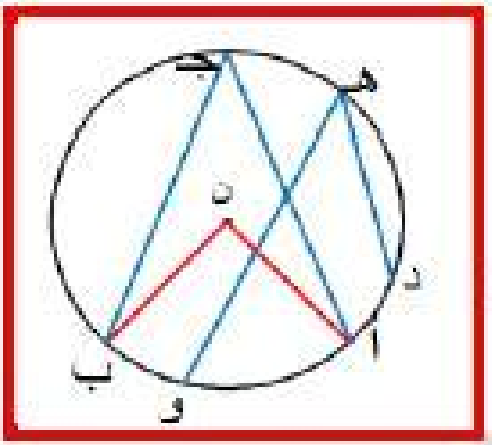
الفصل الثاني   الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

Central Angle and Inscribed Angle

تعريف :

الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة ، وضلعاها أنصاف أقطار .

الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة ، وضلعاها وترين في الدائرة .



مثال (١) : اعتماداً على الشكل المجاور

١) سم الزوايا المركزية والقوس المرسومة عليه

٢) سم الزوايا المحيطية والقوس المرسومة عليه

٣) سم الزوايا المرسومة على الوتر ‾اب وما نوع كل منهما .

الحل :-

١) ∢ا ن ب ← ⌒اب الأصغر .. ∢ا ن ب ← ⌒اب الأكبر .

٢) ∢د هـ و ← ⌒د و ... ∢ا جـ ب ← ⌒اب .

٣) ∢ا ن ب ← ‾اب مركزية .. ∢ا جـ ب ← ‾اب .

لاحظ في المثال السابق أن الزاويتين (المركزية ∢ا ن ب ، المحيطية ∢ا جـ ب) مرسومتان على الوتر ‾اب ، استخدم المنقلة في إيجاد قياس كل من الزاويتين ماذا تلاحظ ؟ ارسم دائرة وبداخلها زاويتان محيطية ومركزية على نفس الوتر بحيث تكون الزاوية المركزية منفرجة ، ثم جد قياس كل منهما .

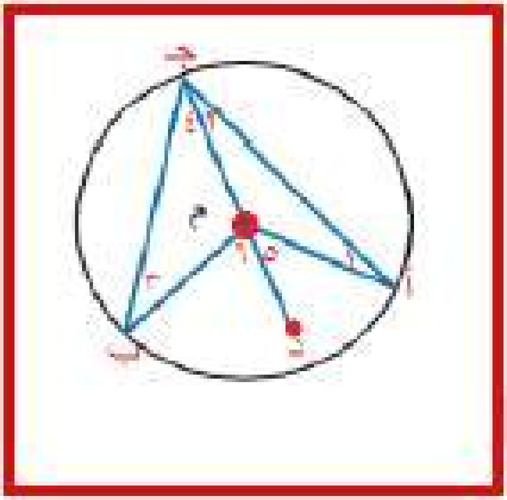
سليمان دلدوم أبو هيه

لا بد أنك لاحظت أن قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه .

أو بصورة أخرى : قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه .

مبرهنة

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه .



الحالة الأولى : النقطة م (مركز الدائرة) تقع داخل الزاوية المحيطية .

المعطيات : ∢ أ م ب زاوية مركزية ، ∢ أ جـ ب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأصغر .

المطلوب : إثبات أن ق ∢ أ م ب = ٢ ق ∢ أ جـ ب

البرهان : نصل $\overline{\text{جـ م}}$ ونمده إلى د ، ثم نرقم الزوايا كما في الشكل .

في المثلث (م أ جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق ∢ ١ = ق ∢ ٢ = س° زاويتا القاعدة متساويتان .
- ق ∢ ٥ = ق ∢ ١ + ق ∢ ٢ = ٢ س° زاوية خارجة للمثلث (م أ جـ)

في المثلث (م جـ ب) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

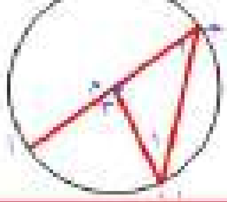
- ق ∢ ٣ = ق ∢ ٤ = س° زاويتا القاعدة متساويتان .
- ق ∢ ٦ = ق ∢ ٣ + ق ∢ ٤ = ٢ س° زاوية خارجة للمثلث (م جـ ب)

ق∠٥ + ق∠٦ = ٢س° + ٢ص°

ق∠أمب = ٢(س° + ص°)

ق∠أمب = ٢(ق∠أجب)

===



الحالة الثانية : إذا كان قطر الدائرة أحد ضلعي الزاوية المحيطية(مركز الدائرة يقع على ضلع المحيطية)

المعطيات : دائرة مركزها م ، أج قطر في الدائرة

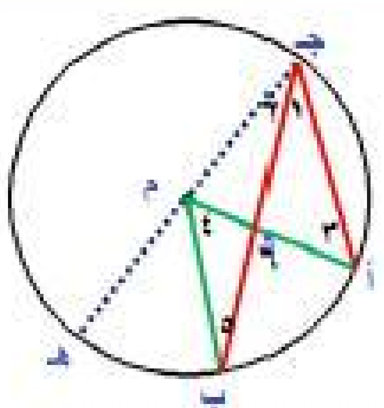
∠أمب زاوية مركزية ، ∠أجب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس أب الأصغر .

المطلوب : إثبات أن ق∠أمب = ٢ق∠أجب .

البرهان : في المثلث (م ب جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق∠١ = ق∠٢ = س° زاويتا القاعدة متساويتان .
- ق∠٣ = ق∠١ + ق∠٢ = ٢س° زاوية خارجة للمثلث (م ب جـ)

إذاً ق∠٣ = ٢ق∠٢ = ٢س° ← ق∠أمب = ٢ق∠أجب المطلوب



الحالة الثالثة :

م مركز الدائرة يقع خارج الزاوية المحيطية

المعطيات : دائرة مركزها م ، ∠أمب زاوية مركزية ، ∠أجب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس أب الأصغر .

سليمان دلدوم أبو هيه

المطلوب : إثبات أن ق ∠ أ م ب = ٢ ق ∠ أ جـ ب .

البرهان : نرسم القطر $\overline{\text{أ جـ}}$

في المثلث (م أ جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق ∠١ + ق ∠٢ = ق ∠٣ .... (١)

في المثلث (م جـ ب) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق ∠٢ = ق ∠٥ .... (٢)

- ق ∠٦ = ق ∠١ + ق ∠٣ .... (٣)
  ق ∠٦ = ق ∠٤ + ق ∠٥ .... (٤)

∠٦ زاوية خارجة للمثلثين (جـ أ د ، ب م د) إذا من (٣) ، (٤)

ق ∠٤ + ق ∠٥ = ق ∠١ + ق ∠٣ .... (٥)

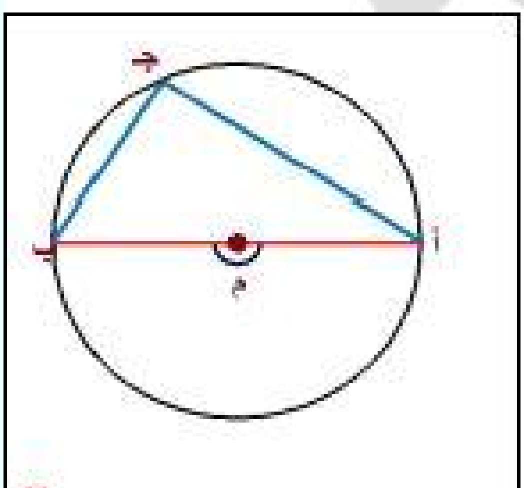
وبتعويض (١) في (٥) نحصل على

ق ∠٤ + ق ∠٥ = ق ∠١ + ق ∠١ + ق ∠٢ .... (٦)

لكن من (٢) ق ∠٢ = ق ∠٥

ق ∠٤ = ٢ × ق ∠١ ← ق ∠ أ م ب = ٢ ق ∠ أ جـ ب وهو المطلوب .

مبرهنة : الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة .



المعطيات : ∠ أ جـ ب زاوية محيطية على القطر $\overline{\text{أ ب}}$ ، ∠ أ م ب زاوية مركزية

المطلوب : إثبات أن ق ∠ أ جـ ب = ٩٠°

البرهان : ق ∠ أ م ب = ١٨٠° ، زاوية مستقيمة

الزاويتان المحيطية ∠ أجب ، والمركزية ∠ أمب مرسومتان على نفس القوس

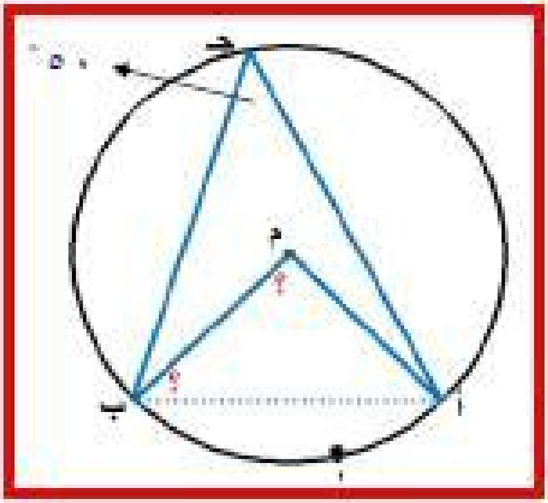
إذاً

ق∠أمب = ٢ × ق∠أجب

١٨٠° = ٢ × ق∠أجب

ق∠أجب = ٩٠° .... وهو المطلوب

مثال (١):- في الشكل المجاور



م مركز الدائرة ، جد قياس كل من

∠أمب ، ∠أبم .

الحل :

- ∠أمب ، ∠أجب مركزية ومحيطية

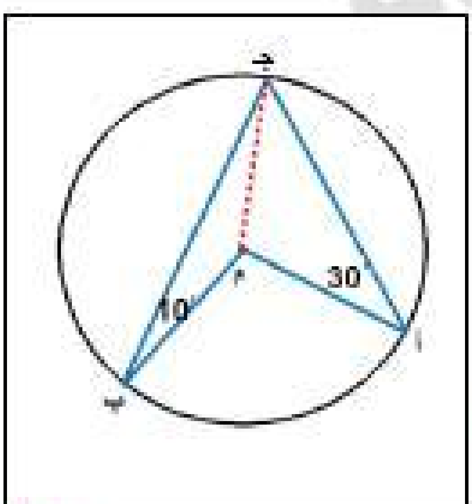
مرسومتان على القوس نفسه $\overset{\frown}{\text{أ د ب}}$

إذا ق∠أمب = ٢ق∠أجب = ١٠٠° قياس المركزية مثلي المحيطية

- ق∠أبم = ق∠بأم م أ = م ب .في المثلث م أ ب (أنصاف أقطار)

ق∠أبم = $\frac{1}{2}$ (١٨٠° − ١٠٠°) = ٤٠° إكمال زوايا المثلث

مثال (٢):- في الشكل المجاور دائرة مركزها م



جد ق∠أمب

الحل : نصل م جـ

- ق∠أجم = ق∠جأم = ٣٠°

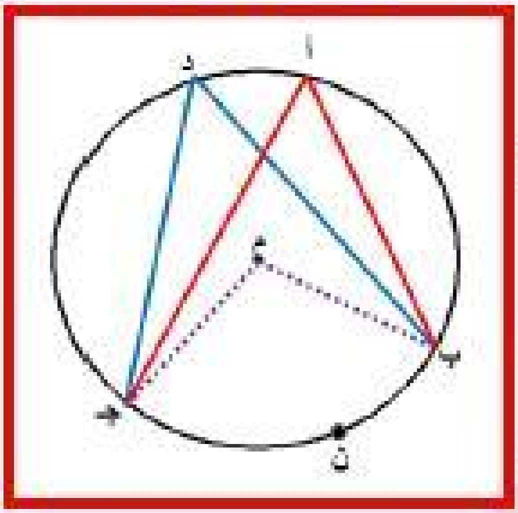
المثلث (م جـ أ) متطابق الضلعين (م جـ = م أ)

- ق(∠ ب جـ م) = ق(∠ جـ ب م) = ١٠°

المثلث (جـ ب م) متطابق الضلعين (م جـ = م ب)

- ق(∠ ا جـ ب) = ق(∠ ا جـ م) + ق(∠ ب جـ م) = ٣٠° + ١٠° = ٤٠°
- ق(∠ ا م ب) = ٢ ق(∠ ا جـ ب) = ٢ × ٤٠° = ٨٠° مركزية ومحيطية على القوس نفسه ا⌒ب (الوتر ا ب) ٠

مبرهنة : الزاوية المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد (وتر واحد) متساويتان في القياس ٠



المعطيات : دائرة مركزها م ، الزاويتان المحيطيتان (∠ ب ا جـ ، ∠ ب د جـ) مرسومتان على القوس نفسه ب⌒ن⌒جـ (الوتر ب جـ)

المطلوب : إثبات أن ق(∠ ب ا جـ) = ق(∠ ب د جـ)

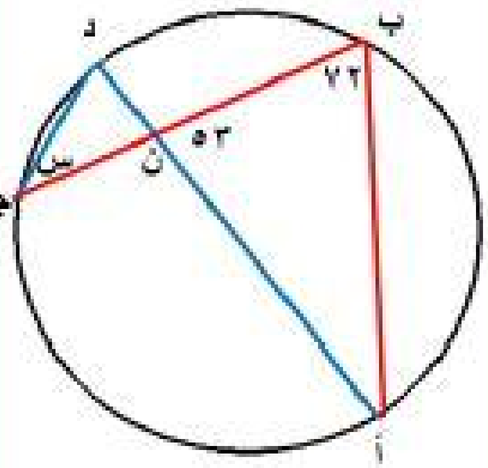
البرهان : نصل م ب ، م جـ

- ق(∠ ب ا جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م جـ) ....(١) محيطية ومركزية على القوس ب⌒ن⌒جـ
- ق(∠ ب د جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م جـ) ....(٢) محيطية ومركزية على القوس ب⌒ن⌒جـ

من (١) ، (٢) ق(∠ ب ا جـ) = ق(∠ ب د جـ) وهو المطلوب ٠

((أسامح لأرتاح .. وأتناسى لأبتسم .. وأصمت لأني لا أريد أن أجادل .. وأتجاهل لأن لا شيء يستحق .. وأصبر لأن ثقتي بالله ليس لها حدود .. النفس الطيبة لا يملكها إلا الشخص الطيب .. والسيرة الطيبة هي أجمل ما يتركه الإنسان في قلوب الآخرين .. ومن تسبب في سعادة إنسان تحققت له سعادته))

مثال (٣):- في الشكل المجاور جد قيمة س



الحل :

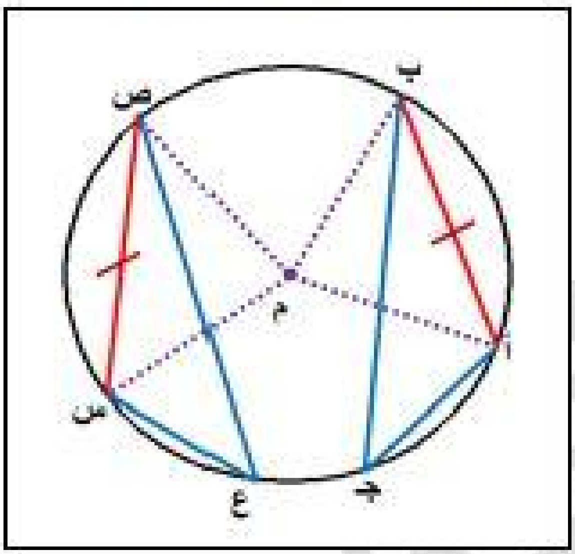
ق∠ب جـ د = ق∠ب أ جـ محيطيتان على القوس $\overset{\frown}{ب د}$ (الوتر $\overline{ب د}$) .

ق∠ب جـ د = س = ١٨٠° − (٧٢° + ٥٣°) = ٥٥°

إكمال زوايا المثلث (أ ب ن) .

ملاحظة : فكر في حل أخر .

مبرهنة : الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوسين متساويي في القياس (وترين) متساويتين في القياس .



المعطيات : دائرة مركزها م ، الوتران $\overline{أب}$ ، $\overline{ص س}$ متساويان في القياس

المطلوب : إثبات أن

ق∠أ جـ ب = ق∠س ع ص

البرهان :

نصل $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ص}$ ، $\overline{م س}$ ، ونبحث في تطابق المثلثين

م أ ب ، م س ص

م أ = م س أنصاف أقطار

م ب = م ص أنصاف أقطار

أ ب = س ص معطيات

ينطبق المثلثان بثلاثة أضلاع وينتج أن

ق∠أ م ب = ق∠س م ص .(١)

سليمان دلدوم أبو هيه

لكن ق∠أجب = $\frac{١}{٢}$ ق∠أمب . . . (٢) محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{أب}}$

ق∠س ع ص = $\frac{١}{٢}$ ق∠س م ص . . . (٣) محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{س ص}}$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن ق∠أجب = ق∠س ع ص وهو المطلوب .

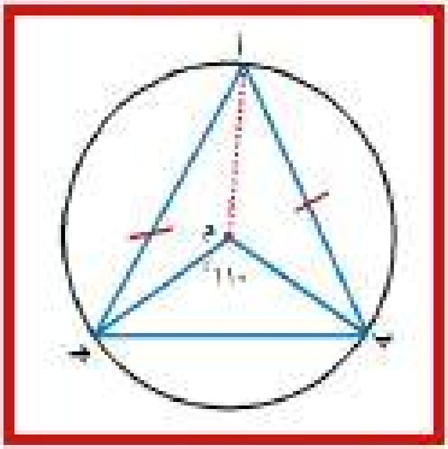
بصورة عامة :

الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة (أقواس متطابقة) تتساوى في القياس

==

مثال (٤):- في الشكل المجاور ، دائرة مركزها م ، أ ب = أ جـ ، جد قياس

كل من : أ) ∠ب أ جـ ب) ∠أ ب م



الحل :

أ) ق∠ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ ق∠ب م جـ = ٥٥°

محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{أ ب}}$.

ب) ق∠ب م أ = ق∠جـ م أ = $\frac{١}{٢}$(٣٦٠° − ١١٠°) = ١٢٥°

مركزيتين على وترين متطابقين (الدورة الكاملة)

لكن المثلث ب م أ متطابق الضلعين (م أ = م ب) ، إذاً

ق∠أ ب م = $\frac{١}{٢}$(١٨٠° − ١٢٥°) = ٢٧و٥° وهو المطلوب

حل آخر لفرع ب : المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

ق∠أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$(١٨٠° − ٥٥°) = ٦٢و٥° . . . (١)

المثلث م ب جـ متطابق الضلعين (م ب = م جـ)

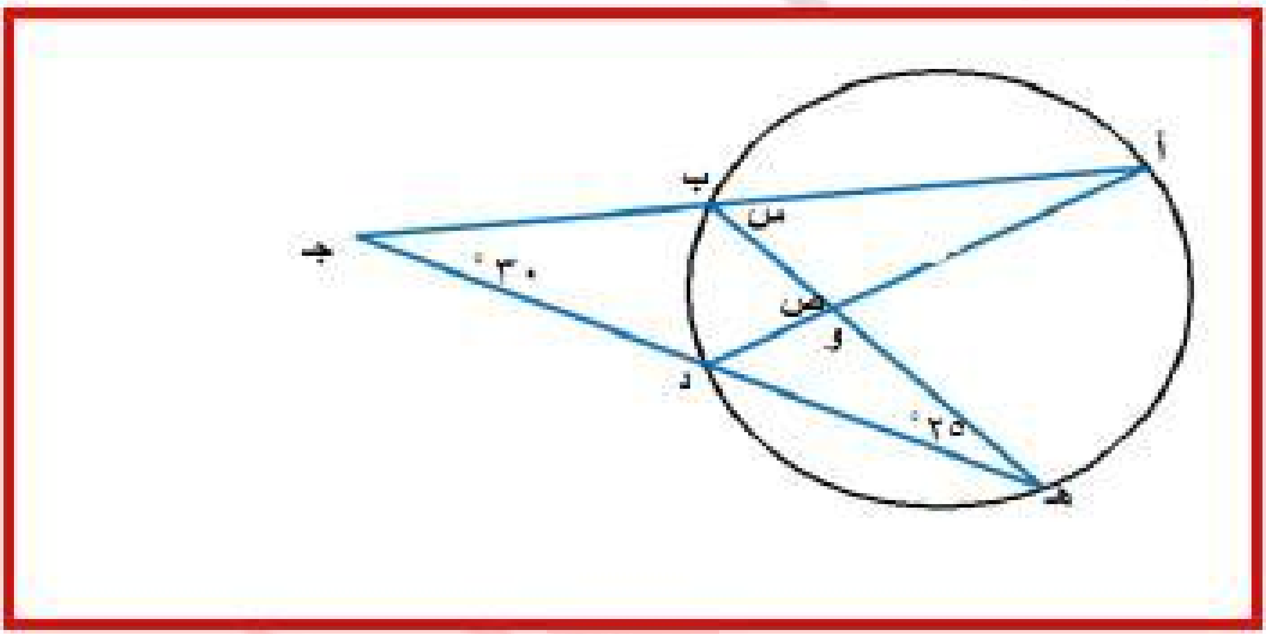
ق∠م ب جـ = $\frac{١}{٢}$(١٨٠° − ١١٠°) = ٣٥° . . . (٢)

من (١) ، (٢)

ق∠اب م = ق∠اب جـ − ق∠م ب جـ

= ٦٢٫٥° − ٣٥° = ٢٧٫٥° وهو المطلوب

مثال (٥):- في الشكل ، جد قيمة كل من : س ، ص .

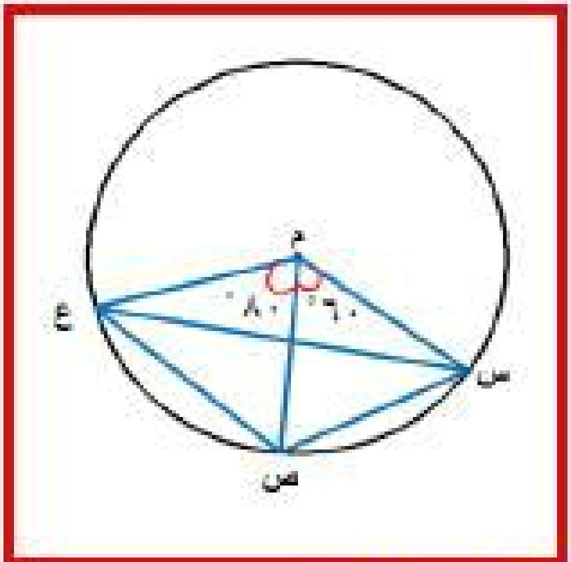


الحل :

- س = ق∠اب هـ = ٥٥° زاوية خارجة للمثلث ب هـ جـ .
- ق∠د أ هـ = ق∠ب هـ د = ٢٥° محيطيتان على الوتر $\overline{\text{ب د}}$.
- س = ق∠ب و د = ٧٠° زاوية خارجة للمثلث أ و ب .

ملاحظة : يوجد طرق أخرى للحل .

مثال (٦):- يمثل الشكل دائرة مركزها م ، احسب قياسات زوايا المثلث س ص ع



الحل :

- ق∠ ع س ص = $\frac{1}{2}$ ق∠ ع م ص = ٤٠°

محيطية ومركزية على الوتر ع ص

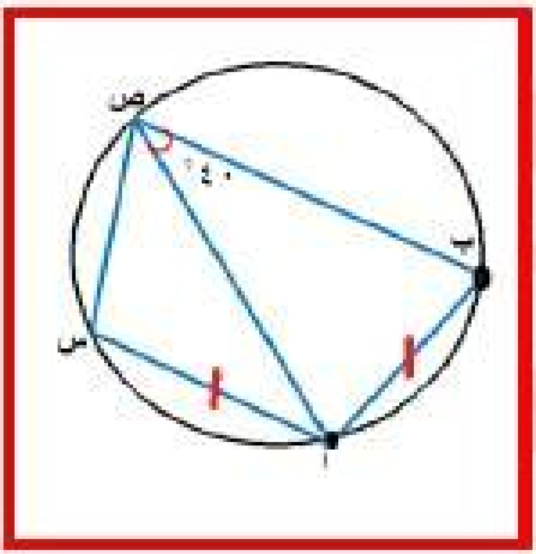
- ق∠ س ع ص = $\frac{1}{2}$ ق∠ س م ص = ٣٠°

محيطية ومركزية على الوتر س ص

- ق∠ س ص ع = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

إكمال زوايا المثلث س ص ع .

مثال (٧):- في الشكل المجاور إذا كان (أ ب = أ س) ، جد ق∠ س ص ب .



الحل :

ق∠ ا ص س = ق∠ ا ص ب = ٤٠°

محيطيتان على وترين متطابقين .

إذاً

ق∠ س ص ب = ٨٠°

==

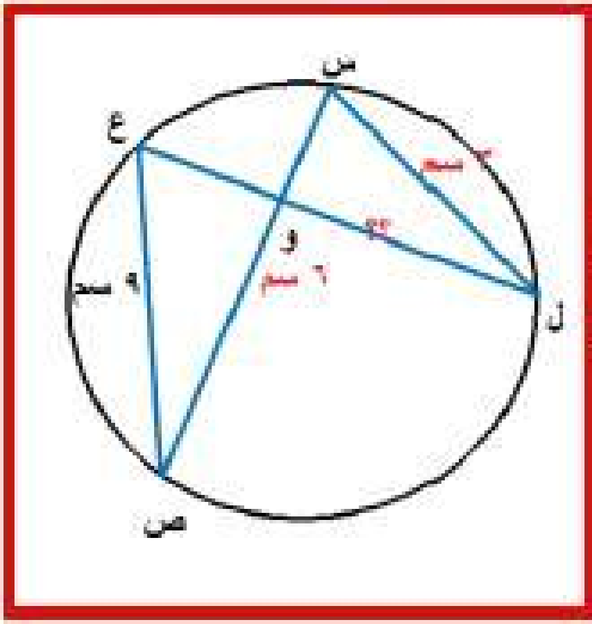
قيل للسعادة : أين تسكنين

قالت : في قلوب الراضين بقضاء الله .

سليمان دلدوم أبو هيه

مثال (٨):- $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و . بحيث

إن ع ص = ٩ ، ص و = ٦ ، س ل = ٣ (بالسم) . جد طول (ل و)



الحل : الشكل المجاور

في المثلثين (و س ل ، و ع ص)

ق∡س = ق∡ع محيطيتان على الوتر $\overline{\text{ل ص}}$

ق∡ل = ق∡ص محيطيتان على الوتر $\overline{\text{س ع}}$

ق∡س و ل = ق∡ع و ص بالتقابل بالرأس

يتشابه المثلثان بثلاث زوايا وينتج أن

$$\frac{\text{و س}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ل}}{\text{و ص}} = \frac{\text{س ل}}{\text{ع ص}}$$

$$\frac{\text{و ل}}{٦} = \frac{٣}{٩} \leftarrow \text{و ل} = ٢ \text{ سم}$$

مثال (٩):- $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و :

أ) أثبت أن : و أ × و ب = و جـ × و د .

ب) إذا كان و أ = ٤ سم ، و ب = ٦ سم ، و د = ١٢ سم ،

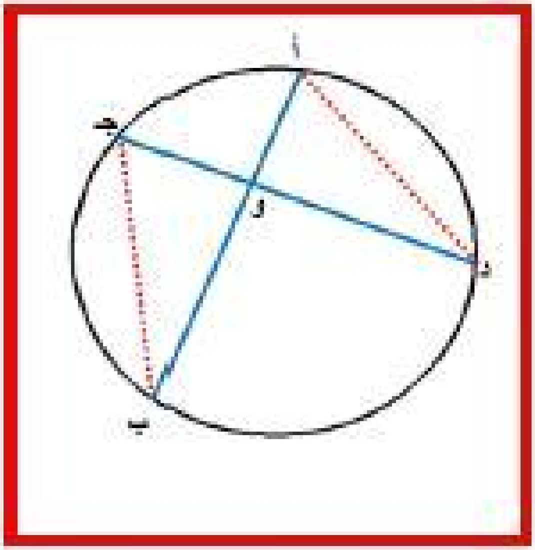
جد قيمة كل من : و جـ ، جـ د .

ت) إذا كان و أ = ٣ سم ، و ب = ٦ سم ، جـ د = ١١ سم ،

جد قيمة كل من : و جـ ، و د .

الحل :

أ) البرهان :



في المثلثين (و أ د، و جـ ب)

ق∠أ = ق∠جـ محيطيتان على الوتر $\overline{\text{د ب}}$

ق∠د = ق∠ب محيطيتان على الوتر $\overline{\text{أجـ}}$

ق∠أود = ق∠جـوب بالتقابل بالرأس

يتشابه المثلثان بثلاث زوايا وينتج أن

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{جـ ب}}$$

$$\text{و أ} \times \text{و ب} = \text{و جـ} \times \text{و د}$$

ب) من الفرع السابق (أ)

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{جـ ب}}$$

$$\frac{\text{٤}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٦}} \leftarrow \text{و جـ} = \text{٢ سم}$$

ج د = ج و + و د = ١٤ سم

جـ) نفرض طول جـ و = س ∴ إذا و د = ١١ − س

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{س}} = \frac{\text{١١} - \text{س}}{\text{٦}} \leftarrow \text{١١س} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{١٨}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{١١س} + \text{١٨} = \text{٠} \leftarrow (\text{س} - \text{٢})(\text{س} - \text{٩}) = \text{٠}$$

س = ٢ أو س = ٩

عند س = ٢ ← و جـ = ٢ سم ∴ و د = ٩ سم

عند س = ٩ ← و جـ = ٩ سم ∴ و د = ٢ سم