# التكامل وتطبيقاته

1) $ص = هـ^{أ\,طاس} + لو_{هـ}(طاس+1) + \int_{س}^{ط} س\,جاس\,دس$

جد (أ) حيث $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ط$ تساوي $(-2)$

الحل :- $\frac{دص}{دس} = أ\,قا^2س\,هـ^{أ\,طاس} + \frac{قا^2س}{طاس+1} + صفر$ عند $س = ط$

$\frac{دص}{دس} = أ\,قا^2ط\,هـ^{أ\,طاط} + \frac{قا^2ط}{طاط + 1} = -2$

رافت صافي

$أ \times 1 \times هـ^0 + 1 = -2$ ومنه $\boxed{أ = -3}$

---

2) $ق(س) = \int (هـ^{جا2س} + طا2س)\,دس$ جد $ق''(\frac{ط}{6})$

الحل :-

$ق'(س) = هـ^{جا2س} + طا2س$

$ق''(س) = 2جتا2س\,هـ^{جا2س} + 2قا^2 2س$

$ق''(\frac{ط}{6}) = 2جتا\frac{ط}{3}\,هـ^{جا\frac{ط}{3}} + 2قا^2\frac{ط}{3} = 2 \times \frac{1}{2}\,هـ^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2 \times 4 = هـ^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 8$

---

3) $لو_{هـ}ص = أس$ جد (أ) حيث $2ص'' - 5ص' + 2ص = 0$

الحل :-

$ص' = أ\,هـ^{أس}$ ، $ص'' = أ^2\,هـ^{أس}$ نعوضها في المعادلة التفاضلية :-

$2أ^2\,هـ^{أس} - 5أ\,هـ^{أس} + 2\,هـ^{أس} = 0$

$هـ^{أس}(2أ^2 - 5أ + 2) = 0$ ∵ $هـ^{أس} \neq 0$

∴ $2أ^2 - 5أ + 2 = 0$

$(2أ - 1)(أ - 2) = 0$ ومنه $أ = \frac{1}{2}$ ، $2$

$لو_{هـ}ص = أس$
$ص = هـ^{أس}$

---

4) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int طا^3س\,قا^4س\,دس$ *

ب) $\int \frac{4\,دس}{س^3 + س}$ *

أ) اذا كان $\frac{أ}{٢} \leq \int_{٠}^{٣} \frac{دس}{\sqrt{١٦+س^{٢}}+١} \leq ب-١$ جد أ، ب دون اجراء تكامل.

الحل :-

$٠ \leq س \leq ٣$

$٠ \leq س^{٢} \leq ٩$

$١٦ \leq س^{٢}+١٦ \leq ٢٥$ (جذر)

$٤ \leq \sqrt{س^{٢}+١٦} \leq ٥$ (نضيف ١)

$٥ \leq \sqrt{س^{٢}+١٦}+١ \leq ٦$ نقلب

$\frac{١}{٦} \leq \frac{١}{\sqrt{س^{٢}+١٦}+١} \leq \frac{١}{٥}$ تكامل

رافت صافي

$\int_{٠}^{٣} \frac{١}{٦}\, دس \leq \int_{٠}^{٣} \frac{دس}{\sqrt{س^{٢}+١٦}+١} \leq \int_{٠}^{٣} \frac{١}{٥}\, دس$

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٥}$

بالمقارنة :- $\frac{١}{٢} = \frac{أ}{٢} \leftarrow أ = ١$ وكذلك $ب-١ = \frac{٣}{٥}$ ومنه $ب = \frac{٨}{٥}$

ب) دون اجراء تكامل اثبت ان $-٤\pi \leq \int_{\pi}^{٢\pi} \frac{٤\, دس}{٥-٦جا^{٢}س} \leq \frac{٤\pi}{٥}$

الحل :

$-١ \leq جاس \leq ٠$

$٠ \leq جا^{٢}س \leq ١$

$-٦ \leq -٦جا^{٢}س \leq ٠$

$-١ \leq ٥-٦جا^{٢}س \leq ٥$ نقلب

$-١ \geq \frac{١}{٥-٦جا^{٢}س} \geq \frac{١}{٥}$ نضرب في (٤)

$-٤ \leq \frac{٤}{٥-٦جا^{٢}س} \leq \frac{٤}{٥}$ تكامل

$\int_{\pi}^{٢\pi} -٤\, دس \leq \int_{\pi}^{٢\pi} \frac{٤}{٥-٦جا^{٢}س}\, دس \leq \int_{\pi}^{٢\pi} \frac{٤}{٥}\, دس$

$-٤\pi$ ، $\frac{٤}{٥}\pi$

٦) جد التكاملات :-

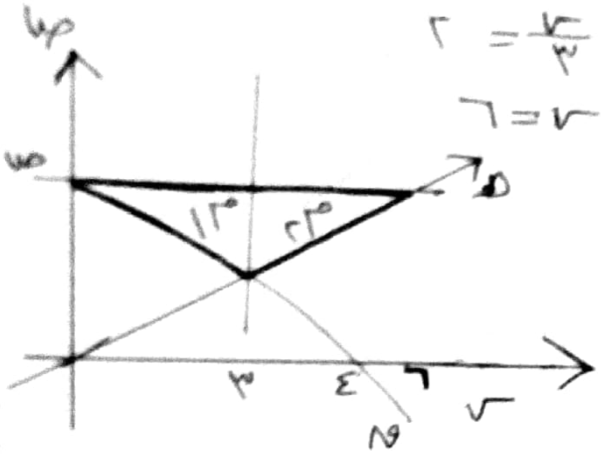
*١٣) $\int_{١}^{٣} \frac{(س^{٢}-٦س+٩)^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}}\, دس$

*ب) $\int قا^{٢}\sqrt{س}\, دس$

٧)

أ) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $\sqrt{٤ - س}$ ، هـ(س) = $\frac{س}{٣}$ والمستقيم ص = ٢

الحل :-




| | | |
|---|---|---|
| ق = هـ | ق = ص | هـ = ص |
| $\sqrt{٤-س} = \frac{س}{٣}$ نربع | $\sqrt{٤-س} = ٢$ | $\frac{س}{٣} = ٢$ |
| $٤ - س = \frac{س^٢}{٩}$ | ٤ − س = ٤ | س = ٦ |
| ∴ $س^٢ + ٩س - ٣٦ = ٠$ | س = ٠ | |
| س = ٣ ، −١٢ × | | |

م١ = $\int_{٠}^{٣} (٢ - \sqrt{٤-س})$ دس = $\frac{٤}{٣}$

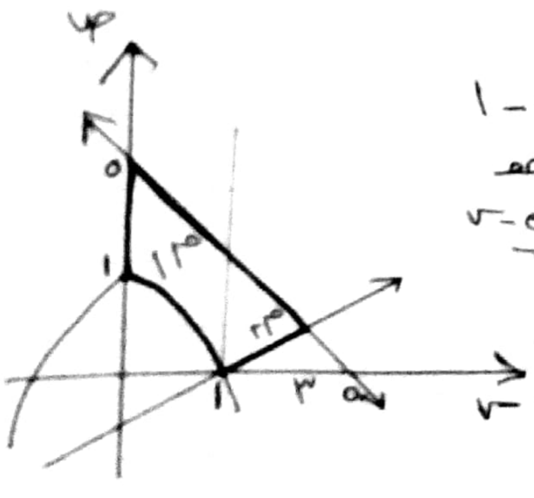
م٢ = $\int_{٣}^{٦} (٢ - \frac{س}{٣})$ دس = $\frac{٣}{٢}$

∴ م = م١ + م٢ = $\frac{٤}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{١٧}{٦}$

رافت صافي

ب) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = ١ − $س^٢$ ، ص − س + ١ = ٠ ∴
والمستقيم هـ(س) = ٥ − س ومحور الصادات

الحل :-




نرتب ← ص − س + ١ = ٠ ∴ ← ص = س − ١

| | | |
|---|---|---|
| ق = ص | ق = هـ | ص = هـ |
| ١ − $س^٢$ = س − ١ | ١ − $س^٢$ = ٥ − س | س − ١ = ٥ − س |
| ∴ $س^٢$ + س − ٢ = ٠ | ∴ $س^٢$ − س + ٤ = ٠ | ٢س = ٦ |
| س = −٢ ، ١ | لا حل | س = ٣ |

م١ = $\int_{٠}^{١} (س^٢ - س + ٤)$ دس = $\frac{٢٣}{٦}$

م٢ = $\int_{١}^{٣} (٦ - ٢س)$ دس = ٤

م = م١ + م٢ = $\frac{٢٣}{٦}$ + ٤ = $\frac{٤٧}{٦}$

٨) جد التكاملات التالية :-

أ*) $\int \frac{س}{جتا^٢ س + ١}$ دس

ب*) $\int$ جتا س لو$_{هـ}$ جا س دس

حل المعادلات التفاضلية التالية :-

أ) $\frac{٢+\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دص} = (\text{س}^٢\text{ص} - ٤\text{ص})\ \text{دس}$

الحل :- $\frac{٢+\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دص} = \text{ص}(\text{س}^٢-٤)\ \text{دس}$ . نضرب بـ $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٢+\text{س}} \times \frac{١}{\text{ص}}$

$\frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{(\text{س}^٢-٤)}{٢+\text{س}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}+٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$

$\frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} = (\text{س}-٢)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$ ∴ تكامل

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دم} = (\text{س}-٢)\ \text{دس}$
$\text{دع} = \frac{\text{دس}}{\text{س}}$ ، $\text{م} = \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = (\frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int (\frac{١}{٢}\text{س} - ٢)\ \text{دس}$

$= (\frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٢\text{س} + \text{جـ}$

ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س} + \text{سص} + \text{ص} + ١}$ ، س، ص $> -١$

الحل :-

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س}(\text{ص}+١) + \text{ص} + ١} = \sqrt{(\text{ص}+١)(\text{س}+١)} = \sqrt{\text{ص}+١} \times \sqrt{\text{س}+١}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}+١}} = \sqrt{\text{س}+١}\ \text{دس}$ ∴ تكامل

$\int (\text{ص}+١)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{دص} = \int (\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$٢(\text{ص}+١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

رافت صافي

---

٩) جد التكاملات التالية :-

*١) $\int \text{س جتا}\sqrt{\text{س}^٢+١}\ \text{دس}$

*٢) $\int \text{جا}^٣\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{جتاس})\ \text{دس}$

*٣) $\int \frac{٢ - \sqrt[٣]{\text{س}}}{٩ - \sqrt[٣]{\text{س}^٢}}\ \text{دس}$

*٤) $\int_{٠}^{١} \frac{\text{س}}{(\text{س}+١) - \sqrt{\text{س}+١}}\ \text{دس}$

*٥) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢-١)\ \text{دس}$

*٦) $\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{٢\ \text{دس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٢)(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-٣)}$

١٠) اذا كان $\int ٢ ق'(س) ق(س) دس = لو_{هـ} |٥ - ١٠س| - \int أ ق'(س) ق(س) دس$

جد (أ) حيث $ق'(٠) = ٦$

الحل :-

اشتقاق الطرفين :-

$٢ ق'(س) = \frac{-١٠}{٥ - ١٠س} - أ ق'(س)$ عند $س = ٠$

$٢ ق'(٠) = -٢ - أ ق'(٠)$

$١٢ = -٢ - ٦أ \leftarrow ٦أ = -١٤ \leftarrow أ = \frac{-١٤}{٦} = \frac{-٧}{٣}$

---

١١) اذا كان $\int_{١}^{٣} (٣ - ق(س) + ٢س) دس = ١٠$ ، $\int_{٠}^{١} ق(٢س-١) دس = ٦$

جد $\int_{٣}^{-١} (٢ ق(س) + ١) دس$

رافت صافي

الحل :-

نفكك المعطيات :-

$\int_{١}^{٣} (٣ - ق(س) + ٢س) دس = ١٠ \leftarrow ٦ - \int_{١}^{٣} ق(س) دس + [س^٢]_{١}^{٣} = ١٠$

$٦ - \int_{١}^{٣} ق(س) دس + ٨ = ١٠ \leftarrow \int_{١}^{٣} ق(س) دس = ٤$

$\int_{٠}^{١} ق(٢س - ١) دس = ٦$

$\int_{-١}^{١} ق(ص) \frac{دص}{٢} = ٦ \leftarrow \int_{-١}^{١} ق(ص) دص = ١٢$

$ص = ٢س - ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢$

$دس = \frac{دص}{٢}$

$س = ٠ \leftarrow ص = -١$

$س = ١ \leftarrow ص = ١$

المطلوب $\leftarrow ٢ \int_{٣}^{-١} ق(س) دس + ١(-١-٣)$

$٢ \left[ \int_{٣}^{١} ق(س) دس + \int_{١}^{-١} ق(س) دس \right] + -٤$

$٢[-٤ + -١٢] + -٤ = -٣٢ - ٤ = -٣٦$

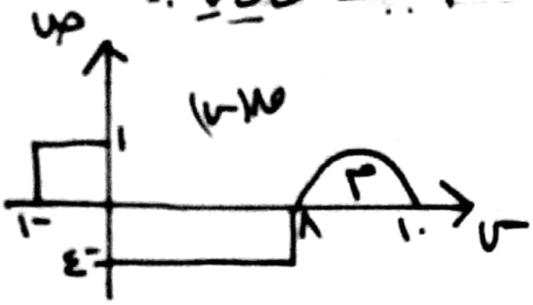
---

١٢) جد التكاملات التالية :-

*أ) $\int (س-١)^٣ \sqrt{س^٢ - ٢س - ٤}\, دس$

*ب) $\int^{٢} |هـ - هـ^{٢س-١}|\, دس$

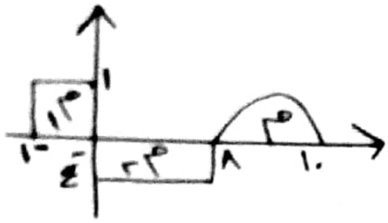
١٣) معتمداً الشكل المجاور ، $م_3 = \frac{\pi}{2}$ أجب عما يلي :-




أ) جد $\int_{-1}^{8} \left(2ق(س)+2س\right) دس$

ب) جد $\int_{-1}^{10} |ق(س)| دس$

جـ) جد $\int_{1}^{3} س\, ق(س^2-1) دس$




الحل :-

نجهز المعطيات :-

$م_1 = 1\times1 = 1 \leftarrow \int_{-1}^{0} ق(س) دس = 1$

$م_2 = 8\times4 = 32 \leftarrow \int_{0}^{8} ق(س) دس = -32$

$\int_{8}^{10} ق(س) دس = \frac{\pi}{2}$

أ) $2\int_{-1}^{8} ق(س) دس + \left[س^2\right]_{-1}^{8} = 2\left[\int_{-1}^{0} ق(س) دس + \int_{0}^{8} ق(س) دس\right] + 63$

$= 2(1-32) + 63 = 1$

ب) التكامل يمثل المساحة

$\therefore \int_{-1}^{10} |ق(س)| دس = 1 + 32 + \frac{\pi}{2} = 33 + \frac{\pi}{2}$

جـ) $ص = س^2 - 1$

$\frac{دص}{دس} = 2س$ ومنه $دس = \frac{دص}{2س}$

عند $س = 1 \leftarrow ص = 0$

$س = 3 \leftarrow ص = 8$

$= \int_{0}^{8} س\, ق(ص) \frac{دص}{2س} = \frac{1}{2}\int_{0}^{8} ق(ص) دص = \frac{1}{2} \times -32 = -16$

رافت صافي

---

١٤) جد التكاملات التالية :-

أ*) $\int \frac{(2-س)^3}{2س} دس$

ب*) $\int^{لو2} هـ^{س}(9-4هـ^{س}) دس$

جـ*) $\int \frac{س^2+1}{س^2-س-2} دس$

د*) $\int \frac{2س+3ظاس}{جتا^2س} دس$

١٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) عند (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{1-جتا^2 س}$ جد قاعدة العلاقة (ص) علماً بأن منحناها يمر بـ $(\frac{\pi}{4}، 0)$

الحل :-

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{1-جتا^2 س} = \frac{هـ^{\frac{1}{2}ص}}{جا^2 س}$$

$$\frac{دص}{هـ^{\frac{1}{2}ص}} = \frac{دس}{جا^2 س} \quad \text{بالتكامل}$$

$$\int هـ^{-\frac{1}{2}ص} دص = \int قتا^2 س \, دس$$

$$-2هـ^{-\frac{1}{2}ص} = -ظتا س + جـ \quad \text{عند } (\frac{\pi}{4}، 0)$$

$$-2هـ^{0} = -ظتا \frac{\pi}{4} + جـ \leftarrow جـ = -1$$

$$-2هـ^{-\frac{1}{2}ص} = -ظتا س - 1$$

---

١٥) خزان وقود سعته $\frac{21}{2}$ دسم³ ، يُسحب منه البنزين بمعدل (٢+ن) دسم³ جد الزمن اللازم حتى يمتلئ.

الحل :- $\frac{دع}{دن} = 2 + ن$ حيث ع :- الحجم

$دع = (2+ن) دن$ بالتكامل

$ع = 2ن + \frac{ن^2}{2} + جـ$ عند $ع(0) = 0$

$0 = 0 + 0 + جـ \leftarrow جـ = 0$

$ع = 2ن + \frac{ن^2}{2}$ يمتلئ عند $ع = \frac{21}{2}$

$\frac{21}{2} = 2ن + \frac{ن^2}{2}$ نضرب في (٢) ونرتب

$ن^2 + 4ن - 21 = 0$

$(ن+7)(ن-3) = 0$ ومنه ن = ٣ ، ن = −٧ ✗

---

١٦) جد التكاملات التالية :-

*١) $\int \frac{قا س \, ظا س}{8 - ظا^2 س} دس$

*٢) $\int \frac{جتا^3 س}{جا س} دس$

*٣) $\int هـ^{س}(2جتا 3س جتا س - جتا 2س) دس$

*٤) $\int \frac{دس}{س - \sqrt{س} + 2}$

١٧) يتحرك جسم من السكون حسب العلاقة $ت = \frac{٤}{١+ع}$ ، ع > ٠ .
اذا قطع مسافة $\frac{٥}{٤}$ م في ثانية واحدة ، جد ف(٣) .

الحل : $ت = \frac{دع}{دن} = \frac{٤}{١+ع} \leftarrow (١+ع)\,دع = ٤\,دن$ تكامل

$ع + \frac{ع^٢}{٢} = ٤ن + حـ_١$ لكن ع(٠) = ٠ ← $\boxed{حـ_١ = ٠}$

$ع + \frac{ع^٢}{٢} = ٤ن$ نضرب في (٢) ونضيف (١)

$ع^٢ + ٢ع + ١ = ٨ن + ١$

$(ع+١)^٢ = ٨ن + ١$ الجذر للطرفين

$ع + ١ = \sqrt{٨ن+١}$

$\frac{دف}{دن} = \sqrt{٨ن+١} - ١$

$دف = \left(\sqrt{٨ن+١} - ١\right)دن$ تكامل

$ف = \frac{١}{١٢}(٨ن+١)^{\frac{٣}{٢}} - ن + حـ_٢$ عند $ف(١) = \frac{٥}{٤}$

$\frac{٥}{٤} = \frac{١}{١٢}(٨+١)^{\frac{٣}{٢}} - ١ + حـ_٢ \leftarrow حـ_٢ = ٠$

$ف(ن) = \frac{١}{١٢}(٨ن+١)^{\frac{٣}{٢}} - ن \leftarrow ف(٣) = \frac{١}{١٢}(١٢٥) - ٣ = \frac{٨٩}{١٢}$ م

١٨) اذا كان $\int_{١}^{أ}\left(٢س - ٢\int_{١}^{٣}٣م^٢\,دم\right)دس = ١٠٤$ جد (أ) حيث أ > ١

الحل : نبدأ من التكامل الداخلي :

$\int_{١}^{٣}٣م^٢\,دم = [م^٣]_{١}^{٣} = ٢٦$

$\therefore \int_{١}^{أ}(٢س - ٥٢)\,دس = ١٠٤$

$[س^٢ - ٥٢س]_{١}^{أ} = ١٠٤$

$أ^٢ - ٥٢أ - (١ - ٥٢) = ١٠٤$ نرتب

$أ^٢ - ٥٢أ - ٥٣ = ٠ \leftarrow (أ+١)(أ-٥٣) = ٠ \leftarrow أ = ٥٣ ، -١$ ✗

١٩) جد التكاملات :-

*١) $\int \frac{\sqrt{١+س} - \sqrt{١-س}}{\sqrt{١+س} + \sqrt{١-س}}\,دس$

*٢) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi}\sqrt{جتا^٢س + \frac{١}{٢}جا٢س\,جتاس}\,دس$

 *وزاري
رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٢٠) قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ث متباطئاً $-١٠$م/ث² اذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية من حركته ٨٠م جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الارض.

الحل :-

$ع(٠) = ٤٠$ ، $ف(١) = ٨٠$

$ت = \frac{دع}{دن} = -١٠$

$دع = -١٠ \, دن$ تكامل

$ع = -١٠ن + جـ_١$ عند $ع(٠) = ٤٠ \leftarrow ٤٠ = ٠ + جـ_١ \leftarrow جـ_١ = ٤٠$

$ع = -١٠ن + ٤٠$

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٤٠$

$دف = (-١٠ن + ٤٠) \, دن$ تكامل

$ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن + جـ_٢$ عند $ف(١) = ٨٠$

$٨٠ = -٥ + ٤٠ + جـ_٢ \leftarrow جـ_٢ = ٤٥$

$ف(ن) = -٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥$ عند اقصى ارتفاع $(ع = ٠)$

$ع = -١٠ن + ٤٠ = ٠ \leftarrow ن = ٤$

$ف(٤) = -٥ \times ١٦ + ٤٠ \times ٤ + ٤٥ = ١٢٥$م

---

٢١) اذا كان $\int \left( لو_{هـ} \sqrt[٣]{س} + ق(س) \right) دس = س + هـ^{أس}$ جد (أ) حيث $ق'(١) = أ^٢هـ - \frac{١}{٣}$

الحل : اشتقاق الطرفين :-

$لو_{هـ} س^{\frac{١}{٣}} + ق(س) = ١ + أهـ^{أس}$ اشتقاق مرة اخرى

$\frac{١}{٣} \times \frac{١}{س} + ق'(س) = أ^٢هـ^{أس}$ عند $س = ١$

$\frac{١}{٣} + ق'(١) = أ^٢هـ^{أ}$

$\frac{١}{٣} + أ^٢هـ - \frac{١}{٣} = أ^٢هـ^{أ}$

$أ^٢هـ = أ^٢هـ^{أ} \leftarrow هـ^{أ} = هـ$ ومنه $\boxed{أ = ١}$

---

٢٢) جد التكاملات التالية :-

*١) $\int \frac{٥جا^٢س + ٥جتا^٢س}{٣ + ٣جتا٢س} \, دس$

*٢) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{دس}{١ - جتاس}$

٢٣) $ق''(س) = قا^2 س$ ، $ق'(\frac{\pi}{4}) = 2$ ، $ق(\pi) = \frac{\pi}{2}$ جد قاعدة ق(س).

الحل:

$ق''(س) = قا^2 س$ ∴ تكامل

$ق'(س) = ظاس + جـ_1$ عند $ق'(\frac{\pi}{4}) = 2$

$ق'(\frac{\pi}{4}) = ظا\frac{\pi}{4} + جـ_1$

$2 = 1 + جـ_1 \leftarrow \boxed{جـ_1 = 1}$

رأفت صافي

$ق'(س) = ظاس + 1$ ∴ تكامل

$ق(س) = -لو_هـ|جتاس| + س + جـ_2$ عند $ق(\pi) = \frac{\pi}{2}$

$ق(\pi) = -لو 1 + \pi + جـ_2$

$\frac{\pi}{2} = 0 + \pi + جـ_2 \longrightarrow جـ_2 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

$ق(س) = -لو_هـ|جتاس| + س - \frac{\pi}{2}$

---

٢٤) $ق(س) = \begin{cases} |س-1| & ، 0 \leq س < 2 \\ 3(س+1)^{\frac{1}{2}} & ، 2 \leq س \leq 4 \end{cases}$ جد $\int_0^4 ق(س) دس$

الحل: $\int_0^4 ق(س)دس = \int_0^2 |س-1| دس + \int_2^4 3(س+1)^{\frac{1}{2}} دس$

$= \int_0^1 (1-س) دس + \int_1^2 (س-1) دس + [6(س+1)^{\frac{1}{2}}]_2^4$

$= [س - \frac{س^2}{2}]_0^1 + [\frac{س^2}{2} - س]_1^2 + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

$= \frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2} + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 1 + 6(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

---

٢٥) جد التكاملات التالية:

*أ) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} جا^2 س جتا^2 س دس$

*ب) $\int_0^2 (|س^2 - |س-1||) دس$

*ج) $\int_1^4 \frac{|1-س|}{س^2 - 5س + 6} دس$

*د) $\int \frac{هـ^س}{2هـ^{2س} - 5هـ^س + 2} دس$

٢٦) اذا كان م، هـ معكوسين لمشتقة ق(س)، اذا كان $\int_{1}^{9} \frac{م(س)}{\sqrt{س}} دس - \int_{1}^{9} \frac{هـ(س)}{\sqrt{س}} دس = 8$ جد $\int_{0}^{5} (هـ(س) - م(س)) دس$

الحل :- م − هـ = أ (ثابت)

$\int_{1}^{9} \left(\frac{م(س)}{\sqrt{س}} - \frac{هـ(س)}{\sqrt{س}}\right) دس = 8$

$\int_{1}^{9} \frac{م(س) - هـ(س)}{\sqrt{س}} دس = 8 \leftarrow \int_{1}^{9} أ س^{-\frac{1}{2}} دس = 8$

$[2أ س^{\frac{1}{2}}]_{1}^{9} = 8 \leftarrow 2أ\sqrt{9} - 2أ\sqrt{1} = 8$

$6أ - 2أ = 8 \leftarrow$ **أ = 2**

$\therefore \int_{0}^{5} (هـ - م) دس = \int_{0}^{5} -2 دس = -10$

---

٢٧) ق(1) = 3 ، $\int_{0}^{1} ق(س) دس = 4$ جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ق'(جتاس) جا2س دس$

(اقتصادي)

الحل :-

ص = جتاس

$\frac{دص}{دس} = -جاس \leftarrow دس = \frac{دص}{-جاس}$

عند س = 0 ← ص = 1 وكذلك عند س = $\frac{\pi}{2}$ ← ص = 0

$\int_{1}^{0} ق'(ص) \times 2 جاس جتاس \frac{دص}{-جاس} = \int_{1}^{0} -2ص ق'(ص) دص$ اجزاء

ق = −2ص | دم = ق'(ص) دص

دق = −2 دص | م = ق(ص)

$[-2ص ق(ص)]_{1}^{0} + \int_{1}^{0} 2ق(ص) دص = 0 + 2ق(1) + 2 \times -4 = -2$

---

٢٨) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int_{1}^{8} \frac{2 دس}{\sqrt[3]{س^4} + 4س + 3\sqrt[3]{س^2}}$

ب) $\int \frac{لو جاس}{جا^2س} دس$

جـ) $\int_{0}^{\pi} (1 + جا2س) جتا^2س دس$

د) $\int_{0}^{4} \frac{2 دس}{س - 4\sqrt{س} + 3}$


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤ * منزلي

٢٩) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق(٠) = ق(١) = صفر و $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس = ١ جد قاعدة ق(س).

الحل :- ق(س) = أس$^2$ + ب س + جـ

ق(٠) = ٠ ← ٠ + ٠ + جـ = ٠ ← جـ = ٠

ق(١) = ٠ ← أ + ب + ٠ = ٠ ← أ = −ب وعليه

ق(س) = −ب س$^2$ + ب س تكون

$\int_{0}^{1}$ ق(س) دس = ١ ← $\int_{0}^{1}$ (−ب س$^2$ + ب س) دس = ١

[ −ب س$^3$ / ٣ + ب س$^2$ / ٢ ]$_{0}^{1}$ = ١

−ب/٣ + ب/٢ = ١ ← ب/٦ = ١ ← ب = ٦ ومنه أ = −ب = −٦

ق(س) = −٦س$^2$ + ٦س

---

٣٠) ص = لو$_{٣}$ ظاس جد دص/دس

رافت صافي

الحل :-

٣$^{ص}$ = ظاس ناخذ لوغاريتم الطرفين

ص لو$_{هـ}$ ٣ = لو$_{هـ}$ ظاس اشتقاق

ص َ × لو$_{هـ}$ ٣ = قا$^2$س / ظاس ← دص/دس = قا$^2$س / ظاس × ١ / لو$_{هـ}$ ٣

---

٣١) جد التكاملات :-

أ) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}$ ظا٢س جتاس دس

ب) $\int$ ١ / (هـ$^{س}$ − هـ$^{-س}$) دس

جـ) $\int$ هـ$^{س}$ / قتاس دس

د) $\int$ هـ$^{س}$ / (هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$) دس



رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤ * وزاري

٣٢) إذا كان $\int_{1}^{2} \frac{هـ(س)}{س^{2}} \, دس = ب$ جد $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{هـ'(2س)}{س} \, دس$

بدلالة (ب) حيث هـ(٢) = ٣ ، هـ(١) = ١

الحل :-

ص = ٢س

$\frac{دص}{دس} = 2$ ومنه $دس = \frac{دص}{2}$

عند س = $\frac{1}{2}$ ← ص = ١ ، عند س = ١ ← ص = ٢

$\int_{1}^{2} \frac{هـ'(ص)}{\frac{ص}{2}} \times \frac{دص}{2} = \int_{1}^{2} \frac{هـ'(ص)}{ص} \, دص$ ← نعود إلى المعطيات

(رافقه جزء)

ع = هـ(س) ، $دم = س^{-2} \, دس$

دع = هـ'(س) دس ، $م = \frac{-1}{س}$

$\int_{1}^{2} \frac{هـ(س)}{س^{2}} \, دس = \left[\frac{-1}{س} هـ(س)\right]_{1}^{2} + \int_{1}^{2} \frac{هـ'(س)}{س} \, دس$

$ب = \frac{-1}{2} هـ(2) + هـ(1) + \int_{1}^{2} \frac{هـ'(س)}{س} \, دس$

$ب = \frac{-3}{2} + 1 + \int_{1}^{2} \frac{هـ'(س)}{س} \, دس$ ← $\int_{1}^{2} \frac{هـ'(س)}{س} \, دس = ب + \frac{1}{2}$

---

٣٣) ق(س) ≤ ٢س + ٦ ، س ∈ [٠، ٢] ما أكبر قيمة للمقدار

$\int_{0}^{2} \left(1 + \frac{ق(س)}{2}\right) دس$

الحل :- ق(س) ≤ ٢س + ٦ نقسم على (٢) ونضيف (١)

$\frac{ق(س)}{2} + 1 \leq س + 4$ ∴ نكامل

$\int_{0}^{2} \left(\frac{ق(س)}{2} + 1\right) دس \leq \int_{0}^{2} (س + 4) \, دس$

$\int_{0}^{2} \left(\frac{ق(س)}{2} + 1\right) دس \leq 10$ ((أكبر قيمة))

---

٣٤) جد التكاملات التالية :-

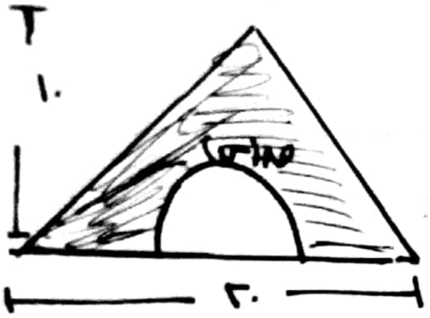
*أ) $\int_{2}^{5} هـ^{(1 + \sqrt{س - 1})} \, دس$

*ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{4} 2س \, دس$


* وزاري

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

35) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل مدخل عمارة، يراد دهان المنطقة المظللة، حيث تكلفة الوحدة المربعة 5 دنانير، جد التكلفة الكلية للدهان، حيث:




$ق(س) = 4 - س^2$

الحل :- مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 20 \times 10 = 100$

نجد المساحة تحت ق(س) :-

$4 - س^2 = 0 \leftarrow س^2 = 4 \leftarrow س = \mp 2$

$م = \int_{-2}^{2} (4 - س^2) \, دس = \frac{32}{3}$

المساحة المظللة $= 100 - \frac{32}{3} = \frac{268}{3}$

التكلفة $= \frac{268}{3} \times 5 = \frac{1340}{3}$ ديناراً

---

36) $أ = \int_{-\pi}^{\pi} 2جا^2س \, دس$ ، $ب = \int_{\pi}^{-\pi} 2جتا^2س \, دس$ جد أ + ب

الحل :- $أ + ب = \int_{-\pi}^{\pi} 2جا^2س \, دس + \int_{\pi}^{-\pi} 2جتا^2س \, دس$

رافت صافي

$= \int_{-\pi}^{\pi} 2جا^2س \, دس - \int_{-\pi}^{\pi} 2جتا^2س \, دس$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (2جا^2س - 2جتا^2س) \, دس = \int_{-\pi}^{\pi} -2جتا2س \, دس$

$= [-جا2س]_{-\pi}^{\pi} = -جا2\pi + جا-2\pi =$ صفراً

---

37) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int_{2}^{6} \left( [\frac{1}{3}س] - 2 \right) دس$

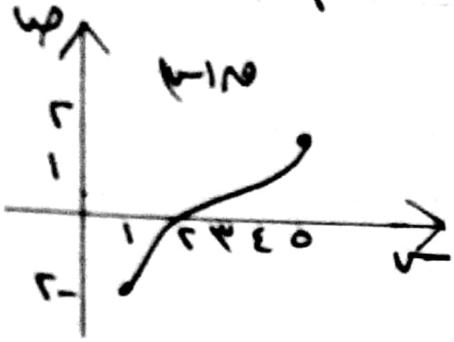
ب) $\int (س+2) جا^3(س^2 + 4س + 3) \, دس$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جاس(س + قتا^3س) \, دس$

د) $\int \frac{س^2}{س^6 + س^3} \, دس$

٣٨) الشكل المجاور يمثل ق(س) في [١، ٥] جد قيم م، ن حيث

$$م \le \int_{1}^{5} (ق^2(س) + ٣)\, دس \le ن$$



الحل :-

$-٢ \le ق(س) \le ٢$

$٠ \le ق^2(س) \le ٤$

$٣ \le ق^2(س) + ٣ \le ٧$

$$\int_{1}^{5} ٣\, دس \le \int_{1}^{5} (ق^2(س) + ٣)\, دس \le \int_{1}^{5} ٧\, دس$$

$م = ١٢$ ، $ن = ٢٨$

---

٣٩) دون حساب صيغة التكامل. بيّن أن :- (رأفت صافي)

$$\int_{1}^{2} (٤ + ٣س^2)\, دس \ge \int_{1}^{2} (٢س^2 + ٥)\, دس$$

الحل :- نفرض ل(س) = ق − هـ حيث ق = ٤ + ٣س² ، هـ = ٢س² + ٥

$ل(س) = ٣س^2 + ٤ - ٢س^2 - ٥ = س^2 - ١$ ، س ∈ [١، ٢]

$ل(س) \ge ٠$ لكل س ∈ [١، ٢]

++ × − − × ++ (−١ ، ١ ، ٢)

$ق - هـ \ge ٠$

$$ق \ge هـ \leftarrow \int_{1}^{2} ق(س)\, دس \ge \int_{1}^{2} هـ(س)\, دس$$

---

٤٠) جد التكاملات التالية :-

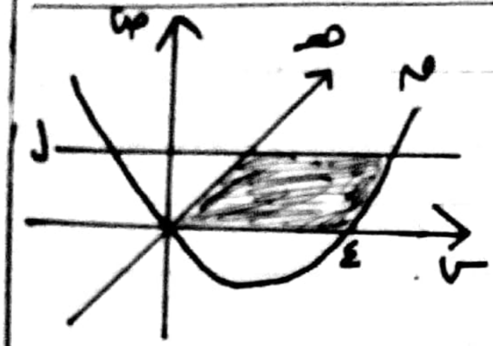
١*) $\int \frac{جتا(لو_هـ س)}{س}\, دس$

٢*) $\int \frac{دس}{\sqrt{س}\,(١ + \sqrt{س})^4}$

٣*) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا ٢س}{س + ١}\, دس$ بدلالة (أ) حيث $\int_{0}^{\pi} \frac{جتا س}{(س + ١)^2}\, دس = أ$

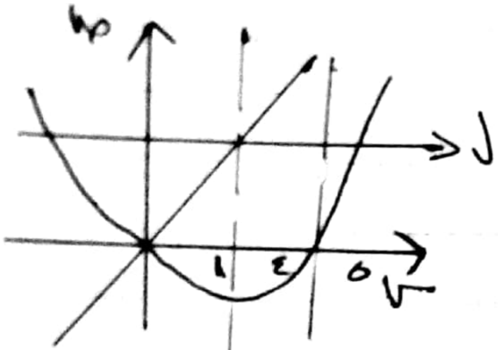
٤١) جد مساحة المنطقة المظللة، حيث

ل(س) = ٥ ، هـ(س) = ٥س ، ع(س) = س² - ٤س




الحل:

| | |
|---|---|
| ع = ل | هـ = ل |
| س² - ٤س = ٥ | ٥ = ٥س |
| س² - ٤س - ٥ = ٠ | س = ١ |
| س = ٥ ، -١ | |




$$م = \int_{٠}^{١} هـ(س)\,دس + \int_{١}^{٤} ل(س)\,دس + \int_{٤}^{٥} (ل - ع)\,دس$$

$$= \int_{٠}^{١} ٥س\,دس + \int_{١}^{٤} ٥\,دس + \int_{٤}^{٥} (٥ - س^٢ + ٤س)\,دس$$

$$= \frac{٥}{٢} + ١٥ + \frac{٨}{٣} = \frac{١٢١}{٦}$$

---

٤٢) $\int (ع'(س) + ٢س)\,دس = س^٣ + أس^٢ + ١$ جد ع(٠) حيث

ع'(١) = ٥ ، ع(٢) = ٧

أفكار صافي

الحل: نجد قيمة (أ) ← اشتقاق

ع'(س) + ٢س = ٣س² + ٢أس عند س = ١

ع'(١) + ٢ = ٣ + ٢أ ← ٧ = ٣ + ٢أ ← أ = ٢

$\int (ع'(س) + ٢س)\,دس = س^٣ + ٢س^٢ + ١$ نجد الطرف الأيسر

ع(س) + س² + جـ = س³ + ٢س² + ١ عند س = ٢

ع(٢) + ٤ + جـ = ٨ + ٨ + ١

١١ + جـ = ١٧ ← جـ = ٦

ع(س) + س² + ٦ = س³ + ٢س² + ١ عند س = ٠

ع(٠) + ٦ = ١ ← ع(٠) = -٥

---

٤٣) جد التكاملات:

* أ) $\int_{-١}^{٤} \frac{س}{\sqrt{س+٥}}\,دس$

* ب) $\int_{١}^{٢} س^٤ \sqrt{\left(\frac{٢-س}{س^٢}\right)^٣}\,دس$

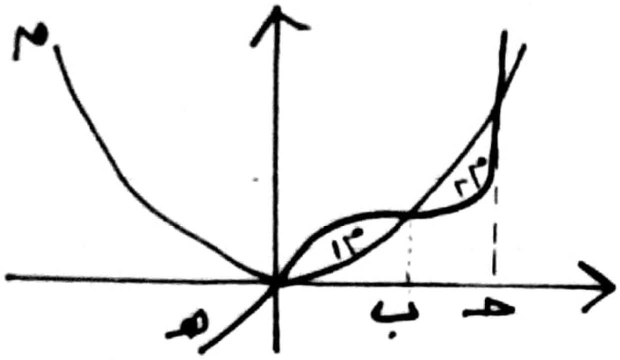


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤٤) اعتماداً على الشكل المجاور ، اذا كان $ق(س) = أ س^٢$ ، $هـ(س) = س^٣ + ٢س$

جد الثوابت أ، ب، جـ التي تجعل

$م_١ = م_٢$




الحل :-

$م_١ = \int_{٠}^{ب} (هـ - ق) دس = \int_{٠}^{ب} (س^٣ + ٢س - أ س^٢) دس$

$= \left[\frac{س^٤}{٤} + س^٢ - \frac{أ س^٣}{٣}\right]_{٠}^{ب} = \frac{ب^٤}{٤} + ب^٢ - \frac{أ ب^٣}{٣}$

$م_٢ = \int_{ب}^{جـ} (ق - هـ) دس = \int_{ب}^{جـ} (أ س^٢ - س^٣ - ٢س) دس = \left[\frac{أ س^٣}{٣} - \frac{س^٤}{٤} - س^٢\right]_{ب}^{جـ}$

$= \left(\frac{أ جـ^٣}{٣} - \frac{جـ^٤}{٤} - جـ^٢\right) - \left(\frac{أ ب^٣}{٣} - \frac{ب^٤}{٤} - ب^٢\right) = \frac{أ جـ^٣}{٣} - \frac{جـ^٤}{٤} - جـ^٢ - \frac{أ ب^٣}{٣} + \frac{ب^٤}{٤} + ب^٢$

لكن :- $م_١ = م_٢$

$\frac{ب^٤}{٤} + ب^٢ - \frac{أ ب^٣}{٣} = \frac{أ جـ^٣}{٣} - \frac{جـ^٤}{٤} - جـ^٢ - \frac{أ ب^٣}{٣} + \frac{ب^٤}{٤} + ب^٢$

$\frac{أ جـ^٣}{٣} - \frac{جـ^٤}{٤} - جـ^٢ = ٠ \leftarrow ٤أ جـ - ٣جـ^٢ - ١٢ = ٠$ ——(١)

$ق(جـ) = هـ(جـ) \leftarrow أ جـ^٢ = جـ^٣ + ٢جـ \leftarrow جـ^٢ - أ جـ + ٢ = ٠$ ——(٢)

بحل المعادلتان ينتج $أ = ٣$ ، $جـ = ٢$

$ق(ب) = هـ(ب) \leftarrow أ ب^٢ = ب^٣ + ٢ب$ لكن $أ = ٣$

$ب^٣ + ٢ب - ٣ب^٢ = ٠ \therefore$ $\boxed{ب = ١}$ ، $ب = ٢$ ✗

---

٤٥) $م(س) = ب س^٢ + أ س^٣$ معكوس لمشتقة $ق(س)$ ، $\int_{٢}^{٠} ق(س) دس = -٢٠$

جد أ، ب حيث $ق(١) = ٦$

الحل :- $ق(س) = م'(س) = ٢ب س + ٣أ س^٢$

$ق(١) = ٦ \leftarrow ٢ب + ٣أ = ٦$ ——(١)

$\int_{٢}^{٠} ق(س) دس = -٢٠ \leftarrow \int_{٢}^{٠} م'(س) دس = -٢٠ \leftarrow م(٠) - م(٢) = -٢٠$

$٠ - ٤ب - ٨أ = -٢٠$ ——(٢)

بحل المعادلتان فان $أ = ٤$ ، $ب = -٣$

---

٤٦) جد التكاملات :-

أ) $\int س^٥ هـ^{س^٣} دس$ ب) $\int س جتا \sqrt{س^٢ + ١} دس$

٤٧) جاس = هـ$^{ص}$ أثبت أن ص'' = $-((ص')^2 + 1)$

الحل :- أشتقه :-

جتاس = ص' هـ$^{ص}$ أشتقه مرة أخرى

-جاس = ص'' × ص' هـ$^{ص}$ + هـ$^{ص}$ × ص''

-جاس = $(ص')^2$ هـ$^{ص}$ + هـ$^{ص}$ × ص''

-هـ$^{ص}$ = $(ص')^2$ هـ$^{ص}$ + هـ$^{ص}$ × ص'' نقسم على هـ$^{ص}$

-١ = $(ص')^2$ + ص'' ← ص'' = -١ - $(ص')^2$ = $-(1 + (ص')^2)$

---

٤٨) هـ$^{لو_{هـ} ص}$ = لو$_{هـ}$ $(س^2 ص)^3$ + ٥س$^2$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :-

نبسط أولاً :-

ص = ٣ لو$_{هـ}$ س$^2$ص + ٥س$^2$

ص = ٣ لو$_{هـ}$ س$^2$ + ٣ لو$_{هـ}$ ص + ٥س$^2$ اشتقاق ضمني

ص' = $\frac{6س}{س^2}$ + $\frac{3ص'}{ص}$ + ١٠س

رافت صافي

ص' - $\frac{3ص'}{ص}$ = $\frac{6}{س}$ + ١٠س

ص' $\left(1 - \frac{3}{ص}\right)$ = $\frac{6}{س}$ + ١٠س

$\frac{دص}{دس}$ = $\dfrac{\frac{6}{س} + 10س}{1 - \frac{3}{ص}}$

---

٤٩) جد التكاملات التالية :-

*أ) $\int \frac{س}{قا^2 س}$ دس

*ب) $\int$ س$^2$ لو$_{هـ}$ س دس

*ج) $\int_1^{هـ}$ س$^4$ (لو$_{هـ}$ س)$^2$ دس حيث $\int_1^{هـ}$ س$^4$ لو$_{هـ}$ س دس = $\frac{4هـ^5 + 1}{25}$

٥٠) اذا كان $ق''(س) = جتا2س + هـ^{(س+3)}$ وكان للاقتران $ق(س)$ قيمة صغرى محلية عند $س = 0$ قيمتها (3) جد قاعدة $ق(س)$

الحل :-

$ق''(س) = جتا2س + هـ^{(س+3)}$ بتكامل الطرفين :-

$ق'(س) = \frac{1}{2} جا2س + هـ^{(س+3)} + جـ_1$ ، $ق'(0) = 0$

$ق'(0) = \frac{1}{2} جا0 + هـ^3 + جـ_1$

$0 = 0 + هـ^3 + جـ_1 \leftarrow جـ_1 = -هـ^3$

$ق'(س) = \frac{1}{2} جا2س + هـ^{(س+3)} - هـ^3$ بتكامل الطرفين :-

$ق(س) = \frac{-1}{4} جتا2س + هـ^{(س+3)} - هـ^3 س + جـ_2$ ، $ق(0) = 3$

$ق(0) = \frac{-1}{4} + هـ^3 - 0 + جـ_2$

$3 = \frac{-1}{4} + هـ^3 + جـ_2 \leftarrow جـ_2 = 3 + \frac{1}{4} - هـ^3 = \frac{13}{4} - هـ^3$

$ق(س) = \frac{-1}{4} جتا2س + هـ^{(س+3)} - هـ^3 س + \frac{13}{4} - هـ^3$

---

٥١) اذا كان $ق''(س) = ق'(س)$ ، $ق'(س) \neq 0$ ، ق يمر بـ $(0، 1)$ ميل المماس عند $س = 0$ يساوي (1) جد قاعدة $ق(س)$ ، $ق'(س) > 0$

الحل :- $ق''(س) = ق'(س)$ نقسم على $ق'(س)$ :-

$\frac{ق''(س)}{ق'(س)} = 1$ بتكامل الطرفين

$لو_هـ |ق'(س)| = س + جـ$ ، $ق'(0) = 1$

$لو_هـ ق'(0) = 0 + جـ \leftarrow لو_هـ 1 = 0 + جـ \leftarrow جـ = 0$

$لو_هـ ق'(س) = س \leftarrow ق'(س) = هـ^س$ بتكامل

$ق(س) = هـ^س + جـ$ ، $ق(0) = 1$

$ق(0) = هـ^0 + جـ = 1 \leftarrow 1 + جـ = 1 \leftarrow$ $\boxed{جـ = 0}$

$ق(س) = هـ^س$

---

٥٢) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int \frac{3س جا س^2}{جتا^4 س^2} دس$

ب) $\int_1^4 هـ^{|2س-16|} دس$

٥٣) م(س) معكوس لمشتقة ق(س) ، م(س) = $هـ^{2} + هـ^{\frac{1}{س}} + أ\,لو\sqrt{س}$

جد (أ) حيث ق(١) = هـ

الحل :-

$ق(س) = م'(س) = ٠ + \frac{-١}{س^{2}} هـ^{\frac{1}{س}} + \frac{أ}{٢} \times \frac{١}{س}$

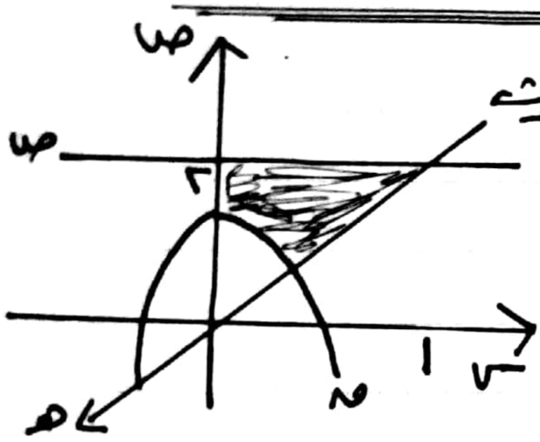
$ق(١) = -١ \times هـ + \frac{أ}{٢}$

$هـ = -هـ + \frac{أ}{٢} \leftarrow \frac{أ}{٢} = ٢هـ \leftarrow أ = ٤هـ$

---

٥٤) جد مساحة المنطقة المظللة حيث

$ق(س) = ١ - ٣س^{2}$



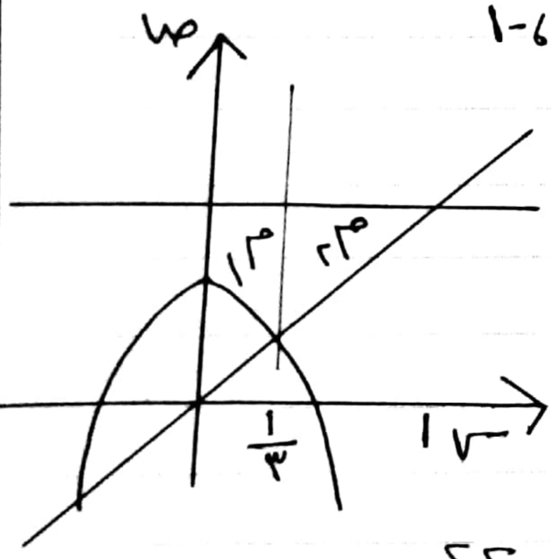
الحل :- نجد أولاً قاعدة ص ، هـ(س)

ص = ٢ وكذلك هـ(س) يمر بـ (٠،٠) ، (١،٢)

$م = \frac{٢-٠}{١-٠} = ٢ \leftarrow ص - ٠ = ٢(س - ٠)$

∴ قاعدة هـ(س) = ٢س

$هـ = ق \leftarrow ١ - ٣س^{2} = ٢س \leftarrow س = \frac{١}{٣} ، -١$



$م_١ = \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (ص - ق) دس$

$= \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (١ + ٣س^{2}) دس = \frac{١٠}{٢٧}$

$م_٢ = \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (ص - هـ) دس$

$= \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (٢ - ٢س) دس = \frac{٤}{٩}$

رأفت هاني

$م = م_١ + م_٢ = \frac{١٠}{٢٧} + \frac{٤}{٩} = \frac{٢٢}{٢٧}$ وحدة مربعة

---

٥٥) جد التكاملات التالية :-

١) $\int \frac{لو_{هـ}(س+١)^{2}}{(٢س-١)^{2}} دس$

٢) $\int \sqrt{٤ - هـ^{س}}\, دس$

٣) $\int \frac{قا\, س}{ظا\, س - ٣ ظتا\, س} دس$

٤) $\int \frac{لو_{هـ} س}{(١ + لو_{هـ} س)^{2}} دس$

٥٦) جد المساحة المحصورة بين م(س) = جا٢س
هـ(س) = ٢جاس في الفترة [٠، ٢π]

الحل: هـ = م
٢جاس = جا٢س
٢جاس = ٢جاس جتاس ← ٢جاس − ٢جاس جتاس = ٠
٢جاس(١ − جتاس) = ٠
٢جاس = ٠ ← س = ٠ ، π ، ٢π
١ − جتاس = ٠ ← جتاس = ١ ← س = ٠ ، ٢π


$م_1 = \int_{0}^{\pi} (٢جاس - جا٢س)\, دس = ٤$

$م_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (جا٢س - ٢جاس)\, دس = ٤$

∴ $م = م_1 + م_2 = ٨$

---

٥٧) بيّن أنه ينحصر $\int_{-1}^{1} \frac{س^2 - 1}{1 + س^2}\, دس$
دون إجراء التكامل.

الحل: $م(س) = \frac{س^2 - 1}{1 + س^2}$ ، س ∈ [−١، ١]

$م' = \frac{(1+س^2)\times 2س - (س^2-1)\times 2س}{(1+س^2)^2} = \frac{2س + 2س^3 - 2س^3 + 2س}{(1+س^2)^2} = \frac{4س}{(1+س^2)^2}$

م′ = ٠ ← ٤س = ٠ ← س = ٠


$-1 \leq \frac{س^2 - 1}{1 + س^2} \leq 0$ ∴ تكامل

$\int_{-1}^{1} -1\, دس \leq \int_{-1}^{1} \frac{س^2 - 1}{1 + س^2}\, دس \leq \int_{-1}^{1} 0\, دس$ ← صفر
↘ −٢

---

٥٨) جد التكاملات التالية:-

أ) $\int \frac{جتاس}{8 + جتا^2س}\, دس$

ب) $\int \frac{هـ^{2س}}{قتا(هـ^س + 1)}\, دس$

جـ) $\int قتا^2س \, لو_{هـ}(قتا^2س - ظتا^2س)\, دس$

د) $\int \frac{ظتاس}{\sqrt{5 - جا^2س}}\, دس$

٥٩) ق يمر بـ (٣،١٢)، (٢،٥)، $\int_{٢}^{٣} س ق''(س) دس = ١٨$ جد $\int_{٣}^{٢} (ق'(س) + ٢س) دس$

الحل :- نوظف المعطيات :-

$ع = س$ ، $دص = ق''(س) دس$

$دع = دس$ ، $ص = ق'(س)$

$\int_{٢}^{٣} س ق''(س) دس = ١٨$

$[س ق'(س)]_{٢}^{٣} - \int_{٢}^{٣} ق'(س) دس = ١٨$

$٣ق'(٣) - ٢ق'(٢) - \int_{٢}^{٣} ق'(س) دس = ١٨ \leftarrow ٣٦ - ١٠ - ١٨ = \int_{٢}^{٣} ق'(س) دس \leftarrow \int_{٢}^{٣} ق'(س) دس = ٨$

$\therefore \int_{٣}^{٢} (ق'(س) + ٢س) دس = \int_{٣}^{٢} ق'(س) دس + [س^٢]_{٣}^{٢} = -٨ + (٤ - ٩) = -١٣$

---

٦٠) يزداد عدد السمك بمعدل ٢٠٪ من عدده يومياً، فإذا كان عدد السمك الآن هو ١٠٠ سمكة. كم يصبح عدد السمك بعد ٥٠ يوم.

الحل :- المعادلة غير جاهزة :-

$\frac{دع}{دن} = \frac{٢٠}{١٠٠} ع = \frac{١}{٥} ع$ حيث ع: عدد السمك ، ن: الزمن

$\frac{دع}{ع} = \frac{١}{٥} دن$ بكامل

$لو_{هـ} |ع| = \frac{١}{٥} ن + جـ$ لكن $ع(٠) = ١٠٠$

$لو_{هـ} ١٠٠ = \frac{١}{٥} \times ٠ + جـ \leftarrow جـ = لو_{هـ} ١٠٠$

رافت صافي

$لو_{هـ} |ع| = \frac{١}{٥} ن + لو_{هـ} ١٠٠$ عند $ن = ٥٠$

$لو_{هـ} ع = ١٠ + لو_{هـ} ١٠٠ \leftarrow ع = هـ^{١٠ + لو_{هـ} ١٠٠} = ١٠٠ هـ^{١٠}$

---

٦١) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int هـ^{(قتاس + ٣ لو_{هـ} جاس)} دس$

ب) $\int \frac{س جاس}{قتا٢س + جا^٢س} دس$

جـ) $\int_{-٤}^{٠} \frac{س}{\sqrt{٩ + س^٢} + |س|} دس$

د) $\int (٣س - قتا٢س)^٢ دس$


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٦٢) م(س) معكوس لمشتقة ق(س) وكان م(١)=٣ ، م(٤)=٧

وكان $\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}ق(س) + \frac{2هـ^{لوهـ س^3}}{س^2} + أ\right)دس = 12$ جد (أ) .

الحل :-

$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}م'(س) + \frac{2هـ^{لوهـ س^3}}{س^2} + أ\right)دس = 12$

$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}م'(س) + \frac{2س^3}{س^2} + أ\right)دس = 12$ تكامل

$\frac{1}{2}\left[م(4) - م(1)\right] + \left[س^2\right]_{1}^{4} + أ(4-1) = 12$

$\frac{1}{2}(7-3) + (16-1) + 3أ = 12 \longleftarrow أ = \frac{-5}{3}$

---

٦٣) $ق(س)\, قتاس + \int ق(س)\, جاس\, دس = \int هـ^س\, قتاس\, دس$

جد ق(س) حيث ق(٠)=٣

الحل :- اشتقاق الطرفين :-

$-ق(س)\, جاس + قتاس \times ق'(س) + ق(س)\, جاس = هـ^س\, قتاس$

$قتاس\, ق'(س) = هـ^س\, قتاس$

$ق'(س) = هـ^س$ تكامل

$ق(س) = هـ^س + جـ$

$ق(0) = هـ^0 + جـ = 3 \longleftarrow جـ = 3 - 1 = 2$

$ق(س) = هـ^س + 2$

---

٦٤) جد التكاملات الآتية :-

أ) $\int جتاس\, قا\sqrt{1 - جتا^2س}\, دس$

ب) $\int \frac{قتا^4س}{قتا^2س - 5}\, دس$

جـ) $\int جا^3 2س\, قا^5 2س\, دس$

د) $\int جا^2 2س\, جتا^4 2س\, دس$

هـ) $\int \frac{\sqrt{س + 9س}}{3 - \sqrt{9 + س}}\, دس$

و) $\int \frac{(1+س)^3}{\sqrt{س^2 + 2س}}\, دس$


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٦٥) $د'(س) = ٢جتاس - م''(س)$ جد قاعدة $د(س)$ حيث $م(س)$ معكوس لمشتقة $د(س)$ ، $د(٠) = ٢$

الحل :-

$د(س) = م'(س) \leftarrow د'(س) = م''(س)$

$د'(س) = ٢جتاس - د'(س)$ نرتب

$٢د'(س) = ٢جتاس \leftarrow د'(س) = جتاس$ بتكامل

$د(س) = جاس + جـ$ لكن $د(٠) = ٢$

$د(٠) = جا٠ + جـ = ٢ \leftarrow جـ = ٢$

$د(س) = جاس + ٢$

---

٦٦) $د(س) = \int (هـ^{جاس} + لو_{هـ}(أس+١)^{٣}) دس$ جد (أ) حيث $د''(٠) = ٧$

الحل :-

$د'(س) = هـ^{جاس} + ٣لو_{هـ}(أس+١)$

اقتصاصي

$د''(س) = جتاس\, هـ^{جاس} + \frac{٣أ}{أس+١}$

$د''(٠) = ١ + ٣أ = ٧ \leftarrow ٣أ = ٦ \leftarrow \boxed{أ = ٢}$

---

٦٧) $-٦ \le د(س) \le ٠$ لكل $س \in [-٢، ٤]$ جد أكبر قيمة ممكنة للتكامل $\int_{-٢}^{٤} \frac{٢}{\sqrt{٤-٢د(س)}} دس$ دون اجراء التكامل

الحل :-

$-٦ \le د(س) \le ٠$

$٠ \le -٢د(س) \le ١٢$

$٤ \le ٤-٢د(س) \le ١٦$

$٢ \le \sqrt{٤-٢د(س)} \le ٤$

$\frac{١}{٤} \le \frac{١}{\sqrt{٤-٢د(س)}} \le \frac{١}{٢} \leftarrow \int_{-٢}^{٤} \frac{٢ دس}{\sqrt{٤-٢د(س)}} \le \int_{-٢}^{٤} \frac{٢}{٢} دس = \int ١ دس \swarrow ٦$

---

٦٨) جد التكاملات :-

أ) $\int \frac{دس}{١+جتاس}$ ب) $\int^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{ظاس}}{جا٢س} دس$

٦٩) إذا كان $\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} أ\ جام\ دم + 3س^2\right)دس = 6$ جد (أ)

الحل :-

نجد التكامل الداخلي ← $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} أ\ جام\ دم = [-أ\ جتام]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + أ = أ$

$\int_{-1}^{2}(أ + 3س^2)دس = 6 \leftarrow 3أ + [س^3]_{-1}^{2} = 6 \leftarrow 3أ + (8+1) = 6 \leftarrow \boxed{أ = -1}$

---

٧٠) $\int_{-1}^{هـ} |س-1|دس = \frac{5}{2}$ جد (هـ) حيث هـ > ١

الحل :-

$|س-1| = \frac{س-1}{1} \quad \frac{1-س}{-1}$ (هـ)

$\int_{-1}^{هـ}|س-1|دس = \int_{-1}^{1}(1-س)دس + \int_{1}^{هـ}(س-1)دس$

$\frac{5}{2} = [س - \frac{س^2}{2}]_{-1}^{1} + [\frac{س^2}{2} - س]_{1}^{هـ}$

$\frac{5}{2} = (1 - \frac{1}{2}) - (-1 - \frac{1}{2}) + (\frac{هـ^2}{2} - هـ) - (\frac{1}{2} - 1) \leftarrow هـ = 2 ، 0 \times$

---

٧١) $\int_{-1}^{3} 2ق(س)دس = 4$ ، $\int_{3}^{-1}(\frac{ق(س)}{5} + أ)دس = 1$ ، $\int_{1}^{-1}(5ق(س) - 2س)دس = 40$

جد (أ).

الحل :-

$\int_{-1}^{3} 2ق(س)دس = 4 \leftarrow \int_{-1}^{3} ق(س)دس = 2$

$\int_{1}^{-1}(5ق(س) - 2س)دس = 40 \leftarrow 5\int_{1}^{-1} ق(س)دس - [س^2]_{1}^{-1} = 40$

$5\int_{1}^{-1} ق(س)دس - 1 = 40 \leftarrow \int_{1}^{-1} ق(س)دس = \frac{41}{5}$

$\int_{3}^{-1}(\frac{ق(س)}{5} + أ)دس = 1 \leftarrow \frac{1}{5}[\int_{3}^{1} ق(س)دس + \int_{1}^{-1} ق(س)دس] + -3أ = 1$

$\frac{1}{5}[-2 + \frac{-41}{5}] + -3أ = 1 \leftarrow أ = \frac{-76}{75}$

---

٧٢) جد التكاملات :-

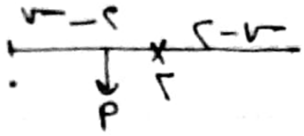
أ) $\int \frac{ظاس}{9 - (لو_{هـ} جتاس)^2} دس$

ب) $\int \frac{5س\sqrt{9+س}}{3 - \sqrt{9+س}} دس$

٧٣) $\int_{0}^{أ} \sqrt{4-4س+س^2}\,دس = \frac{3}{2}$ جد (أ) حيث $0 < أ < 2$

الحل :-

$\int_{0}^{أ} \sqrt{(س-2)^2}\,دس = \frac{3}{2}$




$\int_{0}^{أ} |س-2|\,دس = \frac{3}{2}$

$\int_{0}^{أ} (2-س)\,دس = \frac{3}{2} \leftarrow \left[2س - \frac{س^2}{2}\right]_{0}^{أ} = \frac{3}{2}$

$(2أ - \frac{أ^2}{2}) - 0 = \frac{3}{2} \leftarrow أ = 1 ، 3$ ✗

رافت صافي

---

٧٤) $\int_{-1}^{0} \frac{(1+ب س)}{س^2+س-2}\,دس = لو_{هـ} 2$ جد (ب).

الحل :-

$\frac{1+ب س}{س^2+س-2} = \frac{أ}{(س+2)} + \frac{جـ}{(س-1)}$

$= \frac{أ(س-1)+جـ(س+2)}{(س+2)(س-1)}$

$1+ب س = أ(س-1)+جـ(س+2)$

عند $س=1 \leftarrow 1+ب = 3جـ \leftarrow جـ = \frac{1+ب}{3}$

عند $س=-2 \leftarrow 1-2ب = -3أ \leftarrow أ = \frac{2ب-1}{3}$

$\int_{-1}^{0} \left( \frac{\frac{2ب-1}{3}}{س+2} + \frac{\frac{1+ب}{3}}{س-1} \right) دس = لو_{هـ} 2$

$\left[ \frac{2ب-1}{3} لو_{هـ}|س+2| + \frac{1+ب}{3} لو_{هـ}|س-1| \right]_{-1}^{0} = لو_{هـ} 2$

$\frac{2ب-1}{3} لو_{هـ} 2 - \left(\frac{1+ب}{3}\right) لو_{هـ} 2 = لو_{هـ} 2$

نقسم على $لو_{هـ} 2$

$\frac{2ب-1}{3} - \frac{(ب+1)}{3} = 1 \leftarrow \frac{ب-2}{3} = 1 \leftarrow ب-2 = 3 \leftarrow$ $\boxed{ب = 5}$

---

٧٥) جد التكاملات :-

أ) $\int \frac{قا س}{قا 3س}\,دس$

ب) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{4-4جا^2 س}\,دس$

هـ) $\int \frac{(س+3)^2}{(س-5)^4}\,دس$

د) $\int \frac{(س-1)هـ^{س}}{س^2}\,دس$


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٧٦) إذا كان $\int_{2}^{4} \left( \int_{1}^{} ن(س)\, دس \right) دس = 10$ جد $\int_{2}^{1} (ن(س) - 2س)\, دس$

الحل: $\int_{1}^{2} ن(س)\, دس = أ$ ((تكامل محدود ثابت))

$\int_{2}^{4} أ\, دس = 10 \leftarrow 2أ = 10 \leftarrow \boxed{أ = 5}$

$\therefore \int_{2}^{1} (ن(س) - 2س)\, دس = \int_{2}^{1} ن(س)\, دس - [س^2]_{2}^{1} = -5 - (1-4) = -2$

---

٧٧) يتحرك جسم حسب العلاقة ت + ١٢ع = ٠ جد سرعة الجسم بعد ٤ ثوانٍ علماً بأن سرعته بعد ٢ ثانية تساوي هـ م/ث

الحل:

$ت = -12ع$

$\frac{دع}{دن} = -12ع \leftarrow \frac{دع}{ع} = -12\, دن$ بالتكامل

$لو_هـ|ع| = -12ن + حـ$ عند $ع(2) = هـ$

$لو_هـ هـ = -24 + حـ \leftarrow حـ = 25$

$لو_هـ|ع| = -12ن + 25$ عند $ن = 4$

$لو_هـ|ع| = -48 + 25 \leftarrow لو_هـ|ع| = -23 \leftarrow |ع| = هـ^{-23}$

$\leftarrow ع = \pm هـ^{-23}$

---

٧٨) جد التكاملات التالية:

أ) $\int \frac{قا^2(1 - هـ^{-س})}{هـ^{س}}\, دس$

ب) $\int هـ^{جاس - لو_هـ قاس}\, دس$

جـ) $\int \frac{3\, دس}{س + 3 + 4\sqrt{س}}$

د) $\int جا(لو_هـ س^3)\, دس$

هـ) $\int^{25} \frac{دس}{\sqrt{\sqrt{س} + 4}}$

و) $\int \frac{(1 - هـ^{-س})^4}{هـ^{5س}}\, دس$

٧٩) ق(س) معكوس مشتقة هـ(س)، ق(٠) = ١، ق'(٠) = ٢، ق(١) = ٣
ق'(١) = −٢ جد $\int_0^1$ س هـ''(س) دس

الحل :-

هـ = س ، دهـ = دس ← دع = هـ''(س) دس ، ع = هـ'(س) ، ق'(س) = هـ(س)

$\left[\text{س هـ'(س)}\right]_0^1 - \int_0^1$ هـ'(س) دس = هـ'(١) − ٠ − [ق(١) − ق(٠)]   (هـ'(س) = ق''(س))

= −٢ − [٣ − ١] = −٢ − ٢ = −٤

---

٨٠) هـ''(س) = $\frac{1}{(\text{هـ'(س)})^2}$ جد قاعدة هـ(س) حيث هـ(١) = ١، هـ'(١) = ٠

الحل :-

ص = هـ'(س)
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ''(س)
دس = $\frac{\text{دص}}{\text{هـ''(س)}}$

هـ''(س) × (هـ'(س))² = ١ بالتكامل

∫ هـ''(س) × (هـ'(س))² دس = س + جـ

∫ هـ''(س) × ص² $\frac{\text{دص}}{\text{هـ''(س)}}$ = س + جـ

$\frac{1}{3}$(هـ'(س))³ = س + جـ عند س = ١ ← $\frac{1}{3}$ × ٠ = ١ + جـ ← جـ = −١

(هـ'(س))³ = ٣س − ٣ بجذر الطرفين التكعيبي

هـ'(س) = $\sqrt[3]{\text{٣س − ٣}}$ بالتكامل

هـ(س) = $\frac{1}{4}$(٣س − ٣)$^{\frac{4}{3}}$ + جـ عند س = ١

هـ(١) = ٠ + جـ = ١ ← **جـ = ١**

هـ(س) = $\frac{1}{4}$(٣س − ٣)$^{\frac{4}{3}}$ + ١

---

٨١) جد التكاملات التالية :-

أ) ∫ $\frac{\text{س جتاس}}{\text{جا٢س − ٢جتاس}}$ دس    ب) ∫ (جا٢س − جاس)² دس

جـ) ∫ $\frac{\text{هـ}^{\text{ظاس}}}{(\text{١ − جا}^2\text{س})^2}$ دس    د) ∫ $\frac{\text{س}}{\text{٢ + ٤ جاس جتاس}}$ دس

٨٢) يزداد عدد الأسماك في بركة حسب العلاقة $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{م ل}$

اذا زاد عددها من ٣٠ إلى ٤٠ خلال ١٠ أيام ، جد عدد السمك بعد ٥٠ يوم.

الحل :-

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{م ل} \leftarrow \frac{\text{دل}}{\text{ل}} = \text{م دن}$ تكامل

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ل}| = \text{م ن} + \text{جـ}$ لكن $\text{ل}(٠) = ٣٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}٣٠ = ٠ + \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ل} = \text{م ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}٣٠$ لكن $\text{ل}(١٠) = ٤٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}٤٠ = ١٠\text{م} + \text{لو}_{\text{هـ}}٣٠ \leftarrow ١٠\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}٤٠ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣٠ = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٤}{٣} \rightarrow \text{م} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٤}{٣}}{١٠}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ل} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٤}{٣}}{١٠}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}٣٠$ عند $\text{ن} = ٥٠ \leftarrow \ldots\ldots$ ٦٤٠

---

٨٣) حل المعادلة التفاضلية :- $١ + \text{هـ}^{-٢\text{ص}} + \text{هـ}^{٣\text{س}-٢\text{ص}} + \text{هـ}^{٣\text{س}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :-

$١ + \text{هـ}^{-٢\text{ص}} + \text{هـ}^{٣\text{س}}(\text{هـ}^{-٢\text{ص}} + ١) = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$(١ + \text{هـ}^{-٢\text{ص}})(١ + \text{هـ}^{٣\text{س}})\,\text{دس} = \text{دص}$ نقسم على $١ + \text{هـ}^{-٢\text{ص}}$

$\frac{\text{دص}}{١ + \text{هـ}^{-٢\text{ص}}} = (١ + \text{هـ}^{٣\text{س}})\,\text{دس}$ تكامل

$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص}}{\text{هـ}^{٢\text{ص}} + ١} = \int (١ + \text{هـ}^{٣\text{س}})\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{٢\text{ص}} + ١| = \text{س} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جـ}$

رأفت صافي

---

٨٤) جد التكاملات التالية :-

أ) $\int \frac{٨\text{س}^{٥}}{٤\text{س}^{٨} + ٢\text{س}^{٦}}\,\text{دس}$

ب) $\int \frac{٣\,\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٣}\text{س} - \text{جاس}}\,\text{دس}$

٨٥) حل المعادلة التفاضلية $س \frac{دص}{دس} = -١ + ص + س^٢ ص - س^٢$

علماً بأن ص = ٢ عندما س = هـ

الحل :-

$س \frac{دص}{دس} = ص - ١ + س^٢(ص - ١) = (ص - ١)(١ + س^٢)$

$\frac{دص}{ص - ١} = \left(\frac{س^٢ + ١}{س}\right) دس = \left(س + \frac{١}{س}\right) دس$ تكامل

$لو_{هـ}|ص - ١| = لو_{هـ}|س| + \frac{س^٢}{٢} + جـ$ عند ص = ٢ ، س = هـ

$لو_{هـ}١ = لو_{هـ}هـ + \frac{هـ^٢}{٢} + جـ \leftarrow جـ = -١ - \frac{هـ^٢}{٢}$

$\therefore لو_{هـ}|ص - ١| = لو_{هـ}|س| + \frac{س^٢}{٢} - \frac{هـ^٢}{٢} - ١$

---

٨٦) اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنٍ علاقة عند أي نقطة واقعة عليه هو $\frac{\sqrt{س}}{١ - س}$ وكان منحني العلاقة يمر بـ (٩، -١٢) اثبت ان $ص^٢ = ٤س(١ - \frac{١}{٣}س)^٢$.

الحل :-

$\frac{دص}{دس} = \frac{س - ١}{\sqrt{س}} \leftarrow دص = (س^{\frac{١}{٢}} - س^{-\frac{١}{٢}}) دس$ تكامل

$ص = ٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$ عند (٩، -١٢)

$-١٢ = ٢ \times ٣ - \frac{٢}{٣} \times ٢٧ + جـ \leftarrow جـ = ٠$

$ص = ٢\sqrt{س} - \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣}$ نربع

$ص^٢ = ٤س - \frac{٨}{٣}\sqrt{س^٤} + \frac{٤}{٩}س^٣ = ٤س - \frac{٨}{٣}س^٢ + \frac{٤}{٩}س^٣$

$ص^٢ = ٤س(١ - \frac{٢}{٣}س + \frac{١}{٩}س^٢) = ٤س(١ - \frac{١}{٣}س)^٢$

---

٨٧) جد التكاملات :-

١) $\int ظا^٢\sqrt{س}\, دس$

٢) $\int هـ^{٢س} جا^٢(هـ^س) جتا(هـ^س)\, دس$

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{\sqrt{هـ^{٢س} + ٢هـ^س + ١}}{هـ^{٢س} - ١}\, دس$

٤) $\int \frac{٢س^٣}{س^٤ - س^٢ - ٢}$


رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٨٨) جد $\int$ س جا(لو$_{هـ}$ س) دس

الحل: ص = لو$_{هـ}$ س

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$ ← دس = س دص

$\int$ س$^2$ جا ص دص

$\int$ هـ$^{2ص}$ جا ص دص "اجزاء مكرر"

ص = لو$_{هـ}$ س
س = هـ$^{ص}$
س$^2$ = هـ$^{2ص}$

٨٩) جد $\int \frac{جا ٢س}{قتا^4 س - قتا^2 س - ٦}$ دس

الحل: $\int \frac{جا ٢س}{(قتا^2 س - ٣)(قتا^2 س + ٢)}$ دس

ص = جا$^2$ س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا س جا س = جا ٢س ← دس = $\frac{دص}{جا ٢س}$

$\int \frac{جا ٢س}{(ص - ٣)(ص + ٢)} \times \frac{دص}{جا ٢س} = \int \frac{دص}{(ص - ٣)(ص + ٢)}$ كسور جزئية

٩٠) ق$'$(س) = $\int \frac{(ق'(س))^2}{جا^2 س}$ دس جد قاعدة ق(س)

حيث ق$'$($\frac{\pi}{4}$) = ١ ، ق($\frac{\pi}{4}$) = ١

الحل: اشتقاق الطرفين:

ق$''$(س) = $\frac{(ق'(س))^2}{جا^2 س}$ = (ق$'$(س))$^2$ قتا$^2$ س    نقسم على (ق$'$(س))$^2$

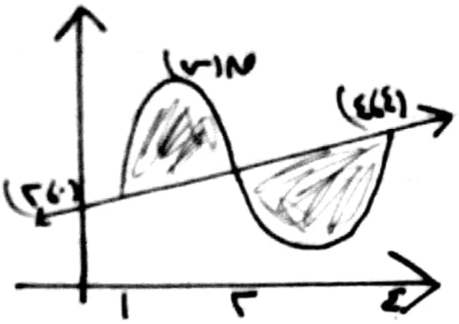
$\frac{ق''(س)}{(ق'(س))^2}$ = قتا$^2$ س   نكامل

$\frac{-1}{ق'(س)}$ = − ظتا س + ج$_1$   عند ق$'$($\frac{\pi}{4}$) = ١ ← ج = ٠ .   نقلب الطرفين

ق$'$(س) = ظا س   نكامل

ق(س) = − لو$_{هـ}$ |جتا س| + ج$_2$   عند ق($\frac{\pi}{4}$) = ١ ← ج$_2$ = ١ + لو$_{هـ}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

٩١) في الشكل المجاور ، $\int_{1}^{4} ق(س)\,دس = 6$ ، $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = 4$
اذا كانت تكلفة دهان الوحدة للوحدة المنطقة المحصورة في [١،٢] نصف دينار ، تكلفة دهان المنطقة المحصورة في [٣،٤] دينار ، جد التكلفة الكلية لدهان المنطقتين



الحل :- نجد اولاً معادلة الخط المستقيم المار بـ (٠،٢)،(٤،٤)

$ص = \frac{1}{2}س + 2$

$م_1 = \int_{1}^{3} \left(ق(س) - (\frac{1}{2}س + 2)\right) دس$ نوزع

$= 4 - [\frac{س^2}{4} + 2س]_{1}^{3} = \frac{5}{4}$ ← التكلفة $= \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

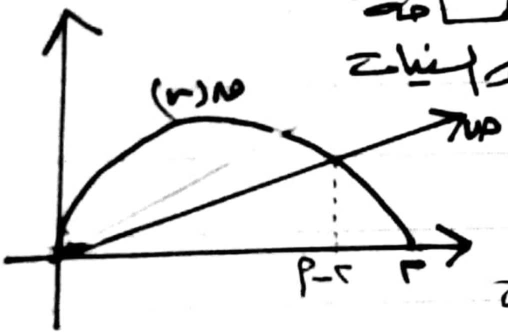
$م_2 = \int_{3}^{4} \left((\frac{1}{2}س + 2) - ق(س)\right) دس = [\frac{س^2}{4} + 2س]_{3}^{4} - 2 = 5$ ← التكلفة $= 5 \times 1 = 5$

$\int_{1}^{4} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} ق(س)\,دس + \int_{3}^{4} ق(س)\,دس$
$6 = 4 + \int_{3}^{4} ق(س)\,دس$

∴ التكلفة الكلية $= \frac{5}{8} + 5 = \frac{45}{8}$

---

٩٢) رسم المستقيم ص = م س ليقسم المساحة المحصورة بين $ق(س) = 2س - س^2$ ومحور السينات الى مساحتين متساويتين
جد قيمة الثابت (م)



الحل :- نجد المساحة المحصورة بين ق ومحور السينات

$م = \int_{0}^{2} (2س - س^2)\,دس = \frac{4}{3}$

نجد نقطة تقاطع ص مع ق(س) ← $2س - س^2 = م س$ ← $س = 2 - م$

$\int_{0}^{2-م} (2س - س^2 - م س)\,دس = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ ← $م = 2 - \sqrt[3]{4}$

---

٩٣) جد تكاملات :-

١) $\int \frac{دس}{1 + هـ^{س}}$

٢) $\int_{1}^{2} \left(3س + \int_{1}^{\frac{1}{2}} (3س - 4)^2\,دس\right) دس$

٣) $\int (قتا 2س - ظا س)^2\,دس$

٤) $\int \frac{ظا 2س - س}{قتا 2س}\,دس$

٩٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \times \int (2\text{س} - 3\,\text{ق}'(\text{س}))\, d\text{س}$ جد ق'(٣) حيث ق(٣) = ٣

الحل :- اضرب الطرفين في (س) :-

$\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) = \int (2\text{س} - 3\,\text{ق}'(\text{س}))\, d\text{س}$ ← اشتق الطرفين

$\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) = 2\text{س} - 3\,\text{ق}'(\text{س})$ عند س = ٣ ← $\text{ق}'(3) = \frac{1}{2}$

---

٩٥) م(س) معكوس لمشتقة ق(س) ، م''(س) = ٦س − ٢ ، $\int_{0}^{6} \text{ق}(\text{س})\, d\text{س} = 6\text{أ}$

م'(٠) = ٠ . جد الثابت (أ).

الحل :- م''(س) = ٦س − ٢ تكامل الطرفين :-

$\text{م}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{جـ}$ عند م'(٠) = ٠ ← جـ = ٠

$\int_{0}^{6} \text{ق}(\text{س})\, d\text{س} = \int_{0}^{6} (3\text{س}^2 - 2\text{س})\, d\text{س} = 6\text{أ}$

$[\text{س}^3 - \text{س}^2]_{0}^{6} = 6\text{أ}$ ← أ = ٣٠

---

٩٦) اذا كان $\left(\int \text{ق}(\text{س})\, d\text{س}\right)^2 = 1 + 2\text{س}$ جد ق(٠) حيث ق'(٠) = ١

الحل :- اشتق الطرفين :-

$2 \times \int \text{ق}(\text{س})\, d\text{س} \times \text{ق}(\text{س}) = 2$ اقسم على ٢ ق(س)

$\int \text{ق}(\text{س})\, d\text{س} = \frac{1}{\text{ق}(\text{س})}$ اشتق مرة اخرى

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{-1 \times \text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})}$ ← $\text{ق}^3(\text{س}) = -\text{ق}'(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{-\text{ق}'(\text{س})}$ ← $\text{ق}(0) = \sqrt[3]{-\text{ق}'(0)} = -1$

---

٩٧) جد التكاملات :-

١) $\int \frac{d\text{س}}{\text{جا}^4\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}$

٢) $\int \frac{\text{س}}{1 + \text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}}\, d\text{س}$

٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{س}^2 \sqrt{2 + 2\,\text{جتا}\,2\text{س}}\, d\text{س}$

٤) $\int \text{ظا}^2\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}^2\,\text{س}\, d\text{س}$

٥) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س}^4}}{\text{س}^5}\, d\text{س}$

٦) $\int \frac{6}{3 - \text{س}^2}\, d\text{س}$

٩٨) ق(س) = ٤ م(س) حيث م(س) معكوس لمشتقة ق(س)، م(٢) = ١ جد ق(٥) حيث م(س) > صفر

الحل:

$ق(س) = ٤ م(س) \leftarrow \frac{ق(س)}{م(س)} = ٤$ بتكامل الطرفين

$لو_هـ |م(س)| = ٤س + ج_١$ عند $م(٢) = ١ \leftarrow ج_١ = -٨$

$لو_هـ |م(س)| = ٤س - ٨ \leftarrow م(س) = هـ^{٤س-٨}$ نشتق

$م'(س) = ٤ هـ^{٤س-٨} \leftarrow ق(٥) = م'(٥) = ٤هـ^{١٢}$

---

٩٩) م(س) معكوس لمشتقة ق(س) حيث:

$م(س) + \int س ق(س) دس = س^٣ - س - ٢$ جد $\int_٠^١ ٢ق'(س) دس$

الحل: اشتق الطرفين:

$م'(س) + س ق(س) = ٣س^٢ - ١$ لكن $م'(س) = ق(س)$

$ق(س) + س ق(س) = ٣س^٢ - ١ \leftarrow ق(س) = \frac{٣س^٢ - ١}{س + ١}$

$\therefore \int_٠^١ ٢ق'(س) دس = ٢[ق(١) - ق(٠)] = ٢[١ - -١] = ٤$

---

١٠٠) اذا كان $-٣ \le ق(س) \le ١$ في $[-١، ٢]$ وكان

$م \le \int_{-١}^{٢} \sqrt{٥|ق(س)| + ١}\, دس \le ن$ جد م، ن

الحل:

$-٣ \le ق(س) \le ١$ ناخذ القيمة المطلقة

$٠ \le |ق(س)| \le ٣$

$٠ \le ٥|ق(س)| \le ١٥$

$١ \le ٥|ق(س)| + ١ \le ١٦$ جذر الطرفين

$١ \le \sqrt{٥|ق(س)| + ١} \le ٤$ بتكامل $\leftarrow م = ٣$ ، $ن = ١٢$

---

١٠١) جد التكاملات:

١) $\int^{٣} (هـ^س \times \sqrt{هـ^س - ١})\, دس$

٢) $\int^{٤} \frac{قا^٢ س}{قا^٢ س - ٥}\, دس$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٠٢) جد $\int_{1}^{هـ^3} |لو_{هـ} س - 2| \, دس$

:- إعادة تعريف :-

$لو_{هـ} س = 2 \leftarrow س = هـ^2$

إشارات: $1$ (− −) $هـ^2$ (+ +) $هـ^3$

الحل :-

$$\int_{1}^{هـ^2} (2 - لو_{هـ} س) \, دس + \int_{هـ^2}^{هـ^3} (لو_{هـ} س - 2) \, دس$$

$$= \left[2س - س لو_{هـ} س + س\right]_{1}^{هـ^2} + \left[س لو_{هـ} س - س - 2س\right]_{هـ^2}^{هـ^3} = هـ^2 + 1$$

---

١٠٣) $ق(س) = \int \frac{أ^2}{1 + جا س} \, دس + هـ^{أ جا س} + لو_{هـ} قتا س$ جد (أ)

حيث $ق'(0) = 2$

الحل :- اشتق $\leftarrow ق'(س) = \frac{أ^2}{1 + جا س} + أ جتا س \, هـ^{أ جا س} + \frac{-جتا س}{جا س}$

$ق'(0) = أ^2 + أ + 0 = 2 \leftarrow أ^2 + أ - 2 = 0 \leftarrow أ = 1 ، -2$

---

١٠٤) جد التكاملات :-

1) $\int_{0}^{لو_{هـ} 3} هـ^{2س} (هـ^{2س} - 1)^{\frac{-1}{2}} \, دس$

2) $\int \frac{جتا س}{جتا 2س} \, دس$ ← متطابقة $1 - 2جا^2 س$

3) $\int \frac{دس}{\sqrt{1 + س} \times س}$

4) $\int \frac{س \, لو_{هـ} س}{(س^2 + 1)^2} \, دس$

5) $\int \frac{(س + 3)}{(س - 2)^4} \, دس$

6) $\int جتا(لو_{هـ} س^3) \, دس$

7) $\int \frac{3}{\sqrt{9 + \sqrt{س}}} \, دس$

8) $\int هـ^س (ظتا س - قتا^2 س) \, دس$

9) $\int \frac{(هـ^س - 1)^4}{هـ^{5س}} \, دس$

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{جا س + 1} \, دس$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٠٥) $ص \, لو_{هـ} س = س \frac{دص}{دس}$ حل المعادلة التفاضلية حيث $ص = هـ$ عند $س = هـ$

الحل :-

$$ص \, لو_{هـ} س = س \frac{دص}{دس}$$

$$س \, دص = ص \, لو_{هـ} س \, دس$$ نقسم على $س \times ص$

$$\frac{دص}{ص} = \frac{لو_{هـ} س}{س} \, دس$$ تكامل

$$لو_{هـ} |ص| = \frac{(لو_{هـ} س)^2}{2} + جـ$$ عند (هـ ، هـ)

$$لو_{هـ} هـ = \frac{(لو_{هـ} هـ)^2}{2} + جـ \leftarrow جـ = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad لو_{هـ} ص = \frac{(لو_{هـ} س)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

---

١٠٦) م(س) معكوس مشتقة ق(س) بحيث $م(س) = لو_{هـ} \sqrt{16 + س^2}$ جد $\int_0^3 (ق'(س) + 3) \, دس$

الحل :-

$$\int_0^3 (ق'(س) + 3) \, دس = [ق(س) + 3س]_0^3$$

$$= (ق(3) + 9) - (ق(0) + 0)$$

$$= \frac{3}{25} + 9 - 0 = \frac{228}{25}$$

$$ق(س) = م'(س)$$

$$= \frac{\frac{2س}{2\sqrt{16+س^2}}}{\sqrt{16+س^2}}$$

$$= \frac{س}{16 + س^2}$$

---

١٠٧) $ص = (س^2 + 1)^{3س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 1$

الحل :-

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$لو_{هـ} ص = 3س \, لو_{هـ} (س^2 + 1)$$ نشتق ضمنياً

$$\frac{ص'}{ص} = 3س \times \frac{2س}{س^2 + 1} + لو_{هـ} (س^2 + 1) \times 3$$

$$ص' = \left( \frac{6س^2}{س^2 + 1} + 3 \, لو_{هـ} (س^2 + 1) \right) \times ص$$

$$\frac{دص}{دس} = (3 + 3 \, لو_{هـ} 2) \times 8$$

نحتاج (ص)

عند $س = 1$ :-

$$ص = (1 + 1)^3$$

$$= 8$$

١٠٨) إذا كان $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = ٤$ ، ق(١) = ٠ ، ق(٠) = ٢ جد

$\int_{1}^{\text{هـ}} \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{ق}'(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$

الحل: ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ← دس = س دص

عند س = ١ ← ص = ٠ ، عند س = هـ ← ص = ١

| |
|---|
| ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ |
| س = $\text{هـ}^{\text{ص}}$ |
| $\frac{1}{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{ص}}$ |

$\int_{0}^{1} \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{ق}'(\text{ص}) \times \text{س}\,\text{دص} = \int_{0}^{1} \frac{1}{\text{س}}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \int_{0}^{1} \text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}$ اجزاء

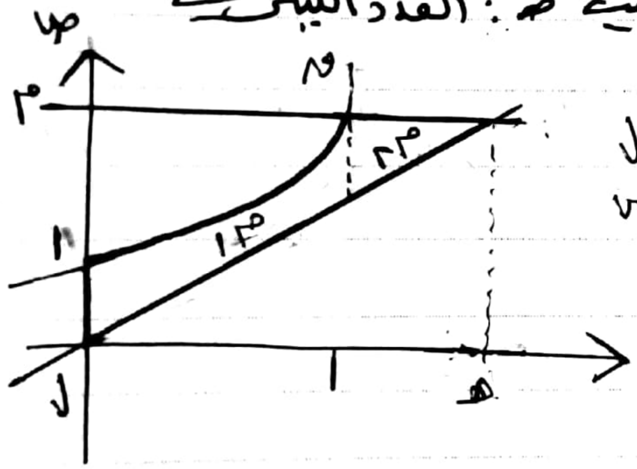
ق = $\text{هـ}^{-\text{ص}}$ ، دم = ق′(ص) دص

دق = $-\text{هـ}^{-\text{ص}}$ ← م = ق(ص)

$[\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{ق(ص)}]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{ق(ص)}\,\text{دص} = \text{هـ}^{-1} \times \text{ق(1)} - \text{هـ}^{0} \times \text{ق(0)} + {}^{-}4 = {}^{-}6$

---

١٠٩) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، م(س) = هـ ، ل(س) = س ومحور الصادات حيث هـ: العدد النيبيري




الحل: التقاطع:

| ق = م | ق = ل | م = ل |
|---|---|---|
| $\text{هـ}^{\text{س}}$ = هـ | $\text{هـ}^{\text{س}}$ = س | س = هـ |
| س = ١ | لا يتقاطعان | |

$\text{م} = \int_{0}^{1} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{\text{هـ}} (\text{هـ} - \text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{هـ}^2}{2} - 1$

---

١١٠) جد التكاملات:

١) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}}{(\text{جا}٤\text{س} - \text{جتا}٤\text{س})^2}\,\text{دس}$

٢) $\int_{0}^{\text{هـ}} (\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}})^2\,\text{دس}$

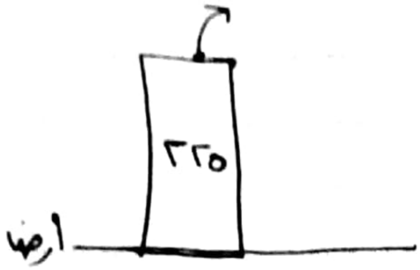
٣) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}}{\text{قا}^3\text{س}}\,\text{دس}$

٤) $\int \text{س}\,\text{هـ}^{(\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})}\,\text{دس}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١١) قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ٢٢٥م عن سطح الأرض رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية ٦٠م/ث وبتسارع مقداره -١٠م/ث جد سرعة الكرة عندما تصل الأرض

الحل :-




$ت = -١٠$

$\frac{دع}{دن} = -١٠ \leftarrow دع = -١٠ دن$ بتكامل

$ع = -١٠ن + جـ$ لكن $ع(٠) = ٦٠ \leftarrow جـ = ٦٠$

$ع = -١٠ن + ٦٠$

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٦٠ \leftarrow دف = (-١٠ن + ٦٠) دن$ بتكامل

$ف = -٥ن^2 + ٦٠ن + جـ$ لكن $ف(٠) = ٢٢٥$

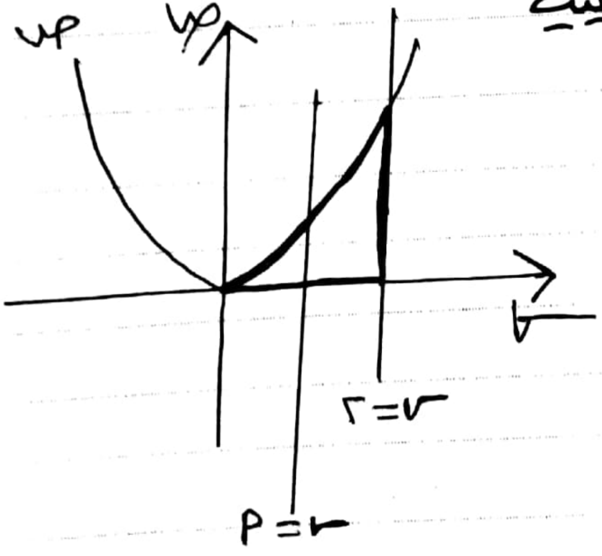
$٢٢٥ = ٠ + ٠ + جـ \leftarrow جـ = ٢٢٥$

$ف(ن) = -٥ن^2 + ٦٠ن + ٢٢٥$ عندما تصل الأرض $\leftarrow ف = ٠$

$-٥ن^2 + ٦٠ن + ٢٢٥ = ٠ \leftarrow ن = ١٥$

$ع(١٥) = -١٠ \times ١٥ + ٦٠ = -١٥٠ + ٦٠ = -٩٠$ م/ث

١٢) جد قيمة (م) بحيث المستقيم س = م يقسم المساحة المحصورة بين س = √ص والمستقيم س = ٢ ومحور السينات الى قسمين متساويين




الحل :- $س = \sqrt{ص} \leftarrow ص = س^2$

$م = \int_{٠}^{٢} س^2 دس = \frac{٨}{٣}$

$\therefore \int_{٠}^{م} س^2 دس = \frac{١}{٢} \times \frac{٨}{٣}$

$\left[\frac{س^3}{٣}\right]_{٠}^{م} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{م^3}{٣} = \frac{٤}{٣}$

$م = \sqrt[3]{٤}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤