{/}$ = ١ – الحدث فمثلا

$ل(أ \cup ب)^{/} = 1 - ل(أ \cup ب)$ ،،، $ل(أ \cap ب)^{/} = 1 - ل(أ \cap ب)$

$ل(أ - ب)^{/} = 1 - ل(أ - ب)$ ،،، $ل(ب - أ)^{/} = 1 - ل(ب - أ)$

لاحظ أن

*** احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل**

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

*** احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر**

ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)

*** احتمال وقوع أحد الحدثين فقط**

= ل (أ − ب) + ل (ب − أ) = ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)

= ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)

*** احتمال عدم وقوع أ أو ب**

ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)

*** احتمال عدم وقوع أ ، ب معا**

ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)

* ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)

* ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)

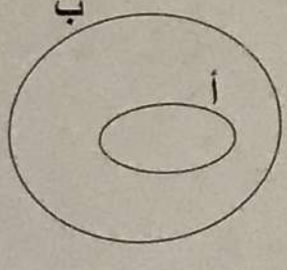
* ل (أ ∪ ب′) = ل (ب′) + ل (أ ∩ ب)

* ل (أ′ ∪ ب) = ل (أ′) + ل (أ ∩ ب)

****

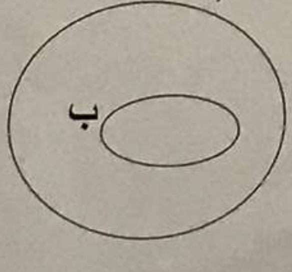
**** إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فان ل (أ ∩ ب) = ٠**

**** إذا كان أ ⊂ ب فان**



ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ،،،، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

**** إذا كان ب ⊂ أ فان**



ل (أ ∩ ب) = ل (ب) ،،،، ل (أ ∪ ب) = ل (أ)

إذا كان س ،ص حدثين من ف بحيث كان ل(س) = ٠,٥ ، ل(ص) = ٠,٦

ل(س ∩ ص) = ٠,٣ أوجد

(١) ل (س ∪ ص)	(٤) ل (س′)	(٧) ل(س′ ∩ ص′)
(٢) ل(س – ص)	(٥) ل (ص′)	(٨) ل (س ∪ ص′)
(٣) ل (ص – س)	(٦) ل (س′∪ ص′)	(٩) ل (س′ ∪ ص)

(١) ل(س ∪ ص) = ل (س) + ل(ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٥+٠,٦-٠,٣ = ٠,٨

(٢) ل(س – ص) = ل (س) – ل (س ∩ ص) = ٠,٥ – ٠,٣ = ٠,٢

(٣) ل (ص – س) = ل (ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٦ – ٠,٣ = ٠,٣

(٤) ل(س′) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥

(٥) ل(ص′) = ١ – ل (ص) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤

(٦) ل(س′ ∪ ص′) = ل (س ∩ ص)′ = ١ – ل(س ∩ ص) = ١ – ٠,٣ = ٠,٧

(٧) ل (س′ ∩ ص′) = ل (س   ص)′ = ١ – ل (س   ص) = ١ – ٠,٨ = ٠,٢

(٨) ل(س ∪ ص′) = ل(ص′) + ل (س ∩ ص) = ٠,٤ + ٠,٣ = ٠,٧

(٩) ل (س′ ∪ ص) = ل(س′) + ل (س ∩ ص) = ٠,٥ + ٠,٣ = ٠,٨

****

إذا كان س ،ص حدثين من ف بحيث كان ل(س) = ٠,٤ ، ل(ص) = ٠,٨

ل(س ∩ ص) = ٠,٣ أوجد

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

(٢) احتمال وقوع س فقط

(٣) احتمال وقوع ص فقط

(٤) احتمال عدم وقوع س

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل(س ∪ ص) = ل(س) + ل (ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٤ + ٠,٨ – ٠,٣ = ٠,٩

****

(٢) احتمال وقوع س فقط

ل(س – ص) = ل (س) – ل (س ∩ ص) = ٠,٤ – ٠,٣ = ٠,١

****

(٣) احتمال وقوع ص فقط

ل(ص – س) = ل(ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٨ – ٠,٣ = ٠,٥

****

(٤) احتمال عدم وقوع س

ل(س′) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٤ = ٠,٦

****

يحاول عبدالرحمن وجهاد حل مسألة فإذا كان احتمال أن يحلها عبدالرحمن ٠,٦ واحتمال أن تحلها جهاد ٠,٥ واحتمال أن يحل كلاهما المسألة معا ٠,٣٥ أوجد

(١) احتمال حل المسألة (٢) احتمال أن يحلها عبد الرحمن فقط

(٣) احتمال أن تحلها جهاد فقط (٤) احتمال أن يحلها أحدهما دون الأخر

(٥) احتمال عدم حل المسألة (٦) احتمال أن يحلها أحدهما على الأكثر

(٧) احتمال أن يفشل عبد الرحمن فى حلها (٨) احتمال أن تفشل جهاد فى حلها

نرمز لنجاح عبد الرحمن فى حل المسألة بالرمز س وجهاد بالرمز ص

ل(س) = ٠,٦ ل(ص) = ٠,٥ ل(س ∩ ص) = ٠,٣٥

(١) احتمال حل المسألة

ل(س ∪ ص) = ل(س) + ل(ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٦ + ٠,٥ – ٠,٣٥ = ٠,٧٥

(٢) احتمال أن يحلها عبد الرحمن فقط

ل(س – ص) = ل(س) – ل(س ∩ ص) = ٠,٦ – ٠,٣٥ = ٠,٢٥

(٣) احتمال أن تحلها جهاد فقط

ل(ص – س) = ل(ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٥ – ٠,٣٥ = ٠,١٥

(٤) احتمال أن يحلها أحدهما دون الأخر

ل(س ∪ ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٧٥ – ٠,٣٥ = ٠,٤

(٥) احتمال عدم حل المسألة

ل(س ∪ ص)′ = ١ – ل (س ∪ ص) = ١ – ٠,٧٥ = ٠,٢٥

(٦) احتمال أن يحلها أحدهما على الأكثر

ل(س ∩ ص)′ = ١ – ل(س ∩ ص) = ١ – ٠,٣٥ = ٠,٦٥

(٧) احتمال أن يفشل عبد الرحمن فى حلها

ل(س′) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤

(٨) احتمال أن تفشل جهاد فى حلها

ل(ص′) = ١ – ل (ص) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥

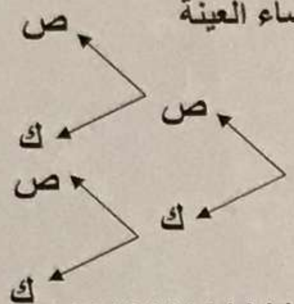
حساب الاحتمال على فضاء عينة متساو الإمكانات

فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة أكتب فضاء العينة

ف = { ص ، ك }

****

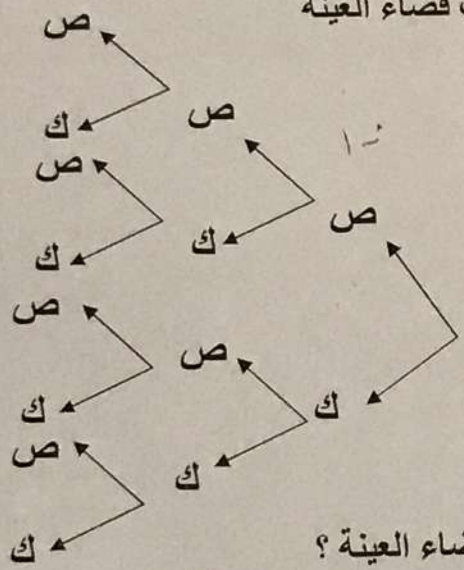
فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين أكتب فضاء العينة



ف = { (ص، ص) ، (ص،ك)، (ك،ص)،(ك،ك)}

****

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات أكتب فضاء العينة



ف= { (ص ، ص ، ص) ،(ص ، ص ، ك)
(ص ، ك ، ص) ،(ص ، ك ، ك) (ك ، ص ، ص)
(ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ،(ك ، ك ، ك) }

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة أكتب فضاء العينة ؟

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

****

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين أكتب فضاء العينة ؟

ف= { (١ ، ١) (١، ٢) ، (٢ ، ١) ، .... ، (٦،٦)}

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

****

مـــلاحظة

إذا كان أ حدث جزئي من فضاء متساو الإمكانات فان

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين أكتب فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الأحداث الآتية

(١) أ = حدث ظهور عددين متساويين (٢) ظهور عددين مجموعهم = ٥

(٣) جـ = ظهور عددين مجموعهم ≥ ١٠ (٤) ء = ظهور عددين مجموعهم يقبل القسمة على ٤

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ....(٦ ، ٦) } ٣٦ زوج

(١) أ = حدث ظهور عددين متساويين

أ = {(١ ، ١) ، (٢، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥، ٥) ، (٦، ٦)} ل(أ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٢) ظهور عددين مجموعهم = ٥

ب = {(١ ، ٤)، (٤، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)} ل(ب) = $\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$

(٣) جـ = ظهور عددين مجموعهم ≥ ١٠

جـ = {(٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦)} ل(جـ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٤) ء = ظهور عددين مجموعهم يقبل القسمة على ٤

ء = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦)} ل(ء) = $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

المتغيرات العشوائية

تعريف المتغير العشوائي:-

المتغير العشوائي هو دالة من ف ⟵ ح

أنواع المتغيرات العشوائية

(١) المتغير العشوائي المتقطع

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من العناصر

(٢) المتغير العشوائي المتصل

هو متغير عشوائي مداه فترة [مجموعة غير محدودة من العناصر]

****

المتغير العشوائي المتقطع

أولا تكوين جدول التوزيع الاحتمالي:-

مثال : فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين كان المتغير العشوائي يعبر عن (عدد الصور)
كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س

ف ⟵ ح

(ص ، ص) ⟵ ٢

(ص ، ك) ⟵ ١

(ك ، ص) ⟵ ١

(ك ، ك) ⟵ ٠

$س_ر$	٠	١	٢
د($س_ر$)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

****

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات كان المتغير العشوائي يعبر عن (عدد الكتابات) كون جدول التوزيع الاحتمالي

ف

(ص ، ص ، ص) ⟵ ٠

(ص ، ص ، ك) ⟵ ١

(ص ، ك ، ص) ⟵ ١

(ص ، ك ، ك) ⟵ ٢

(ك ، ص ، ص) ⟵ ١

(ك ، ص ، ك) ⟵ ٢

(ك ، ك ، ص) ⟵ ٢

(ك ، ك ، ك) ⟵ ٣

$س_ر$	٠	١	٢	٣
د($س_ر$)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

في كتاب المرحلة الثانوية المستوى الرابع صمم جبر

التوزيع الطبيعي

المنحنى الطبيعي (أو المنحنى الجاوسى)

هو منحنى يأخذ شكل الناقوس أو الجرس

خصائص المنحنى الطبيعي

(١) ل (- ∞ < س < ∞) = ١

(٢) ل(٠ < س < ∞) = ٠,٥

(٣) ل(- ∞ < س < ٠) = ٠,٥

(٤) ل(- أ < س < ٠) = ل(٠ < س < أ)

****

[أ] كيفية حساب الاحتمال على الفترة [٠ ، ى] حيث ى عدد موجب

لإيجاد ل (٠ < س < ١,٢٥) نستخدم جدول المساحات

	٠,٠٠			٠,٠٥	
٠,١					
٠,٢					
١,٢				٠,٣٩٤٤	
١,٥	٠,٤٣٣٢				

ل(٠< س< ١,٢٥) = ٠,٣٩٤٤

ل (٠<س<١,٥) = ٠,٤٣٣٢

<u>ثانيا حساب الاحتمال على]- ى ، ٠ [</u>

ل(- ١,٥ < س < ٠) = ل (٠ < س < ١,٥) = ٠,٤٣٣٢

ل(-٠,٧٥ < س < ٠) = ل (٠ < س < ٠,٧٥) = ٠,٢٧٣٤

****

<u>ثالثا حساب الاحتمال على الفترة] أ ، ب [</u>

ل(أ < س < ب) = ل(٠< س < ب) – ل (٠ < س < أ)

ل(- أ < س < - ب) = ل (ب < س < أ) = ل(٠ < س < أ) – ل(٠ < س < ب)

ل(- أ < س < ب) = ل (٠ < س < ب) + ل (٠ < س < أ)

فمثلا

ل(١ < س < ٢,٥) = ل (٠ < س < ٢,٥) – ل (٠ < س < ١)

= ٠,٤٩٣٨ – ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٢٥

ل(- ٢ < س < - ٠,٥) = ل (٠,٥ < س < ٢)=ل(٠ < س < ٢) – ل(٠ < س < ٠,٥)

= ٠,٤٧٧٢ – ٠,١٩١٥ =

ل(-٠,٧٥ < س < ١) = ل (٠ < س < ١) + ل (٠ < س < ٠,٧٥)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٢٧٣٤ = ٠,٦١٤٧

****

<u>رابعا حساب الاحتمال على فترة غير منتهية</u>

ل(س > ١) = ٠,٥ – ل (٠ < س < ١)

= ٠,٥ – ٠,٣٤١٣

= ٠,١٥٨٧

****

ل(س < ١) = ٠,٥ + ل (٠ < س < ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣

= ٠,٨٤١٣

****

ملاحظة

ل (س > -١) = ل (س < ١) = ٠,٥ + ل (٠ < س < ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

<u>البحث فى عمق الجدول :-</u>

فى هذا الجزء سوف يكون معلوم قيمة الاحتمال ومجهول أحد حدود الفترة

فمثلا إذا كان ل (٠ < م < ك) = ٠,٣٩٤٤ فما قيمة ك

لإيجاد قيمة ك نبحث عن المساحة المعطاة ٠,٣٩٤٤ فى جدول المساحات فنجدها فى صف ١,٢ وتحت ٠,٠٥ ولهذا فإن ك = ١,٢٥

الارتبـــاط

* تعريف الارتباط

الارتباط هو علاقة بين متغيرين ،أو أكثر ،ويقاس الارتباط بمعامل الارتباط "ر" حيث -١ ≤ر1 ≤

* أنواع الارتباط

١- طردى: صفر < س.1 ≤

-2 عكسي ≤1- :س > صفر.

ملاحظات

١- إذا كان ر = صفر	لا ارتباط
٢- إذا كان ر = ١	ارتباط طردى تام
٣- إذا كان ر =-١	ارتباط عكسي تام

* درجات الارتباط

١- ضعيف: صفر < ر < ٠,٤ أو -٠,٤ < ر < صفر.

٢- متوسط: ٠,٤ ≤ر 0.6≥ أو ≤0.6- ر.0.4- ≥

٣- قوى: ٠,٦ < ر< ١ أو -١ > ر > -٠,٦

ر = $\dfrac{\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})^2}\sqrt{\sum(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^2}}$

* معامل ارتباط بيرسون

نفس القانون

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}\ .\ \sqrt{(\text{ن مجـ ص}^2) - (\text{مجـ ص})^2}}$$

حيث ن عدد قيم كل من المتغيرين ولايجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة نكون جدولاً

مثال1

من بيانات الجدول الآتى، أوجد معامل ارتباط بيرسون بين قيم س، ص مبيناً نوعه ودرجته.

س	6	5	7	8	10	6	7
ص	4	7	5	6	8	7	8

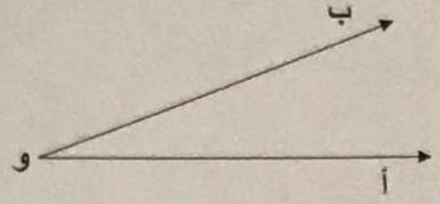
في كتاب التوجيهي الادبي الوحدة 2 المستوى الرابع

القياس من حيث الإشارة

ينقسم القياس من حيث الإشارة إلى

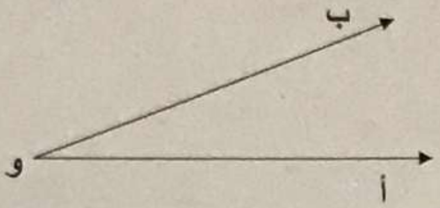
(١) القياس الموجب

يكون قياس الزاوية الموجهة موجبا إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائي ضد حركة عقارب الساعة



(١) القياس السالب

يكون قياس الزاوية الموجهة سالبا إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائي مع حركة عقارب الساعة



للتحويل من قياس سالب إلى قياس موجب

القياس الستيني السالب = القياس الستينى الموجب ــ ٣٦٠

القياس الدائري السالب = القياس الدائري الموجب ــ ٢ط (بدلالة ط)

للتحويل من قياس موجب إلى قياس سالب

القياس الستيني الموجب = القياس الستيني السالب + ٣٦٠

القياس الدائري الموجب = القياس الدائري السالب + ٢ط (بدلالة ط)

مثال حول كلا من القياسات الموجبة الآتية إلى القياس السالب

(١) ١٥٠°

الحـــل

القياس السالب = ١٥٠ - ٣٦٠ =- ٢١٠

(٢) ٤٠′ ١٠٠°

الحـــل

القياس السالب= ٤٠′ ١٠٠° ــ ٣٦٠°

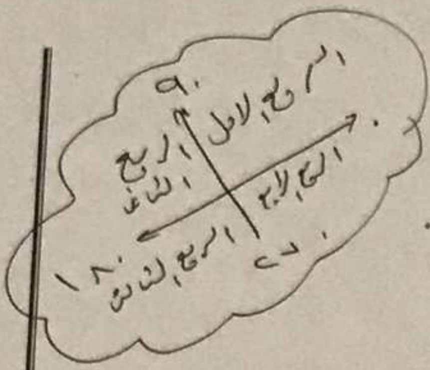
= - ٢٠′ ٢٥٩°

(٣) ٢٥″ ٥٠′ ٢٠٠°

الحـــل

القياس السالب = ٢٥″ ٥٠′ ٢٠٠° ــ ٣٦٠

= - ٣٥″ ٩′ ١٥٩°



مثال حدد الربع الذي تقع فيه كلا من الزوايا التى قياسها كالاتى

(١) ١٢٠٠°

الحـــــل

١٢٠٠ = ١٢٠٠ − ٣٦٠ = ٨٤٠ − ٣٦٠ = ٤٨٠ − ٣٦٠ = ١٢٠°

الزاوية التى قياسها ١٢٠٠ تقع فى الربع الثاني

****

(٢) −١٥٠٠

الحـــــل

−١٥٠٠ = −١٥٠٠ + ٣٦٠ = −١١٤٠ + ٣٦٠ = −٧٨٠ + ٣٦٠ = −٤٢٠ + ٣٦٠ = −٦٠

= −٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠

الزاوية التى قياسها −١٥٠٠ تقع فى الربع الرابع

****

(٣) $\frac{١٧ط}{٣}$

الحـــــل

$\frac{١٧ط}{٣} = \frac{١٧ \times ١٨٠}{٣} = ١١٢٠ = ١١٢٠ - ٣٦٠ = ٧٦٠ - ٣٦٠ = ٤٠٠ - ٣٦٠ = ٤٠^\circ$

الزاوية التى قياسها $\frac{١٧ط}{٣}$ تقع فى الربع الأول

****

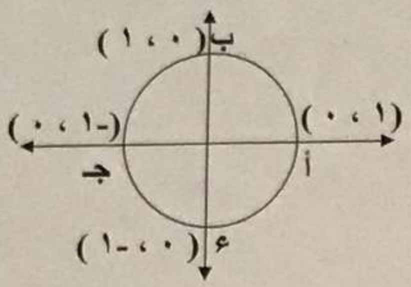
(٤) $\frac{-١٩ط}{٤}$

الحـــــل

$\frac{-١٩ط}{٤} = \frac{-١٩ \times ١٨٠}{٤} = -٨٥٥ = -٨٥٥ + ٣٦٠ = -٤٩٥ + ٣٦٠ = -١٣٥ + ٣٦٠ = ٢٢٥$

الزاوية التى قياسها $\frac{-١٩ط}{٤}$ تقع فى الربع الثالث

الدوال المثلثية



دائرة الوحدة :-

هى دائرة مركزها نقطة الأصل و(٠ ، ٠)

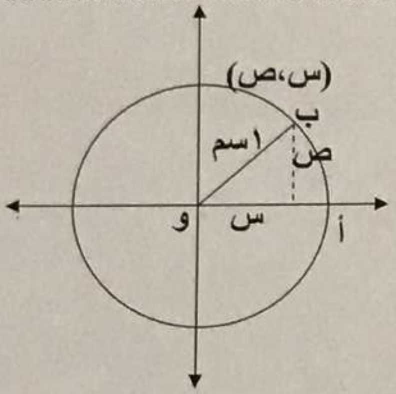
وطول نصف قطرها ١سم تقطع محوري

الإحداثيات فى أربعة نقط هى على الترتيب

أ=(١ ، ٠) ،،،، ب = (٠ ، ١)

جـ = (-١ ، ٠) ،،، ء = (٠ ، -١)

****



إذا فرض وجود نقطة ب = (س ، ص) هذه النقطة فى أى موضع تكون زاوية أ و ب يمكن تعريف مجموعة من الدوال المثلثية لهذه الزاوية وهذه الدوال تعتمد على الاحداثيين السينى والصادى لنقطة ب وهى كالاتى

(١) دالة الجيب (جا sin)

جا (أ و ب) = الاحداثى الصادى لنقطة ب=ص

****

(٢) دالة جيب التمام (جتا cos)

جتا (أ و ب) = الاحداثى السينى لنقطة ب = س

****

(٣) دالة الظل (ظا tan)

$$\text{ظا(أ و ب)} = \frac{\text{الاحداثى الصادى}}{\text{الاحداثى السينى}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

(٤) دالة قاطع التمام (قتا)

$$\text{قتا(أ و ب)} = \frac{1}{\text{الاحداثى الصادى}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

****

(٥) دالة القاطع (قا)

$$\text{قا(أ و ب)} = \frac{1}{\text{الاحداثى السينى}} = \frac{1}{\text{س}}$$

****

(٦) دالة ظل التمام (ظتا)

$$\text{ظتا(أ و ب)} = \frac{\text{الاحداثى السينى}}{\text{الاحداثى الصادى}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

ملخص الدوال المثلثية

إذا كانت زاوية أ و ب = هـ تقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب = (س ، ص) فإن

جا هـ = ص — قتا هـ = $\frac{1}{ص}$

جتاهـ = س — قاهـ = $\frac{1}{س}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ — ظتاهـ = $\frac{س}{ص}$

ملاحظة هامة جداً
الاحداثى الصادى والسينى لنقطة ب يرتبطان بالعلاقة $س^2 + ص^2 = 1$

****

مثال إذا كانت أ و ب زاوية فى وضعها القياسى تقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب أوجد جميع الدوال المثلثية لها إذا كانت

(1) ب = $\left(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

الحـــل

جاهـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — قتاهـ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

جتاهـ = $\frac{1}{2}$ — قـاهـ = 2

ظاهـ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ — ظتاهـ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) ب = (0,6 ، 0,8)

الحـــل

جاهـ = $\frac{8}{10}$ — قتاهـ = $\frac{10}{8}$

جتاهـ = $\frac{6}{10}$ — قاهـ = $\frac{10}{6}$

ظاهـ = $\frac{\frac{8}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{8}{6}$ — ظتاهـ = $\frac{6}{8}$

(3) (س ، $\frac{1}{2}$) حيث س > 0

الحـــل

نوجد الاحداثى السينى من العلاقة

$س^2 + ص^2 = 1$

$س^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$س^2 + \frac{1}{4} = 1$

$س^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$س = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2} \right)$

جاهـ = $\frac{1}{2}$ — قتاهـ = 2

جتا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — قاهـ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

ظاهـ = $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — ظتاهـ = $\sqrt{3}$

الباب السادس التفاضل والتكامل

التغـــــير

إذا كان ص = ق(س) فإن :

- التغير فى س = هـ = Δ س = س$_2$ − س$_1$

وعلى ذلك يكون : س$_2$ = س$_1$ + هـ

- التغير فى ص = Δ ص = ص$_2$ − ص$_1$ = ق(س$_2$) − ق(س$_1$)
- **دالة التغير** ت (هـ) = ق(س$_1$ + هـ) − ق(س$_1$)
- **دالة متوسط التغير** م (هـ) = $\frac{\text{ق(س}_1\text{ + هـ) − ق(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

$= \frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ق(س}_2\text{) − ق(س}_1\text{)}}{\text{س}_2\text{ − س}_1} = \frac{\text{ص}_2\text{ − ص}_1}{\text{س}_2\text{ − س}_1} = \frac{\Delta\text{ ص}}{\Delta\text{ س}}$

- **معدل التغير** نهـــا م (هـ) = نهـــا $\frac{\text{ق(س}_1\text{ + هـ) − ق(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ (هـ ← ٠)

مثال ١ إذا كان ق(س) = س^2 + ٥ س

(أولاً) أوجد دالة التغير ت عندما س = ٢ ثم احسب ت (٠,١)

(ثانياً) احسب متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٥

(ثالثاً) أوجد معدل تغير الدالة عندما س = ٤

(الحل)

(أولاً) ت (هـ) = ق(س$_1$ + هـ) − ق(س$_1$)

= [(س$_1$ + هـ)^2 + ٥ (س$_1$ + هـ)] − [س$_1^2$ + ٥ س$_1$]

= س$_1^2$ + ٢ س$_1$ هـ + هـ^2 + ٥ س$_1$ + ٥ هـ − س$_1^2$ − ٥ س$_1$

= ٢ س$_1$ هـ + هـ^2 + ٥ هـ

عندما س = ٢

ت (هـ) = ٢ × ٢ × هـ + هـ^2 + ٥ هـ = هـ^2 + ٩ هـ

ت (٠,١) = (٠,١)^2 + ٩ × ٠,١ = ٠,٠١ + ٠,٩ = ٠,٩١

(ثانياً) م (هـ) = $\frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

م (هـ) = $\frac{\text{٢ س}_1\text{ هـ} + \text{هـ}^2 + \text{٥ هـ}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ}(\text{٢ س}_1 + \text{هـ} + \text{٥})}{\text{هـ}}$

م (هـ) = ٢ س$_1$ + هـ + ٥

عندما س = ٣ ، هـ = ٠,٥

م (هـ) = ٢ × ٣ + ٠,٥ + ٥ = ١١,٥

(ثالثاً) معدل التغير = $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}}$ م (هـ) = $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

= $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}}$ (٢ س$_1$ + هـ + ٥) = ٢ س$_1$ + ٥

عندما س = ٤ ∴ معدل التغير = ٢ × ٤ + ٥ = ١٣

مثال ٢ إذا كان د(س) = س^2 + ٣ س + ٤ فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ ثم استنتج متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٥ إلى ٤,٨ ثم احسب معدل تغير الدالة عندما س = ٥

(الحل) ت (هـ) = د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$)

= [(س$_1$ + هـ)^2 + ٣ (س$_1$ + هـ) + ٤] − [س$_1^2$ + ٣ س$_1$ + ٤]

= س$_1^2$ + ٢ س$_1$ هـ + هـ^2 + ٣ س$_1$ + ٣ هـ + ٤ − س$_1^2$ − ٣ س$_1$ − ٤

= ٢ س$_1$ هـ + هـ^2 + ٣ هـ

م (هـ) = $\frac{\text{ت}(\text{هـ})}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢ س}_1\text{ هـ} + \text{هـ}^2 + \text{٣ هـ}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ}(\text{٢ س}_1 + \text{هـ} + \text{٣})}{\text{هـ}}$

م (هـ) = ٢ س$_1$ + هـ + ٣

عندما س = ٥ ، هـ = ٤,٨ − ٥ = −٠,٢

م (هـ) = ٢ × ٥ − ٠,٢ + ٣ = ١٢,٨

المشتقـــة الأولى للدالـــــة

- المشتقة الأولى للدالة $\frac{دص}{دس} = \lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

- المشتقة الأولى للدالة قد تسمى الدالة المشتقة أو المعامل التفاضلى الأول للدالة أو معدل تغير الدالة .

- ومن رموزها المستخدمة $\frac{دص}{دس}$ ، ص$^{/}$ ، ق$^{/}$(س) ، $\frac{د}{دس}$[ق(س)]

- قواعد الاشتقاق

  - إذا كان د (س) = أ حيث أ ثابت فإن د$^{/}$(س) = ٠

مثال ٨ إذا كان د (س) = ٧ ∴ د$^{/}$(س) = ٠

  - إذا كان د (س) = س^{ن} فإن د$^{/}$(س) = ن س$^{ن-١}$

مثال ٩ إذا كان د (س) = س^{٥} ∴ د$^{/}$(س) = ٥ س^{٤}

  - إذا كان د (س) = أ س^{ن} فإن د$^{/}$(س) = أ ن س$^{ن-١}$

مثال ١٠ إذا كان د (س) = ٧ س^{٥} ∴ د$^{/}$(س) = ٣٥ س^{٤}

  - إذا كان د (س) = أ س فإن د$^{/}$(س) = أ

مثال ١١ إذا كان د (س) = ٨ س فإن د$^{/}$(س) = ٨

  - إذا كان د (س) = س فإن د$^{/}$(س) = ١

- التفسير الهندسي للمشتقة الأولى :

المشتقة الأولى للدالة عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هى ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة .

مثال ١٢ إذا كان ص = س^{٣} − ٥ س^{٤} + ٧ س − $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ + ١٤ فأوجد ص′

(الحل) ص = س^{٣} − ٥ س^{٤} + ٧ س − ٣ س$^{-٢}$ + ١٤

∴ ص′ = ٣ س^{٢} − ٢٠ س^{٣} + ٧ + ٦ س$^{-٣}$

∴ ص′ = ٣ س^{٢} − ٢٠ س^{٣} + ٧ + $\frac{٦}{\text{س}^{٣}}$

مثال ١٣ إذا كان ص = ٤ س $\sqrt{\text{س}}$ + ٦ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}}$ − $\frac{٩\text{س}}{٥}$ فأوجد ص′

(الحل) ص = ٤ س × س$^{\frac{1}{٢}}$ + ٦ س$^{\frac{٧}{٣}}$ − $\frac{9}{٥}$س = ٤ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦ س$^{\frac{٧}{٣}}$ − $\frac{9}{٥}$س

∴ ص′ = ٤ × $\frac{3}{2}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٦ × $\frac{٧}{٣}$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ − $\frac{9}{5}$ = ٦ $\sqrt{\text{س}}$ + ١٤ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$ − $\frac{9}{٥}$

مثال ١٤ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٣ س^{٢} − س − ٩ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ عند النقطة (١ ، د (س)) ، ثم أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة .

(الحل) ص = ٣ س^{٢} − س − ٩ س$^{\frac{٢}{٣}}$

∴ ص′ = ٦ س − ١ − ٩ × $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{-١}{٣}}$ = ٦ س − ١ − $\frac{٦}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}$ = ٦ س − ١ − $\frac{6}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

عند س = ١

ميل المماس = ص′ = ٦ − ١ − ٦ = −١

ملاحظة: ميل المماس لمنحنى دالة عند نقطة يساوى ظل قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∵ ميل المماس = - ١ ∴ ظا هـ = - ١ ∴ هـ = 135°

مثال ١٥ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة د(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٣س والتى يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوى ١٢ .

الحل ميل المماس = د/(س) = ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣ = ١٢

∴ ٣ س^{٢} − ٦ س + ٣ − ١٢ = ٠ ∴ ٣ س^{٢} − ٦ س - ٩ = ٠

بالقسمة على ٣ ∴ س^{٢} − ٢ س - ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

إما س- ٣ = ٠ ومنها س = ٣ وعندها ص = ٢٧ − ٢٧ + ٩ = ٩

أ، س + ١ = ٠ ومنها س = - ١ وعندها ص = -١ − ٣ − ٣ = -٧

وعلى ذلك توجد نقطتان هما (٣ ، ٩) ، (- ١ ، - ٧)

مثال ١٦ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} − ٣ س + ٢ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور السينات .

- لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى
- لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

الحل نضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى

∴ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ ∴ (س − ١) (س − ٢) = ٠

إما س − ١ = ٠ ومنها س = ١

أ، س − ٢ = ٠ ومنها س = ٢

∴ نقطتا التقاطع هما (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

ميل المماس = ص/ = ٢ س − ٣

عند النقطة (١ ، ٠) ∴ ميل المماس = ص/ = ٢ − ٣ = - ١

عند النقطة (٢ ، ٠) ∴ ميل المماس = ص/ = ٤ − ٣ = ١

مثال ١٧ أوجد النقط التى تقع على منحنى الدالة ص = س + $\frac{2}{س}$ التى عندها المماس يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 135° .

الحل ص = س + ٢ س$^{-١}$

النقط (١ ، ٣) (-١ ، -٣)

مشتقة الضرب

(الاول كما هو) × (مشتقة الثاني) + (الثاني كما هو) × (مشتقة الاول)

مشتقة القسمة

$$\frac{(\text{المقام كما هو}) \times (\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط كما هو}) \times (\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

مشتقة السلسلة

ص ← ع ← س

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

مشتقة الاقتران المركب

$ص = (هـ(س))^{ن}$

$صَ = ن\,(هـ(س))^{ن-1} \times هـَ(س)$

<u>مثال</u> $ص = (س^2 + 1)^5 \Leftarrow صَ = 5\,(س^2+1)^4 \times 2س$

✓ اذا كان ص = جاس ⟸ صَ = جتاس

✓ اذا كان ص = جتاس ⟸ صَ = − جاس

✓ اذا كان ص = ظاس ⟸ صَ = $قا^2$س

النهايات

① $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} (\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٧) = ٤ + ١٠ - ٧ = ٧$

② $\text{نها}_{\text{س}\to ٥} ٩ = ٩$

③ $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$

④ $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٦$

⑤ $\text{نها}_{\text{س}\to ٥} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٥} = \frac{٨}{٠}$ غير موجودة

⑥ $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{(٢\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{(\text{س} + ٢)\cancel{(\text{س} - ٢)}} = \frac{٧}{٤}$

⑦ $\text{نها}_{\text{س}\to -٤} \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{٢\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٦} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to -٤} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س} + ٤)}}{٢\cancel{(\text{س} + ٤)}(\text{س} - ٢)} = \frac{-٤}{٢ \times -٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

⑧ $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س} - ٢)^٢ - ١}{٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٥} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢ - ١)}(\text{س} - ٢ + ١)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}(٣\text{س} + ٥)} = \frac{٢}{١٤} = \frac{١}{٧}$

⑨ $\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - (٣\text{س} + ١)^٢}{٤\text{س}} = \frac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \frac{(\cancel{١} - (\cancel{١} + ٣\text{س}))(١ + ٣\text{س} + ١)}{٤\text{س}} = \frac{-٣ \times ٢}{٤} = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

(١٠) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^٢-٩)^٢}{٢\text{س}+٦} = \underset{}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٣)^٢(\text{س}+٣)^٢}{٢(\text{س}+٣)} = \dfrac{٣٦\times ٠}{٢} = \text{صفر}$

(١١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣-\text{س}^٢-٨\text{س}+١٢}{\text{س}^٢-٥\text{س}+٦} = \dfrac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^٢+\text{س}-٦)}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}-٣)} = \dfrac{٠}{-١} = \text{صفر}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \left(\dfrac{١}{\text{س}-٢} - \dfrac{١٢}{\text{س}^٣-٨}\right) = \dfrac{٠}{٠}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣-٨-١٢\text{س}+٢٤}{(\text{س}^٣-٨)(\text{س}-٢)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣-١٢\text{س}+١٦}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

(٢)

$\text{س}^٣$	$\text{س}^٢$	س	الثابت
١	٠	-١٢	١٦
	٢	٤	-١٦
١	٢	-٨	٠

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^٢+٢\text{س}-٨)\cancel{(\text{س}-٢)}}{(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)(\text{س}-٢)\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+٤)\cancel{(\text{س}-٢)}}{(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$= \dfrac{٦}{١٢} = \dfrac{١}{٢}$

(١٣) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س}^٢-٧٥}{\text{س}-٥} = \dfrac{٠}{٠}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \dfrac{٣\cancel{(\text{س}-٥)}(\text{س}+٥)}{\cancel{\text{س}-٥}} = ٣٠$

(١٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٣}-٢}{\text{س}-١} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢} = \dfrac{١}{٤}$ مرافق تربيعي

(١٥) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣+١}{٤-\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}+١٦}} \times \dfrac{٤+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}+١٦}}{٤+\sqrt{\text{س}^٢+\text{س}+١٦}} = ٢٤$ مرافق تربيعي

(16) $\underset{س \to 0}{نها} \dfrac{3س}{جا 7س} = \dfrac{3}{7}$

(17) $\underset{س \to 0}{نها} \dfrac{ظا 8س}{جا 5س} = \dfrac{8}{5}$

(18) $\underset{س \to 0}{نها} \dfrac{2س + جا 7س}{4س + ظا 5س} = \underset{س \to 0}{نها} \dfrac{\frac{2س}{س} + \frac{جا 7س}{س}}{\frac{4س}{س} + \frac{ظا 5س}{س}} = \dfrac{2+7}{4+5} = \dfrac{9}{9} = 1$

(19) $\underset{س \to 0}{نها} س^2 \, ظتا 7س \, قتا 5س$

$\underset{س \to 0}{نها} \dfrac{س^2}{ظا 7س \times جا 5س} = \dfrac{1}{7 \times 5} = \dfrac{1}{35}$

(20) $\underset{س \to 0}{نها} \dfrac{1 - جتا 2س}{7س^2} \times \dfrac{1 + جتا 2س}{1 + جتا 2س} = \underset{س \to 0}{نها} \dfrac{جا^2 2س}{7س^2} = \dfrac{2 \times 2}{7 \times 2} = \dfrac{4}{7 \times 2}$

$= \dfrac{2}{7}$

(21) $\underset{س \to 0}{نها} س \left(ظتا 5س - قتا 4س \right)$

$\Leftarrow \underset{س \to 0}{نها} س \left(\dfrac{1}{ظا 5س} - \dfrac{1}{جا 4س} \right)$

$\underset{س \to 0}{نها} \left(\dfrac{س}{ظا 5س} - \dfrac{س}{جا 4س} \right)$

$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4 - 5}{20} = \dfrac{-1}{20}$

التكاملات

1. ∫ الثابت لوحده دس = الثابت س + جـ
2. ∫ $س^{ن}$ دس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ
3. ∫ جاس دس = ـ جتاس + جـ
4. ∫ جتاس دس = جاس + جـ
5. ∫ $قا^{2}$س دس = ظاس + جـ
6. ∫ $قتا^{2}$س دس = ـ ظتاس + جـ
7. ∫ قاس ظاس دس = قاس + جـ
8. ∫ قتاس ظتاس دس = ـ قتاس + جـ

طرق التكامل

1. التعويض
2. الأجزاء
3. الكسور الجزئية

في كتاب المرحلة الثانوية
الفرع العلمي
المستوى الرابع