أ. محمود حماد صقر
٠٧٩٥-٨٢٤١٨٦
٠٧٦٨-٨٢٤١٨٦

(١)

١-١ متوسط التغير

تعريف

إذا كانت ص = ق(س) ، وتغيرت س من س١ إلى س٢ ، س٢ ≠ س١

فإن:

* التغير في س هو Δس = س٢ - س١
* التغير في ق(س) هو Δق(س) = ق(س٢) - ق(س١)
* متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) هو $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$$

حيث هـ = Δس ≠ ٠

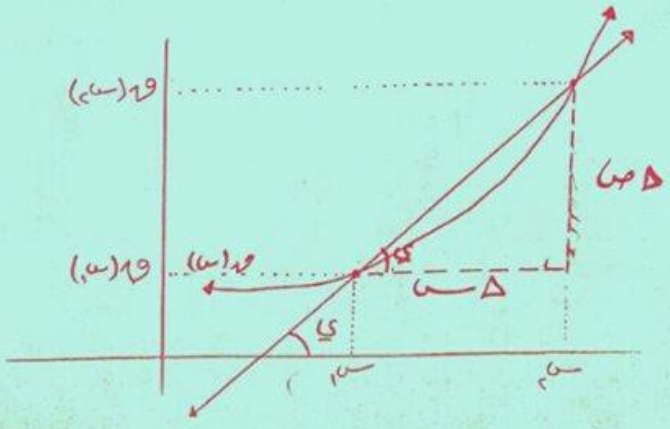
المعنى الهندسي لمتوسط التغير

- متوسط التغير = ميل القاطع = ظا ي

حيث ي زاوية محصورة بين القاطع ومحور السينات الموجب

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير

- السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_2 - ف_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$



(٢)

مثال (١) : إذا كان $ص = و(س) = س^{٣} - ٥س + ٣$ ، جد

① $\Delta س$ عندما تتغير $س$ من -١ إلى ٢

② التغير في $و(س)$ عندما تتغير $س$ من -١ إلى ٢

③ متوسط التغير في $و(س)$ عندما تتغير $س$ من -١ إلى ٢

الحل ١) $\Delta س = س_{٢} - س_{١} = ٢ - (-١) = ٣$

٢) $\Delta و(س) = و(س_{٢}) - و(س_{١})$

$= و(٢) - و(-١)$

$= (٢^{٣} - ٥ \times ٢ + ٣) - ((-١)^{٣} - ٥ \times (-١) + ٣)$

$= ١ - ٧ = -٦$

٣) متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-٦}{٣} = -٢$

مثال (٢) : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران $و(س) = ك + جا ٢س$ في النقطتين $(٠ ، و(٠))$ ، $(\frac{\pi}{٢} ، و(\frac{\pi}{٢}))$

① احسب ميل المستقيم ل

② جد قياس زاوية ميل المستقيم ل

الحل ١) ميل المستقيم $= \frac{و(\frac{\pi}{٢}) - و(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{(\frac{\pi}{٢} + جا(١ \times \frac{\pi}{٢})) - (٠ + جا٠)}{\frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{(\frac{\pi}{٢} + ٠) - (٠ + ٠)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = ١$

٢) ظاي = ميل المستقيم

ظاي $= ١$ ، منها ي $= \frac{\pi}{٤}$

(٣)

مثال (٣) : إذا كان ص = ح(س) = $\sqrt{٢س+١}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ح(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ب يساوي $\frac{١}{٢}$ ، احسب قيمة ب ، ب > ٠ .

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ح(ب) - ح(٠)}{ب - ٠}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٢ب+١} - \sqrt{٢ \times ٠ + ١}}{ب - ٠}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٢ب+١} - ١}{ب}$$ ، بضرب المقص

$$ب = ٢\sqrt{٢ب+١} - ٢$$

$$ب+٢ = ٢\sqrt{٢ب+١}$$ ، بتربيع الطرفين

$$(ب+٢)^٢ = (٢\sqrt{٢ب+١})^٢$$

$$ب^٢ + ٤ب + ٤ = ٤ \times (٢ب+١)$$

$$ب^٢ + ٤ب + ٤ = ٨ب + ٤$$

$$ب^٢ - ٤ب = ٠$$

$$ب(ب-٤) = ٠$$ ، ومنها ب = ٠ "مرفوض"

أو ب = ٤

(٤)

مثال (٤) : يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة (و) بعد مرور ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ٨ن + ٥

① السرعة المتوسطة في الفترة [٠، ٣]

② إذا كانت السرعة المتوسطة في [١، أ] تساوي ١٣ م/ث جد أ .

الحل

١) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(٠)}{٣ - ٠} = \frac{(٣^{٣} + ٨ \times ٣ + ٥) - (٠ + ٠ + ٥)}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$

٢) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(أ) - ف(١)}{أ - ١}$

$$\frac{(أ^{٣} + ٨ \times أ + ٥) - (١ + ٨ + ٥)}{أ - ١} = ١٣$$

$$\frac{أ^{٣} + ٨أ - ٩}{أ - ١} = ١٣$$

$$\frac{(أ + ٩)(أ - ١)}{(أ - ١)} = ١٣ \quad \text{، حيث } أ \neq ١$$

$$أ + ٩ = ١٣ \quad \text{، ومنها } أ = ٤$$

تمارين ١-١

① إذا كان ف(ن) = $\frac{٣}{ن}$ + ن^{٢} ، جد :

أ) التغير في ف(ن) عندما تتغير ن من ٣ إلى ٥

ب) متوسط التغير في الاقتران ف(ن) عندما تتغير ن من ٤ إلى ١

الحل

أ) $\Delta ف(ن) = ف(٥) - ف(٣) = (٥ + \frac{٣}{٥}) - (٩ + \frac{٣}{٣}) = \boxed{\frac{٧٨}{٥}}$

ب) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٦ + \frac{٣}{٤}) - (١ + ٣)}{٣}$

$$= \frac{\frac{٦٧}{٤} - ٤}{٣}$$

$$= \frac{\frac{٥١}{٤}}{٣} = \boxed{\frac{١٧}{٤}}$$

(٥)

② إذا كان $ق(س) = جتا س - ٣جا س$ ، جد متوسط التغير في الاقتران $ق(س)$ في الفترة $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

الحل

$$\frac{ص}{س} = \frac{ق(\pi) - ق(\frac{\pi}{2})}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{(جتا\pi - ٣جا\pi) - (جتا\frac{\pi}{2} - ٣جا\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(-١ - ٣\times٠) - (٠ - ١\times٣)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{(-١) - (-٣)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٢}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٤}{\pi}$$

---

③ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٦ - س & ، س < ٢ \\ س^٢ + أ س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى $أ$ ، $أ > ٢$ يساوي ٩ احسب قيمة $أ$

الحل

$$\frac{ص}{س} = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١} = \frac{(أ^٢ + أ\times أ) - (٦ - ١)}{أ - ١} = \frac{٢أ^٢ - ٥}{أ - ١}$$

$$\frac{٢أ^٢ - ٥}{أ - ١} = ٩ \quad \ldots\ldots (١)$$ ، بالضرب التبادلي

$$٩أ - ٩ = ٢أ^٢ - ٥$$

$$٢أ^٢ - ٩أ + ٤ = صفر$$

$$(٢أ - ١)(أ - ٤) = صفر$$

إما $٢أ - ١ = ٠$ ، ومنه $أ = \frac{١}{٢}$ مرفوض $\frac{١}{٢} < ٢$

أو $أ - ٤ = ٠$ ، $\boxed{أ = ٤}$

④ إذا كان متوسط التغير للاقتران $د(س)$ في الفترة $[1، 3]$ يساوي ٤، وكان $ك(س) = س^2 + 3د(س)$، جد متوسط التغير لـ $ك(س)$ في نفس الفترة

الحل

∵ م.ت $د(س)$ في $[1، 3]$ يساوي ٤

∴ $\frac{د(3) - د(1)}{3 - 1} = 4 \leftarrow د(3) - د(1) = 8$ ـــ *

م.ت $ك(س)$ في $[1، 3]$ يساوي $\frac{ك(3) - ك(1)}{3 - 1}$

$= \frac{(3^2 + 3 \times 3 د(3)) - (1^2 + 3 \times 1 د(1))}{2} = \frac{9 + 3د(3) - 1 - 3د(1)}{2}$

$= \frac{8 + 3(د(3) - د(1))}{2} = \frac{8 + 3 \times 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$ #

---

⑤ إذا قطع المستقيم ل صغرى الاقتران $هـ(س)$ في النقطتين $(1، أ)، (3، ب)$ وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران $هـ(س) = 3د(س) + س^2 - 1$ في الفترة $[1، 3]$

الحل

ميل المستقيم ل $= \tan 135° = -1$

$\frac{ب - أ}{3 - 1} = -1 \leftarrow ب - أ = -2$ ـــ *

م.ت $هـ(س)$ في $[1، 3]$ يساوي $\frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1} = \frac{(3د(3) + 9 - 1) - (3د(1) + 1 - 1)}{2}$

$= \frac{3د(3) + 8 - 3د(1)}{2}$

$= \frac{3(د(3) - د(1)) + 8}{2}$ ، حيث $د(1) = أ$ ، $د(3) = ب$

$= \frac{3(ب - أ) + 8}{2} = \frac{3 \times -2 + 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$

(٧)

(٦) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عند نقطة الانطلاق بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ن³ + ب ن ، وكانت السرعة المتوسطة في [١، ٣] تساوي ٦ م/ث ، فما قيمة الثابت ب ؟؟

الحل

∵ السرعة المتوسطة في [١، ٣] تساوي ٦

∴ $\frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = ٦$

$(٣^٣ + ب \times ٣) - (١^٣ + ب \times ١) = ١٢$

$٩ + ٣ب - ١ - ب = ١٢$

$٢ب + ٨ = ١٢ \longrightarrow ٢ب = ٤ \longrightarrow \boxed{ب = ٢}$

---

(٧) إذا كان ع(س) = أ س² + ب س + جـ ، أثبت أن متوسط التغير للاقتران ع(س) عندما تتغير س من ن إلى ن + ٢ يساوي أ(ن + ١) + ب

الإثبات م.ت = $\frac{ع(ن) - ع(١)}{ن - ١} = \frac{(أ ن^٢ + ب ن + جـ) - (أ + ب + جـ)}{ن - ١}$

$= \frac{أ ن^٢ + ب ن - أ - ب}{ن - ١} = \frac{أ(ن^٢ - ١) + ب(ن - ١)}{ن - ١}$

$= \frac{أ(ن - ١)(ن + ١)}{(ن - ١)} + \frac{ب(ن - ١)}{(ن - ١)} = أ(ن + ١) + ب$ #

---

(٨) إذا كان ع(س) = س + هـ^(س+١) ، جد متوسط التغير في ع(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

الحل م.ت = $\frac{ع(١) - ع(٠)}{١ - ٠} = \frac{(١ + هـ^{١+١}) - (٠ + هـ^{٠+١})}{١}$

$= \frac{١ + هـ^٢ - هـ}{١} = ١ + هـ^٢ - هـ$

(٨)

ب) إذا كان متوسط التغير لـ د(س) = س + لو$_{هـ}$ س^{ن} ، س > ٠

عندما تتغير س من هـ إلى هـ يساوي $\frac{٣-هـ}{١-هـ}$ ، احسب ن ؟؟

الحل

∵ لو$_{هـ}$ س^{ن} = ن لو$_{هـ}$ س

∴ د(س) = س + ن لو$_{هـ}$ س

م.ت لـ د(س) = $\frac{د(هـ)-د(١)}{هـ-١}$ = $\frac{(هـ+ن\,لو_{هـ}هـ)-(١+ن\,لو_{هـ}١)}{هـ-١}$

$\frac{٣-هـ}{١-هـ}$ = $\frac{(هـ+ن\times١)-(١+ن\times٠)}{هـ-١}$

$\frac{٣-هـ}{١-هـ}$ = $\frac{هـ+ن-١}{هـ-١}$ ×(-١)/(-١)

$\frac{٣-هـ}{١-هـ}$ = $\frac{هـ+ن-١}{هـ-١}$

$\frac{هـ-٣}{هـ-١}$ = $\frac{هـ+ن-١}{هـ-١}$

وضح هـ-٣ = هـ+ن-١ ← -٣ = ن-١ ← ن = -٢

تذكر أن

لو$_{هـ}$ هـ = ١

لو$_{هـ}$ ١ = صفر

منتدى معلمي الاردن

* مسائل إثرائية *

(2016) إذا كان $f(x)$ اقترانًا. حيث $f(3)=f(5)+p$ ، وكان متوسط التغير لـ $f(x)$ في الفترة $[3,5]$ يساوي 10، فإن $p=\ldots$ (20 - 5 - 10 - 20)

الحل

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=10 \quad \therefore f(3)=f(5)+p$$

$$f(5)-f(3)=-p$$

$$\frac{-p}{2}=10 \longleftarrow p=-20$$

(2015) إذا كان $f(x)$ اقترانًا، وكان م.ت $f(x)=\sqrt{4x+1}$ في $[0,b]$ يساوي 1 وحدة. جد قيمة b؟ (1، 2، 3، 4)

الحل

$$\text{م.ت}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{\sqrt{4b+1}-\sqrt{4\cdot0+1}}{b}$$

$$1=\frac{\sqrt{4b+1}-1}{b}$$ بالضرب التبادلي

$$b=\sqrt{4b+1}-1$$ بالترتيب

$$\sqrt{4b+1}=b+1$$

$$4b+1=b^2+2b+1$$

$$b^2-2b=0$$

$$b(b-2)=0$$ إما $b=0$ أو $b=2$ مرفوض

(2009) إذا كان المستقيم المماس لمنحنى $f(x)$ في النقطتين $(1,f(1))$، $(2,f(2))$ يصنع زاوية مقدارها 135° مع محور السينات الموجب، احسب م.ت $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ في الفترة $[1,2]$

الحل

ميل المستقيم $=\tan 135$

$$\frac{f(1)-5}{3-1}=-1$$

$$f(1)-5=-2$$

$$f(1)=7$$

$$\text{م.ت } h(x)=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=\frac{\frac{f(2)}{2}-\frac{f(1)}{2}}{2}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{2}=\frac{5\times2-7\times2}{4\times2\times2}=\frac{-4}{16}=\frac{-1}{4}$$

(١٠)

* أسئلة إثرائية موضوعية *

١ إذا علمت أن م.ت ق(س) في [-٤، ١] يساوي ٣ ، وأن ق(١) = ٢
فإن ق(٤) = ... (-١٥ ، -١٢ ، ١٢ ، ١٥)

٢ إذا كان ق(س) عمر بالنقطتين (١، -٢) ، (٩، ٣) وكان م.ت ق(س) في الفترة [١، ٣]
هو ٢ فإن م = ... (١، ٢، ٣، ٤)

٣ إذا كان متوسط التغير لـ ق(س) في الفترة [-٣، ٣] يساوي ٥ ، فإن متوسط التغير
للاقتران هـ(س) = س^٢ ق(س) في الفترة نفسها = ... (١٥، -١٥، ٤٥، -٤٥)

٤ ما متوسط تغير ق(س) = ك/ب + جـ في الفترة [م، ب] ، حيث م، ب، جـ ≠ ٠
(-ك/م ب ، ك/م ب ، ك/م ب + ٢جـ ، -ك/م ب + ٢جـ)

٥ ما متوسط تغير للاقتران ق(س) = [س + ١] [س] في الفترة [-٢، ١/٢] ؟
(١، ٢، -١، -٢)

٦ إذا كان متوسط تغير ق(س) = ٢س^٣ + ٣س في [م، ٢] يساوي ١١ ،
فإن قيمة م = ... (-١، ٢، ٢٢، -٢٢)

٧ إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٥] يساوي ٤ ، فإن متوسط تغير
ق(٢س - ١) في الفترة [١، ٣] يساوي ..... (٤، ٨، ١٦، ٣٢)

٨ (2019) إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (٠، ق(٠)) ، (π، ق(π)) ، فما قياس
زاوية ميل المستقيم ل علماً بأن التغير في الاقتران ق(س) في [٠، π] يساوي -π
(صفر، π/٤ ، π/٢ ، ٣π/٤)

* أسئلة إثرائية متنوعة *

١) ليكن $ق(س) = \begin{cases} [س-١] & ، س \geq ١ \\ |٢س+١| & ، س < ١ \end{cases}$ (الإجابة = $\frac{١٢}{٥}$)

احسب متوسط التغير لـ $ق(س)$ إذا كانت $س_١ = ٠.٥$ ، $س_٢ = ٥$

---

٢) إذا كان متوسط التغير لـ $ق(س)$ على $[١، ٤]$ يساوي ٣ ، وكان $ق(١) + ق(٤) = ٢$ ، فجد متوسط التغير لـ $هـ(س) = ق^٢(س)$ على الفترة $[١، ٤]$ (الإجابة = ٦)

---

٣) إذا كان متوسط التغير لـ $ق(س)$ في $[-١، ٣]$ يساوي ٤ ، وكان متوسط تغير $هـ(س) = ٩ ق(س) + ٣س$ على نفس الفترة = ١١ ، جد ٩ ؟ (٩ = ٢)

---

٤) إذا كان $هـ(س) = ٤ ق(س) - \frac{٩}{١+س}$ ، وكان متوسط التغير $هـ(س)$ في $[٠، ٢]$ يساوي ٨ ، وكان التغير في $ق(س) = ٣$ على نفس الفترة . جد ٩ ؟ (٩ = ٦)

---

٥) إذا كان متوسط التغير لـ $ق(س) = س^٢ + ٣س$ يساوي ١٠ عندما $س_١ = ٩$ ، $\Delta س = ٣$ ، فجد قيمة $س_١$ ؟ ($س_١ = ٢$)

---

٦) إذا كان القاطع المار بالنقطتين $(-٣، ق(-٣))$ ، $(١، ق(١))$ على منحنى $ق(س) = ٩ س^٢ - ١$ يصنع زاوية قياسها $هـ$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $جا هـ = \frac{٤}{\sqrt{١٧}}$ ، فجد قيمة الثابت ٩ ؟ (٩ = -٢)

---

٧) إذا كان متوسط التغير لـ $ق(س)$ في $[٢، ٥]$ يساوي ٦ ، احسب ميل المماس لمنحنى $هـ(س) = س^٢ ق(س) - ٣س$ في $[٢، ٥]$ علماً بأن المماس يمر بالنقطة $(٢، -١٦)$

(١٤٧)

(١٢)

٨ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س < ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد قيمة هـ بالرجبة إن تجعل متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ في الفترة $[٢، ٢+هـ]$ يساوي ١٠ ؟

$(هـ = ٦)$

---

٩ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} & ، ٠ \leq س < ١ \\ ٥ - ٢س & ، ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

وكان متوسط التغير لـ $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من $س_{١}$ إلى $س_{٢}$ يساوي $\frac{٥}{٩}$ ،

فما قيمة $س_{٢}$ ؟

$(س_{٢} = \frac{١٦}{٢٥})$

---

١٠ إذا كان $ك(س) = ق(س) + ٢$ ، وكان متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى $١+هـ$ يساوي $هـ^{٢}+٢هـ$ ، وكانت $ق(١) = ١$

أوجد كلاً من:

أ) متوسط تغير $ك(س)$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى $١+هـ$ $\left(\frac{هـ^{٢}+٢هـ-٢}{١+هـ}\right)$

ب) $ك'(١)$

منتدى معلمي الاردن