إدارة المناهج والكتب المدرسية
إجابات و حلول الأسئلة
الصف: الثامن الأساسي الكتاب: الرياضيات الجزء: الأول
رقم الوحدة: (٨) اسم الوحدة: المجسمات

الدرس الأول:الشبكات

أكمل الفراغ في الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X)، للإجابة عن السؤال أعلاه:

	ثنائي الأبعاد	ثلاثي الأبعاد
الشبكة	✓	X
المجسم	X	✓

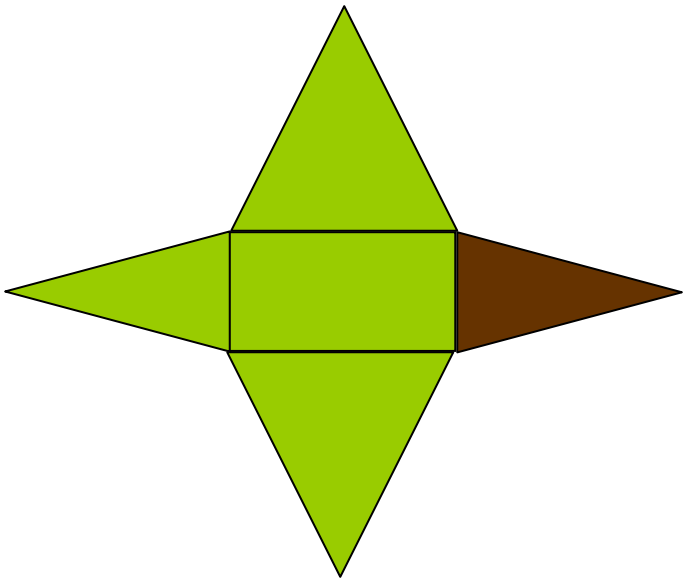
تدريب (١): أنا مجسم شبكتي تتكون من مستطيل، وأربعة مثلثات متطابقة الضلعين، عند طيها تلتقي رؤوسها في نقطة واحدة، فمن أنا؟ وماذا تسمى نقطة الالتقاء؟

الحل:

هرم رباعي، والنقطة تسمى رأس الهرم

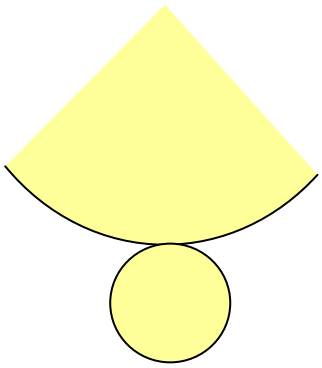
تدريب (٢): ارسم شبكة لكل مجسم من المجسمات الآتية:

(أ)



(ب)

(جـ)



تمارين ومسائل

١) اكتب المجسم الذي تكونه كل شبكة مما يأتي:

(أ) هرم رباعي

(ب) اسطوانة

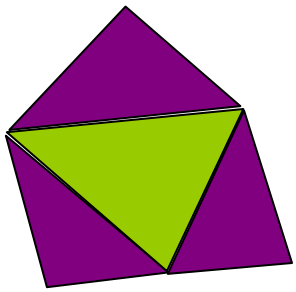
(جـ) منشور ثلاثي

(د) مخروط

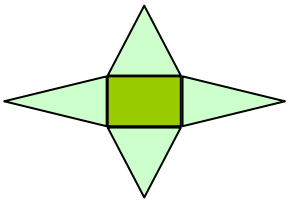
(٢) ارسم شبكة لكل مجسم مما يأتي، ثم قارن ما تتوصل إليه بما يتوصل إليه زملاؤك .

(أ) منشور ثلاثي

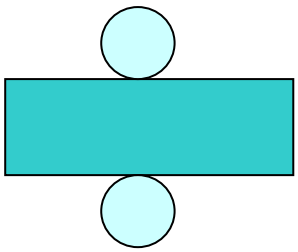
(ب) هرم ثلاثي



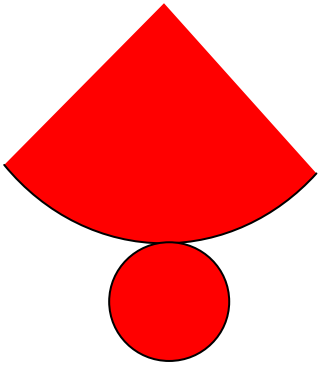
(جـ) هرم رباعي



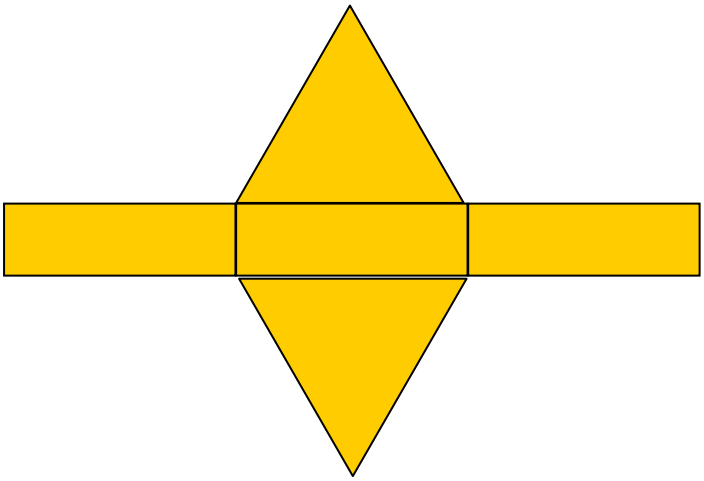
(د)اسطوانة



(هـ) مخروط



(٣) كلف معلم الرياضيات الطالب سعيد برسم شبكة هرم ثلاثي، فرسم الطالب سعيد الشبكة الآتية:

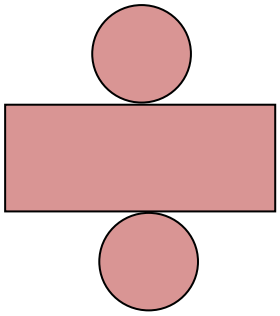


هل تتفق مع ما رسمه سعيد ؟ مبرراً إجابتك.

الحل:لا، لأن سعيد رسم منشور ثلاثي

(٤) طلبت معلمة الرياضيات رسم شبكة لمجسم الإسطوانة، فرسمت راما الشبكة (١)، وريم الشبكة (٢):

(١)



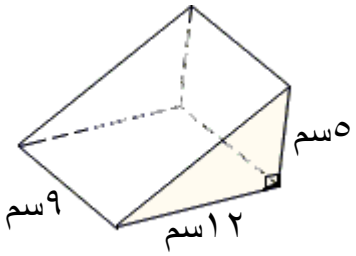
(٢)

هل تتفق مع ما رسمته كل من راما، وريم؟ مبرراً إجابتك.

الحل:نعم، لأن كل منهما رسم مجسم اسطوانة

الدرس الثاني: حجم المنشور الثلاثي، ومساحة سطحه

تدريب(١): جد حجم المنشور الثلاثي المجاور؟



الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times ١٢ \times ٥ \times ٩$

$= ٣٠ \times ٩ = ٢٧٠$ سم^{٣}

تدريب(٢): منشور ثلاثي مساحته الكلية ٤٨ سم^{٢}، ومساحته الجانبية ٣٦ سم^{٢}. جد مساحة قاعدته؟

الحل:

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

٤٨ = ٣٦ + مساحة القاعدتين

مساحة القاعدتين = ١٢ سم^{٢}

إذن: مساحة القاعدة = ٦ سم^{٢}

تمارين ومسائل

١) منشـــور ثلاثـــي أطـــوال قاعدتـــه هـــي: ٦ ســـم، ٨ ســـم، ١٠ ســـم، وارتفاعه ١١ سم. جد حجمه، ومساحته الكلية؟

الحل:

المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦، ٨، ١٠ هو مثلث قائم زاوية

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٨ × ٦ × ١١

= ٢٤ × ١١

= ٢٦٤ سم^{٣}

٢) منشور ثلاثي حجمه ٢٨ م^{٣}، ومساحة قاعدته ٧ م^{٢}. جد ارتفاعه.

الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

٢٨ = ٧ × الارتفاع

الارتفاع = ٢٨ ÷ ٧ = ٤ م

٣) منشور ثلاثي مساحته الجانبية ٣١ ٢؛! سم^{٢}، وارتفاعه ٤ ٢؛! سم. جد محيط قاعدته؟

الحل:

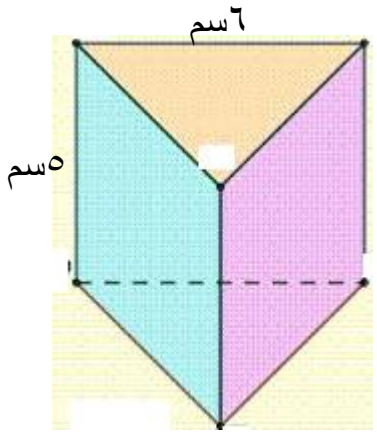
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٣١ ٢؛! = محيط القاعدة × ٤ ٢؛!

محيط القاعدة = ٣١ ٢؛! ÷ ٤ ٢؛!

= ٧ سم

٤) يمثل الشكل المجاور منشور ثلاثي مساحته الجانبية ٨٠ سم^{٢}، وارتفاعه ٥ سم، وقاعدته على شكل مثلث متطابق الضلعين طول قاعدته ٦ سم. جد المساحة الكلية لسطح المنشور.



الحل:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٨٠ = محيط القاعدة × ٥

محيط القاعدة = ٨٠ ÷ ٥ = ١٦ سم

محيط القاعدة = ٢س + ٦

١٦ = ٢س + ٦

س = ٥

إذن: مساحة القاعدة (مثلث) = ½ × القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٦ × ٤

= ١٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

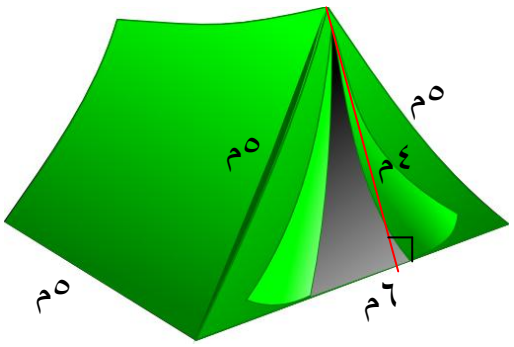
= ٨٠ + ٢ × ١٢

= ٨٠ + ٢٤

= ١٠٤ سم^{٢}

٥) ينتج مصنع خيماً كما في الشكل المجاور، إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد٥,١ دينار.

جد تكلف ٩ خيم مشابهه؟



الحل:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ١٦ × ٥

= ٨٠ م^{٢}

مساحة القاعدة (مثلث) = ½ × القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٦ × ٤

= ١٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٨٠ + ٢ × ١٢

= ٨٠ + ٢٤

= ١٠٤ سم^{٢}

تكلفة الخيمة الواحدة = ١٠٤ × ١،٥ = ١٩٦ دينار

إذن: تكلفة ٩ خيم مشابهه = ١٩٦ × ٩ = ١٧٦٤ دينار

٦) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الجانبية ٦٠ سم^{٢}.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

٧) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الكلية ٦٠ سم^{٢}.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

الدرس الثالث: حجم الاسطوانة، ومساحة سطحها

تدريب (١): علبة حليب للأطفال على شكل اسطوانة حجمها ١٨٠٠سم^{٣}، وارتفاعها ٢٠سم. جد مساحة قاعدتها؟

الحل:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

١٨٠٠ = مساحة القاعدة × ٢٠

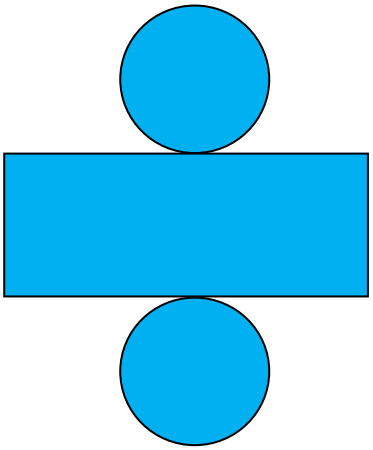
مساحة القاعدة = ١٨٠٠ ÷ ٢٠ = ٩٠ سم^{٢}

تدريب(٢):

اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ١٤ سم، وارتفاعها ٣ سم:

أ) ارسم شبكة لهذه الاسطوانة؟

الحل:



ب) جد مساحتها الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

= ٢ π × ٧ × ٣ = ٤٢ π سم^{٢}

مساحة القاعدة = π نق^{٢}

= π × (٧)^{٢} = ٤٩ π سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٤٢ π + ٢ × ٤٩ π

= ١٤٠ π سم^{٢}

التحقق:

المساحة الكلية = ٢ π نق (ع + نق)

= ٢ π × ٧ (٣ + ٧)

= ١٤ π × ١٠ = ١٤٠ π سم^{٢} ✓

تدريب(٣): اسطوانة دائرية مساحتها الكلية ٧٢ سم^{٢}، ومساحة قاعدتها ١٦ سم^{٢}. جد مساحتها الجانبية؟

الحل:

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

٧٢ = المساحة الجانبية + ٢ × ١٦

المساحة الجانبية = ٧٢ – ٣٢

= ٤٠ سم^{٢}

تمارين ومسائل

١) اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢،٥ سم، وارتفاعها ٤ سم. جد حجمها، ومساحتها الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} × ع

= π × (١،٢٥)^{٢} × ٤

= π ٦،٢٥

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

= ٢ π × ١,٢٥ × ٤ = ١٠ π سم^{٢}

مساحة القاعدة = π نق^{٢}

= π × (١,٢٥)^{٢} = ١,٥٦٢٥ π سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ١٠ π + ٢ × ١,٥٦٢٥ π

= ١٣,١٢٥ π سم^{٢}

التحقق:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١,٥٦٢٥ π × ٤

= ٦,٢٥ π سم^{٣} ✓

المساحة الكلية = ٢ π نق (ع + نق)

= ٢ π × ١,٢٥ (٤ + ١,٢٥)

= ٢,٥ π × ٥,٢٥ = ١٣,١٢٥ π سم^{٢} ✓

٢) اسطوانة دائرية قائمة سعتها ٦,٢٨ لتر، وارتفاعها ٢٠ سم. جد طول نصف قطر قاعدتها؟ ثم تحقق من صحة الحل، معتبراً ($\pi \approx ٣,١٤$).

الحل:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

٦٢٨٠ = مساحة القاعدة × ٢٠

مساحة القاعدة = ٦٢٨٠ ÷ ٢٠ = ٣١٤ سم^{٢}

مساحة القاعدة = π نق^{٢}

٣١٤ ≈ ٣,١٤ × نق^{٢}

نق^{٢} = ١٠٠

نق = ١٠ سم

التحقق:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^{٢} × ع

≈ ٣,١٤ × (١٠)^{٢} × ٢٠

≈ ٣١٤ × ٢٠ = ٦٢٨٠ سم^{٣}

= ٦,٢٦ لتر ✓

٣) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٥٢ سم^{٣} ، وطول قطرها ٨ سم، جد ارتفاعها؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

٣٥٢ = π نق^{٢} × ع

$$٣٥٢ = (٢٢ \div ٧) \times ٢(٤) \times ع$$

$$ع = ٧ \text{ سم}$$

التحقق:

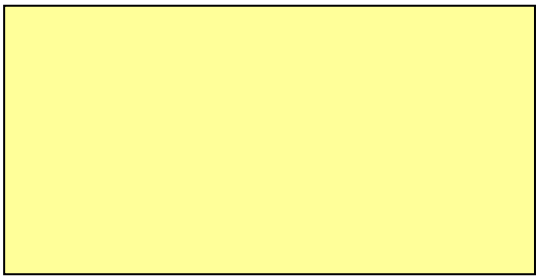
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \pi \text{ نق}^{٢} \times ع$$

$$\approx (٢٢ \div ٧) \times (٤)^{٢} \times ٧$$

$$\approx ٢٢ \times ١٦ \times ١ \approx ٣٥٢ \text{ سم}^{٣} \quad ✓$$

٤) ورقة مستطيلة الشكل طولها ٤٤ سم، وعرضها ٢٢، كما في الشكل الآتي:



قام سعيد بعمل اسطوانة منها ارتفاعها ٢٢ سم، وقام علي بعمل اسطوانة منها ارتفاعها ٤٤ سم. أيهما أكبر حجماً؟ مبرراً إجابتك.

الحل: الاسطوانة التي عملها سعيد

التبرير:

اسطوانة سعيد: ارتفاعها = ٢٢ سم ، محيط قاعدتها = ٤٤ سم

$$\text{محيط القاعدة} = ٢ \pi \text{ نق}$$

$$٤٤ = ٢ \pi \text{ نق}$$

$$\text{نق} \approx ٧ \text{ سم}$$

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \text{ نق}^{٢} \times ع$$

$$\approx \pi (٧)^{٢} \times ٢٢ = ١٠٧٨ \pi \text{ سم}^{٣} \approx ٣٣٨٨ \text{ سم}^{٣}$$

اسطوانة علي: ارتفاعها = ٤٤ سم ، محيط قاعدتها = ٢٢ سم

محيط القاعدة = ٢ π نق

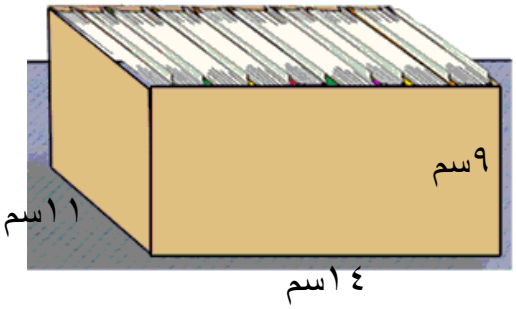
٢٢ = ٢ π نق

نق = ٣,٥ سم

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

= π (٣,٥)^{٢} × ٤٤ = π ٥٣٩ سم^{٣} = ١٦٩٤ سم^{٣}

٥) يبين الشكل أدناه علبة كرتونية، طول قاعدتها١٤سم، وعرضها١١ سم، وارتفاعها٩ سم. إذا قررت الشركة المصنعة استعمال تصميم جديد للعلبة بالحجم والارتفاع نفسه، ولكن بشكل اسطواني. جد طول قطر قاعدة الاسطوانة الذي يمكن استعماله؟



الحل: العلبة على شكل منشور رباعي (متوازي مستطيلات)

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

= (١٤ × ١١) × ٩ = ١٣٨٦ سم٣

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

١٣٨٦ = π نق^{٢} × ٩

١٣٨٦ × ٧ = ٢٢ نق^{٢} × ٩

نق^{٢} = (١٣٨٦ × ٧) ÷ (٢٢ × ٩)

نق^{٢} = ٩٧٠٢ ÷ ١٩٨ = ٤٩

نق = ٧ سم

طول قطر قاعدة الاسطوانة = ١٤ سم

الدرس الرابع:حجم المخروط ، ومساحة سطحه

تـدريب(١): مخـروط دائـري قـائم مسـاحة قاعدتـه ٣١٤ سـم^{٢}، وارتفاعـه ١٥سم. جد:

الحل:

أ) حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣١٤ × ١٥

= ٣١٤ × ٥ = ١٥٧٠ سم^{٣}

ب) مساحة القاعدة = π نق^{٢}

٣١٤ ≈ ٣,١٤ × نق^{٢}

نق^{٢} = ١٠٠

نق = ١٠ سم

تـدريب(٢): مخـروط دائـري قـائم ارتفاعـه ١٢ سـم، وطـول قطـر قاعدتـه ١٠ سم. جد طول راسم المخروط، وحجمه؟

الحل:

(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}

(ل)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}

(ل)^{٢} = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

إذن: طول الراسم (ل) = ١٣ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٥)^{٢} × ١٢

= ١٠٠ π سم^{٣}

تـدريب(٣): مخـروط دائـري قـائم طـول نصـف قطـر قاعدتـه ٥ سـم، وارتفاعه ١٢سم، جد مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}$$

$$(ل)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢}$$

$$(ل)^{٢} = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩$$

إذن: طول الراسم (ل) = ١٣ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

المساحة الجانبية للمخروط = $\pi \times ١٣ \times ٥$

$= ٦٥ \pi$ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\pi \times (٥)^{٢}$

مساحة القاعدة = ٢٥π

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= ٦٥ \pi + ٢٥ \pi$

$= ٩٠ \pi$ سم^{٢}

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

المساحة الكلية للمخروط = $\pi \times ٥ (١٣+٥)$

$= ٥ \pi \times ١٨ = ٩٠ \pi$ سم^{٢} ✓

تمارين ومسائل

١) جد حجم مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٢٠م، وارتفاعه ٢٥م؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

= $\frac{1}{3}$ × π × (١٠)^{2} × ٢٥

= $\frac{1}{3}$ × π × ٢٥٠٠ سم^{3}

≈ ٨٣٣,٣ π سم^{3}

٢) مخروط دائري قائم، حجمه ٣٦٣ π سم^{3}، وارتفاعه ٩سم. جد طول نصف قطر قاعدته؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

٣٦٣ π = $\frac{1}{3}$ × π × نق^{2} × ٩

نق^{2} = ١٢١

نق = ١١ سم

٣) مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم جد كلاً مما يأتي:

الحل:

$$(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}$$

$$(٥)^{٢} = (ع)^{٢} + (٣)^{٢}$$

$$(ع)^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

إذن: الارتفاع (ع) = ٤ سم

أ) حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

$$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٣)^{٢} \times ٤$$

$$= ١٢ \pi \text{ سم}^{٣}$$

ب) المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

المساحة الجانبية للمخروط = π × ٥ × ٣ = ١٥ π سم^{٢}

جـ) مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

مساحة القاعدة = π (نق)^{٢}

$$= \pi (٣)^{٢} = ٩ \pi \text{ سم}^{٢}$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= ١٥ \pi + ٩ \pi$$

$$= ٢٤ \pi \text{ سم}^{٢}$$

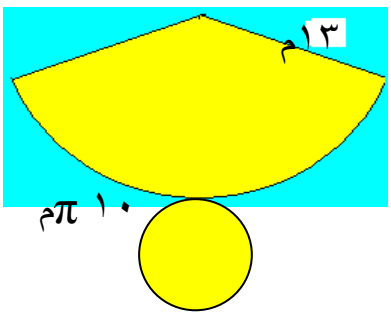
التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

$$= \pi \times ٣ \times (٥+٣)$$

$$= ٢٤ \pi \text{ سم}^{٢} \quad ✓$$

٤) الرسم الجانبي يمثل شبكة مخروط دائري قائم طول راسمه ١٣ م، ومحيط قاعدته ١٠ π م، جد كلاً مما يأتي:



أ) حجم المخروط؟

ب) مساحته الجانبية؟

جـ) مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

محيط القاعدة = ٢π نق

١٠π = ٢π نق

نق = ٥ م

$(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}$

$(١٣)^{٢} = (ع)^{٢} + (٥)^{٢}$

$(ع)^{٢}$ = ١٦٩ ـ ٢٥ = ١٤٤

إذن: الارتفاع (ع) = ١٢ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^{٢}$ ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٥)^{٢}$ × ١٢ = ١٠٠ π $سم^{٣}$

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= π × ١٣ × ٥ = ٦٥ π $سم^{٢}$

مساحة القاعدة = π $(نق)^{٢}$

= π $(٥)^{٢}$ = ٢٥ π $سم^{٢}$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٥ π + ٢٥ π

= ٩٠ π

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

$$= \pi \times ٥ \times (١٣+٥)$$

$$= \pi ٥ \times ١٨$$

$$= ٩٠ \pi \text{ سم}^{٢} \quad ✓$$

٥) اسطوانة، ومخروط لهما نفس الحجم والارتفاع، إذا كان طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة ٤ سم، وارتفاعها ١٨سم.. جد طول نصف قطر قاعدة المخروط ؟

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \text{ نق}^{٢} \times \text{ع}$$

$$= \pi \times (٤)^{٢} \times ١٨$$

$$= ٢٨٨ \pi \text{ سم}^{٣}$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^{٢} \text{ ع}$$

$$\frac{١}{٣} \times \pi \times (\text{نق})^{٢} \times ١٨ = ٢٨٨ \pi$$

$$\text{نق}^{٢} = ٤٨$$

$$\text{نق} \approx ٦,٩ \text{ سم}$$

٦) قبعة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ π سم^{٣}، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول الراسم؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

$\frac{1}{3}$ π ١٨٠ = $\frac{1}{3}$ × π × (نق)^{2} × ١٥

نق^{2} = ٣٦

نق = ٦ سم

(ل)^{2} = (ع)^{2} + (نق)^{2}

(ل)^{2} = (١٥)^{2} + (٦)^{2}

(ل)^{2} = ٢٢٥ + ٣٦ = ٢٦١

إذن: طول الراسم (ل) = ١٦,٢ سم

التحقق:

٧) هل يبقى حجم المخروط ثابتاً، إذا أضفنا ١ لنصف القطر، وطرحنا ١ من الارتفاع؟ مبرراً إجابتك.

الحل: لا

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٨ م، وارتفاعه ٢٤م؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

= $\frac{1}{3}$ × π × (٨)^{2} × ٢٤

= $\frac{1}{3}$ × π × ٦٤ × ٢٤

= ٥١٢ π سم^{3}

إذا أضفنا ١ لنصف القطر يصبح ٩، وطرحنا ١ من الارتفاع، يصبح ٢٣

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

= $\frac{1}{3}$ × π × (٩)^{2} × ٢٣

= ٣٤! × π × ٨١ × ٢٣

= ٦١٢ π سم^{٣}

٨) اثبت أن: المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق حيث:(ل) طول راسم المخروط،(نق) نصف قطر قاعدة المخروط.

الحل:

طول القوس = هـْ / ٣٦٠ × ٢ π نق .....(١)

مساحة القطاع الدائري = هـْ / ٣٦٠ × π نق^{٢} .....(٢)

هـْ / ٣٦٠ = طول القوس / ٢ π نق

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أن:

مساحة القطاع الدائري = (طول القوس / ٢ π نق$_{٢}$) × π(نق$_{٢}$)^{٢}

= (٢ π نق$_{١}$ / ٢ π نق$_{٢}$) × π(نق$_{٢}$)^{٢}

حيث نق$_{١}$: نصف قطر قاعدة المخروط

نق$_{٢}$: نصف قطر الدائرة التي أخذ منها القطاع وهو راسم المخروط

= (نق$_{١}$ / نق$_{٢}$) × π (نق$_{٢}$)^{٢}

= π نق$_{٢}$ نق$_{١}$ = π ل نق حيث ل: الراسم، نق: نصف قطر قاعدة المخروط

إذن: المساحة الجانبية للمخروط = مساحة القطاع الدائري

= π ل نق وهو المطلوب

الدرس الخامس: حجم الهرم ومساحة سطحه

تدريب(١): هرم ثلاثي ارتفاعه ١٥م، وقاعدته على شكل مثلث طول قاعدته ١٠سم، وارتفاعه ٧سم. جد حجمه؟

الحل:

حجم الهرم = !٣؛ مساحة القاعدة × الارتفاع

= !٣؛ (½ × ١٠ × ٧) × ١٥

= !٣؛ × ٣٥ × ١٥

= ٣٥ × ٥

= ١٧٥ سم^{٣}

تدريب(٢):هرم ثلاثي أطوال قاعدته ٥، ٦، ٧ سم، وارتفاعه الجانبي ٨ سم. جد مساحته الجانبية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

المساحة الجانبية لسطح الهرم=½×محيط القاعدة ×الارتفاع الجانبي للهرم

= ½ (٥+ ٦ + ٧) × ٨

= ½ × ١٨ × ٨

= ٩ × ٨ = ٧٢ سم٢

التحقق:

مساحة الوجه الأول = ½ ×٥ × ٨ = ٢٠ سم٢

مساحة الوجه الثاني = ½ ×٦ × ٨ = ٢٤ سم٢

مساحة الوجه الثالث = ½ × ٧ × ٨ = ٢٨ سم٢

المساحة الجانبية لسطح الهرم= ٢٠+ ٢٤ + ٢٨ = ٧٢ سم٢ ✓

تمارين ومسائل

١) أوجد حجم هرم ارتفاعه ١٧ متر، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢ متر؟

الحل:

حجم الهرم = !٣؛ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times (22 \times 22) \times 17$$

$$= \frac{1}{3} \times 484 \times 17$$

$$= \frac{1}{3} \times 8228$$

$$\approx 2742,7 \text{ سم}^3$$

٢) أوجد ارتفاع شمعة على شكل هرم حجمها ٨٤٧ سم^3، ومساحة قاعدتها ١٢١ سم^2؟

الحل:

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$847 = \frac{1}{3} \times 121 \times$ ع

$2541 = 121 \times$ ع

ع = ٢١ سم

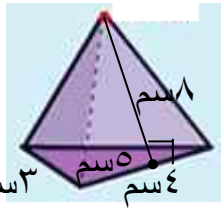
التحقق:

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times 121 \times 21 = 847$ سم^3

✓

٣) هرم ثلاثي أطوال قاعدته ٥، ٤، ٣ سم، وارتفاعه الجانبي ٨ سم، كما هو موضح جانباً جد:



أ) المساحة الجانبية.

ب) المساحة الكلية.

الحل:

أ) المساحة الجانبية لسطح الهرم=½×محيط القاعدة ×الارتفاع الجانبي

$= \frac{1}{2} (3 + 5 + 4) \times 8$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8$

= ٦ × ٨ = ٤٨ سم^{٢}

ب) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٤٨ + (½ × ٤ × ٣)

= ٤٨ + ٦

= ٥٤ سم^{٢}

٤) الشكل الموضح جانباً يمثل هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل طولها ١٥م، وعرضها ١٠م، ومساحته الجانبية ٢٢٥ م^{٢}. جد ارتفاعه الجانبي؟

الحل:

المساحة الجانبية = ½ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

٢٢٥ = ½ (١٥×٢ + ١٠ ×٢) × ع

٢٢٥ = ½ × ٥٠ × ع

٢٢٥ = ٢٥ × ع

ع = ٩ سم

٥) الهرم الأكبر "خوفو" من أهرامات الجيزة في مصر يبلغ ارتفاعه ١٤٦,٥ متر ، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٣٠ متر. أوجد حجمه؟

الحل:

حجم الهرم الأكبر "خوفو" = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ⅓ (٢٣٠ × ٢٣٠) × ١٤٦،٥

$= ٣٤! \times ٥٢٩٠٠ \times ١٤٦،٥$

$= ٣٤! \times ٧٧٤٩٨٥٠$

$\approx ٢٥٨٣٢٨٣,٣$ م^{٣}

٦) ارسم شبكة لهرم ثلاثي بحيث تكون مساحته الجانبية (٦٠) سم^{٢}.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

٧) ارسم شبكة لهرم رباعي بحيث تكون مساحته الكلية (٦٠) سم^{٢}.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

الدرس السادس: حجم الكرة ومساحة سطحها

تدريب(١):جد طول قطر كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}\pi$ سم^{٣}.

الحل:

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣}

$\frac{٥٠٠}{٣}\pi = \frac{٤}{٣} \pi \times$ نق^{٣}

نق^{٣} $= ١٢٥$

نق $= ٥$ سم

تدريب(٢):جد مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ١٠ سم؟

(اعتبر $\pi \approx ٣,١٤$)

الحل:

مساحة سطح الكرة = ٤π نق^{٢}

$= ٤ \times ٣,١٤ \times (١٠)^{٢}$

$= ٤ \times ٣,١٤ \times ١٠٠$

= ١٢٥٦سم

تدريب(٣): خزان ماء مساحة سطحه π ٣٢٤ م^{٢}جد:

أ) طول نصف قطر الخزان.

ب) حجم الخزان.

الحل:

أ) مساحة سطح الكرة = ٤π نق^{٢}

π ٣٢٤ = ٤ $\times \pi \times$ نق٢

٣٢٤ = ٤ نق٢

٨١ = نق٢

نق = ٩ م

ب) حجم الخزان = $\frac{4}{3}$ π نق^3

= $\frac{4}{3}$ π × (٩)^3

= ٩٧٢ π م^3

تمارين ومسائل

١) كرة طول نصف قطرها ٢١ سم. جد حجمها، ومساحة سطحها؟

الحل:

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

= $\frac{4}{3}$ π × (٢١)^3

= ١٢٣٤٨ سم^3

٢) جد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٤٣١٢}{٣}$ سم^3؟

الحل:

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

$\frac{٤٣١٢}{٣}$ = $\frac{4}{3}$ π × نق^3

نق^3 ≈ ٣٤٣

نق ≈ ٧ سم

٣) جد مساحة سطح كرة حجمها ٦١٦ سم^3؟

الحل:

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

٦١٦ = $\frac{4}{3}$ π × نق^3

نق^{٣} ≈ ١٤٧

نق ≈ ٥,٣ سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

= ٤ × π × (٥,٣)^{٢}

= ١١٢,٤ سم^{٢}

٤) جد حجم الكرة التي مساحتها السطحية ١٠٠ π سم^{٢}؟

الحل:

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

١٠٠ π = ٤ × π × نق^{٢}

نق^{٢} = ٢٥

نق = ٥ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × π × (٥)^{٣}

≈ ١٦٦,٧ π سم^{٣}

≈ ٥٢٣,٨ سم^{٣}

٥) مكعب من الرصاص حجمه ٣٨٨٠٨ سم^{٣}، صُهر وبقى محافظاً على حجمه لإعادة صنعه على صورة كرة جد:

الحل:

أ) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

٣٨٨٠٨ = $\frac{٤}{٣}$ × π × نق^{٣}

نق^{٣} = ٩٢٦١

نق = ٢١ سم

ب) مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

= ٤ × π × (٢١)^{٢}

= ١٧٦٤ π سم^{٢}

٦) الشكل الجانبي يمثل بالون كروي يستخدم لدراسة الطقس ويبلغ حجمه ٣٦ π سم^{٣}، جد المساحة السطحية للبالون؟

الحل:

حجم البالون = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

٣٦ π = $\frac{٤}{٣}$ π × نق^{٣}

نق^{٣} = ٢٧

نق = ٣ سم

مساحة سطح البالون = ٤ π نق^{٢}

= ٤ × π × (٣)^{٢}

= ١٠٨ π سم^{٢}

٧) كرة قدم طول محيط دائرتها ٤٢ π سم، جد مساحتها السطحية ؟

الحل:

محيط الدائرة = ٢ π نق

٤٢ π = ٢ π نق

نق = ٢١ سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

= ٤ × π × (٢١)^{٢}

= ١٧٦٤ π سم^{٢}

الدرس السابع: معامل التغيّر

تدريب(١): هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل أبعادها ٨ سم، ٦ سم، وارتفاعه ٩ سم.جد:

أ) محيط قاعدة الهرم.

ب) حجم الهرم.

جـ) محيط قاعدة الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥. ماذا تلاحظ؟

د) حجم الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥. ماذا تلاحظ؟

الحل:

أ) محيط قاعدة الهرم = ٢×٨ + ٢×٦

= ١٦ + ١٢ = ٢٨سم

ب) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٤٨ × ٩

= ١٤٤ سم^{٣}

جـ) أبعاد الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥، تصبح ٤٠، ٣٠

محيط قاعدة الهرم = ٢×٤٠ + ٢×٣٠

= ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠سم

نلاحظ أن المحيط بعد الضرب = ٥ × المحيط قبل الضرب

= ٥ × ٢٨ = ١٤٠ سم ✓

د) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × ١٢٠٠ × ٩

= ٣٦٠٠ سم^{3}

نلاحظ أن الحجم بعد الضرب = (٥)^{2} × الحجم قبل الضرب

= ٢٥ × ١٤٤ = ٣٦٠٠ سم ✓

يسمى العدد ٥ معامل التغير

تدريب(٢): أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

المخروط							
نصف القطر	الارتفاع	طول الراسم	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
٢١	٢٨	٣٥	١٣٢	١٣٨٦	٢٣١٠	٣٦٩٦	١٢٩٣٦
٤٢	٥٦	٧٠	٢٦٤	٥٥٤٤	٩٢٤٠	١٤٧٨٤	١٠٣٤٨٨

نلاحظ أن: ١) ٢٦٤= ٢ × ١٣٢ أو ١٣٢ = ½ × ٢٦٤

٢) ١٣٨٦= (٢)^{2} × ١٣٨٦ أو ١٣٨٦ = (½)^{2} × ٥٥٤٤

٣) ٩٢٤٠= (٢)^{2} × ٢٣١٠ أو ٢٣١٠ = (½)^{2} × ٩٢٤٠

٤) ١٤٧٨٤= (٢)^{2} × ٣٦٩٦أو ٣٦٩٦ = (½)^{2} × ١٤٧٨٤

٥) ١٠٣٤٨٨= (٢)^{3} × ١٢٩٣٦ أو ١٢٩٣٦ = (½)^{3} × ١٠٣٤٨٨

يسمى كل من ٢، ½ معامل التغير

تمارين ومسائل

١) منشور ثلاثي حجمه ٧٦٨ سم^{٣}، وأبعاد قاعدته هي: ١٢، ١٦، ٢٠، ومساحته الجانبية ٣٨٤سم^{٢}.إذا ضربت جميع أبعاده بـ ¼. جد حجم المنشور ومساحته الجانبية بعد إجراء عملية الضرب؟

الحل:

حجم المنشور بعد إجراء عملية الضرب = (¼)^{٣} × ٧٦٨

= ١٢ سم^{٣}

مساحته الجانبية بعد إجراء عملية الضرب = (¼)^{٢} × ٣٨٤

= ٢٤ سم^{٢}

التحقق:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

٧٦٨ = ½ × ١٢ × ١٦ × ع

ع = ٨ سم

تصبح أبعاد المنشور بعد إجراء عملية الضرب ٣، ٤، ٥، والارتفاع =٢

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ١٢ × ٢ = ٢٤ سم^{٢} ✓

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٤ × ٣ × ٢

= ١٢ سم^{٣} ✓

٢) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٩ سم، وحجمها ٥٣٤٦ سم^{٣}، إذا ضربت جميع أبعادها بـ @؛٣ . جد حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب؟ تم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب = (@؛٣)^{٣} × ٥٣٤٦

= ١٥٨٤ سم^{٣}

التحقق:

حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

٥٣٤٦ = π ٨١ × ع

ع = ٢١ سم

بعد إجراء عملية الضرب يصبح نصف القطر = ٦، والارتفاع = ١٤

حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب = π نق^{٢} × ع

= π × ٣٦ × ١٤

= ١٥٨٤ سم^{٣} ✓

٣) هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٦ سم، ومساحته الجانبية ٦٠ سم^{٢}، إذا ضربت جميع أبعاد الهرم

الرباعي بـ ١،٥ جد المساحة الجانبية للهرم بعد إجراء عملية الضرب؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

المساحة الجانبية للهرم بعد إجراء عملية الضرب = $(١,٥)^{٢}$ × ٦٠

= ١٣٥ سم^{٢}

التحقق:

المساحة الجانبية لسطح الهرم=½×محيط القاعدة ×الارتفاع الجانبي للهرم

٦٠ = ½ × ٢٤ × ع

ع = ٥ سم

بعد إجراء عملية الضرب يصبح طول القاعدة= ٩، والارتفاع = ٧,٥

المساحة الجانبية لسطح الهرم=½×محيط القاعدة ×الارتفاع الجانبي للهرم

=½×٣٦ × ٧,٥

= ١٣٥ سم^{٢} ✓

٤) مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم، وارتفاعه ٩ سم. إذا جُمع لكل بُعد من أبعاده ٥. جد الحجم والمساحة الجانبية للمخروط قبل إجراء عملية الجمع وبعدها؟ ماذا تستنتج؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٧)^{٢}$ × ٩ = ١٤٧ π سم^{٣}

$(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}$

$(ل)^{٢} = (٩)^{٢} + (٧)^{٢}$

$(ل)^{٢}$ = ٨١ + ٤٩ = ١٤٠

إذن: طول الراسم (ل) ≈ ١١,٨ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= π × ١١,٨ × ٧ = ٨٢,٦ π سم^{٢}

تصبح الأبعاد بعد إجراء عملية الجمع، نق =١٢، والارتفاع = ١٤

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (١٢)^{٢} × ١٤ = ٦٧٢ π سم^{٣}

(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}

(ل)^{٢} = (١٤)^{٢} + (١٢)^{٢}

(ل)^{٢} = ١٩٦ + ١٤٤ = ٣٤٠

إذن: طول الراسم (ل) ≈ ١٨,٤ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= π × ١٨,٤ × ١٤ = ٢٥٧,٦ π سم^{٢}

نستنتج أن: ما ينطبق على عملية الضرب لا ينطبق على عملية الجمع

٥) مصنع للحلويات يعمل كعك العيد على شكل كرات قطر كل منها ٢،١ سم، قرر صاحب المعمل تصغير الكعكة إلى الثلثين، وذلك من أجل إعادة تسعيرها. ما حجم الكعكة ومساحة سطحها بعد تعديل القطر؟

الحل:

طول القطر بعد التصغير = ١,٤

حجم الكعكة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ π (٠,٧)^{٣}

≈ $\frac{٤}{٣}$ π × ٠,٣٤٣

$\approx \quad ٠,٤٦ \ \pi$ سم^{٣}

مساحة سطح الكرة $= ٤ \ \pi$ نق^{٢}

$= ٤ \ \pi \ (٠,٧)^{٢}$

$= ٤ \times \pi \times ٠,٤٩$

$\approx \quad ١,٩٦ \ \pi$ سم^{٢}

التحقق:

حجم الكعكة $= \quad \$؛٣ \ \pi$ نق^{٣}

$= \quad \$؛٣ \ \pi \times (١,٠٥)^{٣}$

$\approx \quad \$؛٣ \ \pi \times ١,١٦$

$\approx \quad ١,٥٥ \ \pi$ سم^{٣}

حجم الكعكة بعد التصغير $= (@؛٣)^{٣} \times ١,٥٥ \ \pi$

$\approx \quad ٠,٤٦ \ \pi$ سم^{٣} ✓

مساحة سطح الكرة $= ٤ \ \pi$ نق^{٢}

$= ٤ \ \pi \ (١,٠٥)^{٢}$

$\approx ٤ \times \pi \times ١,١$

$\approx \quad ٤,٤ \ \pi$ سم^{٢}

مساحة سطح الكعكة بعد التصغير $= (@؛٣)^{٢} \times ٤,٤ \ \pi$

$\approx \quad ١,٩٦ \ \pi$ سم^{٢} ✓

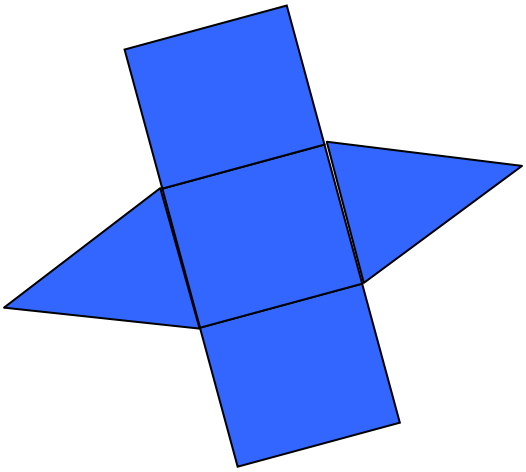
مراجعة

١) ارسم شبكة تقريبية لكل مجسم من المجسمات الآتية:

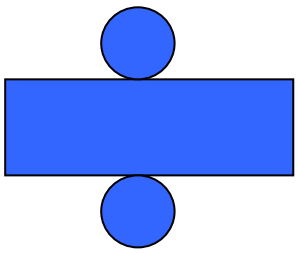
أ ب جـ

الحل:

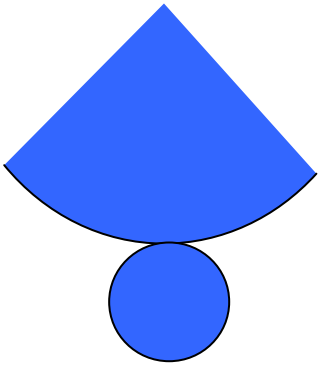
أ)



ب)



جـ)



٢) منشـــور ثلاثـــي أطـــوال قاعدتـــه هـــي: ٥سـم، ١٢سـم، ١٣سـم، وارتفاعه ١٠سم جد:

أ) حجمه.

ب) مساحته الكلية.

جـ) مقدار التغير في الحجم والمساحة الكلية إذا ضربت أبعاده في ٣

الحل:

أ) حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ½ × ١٢ × ٥ × ١٠

= ٣٠ × ١٠ = ٣٠٠ سم^{٣}

ب) المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٣٠ × ١٠

= ٣٠٠ سم^{٢}

مساحة القاعدة (مثلث) = ½ × القاعدة × الارتفاع

= ½ × ١٢ × ٥

= ٣٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٣٠٠ + ٢ × ٣٠

= ٣٠٠ + ٦٠

= ٣٦٠ سم^{٢}

جـ) الحجم بعد الضرب = (٣)^{٣} × الحجم قبل الضرب

= ٢٧ × ٣٠٠ = ٨١٠٠ سم^{٣}

مقدار التغير في الحجم = ٨١٠٠ – ٣٠٠

= ٧٨٠٠ سم^{٣}

المساحة الكلية بعد الضرب = (٣)^{٢} × المساحة الكلية قبل الضرب

= ٩ × ٣٦٠

= ٣٢٤٠ سم^{٢}

٣) منشور قاعدته على شكل شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيتين ١٢ سم، ٨ سم وارتفاعها ٦ سم، وارتفاع المنشور ٩ سم. جد حجمه؟

الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= (½ ×(٨+١٢)×٦) × ٩

= ٦٠ × ٩ = ٥٤٠ سم^{٣}

٤) هرم رباعي حجمه ٧٢ م^{٣}، وارتفاعه ٨ م جد مساحة قاعدته ؟

الحل:

حجم الهرم = ١/٣ مساحة القاعدة × الارتفاع

٧٢ = ١/٣ مساحة القاعدة × ٨

مساحة القاعدة = ٢٧م^{٢}

٥) هرم ارتفاعه ١٨متر، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢متر. جد:

أ) حجمه

ب) مقدار التغير في الحجم إذا تضاعفت أبعاده.

الحل:

أ) حجم الهرم = ١/٣ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١/٣ (٢٢ × ٢٢) × ١٨

$= ٢٩٠٤ \text{ م}^٣$

حجم الهرم بعد المضاعفة $= (٢)^٣ \times$ حجم الهرم المضاعفة

$= ٨ \times ٢٩٠٤$

$= ٢٣٢٣٢ \text{ م}^٣$

مقدار التغير $= ٢٣٢٣٢ - ٢٩٠٤$

$= ٢٠٣٢٨ \text{ م}^٣$

٦) اسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ١٤ سم، وارتفاعها ١٢سم، جد:

أ) حجمها.

ب) مساحتها الكلية.

جـ) التغير الحاصل في الحجم والمساحة الكلية إذا تضاعفت أبعادها.

الحل:

أ) حجم الاسطوانة $= \pi \text{ نق}^٢ \times \text{ع}$

$= \pi (٧)^٢ \times ١٢$

$= \pi ٤٩ \times ١٢$

$= \pi ٥٨٨ \text{ سم}^٣$

ب) المساحة الكلية $= ٢ \pi \text{ نق} (\text{ع} + \text{نق})$

$= ٢ \pi \times ٧ (١٢ + ٧)$

$= \pi ١٤ \times ١٩ = \pi ٢٦٦ \text{ سم}^٢$

جـ) حجم الاسطوانة بعد التغير$=(٢)^٣ \times$ حجم الاسطوانة قبل التغير

$= ٨ \times \pi ٥٨٨ \text{ سم}^٣$

$= \pi ٤٧٠٤ \text{ سم}^٣$

مقدار التغير $= \pi ٤٧٠٤ - \pi ٥٨٨$

$= ٤١١٦\ \pi$ سم^٣

المساحة الكلية بعد التغير = (٢)^٢ × المساحة الكلية قبل التغير

$= ٤ \times ٢٦٦\pi$

$= ١٠٦٤\pi$ سم^٢

مقدار التغير $= ١٠٦٤\pi - ٢٦٦\pi$

$= ٧٩٨\ \pi$ سم^٢

٧) اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٧٠٤ سم^٢،وطول نصف قطرها ٧ سم جد ارتفاعها؟

الحل:

المساحة الكلية $= ٢\ \pi$ نق (ع + نق)

$٧٠٤ = ٢\ \pi \times ٧$(ع + ٧)

ع = ٩ سم

التحقق:

مساحة القاعدة $= \pi$ نق^٢

$= \pi \times$ (٧)$^٢ = ١٥٤$ سم^٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

٧٠٤ = المساحة الجانبية + ٣٠٨

المساحة الجانبية = ٣٩٦ سم^٢

المساحة الجانبية $= ٢\ \pi$ نق ع

$٣٩٦ = ٢\ \pi \times ٧ \times$ ع

٣٩٦ = ٤٤ع

ع = ٩ سم ✓

٨) مخروط مساحة قاعدته ٣١٤ سم^{٢}، وارتفاعه ٢٤ سم جد:

أ) حجمه.

ب) مساحته الجانبية.

جـ) مساحته الكلية.

الحل:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

≈ $\frac{١}{٣}$ × ٣١٤ × ٢٤ ≈ ٢٨٢٦سم^{٣}

مساحة القاعدة = π (نق)^{٢}

٣١٤ = π (نق)^{٢}

(نق)^{٢} = ١٠٠

نق = ١٠ سم

(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}

(ل)^{٢} = (٢٤)^{٢} + (١٠)^{٢}

(ل)^{٢} = ٥٧٦ + ١٠٠ = ٦٧٦

إذن: طول الراسم (ل) = ٢٦ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= π × ٢٦ × ١٠ = ٢٦٠ π سم^{٢}

مساحة القاعدة = π (١٠)^{٢}

= ١٠٠ π سم^{٢}

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٢٦٠ π + ١٠٠ π

$= \quad ٣٦٠ \ \pi$ سم^{٢}

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

$= \pi \times ١٠ \times (٢٦+١٠)$

$= \quad ١٠ \pi \times ٣٦$

$= \quad ٣٦٠ \ \pi$ سم^{٢} ✓

٩) مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم جد:

أ) حجم المخروط؟

ب) مساحته الجانبية؟

جـ) مقدار التغير في الحجم والمساحة الجانبية إذا ضربت أبعاده في ٣

الحل:

$(ل)^{٢} = (ع)^{٢} + (نق)^{٢}$

$(٥)^{٢} = (ع)^{٢} + (٣)^{٢}$

$(ع)^{٢} = \quad ١٦$

إذن: ارتفاع المخروط = ٤ سم

أ) حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \pi \times ٩ \times ٤$

$= \quad ١٢ \ \pi$ سم^{٣}

ب) المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

$= \pi \times ٥ \times ٣ = \quad ١٥ \ \pi$ سم^{٢}

جـ) الحجم بعد الضرب = (٣)^{٣} × الحجم قبل الضرب

$= \quad ٢٧ \quad \times \quad ١٢ \ \pi$

$= ٣٢٤ \pi$ سم^٣

التغير في الحجم $= ٣٢٤ \pi - ١٢ \pi = ٣١٢ \pi$ سم^٣

المساحة الجانبية بعد الضرب = $(٣)^٢ \times$ المساحة الجانبية قبل الضرب

$= ٩ \times ١٥ \pi$

$= ١٣٥ \pi$ سم^٢

التغير في المساحة الجانبية $= ١٣٥ \pi - ١٥ \pi = ١٢٠ \pi$ سم^٢

٦) يمثل المجسم جانباً كرة طول قطرها ٦،١ م جد:

أ) حجمها.

ب) ومساحة سطحها.

الحل:

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣

$= \frac{٤}{٣} \pi \times (٣,٠٥)^٣$

$\approx \frac{٤}{٣} \pi \times ٢٨,٤$

$\approx ٣٧,٩ \pi$ م^٣

ب) مساحة سطح الكرة $= ٤ \pi$ نق^٢

$\approx ٤ \times \pi \times (٣,٠٥)^٢$

$\approx ٣٧,٢ \pi$ سم^٢

١٠) اسطوانتان دائريتان قائمتان طول نصف قطر الاسطوانة الأولى ٦سم، وحجمها ٣٢٤ π سم^{٣}، ومساحتها الجانبية ١٠٨ π سم^{٢}، وطول نصف قطر الاسطوانة الثانية ٨سم، وحجمها ٧٦٨ π سم^{٣}، ومساحتها الجانبية ١٩٢ π سم^{٢} جد:

أ) ارتفاع الاسطوانة الأولى.

ب) ارتفاع الاسطوانة الثانية.

جـ) معامل التغّير.

الحل:

أ) حجم الاسطوانة الأولى = π نق^{٢} × ع

π ٣٢٤ = π (٦)^{٢} × ع

ارتفاع الاسطوانة الأولى = ٩ سم

ب) حجم الاسطوانة الثانية = π نق^{٢} × ع

π ٧٦٨ = π (٨)^{٢} × ع

ارتفاع الاسطوانة الثانية = ١٢ سم

جـ) معامل التغّير = ¾ أو ٣:٤ (٣/٤)

يوجد أكثر من طريقة لإيجاد معامل التغير منها

نق للاسطوانة الأولى = معامل التغير × نق للاسطوانة الثانية

$$\text{معامل التغير} = \frac{\text{نق للاسطوانة الأولى}}{\text{نق للاسطوانة الثانية}}$$

$$= \frac{٦}{٨}$$

$$= \frac{٣}{٤}$$

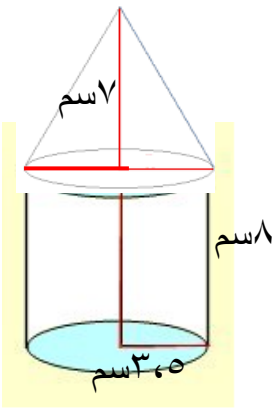
نق للاسطوانة الثانية = معامل التغير × نق للاسطوانة الأولى

$$\text{معامل التغير} = \frac{\text{نق للاسطوانة الثانية}}{\text{نق للاسطوانة الأولى}}$$

$$= \frac{٨}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٣}$$

١١) جد حجم المجسم المركب المرسوم جانباً؟



الحجم = حجم الاسطوانة + حجم المخروط

$= \pi \text{ نق}^{٢} \times \text{ع}_{١} + \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^{٢} \text{ع}_{٢}$

$= \pi (٣,٥)^{٢} \times ٨ + \frac{١}{٣} \pi (٣,٥)^{٢} \times ٧$

$\approx \pi ٩٨ + \pi ٢٨,٦$

$\approx ١٢٦,٦ \pi \text{ سم}^{٣}$

التحقق:

الحجم $= \pi \text{ نق}^{٢} (\text{ع}_{١} + \frac{١}{٣} \text{ع}_{٢})$

$= \pi (٣,٥)^{٢} (٨ + \frac{١}{٣} \times ٧)$

$\approx \pi ١٢,٢٥ \times ١٠,٣٣٣$

$\approx ١٢٦,٦ \text{ سم}^{٣}$ ✓

اختبار ذاتي

١) يتكون هذا السؤال من (٦) فقرات، من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) منشور رباعي مساحته الجانبية ٤٨ π سم^{٢}، وارتفاعه ٦سم فإن طول محيط قاعدته يساوي:

الإجابة: جـ) ٨ π سم

(٢) اسطوانة طول نصف قطرها ٧سم، وارتفاعها ١٠سم فإن مساحتها الكلية تساوي:

الإجابة: أ) ٧٤٨سم^{٢}

(٣) مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٦١٦سم^{٢} فإن محيط قاعدته يساوي

الإجابة: جـ)٨٨ سم

(٤) هرم حجمه ١٧٥سم^{٣}، وارتفاعه ٢٥سم فإن مساحة قاعدته تساوي:

الإجابة: ب) ٢١سم

٥) كرة طول نصف قطرها ٦ سم فإن حجمها يساوي:

الإجابة: د) ٢٨٨π سم^{٣}

٦) كرة مساحة سطحها٣٦ π سم^{٢}ضرب نصف القطر بـ ½ فإن مساحة سطح الكرة بعد إجراء عملية الضرب يساوي:

الإجابة: ب) ٩π سم^{٢}

٢) منشور ثلاثي أطوال قاعدته هي: (٦) سم، (٨) سم، (١٠) سم، وارتفاعه (١١) سم. جد مساحته الجانبية؟

الحل:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢٤ × ١١

= ٢٦٤ سم^{٢}

٣) اسطوانة دائرية قائمة مساحة قاعدتها ١٥٤سم^{٢}، وارتفاعها ٢٠ سم.

جد: أ) محيط قاعدتها ب) مساحتها الكلية

الحل:

مساحة القاعدة = π نق^{٢}

١٥٤ = π نق^{٢}

نق^{٢} ≈ ٤٩

نق ≈ ٧

أ) محيط القاعدة = ٢ π نق

= ٢ π × ٧

≈ ٤٤ سم

ب) المساحة الكلية = ٢ π نق (ع + نق)

= ٢ π × ٧(٢٠+ ٧)

≈ ١١٨٨ سم^{٢}

٤) قبعة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ π سم^{٣}، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول نصف قطرها؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} ع

$\frac{1}{3}$ π ١٨٠ = $\frac{1}{3}$ π نق^{2} × ١٥

نق^{2} = ٣٦

نق = ٦ سم

٥) في حصة التربية المهنية، عمل أحد الطلبة كوباً اسطواني الشكل من الفخار بحيث كان حجمه ٤٨ π سم^{3}، ونصف قطر قاعدته ٢ سم، وعمل طالب آخر كوباً اسطواني الشكل أيضاً، بحيث كان طول قطر قاعدته ٨سم، وارتفاعه ٢٤سم جد:

أ) حجم الكوب الثاني.

ب) ارتفاع الكوب الأول. ✓

جـ) معامل التغّير.

الحل:

أ) حجم الكوب الثاني = π نق^{2} × ع

= π × ١٦ × ٢٤

= ٣٨٤ π سم^{3}

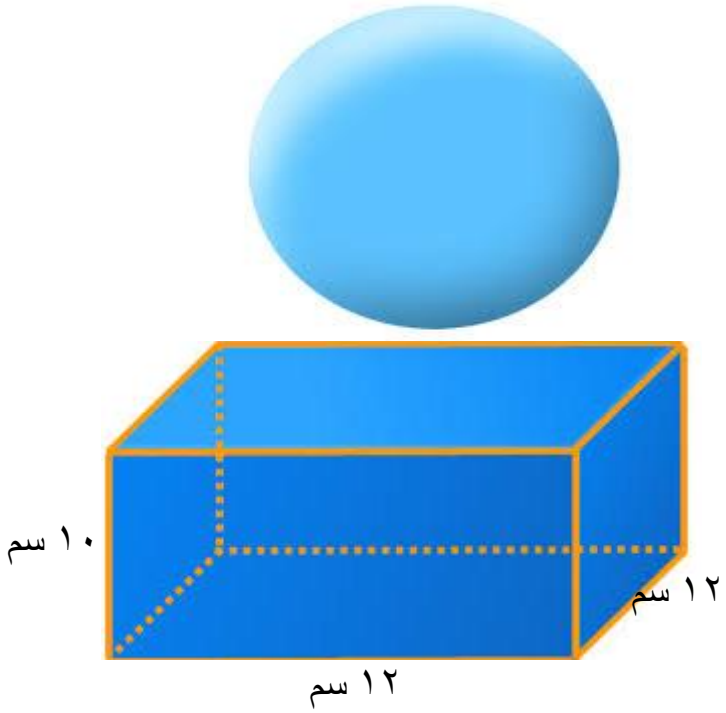
ب) حجم الكوب الأول = π نق^{2} × ع

٤٨ π = π ٤ × ع

ع = ١٢ سم

جـ) معامل التغّير= ٢ أو ½

٦) جد حجم المجسم المركب المرسوم أدناه؟



الحل:

الحجم = حجم المنشور الرباعي(متوازي مستطيلات) + حجم الكرة

= ١٢ × ١٢ × ١٠ + $\frac{٤}{٣}$ π

نق^{٣}

= ١٤٤٠ + $\frac{٤}{٣}$ π

×(٦)^{٣}

≈ ١٤٤٠ + ٩٠٥

≈ ٢٣٤٥ سم^{٣}