بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

مادة إثرائية في الدرس الأول(متوسط التغير)

من الوحدة الأولى

حساب التفاضل

للصف الثاني عشر / الفرع العلمي

إعداد و طباعة

المعلمة : إيمان خالد أبو شرار

٢٠١٨ /٢٠١٩ م

* أولاً : ملخص الدرس :

- **تعريف :**

الاقتران علاقة بين متغيرين س،ص يسمى أحدهما (س) المتغير المستقل ، ويسمى الآخر (ص) المتغير التابع ، بحيث يتعين لكل قيمة من قيم التغير س قيمة واحدة فقط للمتغير ص .

- **تعريف :**

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً ، وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ ، $س_1 \neq س_2$ ، فإن :

- **مقدار التغير في س يساوي :**

$س_2 - س_1$ ، ونرمز له بالرمز Δس ، ويقرأ دلتا س .

- **مقدار التغير في ص يساوي :**

$ص_2 - ص_1$ ، ونرمز له بالرمز Δص ، ويقرأ دلتا ص .

- **متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) بالنسبة لـ س يساوي :**

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$$ ، حيث $هـ = \Delta س \neq 0$.

ملاحظات :

١) $\Delta س \neq 0 \leftarrow س_2 \neq س_1$

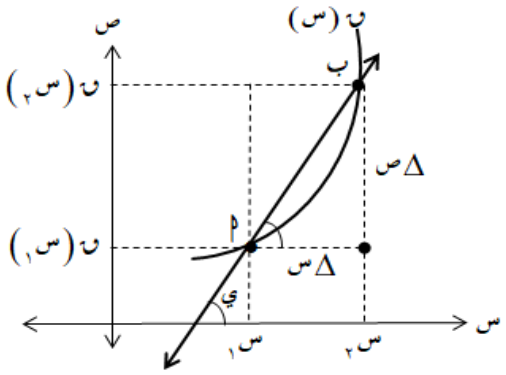
$\leftarrow س_2 > س_1$ أو $س_2 < س_1$

٢) $\Delta س = س_2 - س_1 \leftarrow س_2 = س_1 + \Delta س$

٣) $\Delta ص = ص_2 - ص_1 \leftarrow ص_2 = ص_1 + \Delta ص$

٤) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ قد يكون سالباً أو موجباً أو صفراً .

المعنى الهندسي لمتوسط التغير



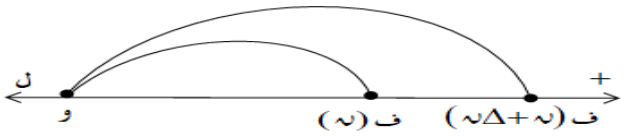
- الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق (س) ٠
- المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب يسمى قاطعاً للمنحنى ٠
- ميل المستقيم القاطع أ ب $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$
- تسمى الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم القاطع ، ويكون (ظاي = ميل القاطع)

∴ المعنى الهندسي لمتوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ للاقتران ق (س) هو : ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران في النقطتين : $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ ٠

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير

لتكن و نقطة ثابتة على الخط المستقيم ل المبين في الشكل المجاور ٠

- إذا تحرك جسم على هذا الخط المستقيم بحيث كانت ف تمثل إزاحة الجسم عن النقطة و عند الزمن ن ، فإن :



السرعة المتوسطة لهذا الجسم في الفترة الزمنية $[ن ، ن+\Delta ن]$ هي :

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن + \Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$$

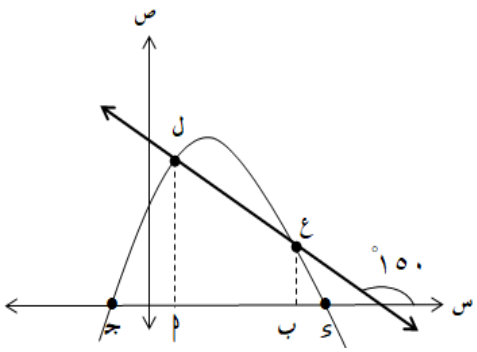
ملاحظة :

سنتعرف لاحقاً أن التسارع المتوسط للجسم في الفترة الزمنية $[ن ، ن+\Delta ن]$ هو $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

** ثانياً : أسئلة إثرائية

المرجع	السؤال	الإجابة النهائية
سلسلة الامتياز	١) إذا كان ق(س) $= \left\|س^{٢} - ٩\right\| + \left[\frac{س}{٢} + ١\right]$ ، فأوجد متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لـ س عندما تتغير س من $س_{١} = ٢$ إلى $س_{٢} = ٥$	٤
كتاب الفاتن	٢) إذا كان تحرك جسم في المستوى البياني من النقطة أ(س ، ٣) إلى النقطة ب(٦ ، ص) بحيث $\Delta س = ٢$ ، $\Delta ص = ٥$ فجد (س ، ص)	(٤ ، ٨)
المتميز	٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) $= س^{٢} - ٢$ يساوي ٤ عندما $س = س_{١}$ ، $\Delta س = ١$ ، جد قيمة $س_{١}$	$١\frac{١}{٢}$
الكتاب المدرسي المنهاج القديم	٤) ليكن ق(س) $= \begin{cases} ٣س + ٤ & ، \quad س \geq ٢ \\ س^{٢} + ٣س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$ أ) أوجد متوسط تغير ق(س) في الحالات التالية : ١. عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ ٢. عندما تتغير س من ٢ إلى -١ ٣. عندما تتغير س من ٢ إلى $٢ + هـ$ ب) استخدم القاعدة التي توصلت إليها في قسم (٣) للتأكد من صحة جوابك في القسمين ١ ، ٢	فرع أ) ١) ١٠ ٢) ٣ ٣) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \begin{cases} ٣ & ، هـ < ٠ \\ ٧ + هـ & ، هـ > ٠ \end{cases}$
كتاب الفاتن	٥) إذا كان ق(س) $= س^{٢} + ٧$ ، وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + ٣$ يساوي ١٢ فجد قيمة $س_{١}$	$\frac{٩}{٢}$
سنة ٢٠١٤	٦) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة $[-٢ ، ٢]$ يساوي ٥ ، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) $= ٣ق(س) - ٢س$ على نفس الفترة	١٣

الأردن	٧) إذا كان متوسط التغيرفي الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ ، وكان $\left(\sqrt[٣]{\text{ق}(٣)}\right)^{٢} + \sqrt[٣]{\text{ق}(٣)} \times \sqrt[٣]{\text{ق}(١)} + \left(\sqrt[٣]{\text{ق}(١)}\right)^{٢} = ١٠$ فجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) $= \sqrt[٣]{\text{ق}(س)}$ على نفس الفترة ٠	$\frac{٢}{٥}$
سنة ٢٠١٥	٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٢] يساوي ٤ ، و متوسط تغير ق(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي ٨ ، فما متوسط تغير ق(س) في الفترة [١، ٥]	٧
كتاب الفاتن	٩) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي (-٦) وكان ق(٢) + ق(٥) = ٤ ، فجد متوسط التغير في الاقتران ل(س) = ٧س + ق^{٢}(س) في الفترة [٢، ٥]	-١٧
كتاب الأول	١٠) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي ٦ ،جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = س^{٢}ق(س) $-$ ٢س في الفترة [٢، ٥] علماً بأن هـ(س) يمر بالنقطة $(٢ ، -١٦)$	١٢٧
كتاب الفاتن	١١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س في الفترة [ب ، ٣ب] يساوي ١١ ، فما قيمة ب ؟	١
سنة ٢٠٠٩	١٢) إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \sqrt[٣]{٤س + ١}$ في الفترة [٠ ، ب] يساوي ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٢
كتاب الرائد	١٣) إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \sqrt{س^{٢} - ٩} & ، \quad ب \geq س \geq ٤ \\ ١١ - ٢س & ، \quad ٤ > س \geq ٦ \end{cases}$ أ وجد قيمة ب التي تجعل $\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{-١}{٣}$ ، وذلك عندما تتغير س من ب إلى ٦ ، ب ≤ ٣	٣

الأردن المنهاج الجديد	١٤) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + س)$^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى س$_{٢}$ يساوي $\left(\frac{-١}{٣}\right)$ ، فجد قيمة س$_{٢}$ حيث س$_{٢}$ > ٠	٢
كتاب الأول	١٥) إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [−١، ٢] يساوي ٤ ، فجد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [−٣، ٣] حيث ق(٢س + ١) = ٣هـ(س^{٢} − ٢) + ٥س − ١	$\frac{-٧}{٢}$
الكتاب المدرسي المنهاج القديم	١٦) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س) جد متوسط التغير في ق(س) : أ) بين س = أ ، س = ب ب) بين س = جـ ، س = ء  	أ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ب) صفر
كتاب الفاتن	١٧) أوجد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١، ق(١)) ، (٣، ق(٣)) حيث ق(س) = س^{٣} + ٤ س	١٧
كتاب الفاتن	١٨) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١)) ، (٥، ق(٥)) يصنع زاوية مقدارها (١٢٠°) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٥	$-\sqrt{٣}$
سنة ٢٠٠٩	١٩) إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١، ق(١)) ، (٣، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب ، احسب متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{٢}{ق(س)}$ في الفترة [١، ٣]	$\frac{٢}{٣٥}$
سنة ٢٠٠٨	٢٠) إذا كان ق(س) = س + [س] ، فإن قيمة متوسط التغير في الفترة $\left[١، ١\frac{١}{٢}\right]$ تساوي: أ) ٢ ب) ٣ ج) −١ د) ٤	٣

سنة ٢٠١١	٢١) إذا علمت ان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [−٤، ١] يساوي (٣) ، وأن ق(١) = ٢ ، فإن ق(−٤) = أ) −١٥ ب) −١٣ ج) ١٣ د) ١٥	−١٣
الأردن صيفية ٢٠١١	٢٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٣، ٧] يساوي (٨) فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ١ + $\frac{١}{٢}$ ق(س) في الفترة نفسها يساوي : أ) ٥ ب) ٣,٥ ج) ٨ د) ٤	٤
الأردن شتوية ٢٠١١	٢٣) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٤] يساوي (٣) وكان ق(١) + ق(٤) = ٢ ، فإن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ق^{٢}(س) في الفترة [١، ٤] يساوي : أ) ٦ ب) ٩ ج) ٢ د) ٣	٦
صيفية ٢٠١٢	٢٤) إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣] يساوي (٥)، وكان هـ(س) = ٢س + ق(س) + ١ فإن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في الفترة [١، ٣] يساوي : أ) ٤,٥ ب) ٥ ج) ٧ د) ٩	٧
صيفية ٢٠١٠	٢٥) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة ن ، وكان متوسط تغير ق(س) دائماً = ٣ ، فإن قيمة ن تساوي : أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣	١
سنة ٢٠١٦	٢٦) إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث ق(٣) = ق(٥) + أ ، وكان متوسط تغير ق(س) في الفترة [٣، ٥] يساوي (١٠) ، فما قيمة الثابت أ ؟ أ) ٢٠ ب) −٥ ج) −١٠ د) −٢٠	−٢٠
المرشد الأمين	٢٧) ق(س) = س^{٢} ، فإذا تغيرت س بمقدار هـ ، فإن متوسط التغير للاقتران ق(س) يساوي: أ) س$^{٢}_{١}$ + هـ ب) ٢س$_{١}$ + هـ ج) ٢س$_{١}$هـ + هـ^{٢} د) هـ^{٢}	٢س$_{١}$ + هـ

شتوية ٢٠٠٤	٢٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٤س^{٢} − أ في الفترة [ب ، ٢] يساوي (− ٤) فما قيمة الثابت **ب** ؟ أ) − ٢ ب) − ٣ ج) − ٤ د) ٢	− ٣
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٢٩) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ٦] يساوي (٤)، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = أ ق(س) − س^{٢} ، س ∈ [٢، ٦] يساوي (١٢) ، فما قيمة الثابت أ ؟ أ) ٤٨ ب) ١٦ ج) ٥ د) ٢٠	٥
شتوية ٢٠٠٥	٣٠) إذا كان ل(س) = س ق(س) ، وكان متوسط تغير ل(س) في الفترة [− ٢، ٤] يساوي (١٢) ، ل(٤) = ٦، فإن ق(− ٢) = أ) ٣٩ ب) − ٩ ج) ٣٣ د) − ٦٦	٣٣
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٣١) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س^{٢} + س ، س ∈ [٢، ب] يساوي (٨) ، فما قيمة **ب** ؟ أ) ٤ ب) ٢ ، ٥ ج) − ٥ د) ٥	٥
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٣٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + س + ١ في الفترة [ب، ٢ب] يساوي (١٣) ، فما قيمة **ب** ؟ أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) − ٢	٢
الأردن	٣٣) تتمدد صفيحة دائرية الشكل بحيث تبقى محتفظة بشكلها ، فإذا تغير طول نصف قطرها من ٤ سم إلى ٦ سم ، فإن متوسط التغير في مساحتها بالنسبة لنصف قطرها يساوي : أ) ١٦ π ب) ٢٠ π ج) ١٠ π د) ٤ π	١٠ π
الأردن	٣٤) إذا كان ق(س) = س^{٢} + هـ(س) حيث هـ(س) = { س^{٣} + ١ ، ١ ≤ س < ٥ ؛ ١٠ ، ٥ ≤ س ≤ ٧ } فإن مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٥] يساوي : أ) ٢٨ ب) ٣٢ ج) ٨ د) ٢	٣٢

نهاية الفصل شمال غزة ٢٠١٧	٣٥) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣] يساوي (٥)، وكان ق(١) × ق(٣) = ١٢ ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{١}{ق(س)}$ في نفس الفترة يساوي : أ) $\frac{٥}{١٢}$ ب) $\frac{-٥}{١٢}$ ج) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{-١}{٥}$	$\frac{-٥}{١٢}$
شتوية ٢٠٠٦	٣٦) إذا كان ق(س) = أ $س^{٢}$ ، أ ≠ ٠ ، وكان مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [-٢، ٤] يساوي (٢٤) ، فما قيمة الثابت أ ؟ أ) ١,٢ ب) ١٢ ج) ٢ د) ٧,٢	٢
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٣٧) إذا علمت أن مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [-١، ٢] يساوي (٣) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٢ق(س) + $س^{٢}$ في الفترة [-١، ٢] يساوي : أ) ٧ ب) ٣ ج) ٦ د) $\frac{٤}{٣}$	٣
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٣٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [-١، ١] يساوي (٥) ، وكان ق(١) × ق(-١) = -١٢ ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{س^{٢}}{ق(س)}$ في الفترة [-١، ١] يساوي : أ) $\frac{-٥}{١٢}$ ب) $\frac{٥}{١٢}$ ج) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{-١}{٥}$	$\frac{٥}{١٢}$
**	٣٩) إذا علمت أن متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ١٧] يساوي (٩) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ق$(س^{٢} + ١)$ في الفترة [١، ٤] يساوي : أ) ٣ ب) ٤٩ ج) ١٥ د) ٤٥	٤٥
الانجاز الدورة الثانية ٢٠١٧	٤٠) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_{١}$ = ١ إلى $س_{٢}$ = ٩ يساوي (٥) ، فإن متوسط تغير الاقتران ل(س) = $س^{٢}$ ق(٢س + ٥) بين $س_{١}$ = -٢ ، $س_{٢}$ = ٢ يساوي : أ) ١٠ ب) ٤٠ ج) ٢٠ د) -٤٠	٤٠

ملزمة مديرية الوسطى	٤١) إذا كان ق(س) $= \frac{هـ(س)}{س}$ ، وكان متوسط التغير لكل من ق(س) ، هـ(س) في الفترة $[١ ، ٢]$ على الترتيب $-٢ ، ٥$ فإن هـ(١) $=$ أ) ٩ ب) ١٤ ج) ٥ د) ٧	٩
صيقية ٢٠٠٤	٤٢) إذا كان ق(س) $= س^{٢} + هـ(س)$ حيث $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، ١ \leq س < ٥ \\ ١٠ & ، ٥ \leq س \leq ٧ \end{cases}$ فإن مقدار متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة $[١ ، ٥]$ يساوي : أ) ٣٧ ب) ٢٨ ج) ٨ د) ٢	٨
مادة إثرائية للأستاذ عوض واوي	٤٣) إذا كانت ص $= (٤ - ٦أ)س + ٥$ ، $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = أ٢$ ، س $\in [-١ ، ٣]$ فإن قيمة أ $=$ أ) ٢ ب) -٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٢}$
تجريبي طولكرم ٢٠١٧	٤٤) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_{١} = ٢$ إلى $س_{٢} = -٢$ يساوي (٨) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) $= (س^{٢} + ١)$ ق(س) في الفترة $[-٢ ، ٢]$ يساوي : أ) ١٠ ب) -٤٠ ج) ٤٠ د) -١٠	-١٠
المنهاج القديم فرع العلوم الإنسانية	٤٥) يسير جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف $= ن^{٢} + ٥ن$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . السرعة المتوسطة للجسم في أول ٤ ثوانٍ من بدء الحركة تساوي : أ) ٣٦ م / ث ب) ٨ م / ث ج) ٩ م / ث د) ١٣ م / ث	٩ م / ث

*** ثالثاً: الإجابة النموذجية للأسئلة الإثرائية

١) إذا كان $ق(س) = |س^{٢} - ٩| + \left[\frac{س}{٢} + ١\right]$ ، فأوجد متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لـ س عندما تتغير س من $س_{١} = ٢$ إلى $س_{٢} = ٥$

الحل :

$$\text{متوسط التغير} = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{\left(|٩ - ٢٥| + \left[١ + \frac{٥}{٢}\right]\right) - \left(|٩ - ٤| + \left[١ + \frac{٢}{٢}\right]\right)}{٣}$$

$$= \frac{\left(|١٦| + \left[٣\frac{١}{٢}\right]\right) - (|٥ - |] + [٢])}{٣} = \frac{(٢ + ٥) - (٣ + ١٦)}{٣} = ٤$$

٢) إذا كان تحرك جسم في المستوى البياني من النقطة أ$(س ، ٣)$ إلى النقطة ب$(٦ ، ص)$ بحيث

$\Delta س = ٢$ ، $\Delta ص = ٥$ ، فجد $(س ، ص)$

الحل :

$\Delta س = س_{٢} - س_{١}$	$\Delta ص = ص_{٢} - ص_{١}$
$٢ = ٦ - س$	$٥ = ص - ٣$
$س = ٤$	$ص = ٨$

$\therefore (س ، ص) = (٤ ، ٨)$

٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٢$ يساوي ٤ عندما $س = س_{١}$ ، $\Delta س = ١$ ،جد قيمة $س_{١}$

الحل :

$$\text{متوسط التغير} = \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$

$$٤ = \frac{ق(س_{١} + ١) - ق(س_{١})}{١}$$

$$٤ = \left((س_{١} + ١)^{٢} - ٢\right) - (س_{١}^{٢} - ٢)$$

$$٤ = \cancel{س_{١}^{٢}} + ٢ س_{١} + ١ \cancel{- ٢} - \cancel{س_{١}^{٢}} \cancel{+ ٢} \leftarrow ٢ س_{١} = ٣ \leftarrow س_{١} = ١\frac{١}{٢}$$

٤) ليكن $ن(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & ، \quad س \geq ٢ \\ س^{٢} + ٣س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

أ) أوجد متوسط تغير $ن(س)$ في الحالات التالية :

١. عندما تتغير س من ٢ إلى ٥

٢. عندما تتغير س من ٢ إلى -١

٣. عندما تتغير س من ٢ إلى $٢ + هـ$

ب) استخدم القاعدة التي توصلت إليها في قسم (٣) للتأكد من صحة جوابك في القسمين ١ ، ٢

الحل :

أ)

١. متوسط التغير $= \frac{ن(٥) - ن(٢)}{٥ - ٢} = \frac{(١٥ + ٢٥) - (٤ + ٦)}{٣} = ١٠$

٢. متوسط التغير $= \frac{ن(-١) - ن(٢)}{-١ - ٢} = \frac{(-٣ + ٤) - (٤ + ٦)}{-٣} = ٣$

٣. متوسط التغير $= \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{٢ + هـ - ٢} = \frac{ن(٢ + هـ) - ١٠}{هـ}$

نعتبر حالتين :

❖ الأولى :عندما $هـ > ٠$ ، فإن $٢ + هـ > ٢$

$\leftarrow$ متوسط التغير $= \frac{٣(٢ + هـ) + ٤ - ١٠}{هـ} = \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$ ، $هـ \neq ٠$

❖ الثانية :عندما $هـ < ٠$ ، فإن $٢ + هـ < ٢$

$\leftarrow$ متوسط التغير $= \frac{(٢ + هـ)^{٢} + ٣(٢ + هـ) - ١٠}{هـ} = \frac{٤ + ٤هـ + هـ^{٢} + ٦ + ٣هـ - ١٠}{هـ}$

$= \frac{٧هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \frac{هـ(٧ + هـ)}{هـ} = ٧ + هـ$ ، $هـ \neq ٠$

$\therefore$ متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \begin{cases} ٣ & ، \quad هـ > ٠ \\ ٧ + هـ & ، \quad هـ < ٠ \end{cases}$

ب) عندما تتغير من ٢ إلى ٥ تكون $هـ = ٣ > ٠$ ،ولذلك يكون متوسط التغير $= ٧ + ٣ = ١٠$

وعندما تتغير س من ٢ إلى -١ تكون $هـ = -٣ < ٠$ ،لذلك يكون متوسط التغير $= ٣$

$\therefore$ تتطابق النتيجتان مع الإجابتين في القسمين ١ ، ٢

٥) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٧ ،وكان متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ٣ يساوي ١٢ فجد قيمة س$_{١}$

الحل :

$$\text{متوسط التغير} = \frac{ق(س_{١}+٣)-ق(س_{١})}{٣}$$

$$= ١٢ \quad \frac{\left((س_{١}+٣)^{٢}+٧\right)-\left(س_{١}^{٢}+٧\right)}{٣}$$

$$٣٦ = \cancel{س_{١}^{٢}} + ٦س_{١} + ٩ + \cancel{٧} - \cancel{س_{١}^{٢}} - \cancel{٧}$$

$$٢٧ = ٦س_{١} \leftarrow س_{١} = \frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٢}$$

---

٦) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة $[-٢، ٢]$ يساوي ٥ ،جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) − ٢س على نفس الفترة .

الحل :

الاقتران ق(س) :

$$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = ٥ \quad ، \quad س_{١} = -٢ \quad ، \quad س_{٢} = ٢$$

$$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢})-ق(س_{١})}{س_{٢}-س_{١}}$$

$$٥ = \frac{ق(٢)-ق(-٢)}{٢-(-٢)} \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$\boxed{ق(٢)-ق(-٢) = ٢٠}$$

الاقتران هـ(س) :

$$هـ(س) = ٣ق(س) - ٢س \quad ، \quad س_{١} = -٢ \quad ، \quad س_{٢} = ٢ \quad ، \quad \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = ؟$$

$$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢})-هـ(س_{١})}{س_{٢}-س_{١}} = \frac{هـ(٢)-هـ(-٢)}{٢-(-٢)}$$

$$= \frac{(٣ق(٢)-٢\times٢)-(٣ق(-٢)-٢\times-٢)}{٤}$$

$$= \frac{٣(ق(٢)-ق(-٢))-٨}{٤} = \frac{٣\times٢٠-٨}{٤} = ١٣$$

٧) إذا كان متوسط التغيرفي الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ ، وكان

$$\left(\overline{ق'(٣)} \right)^{٢} + \overline{ق'(٣)} \times \overline{ق'(١)} + \left(\overline{ق'(١)} \right)^{٢} = ١٠$$

فجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\overline{ق'(س)}$ على نفس الفترة .

الحل :

الاقتران ق(س) :

$$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = ٤ \quad ، \quad س_{١} = ١ \quad ، \quad س_{٢} = ٣$$

$$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$٤ = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$$

$$\leftarrow \quad ٤ = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٢} \quad .....(١)$$

الاقتران هـ(س) :

$$هـ(س) = \overline{ق'(س)} \quad ، \quad س_{١} = ١ \quad ، \quad س_{٢} = ٣ \quad ، \quad \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = ؟$$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{\overline{ق'(٣)} - \overline{ق'(١)}}{٢}$$

$$= \frac{\overline{ق'(٣)} - \overline{ق'(١)}}{٢} \times \frac{\left(\overline{ق'(٣)} \right)^{٢} + \overline{ق'(٣)} \times \overline{ق'(١)} + \left(\overline{ق'(١)} \right)^{٢}}{\left(\overline{ق'(٣)} \right)^{٢} + \overline{ق'(٣)} \times \overline{ق'(١)} + \left(\overline{ق'(١)} \right)^{٢}}$$

$$= \frac{ق(٣) - ق(١)}{٢} \times \frac{١}{١٠} \quad .....(٢)$$

من المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = ٤ \times \frac{١}{١٠} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

تذكر أن :

$$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$$

٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(س) في الفترة [١، ٢] يساوي ٤ ،و متوسط تغير ن(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي ٨ ، فما متوسط تغير ن(س) في الفترة [١، ٥] ؟

الحل :

متوسط تغير الاقتران ن(س) في الفترة [١، ٢] يساوي ٤

$$\leftarrow \frac{\text{ن}(٢)-\text{ن}(١)}{٢-١} = ٤ \leftarrow \text{ن}(٢)-\text{ن}(١) = ٤ \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

متوسط تغير ن(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي ٨

$$\leftarrow \frac{\text{ن}(٥)-\text{ن}(٢)}{٥-٢} = ٨ \leftarrow \text{ن}(٥)-\text{ن}(٢) = ٢٤ \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\text{ن}(٥)-\text{ن}(١) = ٢٨$$

متوسط تغير ن(س) في الفترة $[١، ٥] = \frac{\text{ن}(٥)-\text{ن}(١)}{٥-١} = \frac{٢٨}{٤} = ٧$

٩) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ن(س) في الفترة [٢،٥] يساوي (−٦) وكان ن(٢) + ن(٥) = ٤ ، فجد متوسط التغير في الاقتران ل(س) = ٧س + ن^{٢} (س) في الفترة [٢،٥]

الحل :

متوسط التغير في ن(س) $= \frac{\text{ن}(٥)-\text{ن}(٢)}{٥-٢} = \boxed{\frac{\text{ن}(٥)-\text{ن}(٢)}{٣} = -٦}$

متوسط التغير في ل(س) $= \frac{\text{ل}(٥)-\text{ل}(٢)}{٥-٢} = \frac{\left(\text{ن}(٥)^{٢}+٣٥\right)-\left(\text{ن}(٢)^{٢}+١٤\right)}{٣}$

$$= \frac{\text{ن}(٥)^{٢}-\text{ن}(٢)^{٢}}{٣} + \frac{٣٥-١٤}{٣}$$

$$= ٧ + \left(\frac{\text{ن}(٥)-\text{ن}(٢)}{٣}\right) \times (\text{ن}(٥)+\text{ن}(٢)) = ٧ + (-٦) \times ٤ = -١٧$$

١٠) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢، ٥] يساوي ٦ ، جد متوسط تغير الاقتران

هـ(س) = س^{٢} ق(س) − ٢س في الفترة [٢، ٥] علماً بأن هـ(س) يمر بالنقطة (٢ ، − ١٦)

الحل :

الاقتران ق(س) :

$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = ٦$ ، $س_{١} = ٢$ ، $س_{٢} = ٥$

$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$٦ = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$ بالضرب التبادلي

ق(٥) − ق(٢) = ١٨ .....(١)

الاقتران هـ(س) :

هـ(س) = س^{٢} ق(س) − ٢س ، $س_{١} = ٢$ ، $س_{٢} = ٥$ ، $\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = ؟$

هـ(س) يمر بالنقطة (٢ ، − ١٦) ← هـ(٢) = − ١٦

هـ(س) = س^{٢} ق(س) − ٢س

هـ(٢) = ٤ ق(٢) − ٤

− ١٦ = ٤ ق(٢) − ٤ ← ق(٢) = − ٣ .....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(٥) = ١٥

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٢٥ ق(٥) - ١٠) - (- ١٦)}{٣} = \frac{٢٥ \times ١٥ - ١٠ + ١٦}{٣} = ١٢٧$

١١) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س$ في الفترة $[ب ، ٣ب]$ يساوي ١١ ، فما قيمة ب ؟

الحل :

$$\text{متوسط تغير } ق(س) = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٣ب) - ق(ب)}{٣ب - ب}$$

$$\frac{(١٨ب^{٢} + ٩ب) - (٢ب^{٢} + ٣ب)}{٢ب} = ١١$$

$$\frac{١٦ب^{٢} + ٦ب}{٢ب} = ١١ \leftarrow ١٦ب^{٢} + ٦ب = ٢٢ب$$

$$١٦ب^{٢} - ١٦ب = ٠ \leftarrow ١٦ب(ب - ١) = ٠ \leftarrow ب = ٠ \text{ أو } ب = ١$$

نأخذ ب = ١ ، أما ب = ٠ تهمل (لأن $\Delta س \neq ٠ \leftarrow س_{٢} \neq س_{١}$)

١٢) إذا كان متوسط التغير للاقتران $ق(س) = \sqrt{٤س + ١}$ في الفترة $[٠ ، ب]$ يساوي ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟

الحل :

$$\text{متوسط تغير } ق(س) = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(ب) - ق(٠)}{ب - ٠}$$

$$\frac{\sqrt{٤ب + ١} - ١}{ب} = ١ \leftarrow \sqrt{٤ب + ١} - ١ = ب$$

$(ب + ١) = \sqrt{٤ب + ١}$ بتربيع الطرفين

$$(ب + ١)^{٢} = \left(\sqrt{٤ب + ١}\right)^{٢}$$

$$ب^{٢} + ٢ب + ١ = ٤ب + ١$$

$$\leftarrow ب^{٢} - ٢ب = ٠ \leftarrow ب(ب - ٢) = ٠ \leftarrow ب = ٠ \text{ أو } ب = ٢$$

نأخذ ب = ٢ ، أما ب = ٠ تهمل (لأن $\Delta س \neq ٠ \leftarrow س_{٢} \neq س_{١}$)

١٣) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س^{٢} - ٩} & ، \quad ب \geq س \geq ٤ \\ ١١ - ٢س & ، \quad ٤ > س \geq ٦ \end{cases}$

أوجد قيمة ب التي تجعل $\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{-١}{٣}$ ، وذلك عندما تتغير س من ب إلى ٦ ، ب ≤ ٣

الحل :

$$\frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{ق(٦) - ق(ب)}{٦ - ب}$$

$$\frac{-١}{٣} = \frac{-١ - \sqrt{ب^{٢} - ٩}}{٦ - ب}$$ بالضرب التبادلي

$$-٦ + ب = -٣ - ٣\sqrt{ب^{٢} - ٩}$$

$$ب - ٣ = -٣\sqrt{ب^{٢} - ٩}$$ بتربيع الطرفين

$$ب^{٢} - ٦ب + ٩ = ٩(ب^{٢} - ٩) \leftarrow ب^{٢} - ٦ب + ٩ = ٩ب^{٢} - ٨١$$

$$\leftarrow ٨ب^{٢} + ٦ب - ٩٠ = ٠ \leftarrow ٤ب^{٢} + ٣ب - ٤٥ = ٠$$

$$(ب - ٣)(٤ب + ١٥) = ٠ \leftarrow ب = ٣ \quad \text{أو} \quad ب = \frac{-١٥}{٤}$$

نأخذ ب $= ٣$ أما $ب = \frac{-١٥}{٤}$ تهمل ، لأن ب ≤ ٣

---

١٤) إذا كان $ق(س) = (س^{٢} + س)^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $س_{٢}$ يساوي $\left(\frac{-١}{٣}\right)$ ، فجد قيمة $س_{٢}$ حيث $س_{٢} > ٠$

الحل :

$$ق(س) = (س^{٢} + س)^{-١} \leftarrow ق(س) = \frac{١}{س^{٢} + س}$$

مقدار التغير في $ق(س) = \frac{-١}{٣} \leftarrow ق(س_{٢}) - ق(١) = \frac{-١}{٣}$

$$\frac{١}{س_{٢}^{٢} + س_{٢}} - \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٣} \leftarrow \frac{١}{س_{٢}^{٢} + س_{٢}} = \frac{١}{٦} \leftarrow س_{٢}^{٢} + س_{٢} = ٦$$

$$\leftarrow س_{٢}^{٢} + س_{٢} - ٦ = ٠ \leftarrow (س_{٢} + ٣)(س_{٢} - ٢) = ٠$$

إما $(س_{٢} + ٣) = ٠ \leftarrow س_{٢} = -٣$ تهمل لأن $س_{٢} > ٠$

أو $(س_{٢} - ٢) = ٠ \leftarrow س_{٢} = ٢$

١٥) إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [−١، ٢] يساوي ٤ ، فجد متوسط التغير للاقتران ن(س)

في الفترة [−٣، ٣] حيث $ن(٢س+١) = ٣هـ(س^{٢} - ٢) + ٥س - ١$

الحل :

الاقتران هـ(س) :

$$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = ٤ \quad ، \quad س_{١} = -١ \quad ، \quad س_{٢} = ٢$$

$$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$٤ = \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{(-١) - ٢}$$ بالضرب التبادلي

$$\boxed{هـ(٢) - هـ(-١) = ١٢}$$

الاقتران ن(س) :

$$س_{١} = -٣ \quad ، \quad س_{٢} = ٣ \quad ، \quad \frac{\Delta ن}{\Delta س} = ؟$$

$$\frac{\Delta ن}{\Delta س} = \frac{ن(س_{٢}) - ن(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ن(٣) - ن(-٣)}{٣ - (-٣)}$$

حيث $ن(٢س+١) = ٣هـ(س^{٢} - ٢) + ٥س - ١$

لإيجاد ن(٣): نضع ٢س + ١ = ٣ ← س = ١

$$\therefore ن(٢\times١+١) = ٣هـ(١-٢)+٥-١ \leftarrow \boxed{ن(٣) = ٣هـ(-١)+٤}$$

لإيجاد ن(−٣): نضع ٢س + ١ = −٣ ← س = −٢

$$\therefore ن(٢\times-٢+١) = ٣هـ(٤-٢)+٥\times-٢-١ \leftarrow \boxed{ن(-٣) = ٣هـ(٢)-١١}$$

$$\frac{\Delta ن}{\Delta س} = \frac{(٣هـ(-١)+٤)-(٣هـ(٢)-١١)}{٦} = \frac{٣هـ(-١)-٣هـ(٢)+١٥}{٦}$$

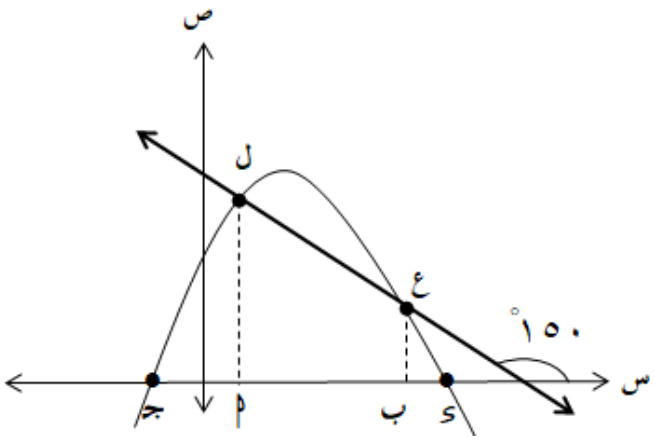
$$= \frac{٣(هـ(-١)-هـ(٢))+١٥}{٦} = \frac{٣\times(-١٢)+١٥}{٦} = \frac{-٢١}{٦} = \frac{-٧}{٢}$$

١٦) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س)

جد متوسط التغير في ق(س) :

أ) بين س = أ ، س = ب

ب) بين س = جـ ، س = ء



الحل :

أ) متوسط التغير بين س = أ ، س = ب

= ميل القاطع ل ع = ظا ١٥٠° = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

ب) متوسط التغير بين س = جـ ، س = ء

= ميل القاطع جـ ء = ميل محور السينات = صفر

---

١٧) أوجد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) حيث ق(س) = س ^{٣} + ٤ س

الحل :

ميل القاطع = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{(٢٧ + ١٢) - (١ + ٤)}{٢} = ١٧$

---

١٨) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٥ ، ق(٥)) يصنع زاوية مقدارها (١٢٠°) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٥

الحل :

متوسط التغير = ميل القاطع = ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$

١٩) إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين $(١، ق(١))$ ، $(٣، ٥)$ يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب ، احسب متوسط التغير للاقتران هـ$(س) = \frac{٢}{ق(س)}$ في الفترة $[١، ٣]$

الحل :

ميل القاطع $= ظا\ ١٣٥^\circ = -١$

متوسط التغير في الاقتران ق = ميل القاطع

$$\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = -١$$

$$\frac{ق(١) - ٥}{٢} = -١ \leftarrow ق(١) - ٥ = -٢ \leftarrow ق(١) = ٧$$

متوسط التغير في الاقتران هـ $= \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$$= \frac{\frac{٢}{ق(٣)} - \frac{٢}{ق(١)}}{٢} = \frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٧}}{٢} = \frac{٢}{٣٥}$$

---

٢٠) إذا كان ق$(س) = س + [س]$ ، فإن قيمة متوسط التغير في الفترة $\left[١، \frac{١}{٢}\right]$ تساوي:

أ) ٢ ب) ٣ ج) -١ د) ٤

الحل :

متوسط التغير $= \frac{ق(\frac{١}{٢}) - ق(١)}{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{\left(\left[\frac{١}{٢}\right] + \frac{١}{٢}\right) - ([١] + ١)}{\frac{١}{٢}} = \frac{\frac{١}{٢} - ٢}{\frac{١}{٢}} = ٣$ فرع (ب)

---

٢١) إذا علمت ان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[-٤، ١]$ يساوي (٣) ، و أن

ق$(١) = ٢$ ، فإن ق$(-٤) =$

أ) -١٥ ب) -١٣ ج) ١٣ د) ١٥

الحل :

متوسط التغير $= ٣ \leftarrow ٣ = \frac{ق(١) - ق(-٤)}{١ - (-٤)} \leftarrow ٣ = \frac{٢ - ق(-٤)}{٥}$

$\leftarrow ٢ - ق(-٤) = ١٥ \leftarrow ق(-٤) = -١٣$ فرع (ب)

٢٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(س) في الفترة [٣،٧] يساوي (٨) فإن متوسط تغير الاقتران

هـ(س) = ١ + $\frac{١}{٢}$ ن(س) في الفترة نفسها يساوي :

أ) ٥ ب) ٣,٥ ج) ٨ د) ٤

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{ن(٣) - ن(٧)}{٣ - ٧}$ = $\frac{ن(٣) - ن(٧)}{٤}$ = ٨

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٣) - هـ(٧)}{٣ - ٧}$ = $\frac{\left(١ + \frac{١}{٢} ن(٣)\right) - \left(١ + \frac{١}{٢} ن(٧)\right)}{٤}$

= $\frac{\frac{١}{٢} ن(٣) - \frac{١}{٢} ن(٧)}{٤}$ = $\frac{ن(٣) - ن(٧)}{٤} \times \frac{١}{٢}$ = ٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٤ فرع (د)

٢٣) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ن(س) في الفترة [١،٤] يساوي (٣) وكان ن(١) + ن(٤) = ٢ ،

فإن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ن^{٢}(س) في الفترة [١،٤] يساوي :

أ) ٦ ب) ٩ ج) ٢ د) ٣

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{ن(٤) - ن(١)}{٤ - ١}$ = $\boxed{\frac{ن(٤) - ن(١)}{٣} = ٣}$

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{ن^{٢}(٤) - ن^{٢}(١)}{٣}$

= $\left(\frac{ن(٤) - ن(١)}{٣}\right)$ × (ن(٤) + ن(١)) = ٣ × ٢ = ٦ فرع (أ)

٢٤) إذا كان متوسط التغير للاقتران ن(س) في الفترة [١،٣] يساوي (٥)، وكان هـ(س) = ٢س + ن(س) + ١

فإن متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في الفترة [١،٣] يساوي :

أ) ٤,٥ ب) ٥ ج) ٧ د) ٩

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{ن(٣) - ن(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{ن(٣) - ن(١)}{٢}$ = ٥

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{(٦ + ن(٣) + ١) - (٢ + ن(١) + ١)}{٢}$

= $\frac{ن(٣) - ن(١)}{٢}$ + $\frac{٤}{٢}$ = ٥ + ٢ = ٧ فرع (ج)

٢٥) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة ن ، وكان متوسط تغير ق(س) دائماً = ٣ ،

فإن قيمة ن تساوي :

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

الحل :

متوسط التغير = ٣ دائماً ← ق(س) على الصورة : ٣س + ب أي من الدرجة الأولى ← ن = ١ فرع (ب)

ملاحظة :متوسط التغير للاقتران الخطي = معامل س

الاثبات : ق(س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠

$$\text{متوسط التغير} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{(أس_٢ + ب) - (أس_١ + ب)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{أس_٢ - أس_١}{س_٢ - س_١} = \frac{أ(س_٢ - س_١)}{(س_٢ - س_١)} = أ$$

---

٢٦) إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث ق(٣) = ق(٥) + أ ،وكان متوسط تغير ق(س) في الفترة [٣،٥]

يساوي (١٠) ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٢٠ ب) −٥ ج) −١٠ د) −٢٠

الحل :

$$\text{متوسط التغير} = ١٠ \leftarrow \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = ١٠ \leftarrow \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٢} = ١٠$$

$$\leftarrow \frac{ق(٥) - (ق(٥) + أ)}{٢} = ١٠ \leftarrow \frac{-أ}{٢} = ١٠ \leftarrow أ = -٢٠$$ فرع (ى)

---

٢٧) ق(س) = س^{٢} ، فإذا تغيرت س بمقدار هـ ، فإن متوسط التغير للاقتران ق(س) يساوي :

أ) س$_{١}^{٢}$ + هـ ب) ٢س$_{١}$ + هـ ج) ٢س$_{١}$هـ + هـ^{٢} د) هـ^{٢}

الحل :

$$\text{متوسط التغير} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ} \quad ، هـ \neq ٠$$

$$\frac{(س_١ + هـ)^{٢} - س_{١}^{٢}}{هـ} = \frac{٢س_١هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \frac{هـ(٢س_١ + هـ)}{هـ} = ٢س_١ + هـ$$ فرع (ب)

٢٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س) = ٤س^{٢} - أ$ في الفترة $[ب ، ٢]$ يساوي (-٤)

فما قيمة الثابت **ب** ؟

أ) -٢ ب) -٣ ج) -٤ د) ٢

الحل :

متوسط التغير $= \frac{ن(٢) - ن(ب)}{٢ - ب} = -٤ \leftarrow \frac{(١٦ - أ) - (٤ب^{٢} - أ)}{٢ - ب} = -٤$

$\leftarrow \frac{١٦ \cancel{- أ} - ٤ب^{٢} \cancel{+ أ}}{٢ - ب} = -٤ \leftarrow ١٦ - ٤ب^{٢} = -٨ + ٤ب$

$\leftarrow ٤ب^{٢} + ٤ب - ٢٤ = ٠ \leftarrow ب^{٢} + ب - ٦ = ٠ \leftarrow (ب + ٣)(ب - ٢) = ٠$

إما $(ب - ٢) = ٠ \leftarrow ب = ٢$ تهمل أو $(ب + ٣) = ٠ \leftarrow ب = -٣$ فرع (ب)

٢٩) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[٢ ، ٦]$ يساوي (٤)، وكان متوسط تغير الاقتران

$هـ(س) = أ ن(س) - س^{٢}$ ، $س \in [٢ ، ٦]$ يساوي (١٢) ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤٨ ب) ١٦ ج) ٥ د) ٢٠

الحل :

متوسط التغير في $ن(س) = \frac{ن(٦) - ن(٢)}{٦ - ٢} = \frac{ن(٦) - ن(٢)}{٤} = ٤ \leftarrow \boxed{ن(٦) - ن(٢) = ١٦}$

متوسط التغير في $هـ(س) = ١٢ \leftarrow \frac{هـ(٦) - هـ(٢)}{٦ - ٢} = ١٢$

$\leftarrow \frac{(أ ن(٦) - ٣٦) - (أ ن(٢) - ٤)}{٤} = ١٢ \leftarrow \frac{أ ن(٦) - أ ن(٢) - ٣٢}{٤} = ١٢$

$\leftarrow \frac{أ(ن(٦) - ن(٢)) - ٣٢}{٤} = ١٢ \leftarrow ١٦ أ - ٣٢ = ٤٨ \leftarrow ١٦ أ = ٨٠ \leftarrow أ = ٥$ فرع (ج)

٣٠) إذا كان $ل(س) = س ن(س)$ ، وكان متوسط تغير $ل(س)$ في الفترة $[-٢ ، ٤]$ يساوي

(١٢) ، $ل(٤) = ٦$، فإن $ن(-٢) =$

أ) ٣٩ ب) -٩ ج) ٣٣ د) -٦٦

الحل :

متوسط التغير في $ل(س) = ١٢ \leftarrow \frac{ل(٤) - ل(-٢)}{٤ - -٢} = ١٢$

$\leftarrow \frac{٦ - ل(-٢)}{٦} = ١٢ \leftarrow ٦ - ل(-٢) = ٧٢ \leftarrow ل(-٢) = -٦٦$

$ل(س) = س ن(س) \leftarrow ل(-٢) = -٢ن(-٢)$

$\leftarrow -٦٦ = -٢ن(-٢) \leftarrow ن(-٢) = ٣٣$ فرع (ج)

٣١) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ن(س) = س^{٢} + س ، س ∈ [٢،ب] يساوي (٨) ، فما قيمة ب ؟

أ) ٤ ب) ٢ ، ٥ ج) −٥ د) ٥

الحل :

متوسط التغير = ٨ ← $\frac{ن(ب)-ن(٢)}{ب-٢}$ = ٨ ← $\frac{(ب^{٢}+ب)-(٦)}{ب-٢}$ = ٨

← ب^{٢} + ب − ٦ = ٨ب − ١٦

← ب^{٢} − ٧ب + ١٠ = ٠ ← (ب − ٢)(ب − ٥) = ٠

إما (ب − ٢) = ٠ ← ب = ٢ مرفوض

أو (ب − ٥) = ٠ ← ب = ٥ فرع (د)

٣٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(س) = ٢س^{٢} + س + ١ في الفترة [ب،٢ب] يساوي (١٣) ، فما قيمة ب ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) −٢

الحل :

متوسط التغير = ١٣ ← $\frac{ن(٢ب)-ن(ب)}{٢ب-ب}$ = ١٣

← $\frac{(٢(٢ب)^{٢}+٢ب+١)-(٢ب^{٢}+ب+١)}{ب}$ = ١٣ ← $\frac{٦ب^{٢}+ب}{ب}$ = ١٣

← ٦ب^{٢} + ب = ١٣ب ← ٦ب^{٢} − ١٢ب = ٠ ← ٦ب(ب − ٢) = ٠

إما ٦ب = ٠ ← ب = ٠ مرفوض

أو (ب − ٢) = ٠ ← ب = ٢ فرع (ب)

٣٣) تتمدد صفيحة دائرية الشكل بحيث تبقى محتفظة بشكلها ، فإذا تغير طول نصف قطرها من ٤ سم إلى ٦ سم ،

فإن متوسط التغير في مساحتها بالنسبة لنصف قطرها يساوي :

أ) ١٦π ب) ٢٠π ج) ١٠π د) ٤π

الحل :

مساحة الصفيحة = م = π نق^{٢}

$\frac{\Delta م}{\Delta نق}$ = $\frac{م(٦)-م(٤)}{٦-٤}$ = $\frac{٣٦\pi-١٦\pi}{٢}$ = $\frac{٢٠\pi}{٢}$ = ١٠π فرع (ج)

٣٤) إذا كان $ن(س) = س^{٢} + هـ(س)$ حيث $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، \ ١ \leq س < ٥ \\ ١٠ & ، \ ٥ \leq س \leq ٧ \end{cases}$

فإن مقدار التغير في الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[١ ، ٥]$ يساوي :

أ) ٢٨ ب) ٣٢ ج) ٨ د) ٢

الحل :

القاعدة الأولى ← $هـ(١) = (١)^{٣} + ١ = ٢$

القاعدة الثانية ← $هـ(٥) = ١٠$

مقدار التغير في الاقتران $ن(س) = \Delta ن = ن(٥) - ن(١)$

$= (٢٥ + هـ(٥)) - (١ + هـ(١)) = (٢٥ + ١٠) - (١ + ٢) = ٣٢$ فرع (ب)

---

٣٥) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي (٥)، وكان $ن(١) \times ن(٣) = ١٢$ ، فإن متوسط تغير الاقتران $هـ(س) = \frac{١}{ن(س)}$ في نفس الفترة يساوي :

أ) $\frac{٥}{١٢}$ ب) $\frac{-٥}{١٢}$ ج) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{-١}{٥}$

الحل :

متوسط التغير في $ن(س) = \frac{ن(٣) - ن(١)}{٣ - ١} = \frac{ن(٣) - ن(١)}{٢} = ٥ \leftarrow ن(٣) - ن(١) = ١٠$

متوسط التغير في $هـ(س) = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{\frac{١}{ن(٣)} - \frac{١}{ن(١)}}{٢}$

$= \frac{ن(١) - ن(٣)}{ن(٣) \times ن(١)} \times \frac{١}{٢} = \frac{-١٠}{١٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٥}{١٢}$ فرع (ب)

---

٣٦) إذا كان $ن(س) = أ س^{٢}$ ، $أ \neq ٠$ ، وكان مقدار التغير في الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[-٢ ، ٤]$ يساوي (٢٤) ، فما قيمة الثابت $أ$ ؟

أ) ١,٢ ب) ١٢ ج) ٢ د) ٧,٢

الحل :

مقدار التغير في $ن(س) = \Delta ن(س) = ن(٤) - ن(-٢) = ٢٤$

$\leftarrow ١٦أ - ٤أ = ٢٤ \leftarrow ١٢أ = ٢٤ \leftarrow أ = ٢$ فرع (جـ)

٣٧) إذا علمت أن مقدار التغير في الاقتران ن(س) في الفترة $[-١، ٢]$ يساوي (٣) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٢ن(س) + س^{٢} في الفترة $[-١، ٢]$ يساوي :

أ) ٧ ب) ٣ ج) ٦ د) $\frac{٤}{٣}$

الحل :

مقدار التغير في ن(س) = ٣ ← ن(٢) − ن(−١) = ٣

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{(٤ + (٢)ن٢) - (١ + (-١)ن٢)}{٣}$

$= \frac{٣ + (-١)ن٢ - (٢)ن٢}{٣} = \frac{٣ + ((-١)ن - (٢)ن٢}{٣} = \frac{٣ + ٣ \times ٢}{٣} = ٣$ فرع (ب)

٣٨) إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(س) في الفترة $[-١، ١]$ يساوي (٥) ، وكان ن(١) × ن(−١) = −١٢ ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{س^{٢}}{ن(س)}$ في الفترة $[-١، ١]$ يساوي :

أ) $\frac{-٥}{١٢}$ ب) $\frac{٥}{١٢}$ ج) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{-١}{٥}$

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{ن(١) - ن(-١)}{١ - -١} = \frac{ن(١) - ن(-١)}{٢} = ٥$ ← ن(١) − ن(−١) = ١٠

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(١) - هـ(-١)}{١ - -١} = \frac{\frac{١}{ن(١)} - \frac{١}{ن(-١)}}{٢}$

$= \frac{ن(-١) - ن(١)}{ن(١) \times ن(-١)} \times \frac{١}{٢} = \frac{-١٠}{-١٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٢}$ فرع (ب)

٣٩) إذا علمت أن متوسط تغير الاقتران ن(س) في الفترة $[٢، ١٧]$ يساوي (٩) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ن(س^{٢} + ١) في الفترة $[١، ٤]$ يساوي :

أ) ٣ ب) ٤٩ ج) ١٥ د) ٤٥

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{ن(١٧) - ن(٢)}{١٧ - ٢} = \frac{ن(١٧) - ن(٢)}{١٥} = ٩$ ← ن(١٧) − ن(٢) = ١٣٥

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \frac{ن(١٦ + ١) - ن(١ + ١)}{٣}$

$= \frac{ن(١٧) - ن(٢)}{٣} = \frac{١٣٥}{٣} = ٤٥$ فرع (د)

٤٠) إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ١ إلى س$_{٢}$ = ٩

يساوي (٥) ، فإن متوسط تغير الاقتران ل(س) = س^{٢} ن(٢س + ٥)

بين س$_{١}$ = −٢ ، س$_{٢}$ = ٢ يساوي :

أ) ١٠ ب) ٤٠ ج) ٢٠ د) −٤٠

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{\text{ن}(٩) - \text{ن}(١)}{٩ - ١} = \frac{\text{ن}(٩) - \text{ن}(١)}{٨} = ٥ \leftarrow$ ن(٩) − ن(١) = ٤٠

متوسط التغير في ل(س) = $\frac{\text{ل}(٢) - \text{ل}(-٢)}{٢ - -٢} = \frac{٤\text{ن}(٩) - ٤\text{ن}(١)}{٤}$

$= \frac{٤ (\text{ن}(٩) - \text{ن}(١))}{٤} = ٤٠$ فرع (ب)

---

٤١) إذا كان ن(س) = $\frac{\text{هـ}(س)}{س}$ ، وكان متوسط التغير لكل من ن(س) ، هـ(س) في الفترة [١ ، ٢]

على الترتيب −٢ ، ٥ فإن هـ(١) =

أ) ٩ ب) ١٤ ج) ٥ د) ٧

الحل :

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{\text{ن}(٢) - \text{ن}(١)}{٢ - ١} = \frac{\text{هـ}(٢)}{٢} - \frac{\text{هـ}(١)}{١} = -٢$ بالضرب في ٢

$\leftarrow$ هـ(٢) − ٢هـ(١) = −٤ ---------- (١)

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(١)}{٢ - ١}$ = هـ(٢) − هـ(١) = ٥ ---------- (٢)

بطرح معادلة (٢) من معادلة (١) ينتج أن : − هـ(١) = −٩ $\leftarrow$ هـ(١) = ٩ فرع (أ)

٤٢) إذا كان $ن(س) = س^{٢} + هـ(س)$ حيث $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، \ ١ \leq س < ٥ \\ ١٠ & ، \ ٥ \leq س \leq ٧ \end{cases}$

فإن مقدار متوسط التغير في الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[١، ٥]$ يساوي :

أ) ٣٧

ب) ٢٨ ج) ٨ د) ٢

الحل :

القاعدة الأولى ← $هـ(١) = (١)^{٣} + ١ = ٢$

القاعدة الثانية ← $هـ(٥) = ١٠$

متوسط التغير في $ن(س) = \frac{ن(٥) - ن(١)}{٥ - ١} = \frac{(٢٥ + هـ(٥)) - (١ + هـ(١))}{٤}$

$= \frac{(١٠ + ٢٥) - (٢ + ١)}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$ فرع (جـ)

---

٤٣) إذا كانت $ص = (٤ - ٦ب)س + ٥$ ، $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٢ب$ ، $س \in [-١، ٣]$ فإن قيمة $ب =$

أ) ٢

ب) -٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٢ب \leftarrow ٢ب = \frac{(٤ - ٦ب) \times ٣ + ٥ - ((٤ - ٦ب) \times -١ + ٥)}{-٣ - ١}$$

$$\leftarrow ٢ب = \frac{(١٧ - ١٨ب) - (٦ب + ١)}{٤} = \frac{١٦ - ٢٤ب}{٤}$$

$\leftarrow ١٦ - ٢٤ب = ٨ب \leftarrow ٣٢ب = ١٦ \leftarrow ب = \frac{١٦}{٣٢} = \frac{١}{٢}$ فرع (جـ)

٤٤) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = −٢ يساوي (٨) ، فإن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = (س^{٢} + ١) ق(س) في الفترة [−٢ ، ٢] يساوي :

أ) ١٠ ب) −٤٠ ج) ٤٠ د) −١٠

الحل :

مقدار التغير في ق(س) = ٨ ← ق(−٢) − ق(٢) = ٨

متوسط التغير في هـ(س) = $\frac{هـ(٢) - هـ(-٢)}{٢ - -٢} = \frac{(١+٤) \times ق(٢) - (١+٤) \times ق(-٢)}{٤}$

$= \frac{٥(ق(٢) - ق(-٢))}{٤} = \frac{٥ \times ٨-}{٤} = -١٠$ فرع (د)

٤٥) يسير جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف = ن^{٢} + ٥ ن حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني .

السرعة المتوسطة للجسم في أول ٤ ثوانٍ من بدء الحركة تساوي :

أ) ٣٦ م / ث ب) ٨ م / ث ج) ٩ م / ث د) ١٣ م / ث

الحل :

السرعة المتوسطة $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_{٢} - ف_{١}}{ن_{٢} - ن_{١}} = \frac{(٢٠+١٦) - (٠)}{٠ - ٤} =$ ٩ م / ث فرع (جـ)

أسأل الله لكم التوفيق والنجاح