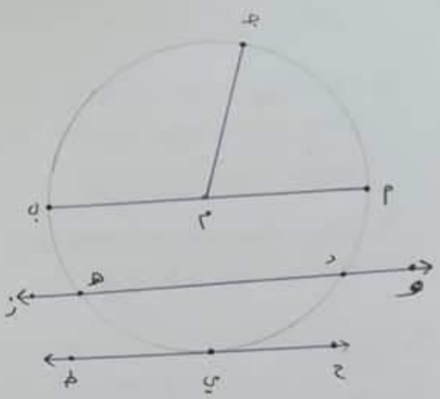
الدرس الاول: أوتار الدائرة :-



تدريب ١ :-
يمثل الشكل دائرة مركزها م عين على هذه الدائرة
١) قطر ٢) ثلاثة أنصاف أقطار ٣) وترين
٤) قاطع ٥) ثلاثة أقواس ٦) مماس ٧) نقطة تماس

الحل :-
١) $\overline{\text{أب}}$
٢) $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$
٣) $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$
٤) $\overline{\text{و ز}}$
٥) $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ ، $\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$
٦) ح ط
٧) ي

* نصف قطر الدائرة: هي القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة ونقطة عليها .
* الوتر :- هي القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة
* القطر :- هي وتر الدائرة المار بالمركز وهو أطول وتر في الدائرة .
* القاطع :- هو المستقيم الذي يحتوي وتر في الدائرة
* القوس :- هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليه .

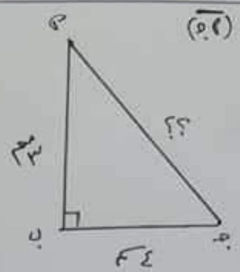
* تذكر :- (تطابق المثلثات)
* يتطابق المثلثات في الحالات التالية :-
١) ضلع ، ضلع ، ضلع
(اذا تساوت ثلاثة أضلاع متناظرة)
٢) ضلع ، زاوية ، ضلع
(ضلعين وزاوية محصورة .)
٣) زاوية ، ضلع ، زاوية
(زاويتان وضلع محصور)
٤) حالة خاصة :-
ضلع ، ضلع ، زاوية قائمة .

تذكر :-
في المثلث متساوي الساقين العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة فإنه ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس .

تذكر :- (نظرية فيثاغورس)
في المثلث القائم الزاوية مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين .

$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$

مثال ١ :- أوجد قيمة الضلع ($\overline{\text{أ جـ}}$)



الحل :-
$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$
$(\text{أ جـ})^2 = (٣)^2 + (٤)^2$
$(\text{أ جـ})^2 = ٩ + ١٦$
$\sqrt{(\text{أ جـ})^2} = \sqrt{٢٥}$
أ جـ = ٥ سم

"خالد العمارين" ☺

"خالد العمارين"

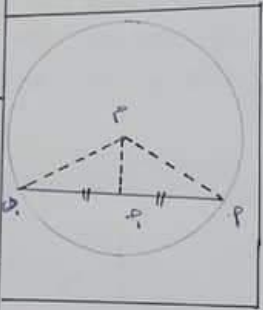
مبرهنة (١):

(١) العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها، ينصفه.

(٢) المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز يعامد الوتر.

(٣) العمود المقام من منتصف الوتر في الدائرة يمر بمركزها.

الإثبات (١):-



(١) نرسم دائرة مركزها (م)

(٢) نرسم أب وتر.

(٣) نرسم قطعة مستقيمة م جـ تعامد الوتر أب في النقطة جـ

(٤) المطلوب: إثبات أن م جـ ينصف الوتر أب

* نصل بين أم، م ب.

يصبح مثلثان Δ م جـ أ، Δ م جـ ب

(١) م أ = م ب (أنصاف أقطار)

(٢) ∡ م جـ أ = ∡ م جـ ب (العمود النازل يشكل زاوية قائمة)

(٣) م جـ (ضلع مشترك)

اذن يتطابق المثلثات بـ (ضلع، ضلع، زاوية قائمة)

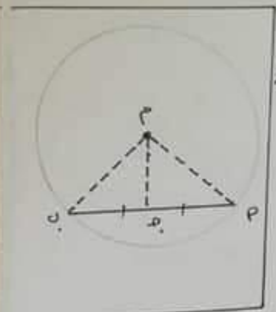
∴ بما أن Δ م جـ أ ≅ Δ م جـ ب

إذن أجـ = جـ ب

تدريب:-

برهن أن المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز يعامد الوتر

الإثبات:-



نرسم دائرة مركزها (م) ونرسم مستقيم م جـ على الوتر أب وينصفه.

أجـ = جـ ب (بالفرض)

م أ = م ب (انصاف اقطار)

م جـ (ضلع مشترك)

∴ Δ م أ جـ يطابق Δ م جـ ب بـ (ضلع، ضلع، ضلع)

اذن ∡ م جـ أ = ∡ م جـ ب = ٩٠° (مجموع الزاويتين ١٨٠ على خط مستقيم)

مثال:-

س ص وتر في دائرة مركزها (م) وطول قطرها (١٠ سم)، القطعة م ل تعامد الوتر س ص في النقطة ل اذا كان (م ل = ٤ سم) جد س ص ؟؟

الحل:-

Δ م س ل، Δ م ص ل متطابقين (ضلع، ضلع، زاوية قائمة)

(س م)^2 = (م ل)^2 + (س ل)^2

(٥)^2 = (٤)^2 + (س ل)^2

(س ل)^2 = ٢٥ − ١٦

س ل = $\sqrt{٩}$

س ل = ٣

طول الوتر = ٢ × نصف الوتر

= ٢ × س ل

= ٢ × ٣

= ٦ سم

"خالد العمارين" ☺

مثال :-

ك ل وتر في دائرة مركزها (م) النقطة (س) منتصف الوتر ك ل ، ∡ ل م س = ٣٥° . جد ∡ م ل س ؟؟

الحل:- بما ان م ل = م ك

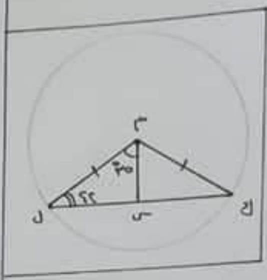
انصاف اقطار فإن م س عمودي على الوتر ك ل

∴ ∡ م س ل = ٩٠°

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∡ م ل س = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٥)

∡ م ل س = ٥٥



تدريب ١- س ص وتر في دائرة مركزها (م) وطول نصف قطرها (٥ سم) ، النقطة ع منتصف س ص اقيم عمود م ب على س ص فقطع الدائرة في (ب) على القوس الاصغر س ص فاذا كان س ص = ٨ اوجد طول ع ب ؟؟

الحل:

م ع = √(٥² − ٤²) (فيثاغورس)

م ع = √(٢٥ − ١٦)

م ع = √٩

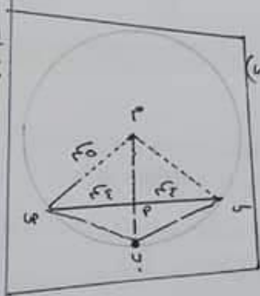
م ع = ٣

م ب = ٥ سم لانه نصف قطر

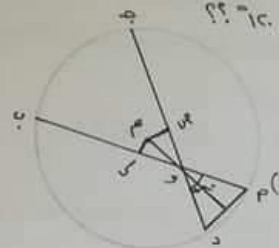
ع ب = م ب − م ع

ع ب = ٥ − ٣

ع ب = ٢ سم



مثال ١- أ ب ، جـ د وتران في دائرة مركزها (م) غير مارين بالمركز ويتقاطعان في النقطة (و) اذا كان ∡ أ و د = ٦٠° ، وكانت م تقع داخل الزاوية الحادة جـ و ب ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ د اثبت ان ∡ س م ص = ١٢٠° ؟؟



الحل:-

∡ و ص م = ٩٠°

∡ و س م = ٩٠°

∡ ص و س = ٦٠ (متقابلة بالرأس)

١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠ وهو المطلوب

(كل زاويتين في الشكل الرباعي متقابلتين مجموعها ١٨٠°.)

مثال :- ك ل وتر في دائرة مركزها (م) طوله (١٢ سم) ويبعد عن مركزها (٣) سم ، ك ع وتر آخر في الدائرة ويبعد عن المركز (٦ سم) ، جد طول ك ع ؟؟

الحل:-

م ك = √(٦² + ٣²) (فيثاغورس)

م ك = √٤٥

ك و = √((√٤٥)² − (٦)²)

ك و = √(٤٥ − ٣٦)

ك و = √(٤٥ − ٣٦)

ك و = √٩

ك و = ٣

ك ع = ك و + و ع

ك ع = ٣ + ٣

ك ع = ٦ سم

"خالد العمارين"

"خالد العمارين"

الدرس الثاني :- الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

* الزاوية المركزية :-
هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة واضلاعها يحتويان انصاف اقطار .

* الزاوية المحيطية :-
هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة ، وضلعاها يحتويان وترين في الدائرة .

تذكر ١ :- زوايا القاعدة في المثلث متساوي الساقين متساويتين

تذكر ٢ : أ) الزاوية الخارجة للمثلث تساوي ضعف الزاوية الداخلية للمثلث متساوي ~~الساقين~~ الاضلاع .

ب) الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين البعيدتين لأي مثلث .

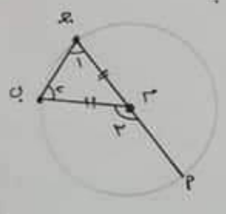
نظرية ١ :-
قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس .

المعطيات :-
* أ م ب زاوية مركزية
* أ جـ ب زاوية محيطية
مرسومتان على القوس نفسه أب .

المطلوب :-
اثبت ان ∡ أ م ب = ٢ × ∡ أ جـ ب

البرهان :-
نصل جـ م ونمده إلى (د)
المثلث أ م جـ متطابق الضلعين فيه أم = جـ م
∡ ١ = ∡ ٢ (زوايا القاعدة لمثلث متساوي الساقين متساوية)
∡ ٥ زاوية خارجة للمثلث أ م جـ
∡ ٥ = ∡ ١ + ∡ ٢ (∡ ١ = ∡ ٢)
∡ ٥ = ٢ × ∡ ٢
بالمثلث ∡ ٤ = ∡ ٣ زوايا القاعدة لمثلث متساوي الساقين متساوية
∡ ٦ = ∡ ٣ + ∡ ٤
∡ ٦ = ٢ × ∡ ٤
∴ ∡ ٥ + ∡ ٦ = ٢ × ∡ ٢ + ٢ × ∡ ٤
= ٢ (∡ ٢ + ∡ ٤)
∴ ∡ أ م ب = ٢ × ∡ أ جـ ب وهو المطلوب ☺

تدريب ١ :- برهن انه اذا كان احد الضلعين الزاوية المحيطية قطراً في دائرة .



الحل :-
* أ م ب زاوية خارجية المثلث م جـ ب .
(م جـ = م ب) انصاف اقطار .
أ جـ قطر في الدائرة .
* أ م ب زاوية مركزية .
* أ جـ ب زاوية محيطية مرسومتان على القوس نفسه أب
∡ ١ = ∡ ٢ (زوايا قاعدة مثلث متساوي الضلعين)
∡ ٣ = ∡ ١ + ∡ ٢ (زاوية خارجة)
∴ ∡ ٣ = ٢ × ∡ ١ وهو المطلوب
∴ ∡ أ م ب = ٢ × ∡ أ جـ ب

المعطيات ← البرهان

"خالد العارس" ☺

تدريب :-

دائرة مركزها (م) جد ∡ أ م ب

الحل :-

نصل م جـ .

∡ أ جـ م = ∡ جـ أ م = ٣٠°

لأنه Δ م جـ أ مثلث متطابق الضلعين (م جـ = م أ) أنصاف أقطار .

∡ ب جـ م = ∡ جـ ب م = ١٠°

Δ جـ ب م متطابق الضلعين (م جـ = م ب)

- ∡ أ جـ ب = ∡ أ جـ م + ∡ ب جـ م = ٣٠° + ١٠° = ٤٠°
- ∡ أ م ب = ٢ × ∡ أ جـ ب = ٢ × ٤٠ = ٨٠°

لأنها زاوية مركزية ومحيطية مرسومة على نفس القوس أب .

مبرهنة :-

الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على القوس نفسه متساويتان في القياس .

المعطيات :-

دائرة مركزها (م)

∡ ب أ جـ ، ∡ ب د جـ

(زاويتان محيطيتان مرسومتان على نفس القوس)

المطلوب :- اثبت أن ∡ ب أ جـ = ∡ ب د جـ .

البرهان :-

نصل م ب ، م جـ

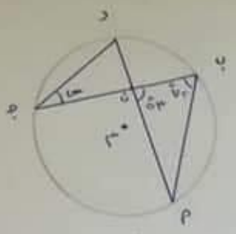
* ∡ ب أ جـ = $\frac{1}{2}$ ∡ ب م جـ .... (١) محيطية ومركزية
* ∡ ب د جـ = $\frac{1}{2}$ ∡ ب م جـ .... (٢) مرسومة على القوس نفسه (ب ن جـ)

من (١) و(٢) :-

∡ ب أ جـ = ∡ ب د جـ وهو المطلوب #

سؤال ١- ... [illegible]

مثال ١- في الشكل المجاور جد قيمة س ؟؟



الحل :-

∡ ب د جـ = ∡ ب أ جـ

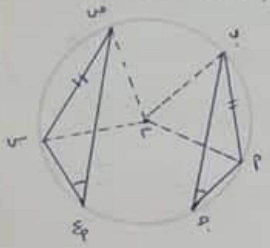
لأنهما محيطيتان مرسومتان على القوس نفسه جـ د .

س = ١٨٠ − (٥٣ + ٧٢)

س = ١٨٠ − ١٢٥

$\boxed{\text{س} = ٥٥°}$

تدريب :- اثبت أن ∡ أ جـ ب = ∡ س ع ص



الحل :-

- نصل م جـ ، م ب ، م ص ، م س
- نبحث في تطابق المثلثين Δ م أ ب ، Δ م س ص

م أ = م س
م ب = م ص
أ ب = س ص
} أنصاف أقطار

- ينطبق المثلثان بثلاثة أضلاع .
- ∡ أ م ب = ∡ س م ص .... (١)
- ∡ أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ × ∡ أ م ب .... (٢) محيطية ومركزية على أب
- ∡ س ع ص = $\frac{1}{2}$ ∡ س م ص .... (٣) محيطية ومركزية على س ص

من (١) ، (٢) ، (٣)

ينتج أن ∡ أ جـ ب = ∡ س ع ص #

الصورة العامة :

الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة (أو أقواس متطابقة) تتساوى في القياس .

"خالد العمارين" ☺

"خالد العمارين"

تدريب ٥.

برهن مبرهنة :- اذا كان احد الضلعين للزاوية المحيطية قطراً للدائرة.

الحل :

- ∡ أ م ب زاوية خارجية للمثلث م جـ ب
- ($\overline{م جـ} = \overline{م ب}$) انصاف اقطار
- أ $\overline{جـ}$ قطر في الدائرة
- ∡ أ م ب زاوية مركزية } مرسومتان على الوتر $\overline{أ ب}$
- ∡ أ جـ ب زاوية محيطية

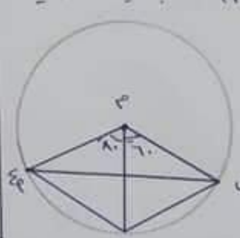
∡ ١ = ∡ ٢ (زوايا قاعدة مثلث متساوي الساقين)

∡ ٣ = ∡ ١ + ∡ ٢ (زاوية خارجية للمثلث تساوي المقابلتين)

∴ ∡ ③ = ② × ∡ ① وهو المطلوب.

∴ ∡ أ م ب = ٢ ∡ أ جـ ب #

سؤال : دائرة مركزها (م) احسب قياسات زوايا المثلث س ص ع ؟؟



الحل :-

∡ ع س ص = $\frac{1}{2}$ × ∡ ع م ص

= $\frac{1}{2}$ × ٨٠

= ٤٠

(محيطية ومركزية على القوس ع ص)

∡ س ع ص = $\frac{1}{2}$ ∡ س م ص = ٣٠

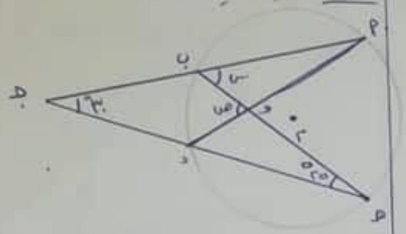
(محيطية ومركزية على الوتر $\overline{س ص}$)

- ∡ س ص ع = ١٨٠ - (٤٠ + ٣٠)

= ١١٠° (مجموع المثلث (١٨٠))

"خالد العجارين" ☺

سؤال :- جد قيمة كل من س ، ص ؟؟



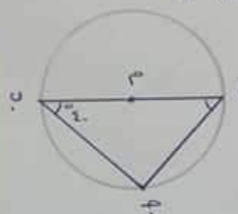
الحل :-

- س = ∡ أ ب هـ = ٥٥° زاوية خارجة للمثلث ب و جـ
- ∡ د أ هـ = ∡ ب هـ د = ٢٥°
(محيطيتان على الوتر $\overline{ب د}$)
- ∡ ب و د = ٨٠° زاوية خارجة للمثلث أ و ب

∴ ∡ س = ٥٥ ، ∡ ص = ٨٠°

سؤال :- $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة مركزها م ، جـ نقطة على الدائرة بحيث ان :-

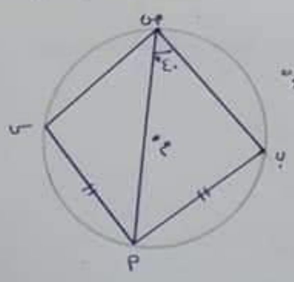
∡ أ ب جـ = ٤٠° ، جد قياس ∡ ب أ جـ ؟؟



الحل :-

- ∡ أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ ∡ أ م ب
= $\frac{1}{2}$ × ١٨٠°
= ٩٠°
(محيطية ومركزية على الوتر نفسه)
- ∡ ب أ جـ = ١٨٠ - (٩٠ + ٤٠)
= ١٨٠ - ١٣٠
∡ ب أ جـ = ٥٠ (مجموع المثلث ١٨٠°)

سؤال :- في الشكل أ ب = أ س جد ∡ س ص ب ؟؟



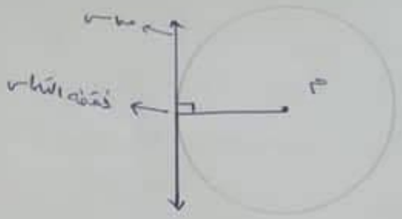
الحل :-

∡ أ ص س = ∡ أ ص ب = ٤٠°
(محيطيتان على وترين متساويين)

∴ ∡ س ص ب = ٨٠°

"خالد العجارين"

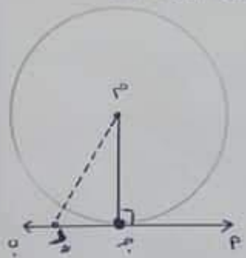
مماسات الدائرة :



تذكر ①:- اقصر قطعة مستقيمة تصل بين نقطة ومستقيم هي القطعة العمودية عليه من تلك النقطة .

تذكر ②:- اذا كانت النقطة أ خارج الدائرة التي مركزها (م) وطول نصف قطرها (س) فان أم > س

مبرهنة :- مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .



المعطيات :-

أب مماس للدائرة

م جـ نصف قطر الدائرة

المطلوب :-

اثبات ان م جـ ⊥ أب

البرهان :-

• لتكن د نقطة على المستقيم أب غير النقطة جـ

• ارسم م د ، (د) تقع خارج الدائرة

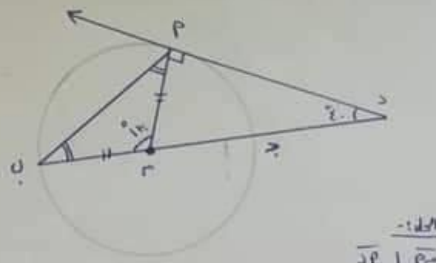
م د > م جـ

∴ م جـ اقصر قطعة تصل بين المركز والمماس

من تذكر ①+② فان

م جـ ⊥ أب #

مثال :- دائرة مركزها (م)، جد ∡ أب جـ ؟؟



الحل :-

م أ ⊥ أ د

∡ د أ م = °٩٠

• ∡ أ م د = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

= ١٨٠ − ١٣٠

∡ أ م د = ٥٠

• ∡ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ∡ أ م د (لانها زاوية خارجية للمثلث د أ م)

= °٢٥

تدريب ١ :- أب يمس دائرة مركزها (م) عند النقطة ب

أب = ٦ سم ، أم = ١٠ سم جد طول قطر الدائرة ؟؟

الحل :-

م ب ⊥ أ ب

∴ $(\text{م أ})^2 = (\text{م ب})^2 + (\text{ب أ})^2$

$(10)^2 = (\text{أ ب})^2 + (6)^2$

$(\text{أ ب})^2 = 100 - 36$

أب = $\sqrt{64}$

أب = ٨ سم ← نصف القطر .

لايجاد القطر كاملاً :-

القطر = ٢ × نصف القطر

القطر = ٢ × ٨

القطر = ١٦ سم

"خالد العربي"

مبرهنة :-

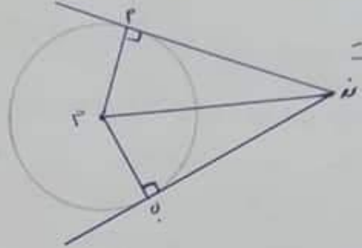
اذا رسم مماسان لدائرة مركزها (م) من نقطة خارجها مثل (ن) وكانت نقطتا التماس هما أ ، ب فإن :-

① ن أ = ن ب

② $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية بين المماسين ∢ أ ن ب

③ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين ∢ أ م ب

البرهان :-



• ∢ م أ ن = ∢ م ب ن = ٩٠° (مبرهنة نصف قطر عمودي على المماس)

• نبحث في تطابق المثلثين ن م أ ، ن م ب

① ∢ م أ ن = ∢ م ب ن = ٩٠°

② م ن ضلع مشترك

③ م أ = م ب (أنصاف أقطار)

∴ يتطابق المثلثين (ضلع ، ضلع ، زاوية قائمة)

وينتج أن :-

① ن م = ن ب

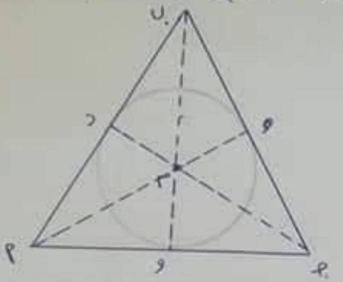
② ∢ أ ن م = ∢ ب ن م

③ ∢ ن م أ = ∢ ن م ب

#

خالد العماريين ☺

مثال: يمثل الشكل أ ب جـ الذي يمس الدائرة في النقطة د ، هـ ، و . أ د = ٣ سم ، ب د = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم ، جد طول أضلاع المثلث أ ب جـ ؟؟



الحل:- $\overline{\text{أ و}}$ = $\overline{\text{أ د}}$ = ٣ سم

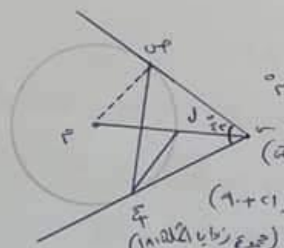
$\overline{\text{د ب}}$ = ب هـ = ٣ سم

$\overline{\text{ب جـ}}$ = ٦ سم

$\overline{\text{هـ جـ}}$ = ٦ - ٢ = ٤ سم

$\overline{\text{أ ب}}$ = ٥ سم ، $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٦ سم ، $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٧ سم #

تدريب:- المماسان $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ للدائرة عند النقطتين ص ، ع على التوالي ، ∢ ص س ع = ٤٢° ، جد ∢ ل ع ص ؟؟



الحل:- نصل $\overline{\text{م ص}}$

• ∢ ص س م = ∢ ع س م = ٢١° (مبرهنة)

• ∢ م ص س = ٩٠ ($\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ص س}}$)

• ∢ س م ص = ١٨٠° - (٢١ + ٩٠)

∢ س م ص = ٦٩ (مجموع زوايا المثلث ١٨٠ Δ س م ص)

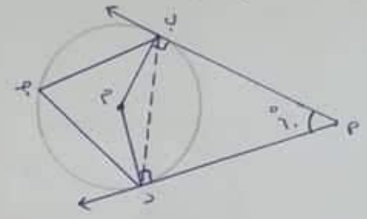
• ∢ ل ع ص = $\frac{1}{2}$ ∢ س م ص = ٣٤,٥°

(محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{ل ص}}$)

#

خالد العماريين ..

سؤال ١:- يمثل الشكل دائرة مركزها (م) ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماسان للدائرة عند النقطتين ب ، د على التوالي ، بحيث ان ∡ ب م د = ١٢٠° ، جد قياس ∡ أ ب د ، ∡ ب جـ د ؟؟



الحل :-

• ∡ م ب أ = ∡ م د أ = ٩٠° ($\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{أد}}$)

• ∡ أ ب د = ½ (١٨٠ - ٦٠) = ٦٠° (مثلث أ ب د متطابق الضلعين)

فيه أب = أد وهو المطلوب

• ∡ ب م د = ٣٦٠° - (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠°
(زوايا الشكل الرباعي أ ب م د ٣٦٠°)

• ∡ ب جـ د = ½ ∡ ب م د = ٦٠° (محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{ب د}}$)
#

سؤال ٢:- $\overline{\text{س ص}}$ قطر في دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس لها عند س ، رسم الوتر $\overline{\text{ن ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، اثبت ان القطر $\overline{\text{س ص}}$ ينصف الوتر $\overline{\text{ن ل}}$ ؟؟

المطلوب :- اثبت ان القطر $\overline{\text{س ص}}$ ينصف $\overline{\text{ن ل}}$.

البرهان :-

$\overline{\text{ص س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

• ∡ ص س أ = ٩٠° (القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس)

• $\overline{\text{ن ل}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ← ∡ و س أ + ∡ ن و س = ١٨٠°
(زاويتان متحالفتين)

• لكن ∡ و س أ = ٩٠°

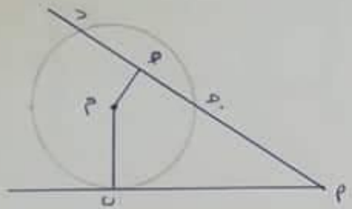
• ∡ ن و س = ٩٠°

← $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ن ل}}$

إذن القطر $\overline{\text{س ص}}$ ينصف الوتر $\overline{\text{ن ل}}$.

وهو المطلوب #

سؤال ١:- يمثل الشكل دائرة مركزها (م) ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس لها عند النقطة (ب) ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ قاطع لها عند النقطتين جـ ، د ، النقطة هـ تقع على الوتر $\overline{\text{جـ د}}$ بحيث ان الزاويتين ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتين ، اثبت ان النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{\text{جـ د}}$ ؟؟



المعطيات :- دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ قاطع ، الزاويتان ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتين

المطلوب :- اثبت ان النقطة هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ؟

البرهان :- في الشكل الرباعي أ هـ م ب الزاويتان متكاملتين . اي ان ∡ ب أ هـ + ∡ ب م هـ = ١٨٠°

منها نجد ان :-
∡ م ب أ + ∡ م هـ أ = ١٨٠° لكن
∡ م ب أ = ٩٠° (نصف قطر الدائرة عمودي على المماس)

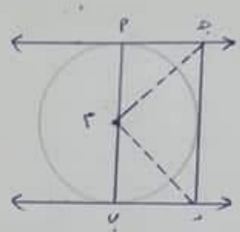
∡ م هـ أ = ٩٠° (بما ان $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$)

اذاً النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{\text{جـ د}}$

(العمود النازل من مركز الدائرة على اي وتر فهو ينصفه)

خالد العمارين

سؤال ١ - رسمت دائرة مركزها (م) ، مستقيمين متوازيين في النقطة م ، ب ، ثم رسم ~~مستقيم~~ مماس ثالث للدائرة فقطع المماسين المتوازيين في النقطتين ج ، د ، اثبت ان الزاوية (ج م د) قائمة ؟؟



- **المعطيات :-** دائرة مركزها (م) ، ج م // د ب
ج م ، د ب مماسان للدائرة ، ج د مماس للدائرة
م ب قطر الدائرة .

المطلوب :- اثبت ان ∡ ج م د = ٩٠°

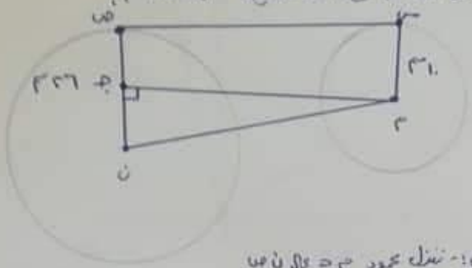
البرهان :-

- م ج ينصف ∡ د ج م
← ∡ د ج م = ½ ∡ د ج م ---- (١)
- م د ينصف ∡ ج د ب
← ∡ ج د م = ½ ∡ ج د ب ---- (٢)
- لكن الزاويتان (د ج م ، ج د ب) زاويتان متحالفتان مجموعهما ١٨٠° .
← (ج م // د ب) و (ج د قاطع لهما)
∡ د ج م + ∡ ج د م = ½ × ١٨٠ = ٩٠°

وبما ان مجموع قياس الزوايا في المثلث (ج م د = ٩٠) إذاً :-
∡ ج م د = ٩٠° وهو المطلوب #

"خالد العمارين" ☺

سؤال ١ - يمثل الشكل حزام يمر حول دولابين دائريين ، طول نصف قطر الدولاب الاصغر (١٠ سم) وطول نصف قطر الدولاب الاكبر (٣٦ سم) والبعد بين مركزيهما (٥٦ سم) ، جد طول الجزء المستقيم من الحزام بين النقطتين س ، ص ؟؟



الحل :- ننزل عمود م جـ على ن ص
ينتج لدينا مستطيل س م جـ ص .

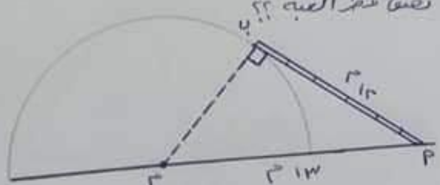
- س ص = م جـ ، ن جـ = ص ن - ص جـ
= ٣٦ - ١٠
ن جـ = ١٦

نطبق فيثاغورس

م جـ = √((٥٦)² - (١٦)²) = √(٣١٣٦ - ٢٥٦)
= √٢٨٨٠ = ٢٤√٥

- لكن م جـ = س ص ∴ س ص = ٢٤√٥

سؤال ١ :- يمثل الشكل المجاور سلماً طوله ١٢ م ، يرتكز بطرفه السفلي على ارض الحقيقة ويرتكز طرفه العلوي على قبة استتية على شكل نصف دائرة ، بحيث يبعد مركز الكرة (١٣ م) عن طرف السلم السفلي ، جد طول نصف قطر القبة ؟؟



نطبق فيثاغورس :-

الحل :-

ب م = √((١٣)² - (١٢)²)
= √(١٦٩ - ١٤٤)
= √٢٥
ب م = ٥

#

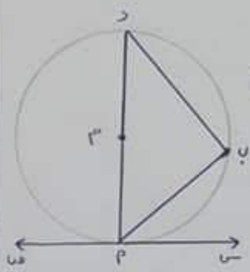
"خالد العمارين"

الزاوية المماسية :

الزاوية المماسية :- هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووتر فيها مار بنقطة التماس .

∡ س أ ب ، ∡ ص أ ب زاويتان مماسيتان .

مثال :- يمثل الشكل المجاور دائرة مركزها (م) ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس لها عند النقطة أ ، $\overline{\text{أ د}}$ قطر لها ، ب نقطة اخرى على الدائرة اثبت ان قياس الزاوية المماسية س أ ب تساوي قياس الزاوية المحيطية ب د أ ؟؟



المعطيات :-

- $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة مركزها (م) عند النقطة (أ) .
- $\overline{\text{أ د}}$ قطر فيها .
- ب نقطة اخرى على الدائرة .

المطلوب :-

اثبت ان ∡ س أ ب = ∡ ب د أ .

البرهان :-

∡ س أ د = 90° (لانه العمود الذي ينزل على المماس يكون عمودي)

∡ س أ ب + ∡ ب أ د = 90°

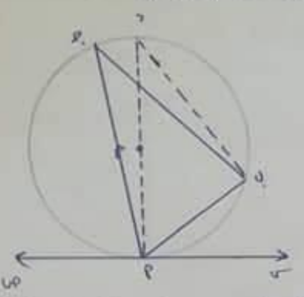
∡ أ ب د = 90° (لانه زاوية محيطية ومرسومة على الوتر $\overline{\text{أ د}}$)

∡ ب د أ + ∡ ب أ د = 90° (لانه باقي زوايا المثلث القائم الزاوية)

إذن :- ∡ س أ ب + ∡ ب أ د = ∡ ب د أ + ∡ ب أ د = 90°

ومنه ∡ س أ ب = ∡ ب د أ #

مبرهنة :- قياس الزاوية المماسية تساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس .



المعطيات :- $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة مركزها م عند النقطة أ

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها .

∡ أ جـ ب زاوية محيطية مرسومة على الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ مشتركة مع الزاوية المماسية س أ ب في القوس

المطلوب :- اثبت ان ∡ س أ ب = ∡ ب جـ أ

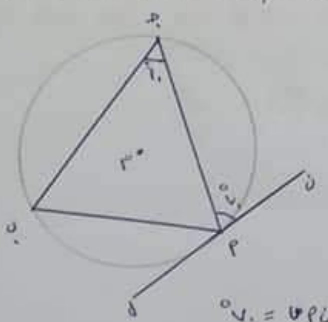
البرهان :- ارسم القطر $\overline{\text{أ د}}$ وارسم الوتر $\overline{\text{ب د}}$

في المثال السابق تم اثبات ان :-

∡ س أ ب = ∡ ب د أ ، ∡ ب جـ أ = ∡ ب د أ

إذن :- ∡ س أ جـ = ∡ ب جـ أ

مثال :- الشكل المجاور جد قياس زوايا المثلث أ ب جـ ؟؟



الحل :-

∡ أ جـ ب = ∡ ن أ ب = 70°

∡ ل أ جـ = ∡ أ ب جـ = 60°

∡ ب أ جـ = 180 − (60 + 70) (زوايا المثلث 180°)

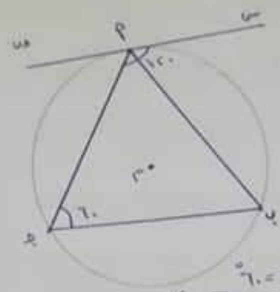
= 50°

#

خالد العارين

خالد العارين

تدريب :- في الشكل اثبت ان المثلث أ ب جـ متطابق الاضلاع ؟!



الحل :-

• ∡ س أ ب = ½ ∡ أ جـ ب = ٦٠° (محيطية ومماسية على نفس الوتر أ ب)

• ∡ ب أ جـ = ∡ س أ جـ − ∡ س أ ب
= ١٢٠ − ٦٠
= ٦٠°

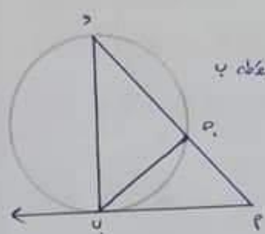
• ∡ أ ب جـ = ١٨٠ − (٦٠ + ٦٠) = ٦٠°

• ∡ ب أ جـ = ∡ أ جـ ب = ∡ جـ ب أ = ٦٠°

∴ Δ أ ب جـ متطابق الاضلاع . #

سؤال :- اثبت ان (أ ب)² = أ جـ × أ د

(اثبت ان تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ د ب)



المعطيات :-
أ ب مماس للدائرة في النقطة ب

المطلوب :-
اثبت ان (أ ب)² = أ جـ × أ د

البرهان :-
نبحث في تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ د ب

∡ جـ أ ب = ∡ د أ ب

∡ جـ د ب = ∡ أ ب جـ (محيطية ومماسية على القوس نفسه)

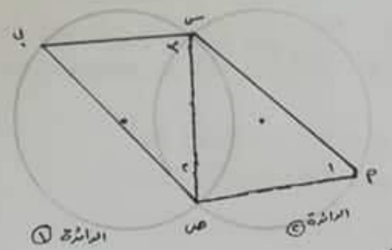
اذن يتشابه المثلثين وينتج :-

أ ب / أ د = أ جـ / أ ب ⟸ أ ب × أ ب = أ د × أ جـ

(أ ب)² = أ د × أ جـ

وهو المطلوب #

سؤال :- تتقاطع دائرتان في س ، ص ، رسم الوتر س أ في إحدى الدائرتين مماس للاخرى في النقطة س ، ورسم الوتر ص ب في الدائرة الثانية مماس للاولى في النقطة ص ، اثبت أن س ب ↔ // ص أ ↔ ؟!



المعطيات :-
دائرتان متقاطعتين في النقطتين س ، ص
س أ مماس للدائرة ①
ص ب مماس للدائرة ②

المطلوب :-
اثبت أن س ب // ص أ

البرهان :-
∡① = ∡③ محيطية ومماسية ، ص ب ↔ مماسية للدائرة ②
∡③ = ∡② محيطية ومماسية ، س أ ↔ مماس للدائرة ①

إذن :- ∡① = ∡② وبما انهما وضع تبادل ومتساويتين اذاً :.
س ب // ص أ #

خالد العمارين ☺