اولاً :- "حالات اثباتات المتطابقات"

حالة (١) :- وجود جا² موضوع قانون ، حيث في هذه الحالة نشتق اول مره ونجد جا ونجعلها موضوع قانون ثم نشتق مره اخرى، ونقوم بترتيب الطرف الأيسر

حالة (٢) :- جا² ليست موضوع قانون وفي الغالب يأتي معها جا ، (جا)² حيث في هذه الحالة نشتق اول مره (دون ترتيب) ثم نشتق مره اخرى ثم نرتب إلى ان نصل الى المطلوب

حالة (٣) :- جا² ليست موضوع قانون ولم يأتي معها جا أو (جا)² ، في هذه الحالة نشتق اول مره ونجد جا ثم نشتق مره اخرى ونجد جا² وإذا نتج معها جا نعوضها مكانها ، ثم نعوضها في الطرف الذي يحوي جا² الى أن نصل للطرف الثاني

حالة (٤) :- وجود جا فقط بدون جا² في هذه الحالة نشتق مره واحدة ثم نرتب

ملاحظة :-

١) في حالة الكسور نفضل اولاً توحيد المقامات ثم ضرب تبادلي ثم نشتق
٢) في حالة الجذور نفضل اولاً تربيع أو تكعيب الطرفين ثم نشتق
٣) من طرق الترتيب هو :-
* الضرب على الحدود لأنه توحيد في الاثبات
* عامل مشترك
* متطابقات - - -

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١) اذا كان $س = ص + ص = ظا ص$ اثبت ان $ص'' = (ص')^3 ظا ص$

الحل :- اشتقم :-

$1 + ص' = ص' ظا ص$ اعمل $(ص')$ موضوع قانون

$ص' + ص' ظا ص = 1$

$ص' (1 + ظا ص) = 1$

$ص' = \frac{1}{1 + ظا ص}$ اشتقم مره اخرى

$ص'' = \frac{1 \times ص' ظا ص}{(1 + ظا ص)^2}$ لكن $ص' = \frac{1}{1 + ظا ص}$ نقلب

$1 + ظا ص = \frac{1}{ص'}$

$= \frac{ص' ظا ص}{(\frac{1}{ص'})^2}$

$ص'' = (ص')^3 ظا ص$

---

٢) اذا كان $ظا ص = ظا س$ اثبت ان $ص'' ظا ص = (ص')^2 - 1$

الحل :- اشتقم

$ص' ظا ص = ظا س$ اشتقم مره اخرى

$ص' \times ص' ظا ص + ظا ص \times ص'' = - ظا س$ نريت

$-(ص')^2 ظا ص + ظا ص \times ص'' = ظا س$ لكن $ظا ص = ظا س$

$-(ص')^2 ظا ص + ظا ص \times ص'' = - ظا ص$ نقسم على $ظا ص$

$-(ص')^2 + ظا ص \times ص'' = -1$

$ص'' ظا ص = (ص')^2 - 1$

---

٣) $ص^2 = س^2 - س^3$ اثبت ان $ص ص'' + (ص')^2 + 3س - 2 = 0$ ∴

الحل :- اشتقم :- $2 ص ص' = 4 - 3س^2$ اشتقم مره اخرى

$2 ص ص'' + ص' \times 2 ص' = 4 - 6س$ نريت

$2 ص ص'' + 2 (ص')^2 - 4 + 6س = 0$ ∴ نقسم على (2)

$ص ص'' + (ص')^2 - 2 + 3س = 0$

٤) $ص = \sqrt{س + ص}$ أثبت أن $ص''(٢ص-١)^٣ = -٢$

الحل :- نربع :- $ص^٢ = س + ص$ اشتقاق

$٢ص ص' = ١ + ص'$ اجعل $ص'$ موضوع قانون

$٢ص ص' - ص' = ١$

$ص'(٢ص-١) = ١$ ومنه $ص' = \frac{١}{٢ص-١}$ اشتقاق

$ص'' = \frac{-١ \times ٢ص'}{(٢ص-١)^٢}$ نعوض بدل $ص'$

$ص'' = \frac{-٢}{(٢ص-١)^٣}$

في حالة الجذور نربع أو نكعب الطرفين حسب دليل الجذر بدل البدء بالاشتقاق

نعوضها في الطرف الايمن :-

$\frac{-٢}{(٢ص-١)^٣} (٢ص-١)^٣ = -٢$ الطرف الأيسر

---

٥) $س = ظا ص$ أثبت أن $ص''(١+س^٢)^٢ = -٢س$

الحل :- اشتقاق :-

$١ = ص' قا^٢ص$

$ص' = \frac{١}{قا^٢ص} = جتا^٢ص$ اشتقاق مرة أخرى

$ص'' = -٢جتاص \times جاص \times ص'$ لكن $ص' = جتا^٢ص$

$ص'' = -٢جتا^٣ص جاص$ نعوض في الطرف الايمن :-

$-٢جتا^٣ص جاص (١+س^٢)^٢ = -٢جتا^٣ص جاص (١+ظا^٢ص)^٢$

$= -٢جتا^٣ص جاص \times قا^٤ص$

$= -٢جتا^٣ص جاص \times \frac{١}{جتا^٤ص}$

$= -٢ظاص = -٢س$ الطرف الأيسر

* ٦) ص = ظا(س ص) أثبت أن صَ = (ص + ص^{3}) / (1 − س(1 + ص^{2}))

الحل :- اشتقاق :-

صَ = (س صَ + ص) قا^{2}س ص   اجعل صَ موضوع قانون

صَ = س صَ قا^{2}س ص + ص قا^{2}س ص

صَ − س صَ قا^{2}س ص = ص قا^{2}س ص

صَ (1 − س قا^{2}س ص) = ص قا^{2}س ص

صَ = ص قا^{2}(س ص) / (1 − س قا^{2}(س ص)) = ص(ظا^{2}(س ص) + 1) / (1 − س(ظا^{2}(س ص) + 1))

= ص(ص^{2} + 1) / (1 − س(ص^{2} + 1)) = (ص + ص^{3}) / (1 − س(1 + ص^{2}))

٧) (ص + 1)^{3} = (س − 2)^{2} أثبت أن 9(ص + 1)(صَ)^{2} = 4

الحل : اشتقاق

3(ص + 1)^{2} صَ = 2(س − 2)   نربع

9(ص + 1)^{4} (صَ)^{2} = 4(س − 2)^{2} لكن (س − 2)^{2} = (ص + 1)^{3}

9(ص + 1)^{4} (صَ)^{2} = 4(ص + 1)^{3} نقسم على (ص + 1)^{3}

9(ص + 1)(صَ)^{2} = 4

٨) ظاص = س أثبت أن صَ = 1 / (1 + س^{2})

الحل :- اشتقاق :-

صَ قا^{2}ص = 1

صَ = 1 / قا^{2}ص

= 1 / (ظا^{2}ص + 1) = 1 / (1 + س^{2})

٩) $\tan\theta = \sin\theta$ اثبت ان $\frac{y''}{1-(y')^2} = \tan\theta$

الحل: اشتقه

$-y' \sin\theta = \tan\theta \times \sin\theta$ اشتقه مره اخرى:

$-y' \times y' \sin\theta \tan\theta + \sin\theta \times -y'' = \sec^2\theta \times \sin\theta$ نرتب

$-(y')^2 \tan\theta \sin\theta + \sin\theta \times -y'' = -\tan\theta$ نقسم على $\sin\theta$

$-(y')^2 \tan\theta + -y'' = -\tan\theta$ نقسم على (-1)

$y'' = \tan\theta - (y')^2 \tan\theta$

$y'' = \tan\theta (1-(y')^2)$ نقسم على $1-(y')^2$

$$\frac{y''}{1-(y')^2} = \tan\theta$$

---

١٠) $s = \sin\theta + \tan\theta$ اثبت ان $y'' = s\,(y')^3$

الحل:

اشتقه: $1 = y' \tan\theta + -y' \sin\theta$ اجعل y' موضوع قانون

$1 = y'(\tan\theta - \sin\theta)$

$y' = \frac{1}{\tan\theta - \sin\theta}$ اشتقه مره اخرى

$y'' = \frac{-1(-y' \sin\theta - y' \tan\theta)}{(\tan\theta - \sin\theta)^2}$ نرتب

$y'' = \frac{y'(\sin\theta + \tan\theta)}{(\tan\theta - \sin\theta)^2}$ بما ان $y' = \frac{1}{\tan\theta - \sin\theta}$ نقلب

$\frac{1}{y'} = \tan\theta - \sin\theta$

$y'' = \frac{y'(s)}{(\frac{1}{y'})^3}$

$y'' = (y')^3 s$

١١) ص = √(٥ + ٢جاس) ، اثبت ان ٢ ص ص'' + ٢(ص')^٢ + ص^٢ = ٥

الحل :- نربع :- ص^٢ = ٥ + ٢جاس نشتق

٢ص ص' = ٢جتاس اشتق مره اخرى

٢ص ص'' + ص' × ٢ص' = -٢جاس لكن ص^٢ = ٥ + ٢جاس ← ٢جاس = ٥ - ص^٢

٢ص ص'' + ٢(ص')^٢ = ٥ - ص^٢ نرتب

٢ص ص'' + ٢(ص')^٢ + ص^٢ = ٥

١٢) س + ص = طا ص ، اثبت ان ص'' طا^٣ص = -٢ قتا^٢ص

الحل :- اشتق :-

١ + ص' = ص' قا^٢ص اجعل ص' موضوع قانون

ص' - ص' قا^٢ص = -١ ← ص' (١ - قا^٢ص) = -١

ص' = ١ / (قا^٢ص - ١) = ١ / طا^٢ص = طتا^٢ص اشتق مره اخرى

ص'' = -٢ طتاص × ص' × قا^٢ص نعوض بدل ص'

ص'' = -٢ طتا^٣ص قتا^٢ص نعوض في الطرف الايمن :

-٢ طتا^٣ص قتا^٢ص × طا^٣ص = -٢ قتا^٢ص الطرف الايسر

١٣) س^٢ - ص^٢ = ١ ، اثبت ان ص'' ص^٣ + ١ = ٠

الحل :- اشتق

٢س - ٢ص ص' = ٠ اجعل ص' موضوع قانون

٢ص ص' = ٢س ← ص' = ٢س / ٢ص = س / ص اشتق مره اخرى

ص'' = (ص - س ص') / ص^٢ = (ص - س × س/ص) / ص^٢ = (ص - س^٢/ص) / ص^٢ = (ص^٢ - س^٢) / ص^٣

نعوض في الطرف الايمن :

(ص^٢ - س^٢)/ص^٣ × ص^٣ + ١ = ص^٢ - س^٢ + ١ = -١ + ١ = صفراً الطرف الايسر

١٤) س جاص = ١ اثبت ان صَ = جتاص − قاص

الحل :- اشتقق :-

س × صَ جتاص + جاص = ٠ اجعل صَ موضوع قانون

س صَ جتاص = −جاص

صَ = −جاص / (س جتاص) نرتب   س جاص = ١ ومنه س = ١ / جاص

صَ = −جاص / ((١/جاص) جتاص) = −جا²ص / جتاص

صَ = (جتا²ص − ١) / جتاص نوزع البسط على المقام :

صَ = جتاص − ١ / جتاص = جتاص − قاص

رافت صافي

---

١٥) ص + س = ظاص اثبت ان −٢(صَ)² قا²ص = صً (ص+س)

الحل :- اشتقق :-

صَ + ١ = صَ قا²ص اشتقق مرة اخرى

صً = صَ × ٢ قاص قاص ظاص × صَ + قا²ص × صً نرتب

صً = ٢(صَ)² قا²ص ظاص + قا²ص × صً

−٢(صَ)² قا²ص ظاص = قا²ص × صً − صً لكن ظاص = ص + س

−٢(صَ)² قا²ص (ص+س) = صً (قا²ص − ١)

−٢(صَ)² قا²ص (ص+س) = صً × ظا²ص

−٢(صَ)² قا²ص (ص+س) = صً × (ص+س)² نقسم على (ص+س)

−٢(صَ)² قا²ص = صً (ص+س)

---

١٦) س ص = جا٢س − جتا٢س اثبت ان س صً + ٢صَ + ٤س ص = ٠

الحل :- اشتقق :- س صَ + ص = ٢جتا٢س + ٢جا٢س اشتقق مرة اخرى

س صً + صَ + صَ = −٤جا٢س + ٤جتا٢س نرتب

س صً + ٢صَ + ٤جا٢س − ٤جتا٢س = ٠

س صً + ٢صَ + ٤(جا٢س − جتا٢س) = ٠ ← س صً + ٢صَ + ٤س ص = ٠

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٧) ٢س = جتا٢ص ، اثبت ان ٢ص'' = ص' (قتا²ص − قا²ص)

الحل: ١- اشتق:

٢ = −٢ص' جا٢ص   اشتق مرة اخرى

٠ = −٢ص' × ٢ص' جتا٢ص + جا٢ص × −٢ص''   ترتيب

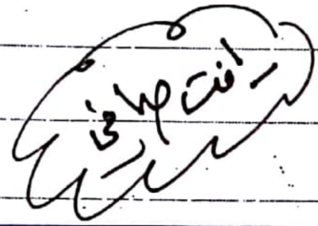
٠ = −٤(ص')² جتا٢ص + −٢جا٢ص × ص''

٢جا٢ص × ص'' = −٤(ص')² جتا٢ص   نقسم على جا٢ص

٢ص'' = −٤(ص')² جتا٢ص / جا٢ص   لكن ص' = −١ / جا٢ص

٢ص'' = (−٤ × ص' × −١/جا٢ص × جتا٢ص) / جا٢ص = ٤ص' جتا٢ص / جا²٢ص

٢ص'' = ٤ص' (جتا²ص − جا²ص) / ٤جا²ص جتا²ص   نوزع البسط على المقام



٢ص'' = ص' (١/جا²ص − ١/جتا²ص)

٢ص'' = ص' (قتا²ص − قا²ص)

---

١٨) جاص = ٢جاس ، اثبت ان (ص')² = ٣قا²ص + ١

الحل: اشتق

ص' جتاص = ٢جتاس   اجعل ص' موضوع قانون

ص' = ٢جتاس / جتاص   نربع

(ص')² = ٤جتا²س / جتا²ص = ٤(١ − جا²س) / جتا²ص   لكن جاص = ٢جاس ومنه جاس = جاص/٢

(ص')² = ٤(١ − جا²ص/٤) / جتا²ص = (٤ − جا²ص) / جتا²ص   وزع البسط على المقام

(ص')² = ٤قا²ص − طا²ص = ٤قا²ص − (قا²ص − ١) = ٣قا²ص + ١

١٩) قاس = جاص   أثبت أن (ص′)^{2} = ص″ ظتاص + جتا٢ص

الحل: اشتق:-

قاس طاس = ص′ جتاص   اشتق مرة اخرى

قاس × قا^{2}س + طاس × قاس طاس = ص′ × -ص′ جاص + جتاص × ص″

قا^{3}س + قاس طا^{2}س = -(ص′)^{2} جاص + جتاص × ص″   نرتب

(ص′)^{2} جاص = جتاص × ص″ - قا^{3}س - قاس طا^{2}س   لكن قاس = جاص

(ص′)^{2} جاص = جتاص × ص″ - جا^{3}ص + جاص (١ - قا^{2}س)   نقسم على جاص

(ص′)^{2} = ظتاص × ص″ - جا^{2}ص + ١ - جا^{2}ص   (١ - قا^{2}س ← -طا^{2}س)

(ص′)^{2} = ص″ ظتاص - جا^{2}ص + جتا^{2}ص   (متطابقة)

(ص′)^{2} = ص″ ظتاص + جتا٢ص

٢٠) س/ص + ص/س = ٢   أثبت أن ص″ = صفراً

الحل: نوحد المقامات ثم ضرب تبادلي

(س^{2} + ص^{2}) / (س ص) = ٢   تبادلي   س^{2} + ص^{2} = ٢ س ص   اشتق

٢س + ٢ص ص′ = ٢س ص′ + ص × ٢   نقسم على (٢)

ص ص′ - س ص′ = ص - س

ص′ (ص - س) = ص - س

ص′ = (ص - س) / (ص - س) = ١   اشتق   ص″ = صفراً

٢١) اذا كانت س^{2}(ص^{2} + ١) = ٨   أثبت أن ص س^{3} ص′ = -٨

الحل: س^{2}ص^{2} + س^{2} = ٨   اشتق

س^{2} × ٢ص ص′ + ص^{2} × ٢س + ٢س = ٠   نرتب (نقسم على ٢)

س^{2}ص ص′ + ص^{2} س + س = ٠   نضرب بـ س

س^{3}ص ص′ + ص^{2}س^{2} + س^{2} = ٠   لكن س^{2}ص^{2} + س^{2} = ٨ ومنه س^{2} = ٨ - س^{2}ص^{2}

س^{3}ص ص′ + ص^{2}س^{2} + ٨ - س^{2}ص^{2} = ٠

ص س^{3} ص′ = -٨

٢٢) * اذا كانت $س = ص + ص س$ فاثبت ان $ص'' = \frac{٢ ص'^{٣}}{س^{٣}}$

الحل :- اجعل $ص$ موضوع قانون :-

$س = ص - ص س$

$س = ص(١ - س)$

$ص = \frac{س}{١ - س}$ اشتقم

$ص' = \frac{(١ - س) - س(-١)}{(١ - س)^{٢}} = \frac{١}{(١ - س)^{٢}}$ اشتقم مره اخرى

$ص'' = \frac{١ \times ٢(١ - س)(-١)}{(١ - س)^{٤}} = \frac{٢}{(١ - س)^{٣}}$ لكن $ص = \frac{س}{١ - س}$ ومنه

$١ - س = \frac{س}{ص}$

$ص'' = \frac{٢}{(\frac{س}{ص})^{٣}} = \frac{٢ ص^{٣}}{س^{٣}}$

---

٢٣) $ص = \frac{جا س}{س}$ فاثبت ان $س^{٢} ص'' + ٢ س ص' + س ص = ٠$

الحل :- ضرب تبادلي

$س ص = جا س$ اشتقم

$س ص' + ص = جتا س$ اشتقم مره اخرى

$س ص'' + ص' + ص' = - جا س$ لكن $جا س = س ص$

$س ص'' + ٢ ص' = - س ص$ نرتب

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$

---

٢٤) $جا ٢ ص = جتا ٣ س$ فاثبت ان $طا ٢ ص = \frac{٢ ص''}{٤(ص')^{٢} - ٩}$

الحل :- اشتقم :- $٢ ص' جتا ٢ ص = - ٣ جا ٣ س$ اشتقم

$-٢ ص' \times ٢ ص' جا ٢ ص + جتا ٢ ص \times ٢ ص'' = - ٩ جتا ٣ س$ نرتب

$-٤ (ص')^{٢} جا ٢ ص + ٢ جتا ٢ ص \times ص'' = - ٩$ نقسم على $جا ٢ ص$

$-٤ (ص')^{٢} + ٢ طتا ٢ ص \times ص'' = - ٩$

$٢ طتا ٢ ص \times ص'' = - ٩ + ٤ (ص')^{٢}$ نقسم على $٢ ص''$

$طتا ٢ ص = \frac{- ٩ + ٤ (ص')^{٢}}{٢ ص''}$ نقلب $\leftarrow$ $طا ٢ ص = \frac{٢ ص''}{٤ (ص')^{٢} - ٩}$

٢٥) $ص = \frac{1}{\sqrt{1+س^2}}$ اثبت ان $ص'' + 2س ص ص' + ص^3 = 0$

الحل :- ضرب تبادلي ثم تربيع

$ص\sqrt{1+س^2} = 1$ تربيع

$ص^2(1+س^2) = 1$

$ص^2س^2 + ص^2 = 1$ اشتقاق

$ص^2 \times 2س + س^2 \times 2ص ص' + 2ص ص' = 0$ نقسم على $(2ص)$

$ص س + س^2 ص' + ص' = 0$ اشتقاق مرة اخرى

$ص + س ص' + س^2 ص'' + 2س ص' + ص'' = 0$ ترتيب

$ص + 3س ص' + س^2 ص'' + ص'' = 0$

$ص + 3س ص' + ص''(1+س^2) = 0$ لكن $ص^2(1+س^2) = 1$ ومنه $1+س^2 = \frac{1}{ص^2}$

$ص + 3س ص' + ص'' \times \frac{1}{ص^2} = 0$ نضرب بـ $ص^2$

$ص'' + 3س ص ص' + ص^3 = 0$

---

٢٦) $ص'' = (1+س)^{12}$ اثبت ان $ص' = \frac{12}{11}\left(\frac{ص}{1+س}\right)$

الحل :- اشتقاق :

$11 ص^{10} ص' = 12(1+س)^{11}$ اجعل $ص'$ موضوع قانون

$ص' = \frac{12(1+س)^{11}}{11 ص^{10}} \times \frac{1+س}{1+س}$

$ص' = \frac{12(1+س)}{11 ص^{11}(1+س)} = \frac{12 ص''}{11 ص'(1+س)} = \frac{12}{11}\left(\frac{ص}{1+س}\right)$

---

٢٧) $س = ظا ص$ اثبت ان $ص'' = \frac{ظا 2ص}{1+2س^2}$

الحل :- اشتقاق :-

$1 = ص' قا^2 ص \leftarrow ص' = \frac{1}{قا^2 ص} = -ظا^2 ص$ اشتقاق مرة اخرى

$ص'' = -2ظا ص ظا ص \times ص' = -2ظا ص ص' \times ص'$ لكن $ص' = \frac{-1}{قا^2 ص}$

$ص'' = ظا 2ص \times \frac{1}{قا^2 ص} = \frac{ظا 2ص}{1+ظا^2 ص} = \frac{ظا 2ص}{1+2س^2}$

٢٨) ظا ص = جا س . اثبت ان ٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + ٢ ص'' قتا ٢ص + ١ = ٠

الحل :- اشتق :-

ص'' قا^٢ ص = جتا س اشتق مرة اخرى :-

(ص'')^٢ × ٢ قا^٢ ص ظا ص + قا^٢ ص × ص''' = جا س بالتبديل (نستبدل جا س)

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص ظا ص + قا^٢ ص × ص''' = - ظا ص نقسم على ظا ص

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + (قا^٢ ص / ظا ص) ص'' + ١ = ٠

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + (١ / جتا^٢ ص) × (جتا ص / جا ص) × ص'' + ١ = ٠ ∴

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + ص'' / (جا ص جتا ص) + ١ = ٠ ∴

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + ص'' / (١/٢ جا ٢ص) + ١ = ٠ ∴

٢(ص'')^٢ قا^٢ ص + ٢ قتا ٢ص × ص'' + ١ = ٠

---

٢٩) ص = √(س + √(١ + س)) . اثبت ان ٢√(١ + س^٢) ص' = ص

الحل :- تربيع

ص^٢ = س + √(١ + س^٢) اشتق

٢ ص ص' = ١ + ٢س / (٢√(١ + س^٢)) نربت

٢ ص ص' = (٢√(١ + س^٢) + س) / (٢√(١ + س^٢)) بالتبادل

٢ ص ص' × ٢√(١ + س^٢) = ٢س + ٢√(١ + س^٢) نقسم على (ص)

٢√(١ + س^٢) ص' = (٢س + ٢√(١ + س^٢)) / ص من ص^٢ = س + √(١ + س^٢)

٢√(١ + س^٢) ص' = ص^٢ / ص = ص

٣٠) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 2\text{ص}$ ، اثبت ان $\text{ص}'' = \frac{-1}{(\text{ص}-1)^3}$

الحل :- اشتق :

$2\text{س} + 2\text{ص}\,\text{ص}' = 2\text{ص}'$ نقسم على (٢) ونجعل ص' موضوع قانون

$\text{ص}\,\text{ص}' - \text{ص}' = -\text{س}$

$\text{ص}'(\text{ص}-1) = -\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\text{س}}{\text{ص}-1}$ اشتق مرة اخرى

$$\text{ص}'' = \frac{(\text{ص}-1)\times -1 + \text{س}\times \text{ص}'}{(\text{ص}-1)^2} = \frac{-\text{ص}+1+\text{س}\left(\frac{-\text{س}}{\text{ص}-1}\right)}{(\text{ص}-1)^2} = \frac{-\text{ص}+1+\frac{-\text{س}^2}{\text{ص}-1}}{(\text{ص}-1)^2}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-\text{ص}^2+\text{ص}+\text{ص}-1-\text{س}^2}{(\text{ص}-1)^3} = \frac{-(\text{ص}^2+\text{س}^2)+2\text{ص}-1}{(\text{ص}-1)^3}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-2\text{ص}+2\text{ص}-1}{(\text{ص}-1)^3} = \frac{-1}{(\text{ص}-1)^3}$$

٣١) $\text{ظتاص} = \text{قاس} + \text{ظاس}$ ، اثبت ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{2}$

الحل :- اشتق :

$-\text{ص}'\,\text{قتا}^2\text{ص} = \text{قاس}\,\text{ظاس} + \text{قا}^2\text{س}$ نرتب بالقسمة على $\text{قتا}^2\text{ص}$

$$-\text{ص}' = \frac{\text{قاس}\,\text{ظاس}+\text{قا}^2\text{س}}{\text{قتا}^2\text{ص}} = \frac{\text{قاس}(\text{ظاس}+\text{قاس})}{\text{ظتا}^2\text{ص}+1}$$

$$-\text{ص}' = \frac{\text{قاس}(\text{ظاس}+\text{قاس})}{(\text{قاس}+\text{ظاس})^2+1}$$

$$-\text{ص}' = \frac{\text{قاس}(\text{ظاس}+\text{قاس})}{\text{قا}^2\text{س}+2\text{قاس}\,\text{ظاس}+\underbrace{\text{ظا}^2\text{س}+1}_{\text{قا}^2\text{س}}} = \frac{\text{قاس}(\text{ظاس}+\text{قاس})}{2\text{قا}^2\text{س}+2\text{قاس}\,\text{ظاس}}$$

$$-\text{ص}' = \frac{\text{قاس}(\text{ظاس}+\text{قاس})}{2\text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{2}$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٣٢) ص = جان ، س = قتان اثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} \times جان + (\frac{دص}{دس})^2 = -1$

الحل:

$\frac{دص}{دن} = جتان$ ، $\frac{دس}{دن} = -جان$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{جتان}{-جان} = -ظتان$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = قتا^2ن \times \frac{دن}{دس} = قتا^2ن \times \frac{-1}{جان} = -قتا^3ن$

نعوض في الطرف الأيمن:

$-قتا^3ن \times جان + (-ظتان)^2 = -قتا^2ن + ظتا^2ن$

$= -قتا^2ن + قتا^2ن - 1 = -1$ الطرف الأيسر

---

٣٣) ص = $\frac{1}{1-ع}$ ، ع = $\frac{1}{س}$ اثبت أن $(س-1)^2 \frac{دص}{دس} + 1 = 0$

الحل:

$\frac{دص}{دع} = \frac{1}{(1-ع)^2}$ ، $\frac{دع}{دس} = \frac{-1}{س^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{1}{(1-ع)^2} \times \frac{-1}{س^2}$ نستبدل مكان ع

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{(1-\frac{1}{س})^2} \times \frac{-1}{س^2} = \frac{1}{(\frac{س-1}{س})^2} \times \frac{-1}{س^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{س^2}{(س-1)^2} \times \frac{-1}{س^2} = \frac{-1}{(س-1)^2}$

نعوض في الطرف الأيمن ← $(س-1)^2 \times \frac{-1}{(س-1)^2} + 1 = -1 + 1 = 0$ الطرف الأيسر

---

٣٤) س = جان ، ص = جتا٢ن اثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} + 4 = صفراً$

الحل: $\frac{دس}{دن} = جتان$ ، $\frac{دص}{دن} = -2جا2ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{-2جا2ن}{جتان} = \frac{-4جان جتان}{جتان} = -4جان$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -4جتان \times \frac{دن}{دس} = \frac{-4جتان}{جتان} = -4$

نعوض في الطرف الأيمن:

$-4 + 4 = صفراً$ الطرف الأيسر

٣٥) $\text{جتا ص} = ٣\ \text{جا س}$ ، اثبت ان $(\text{صَ})^{٢} = ٨\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} + ١$

الحل :- اشتقاق

$-\text{صَ}\ \text{جا ص} = ٣\ \text{جتا س}$

$\text{صَ} = \dfrac{٣\ \text{جتا س}}{-\text{جا ص}}$ نربع

$(\text{صَ})^{٢} = \dfrac{٩\ \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{ص}} = \dfrac{٩(١-\text{جا}^{٢}\text{س})}{\text{جا}^{٢}\text{ص}} = \dfrac{٩(١-\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}{٩})}{\text{جا}^{٢}\text{ص}}$

$(\text{صَ})^{٢} = ٩\ \text{قتا}^{٢}\text{ص}(١-\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}{٩}) = ٩\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} - \text{جتا}^{٢}\text{ص} \times \text{قتا}^{٢}\text{ص}$

$(\text{صَ})^{٢} = ٩\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} - \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}{\text{جا}^{٢}\text{ص}} = ٩\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} - \text{ظتا}^{٢}\text{ص}$

$(\text{صَ})^{٢} = ٩\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} - (\text{قتا}^{٢}\text{ص} - ١) = ٨\ \text{قتا}^{٢}\text{ص} + ١$

---

٣٦) $\text{س} = \text{ظا ص}$ ، اثبت ان $\text{صً} = \dfrac{-\text{جا}٢\text{ص}}{(١+\text{س}^{٢})^{٢}}$

الحل :- اشتقاق

$١ = \text{صَ}\ \text{قا}^{٢}\text{ص}$

$\text{صَ} = \dfrac{١}{\text{قا}^{٢}\text{ص}} = \text{جتا}^{٢}\text{ص}$

$\text{صً} = -٢\ \text{جتا ص} \times \text{جا ص} \times \text{صَ} = -\text{جا}٢\text{ص} \times \dfrac{١}{\text{قا}^{٢}\text{ص}}$

$\text{صً} = \dfrac{-\text{جا}٢\text{ص}}{\text{ظا}^{٢}\text{ص}+١} = \dfrac{-\text{جا}٢\text{ص}}{\text{س}^{٢}+١}$

---

٣٧) $\text{س} = (\text{ص}^{٢}-١)^{٦}$ ، اثبت ان $\text{صَ} = \dfrac{\text{ص}^{٢}-١}{١٢\ \text{س ص}}$

الحل :- اشتقاق

$١ = ٦(\text{ص}^{٢}-١)^{٥}(٢\text{ص}\ \text{صَ})$

$\text{صَ} = \dfrac{١}{١٢(\text{ص}^{٢}-١)^{٥}\ \text{ص}} \times \dfrac{\text{ص}^{٢}-١}{\text{ص}^{٢}-١}$

$= \dfrac{\text{ص}^{٢}-١}{١٢(\text{ص}^{٢}-١)^{٦}\ \text{ص}} = \dfrac{\text{ص}^{٢}-١}{١٢\ \text{س ص}}$

٣٨) $(س+ص)^{5} = س^{2}ص^{3}$ اثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{س}$

الحل :- اشتق

$$5(س+ص)^{4}(1+ص') = س^{2} \times 3ص^{2}ص' + ص^{3} \times 2س$$

$$5(س+ص)^{4} + 5(س+ص)^{4}ص' = 3س^{2}ص^{2}ص' + 2سص^{3}$$

$$5(س+ص)^{4}ص' - 3س^{2}ص^{2}ص' = 2سص^{3} - 5(س+ص)^{4}$$

$$ص'\left(5(س+ص)^{4} - 3س^{2}ص^{2}\right) = 2سص^{3} - 5(س+ص)^{4}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{2سص^{3} - 5(س+ص)^{4}}{5(س+ص)^{4} - 3س^{2}ص^{2}} \times \frac{(س+ص)}{(س+ص)}$$

$$= \frac{2س^{2}ص^{3} + 2سص^{4} - 5(س+ص)^{5}}{5(س+ص)^{5} - 3س^{3}ص^{2} - 3س^{2}ص^{3}}$$ لكن $(س+ص)^{5} = س^{2}ص^{3}$

$$= \frac{2س^{2}ص^{3} + 2سص^{4} - 5س^{2}ص^{3}}{5س^{2}ص^{3} - 3س^{3}ص^{2} - 3س^{2}ص^{3}} = \frac{-3س^{2}ص^{3} + 2سص^{4}}{2س^{2}ص^{3} - 3س^{3}ص^{2}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{سص^{3}(-3س + 2ص)}{س^{2}ص^{2}(2ص - 3س)} = \frac{سص^{3}}{س^{2}ص^{2}} = \frac{ص}{س}$$

٣٩) $س ص = أ\sqrt{ص}$ اثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{-2ص}{س}$

الحل :- نربع :-

$س^{2}ص^{2} = أ^{2}ص$ نشتق

$س^{2} \times 2ص ص' + ص^{2} \times 2س = أ^{2}ص'$ اجعل ص' موضوع قانون

$$2س^{2}ص ص' - أ^{2}ص' = -2سص^{2}$$

$$ص'(2س^{2}ص - أ^{2}) = -2سص^{2}$$

$$ص' = \frac{-2سص^{2}}{2س^{2}ص - أ^{2}}$$ لكن $أ^{2} = \frac{س^{2}ص^{2}}{ص} = س^{2}ص$

$$ص' = \frac{-2سص^{2}}{2س^{2}ص - س^{2}ص} = \frac{-2سص^{2}}{س^{2}ص} = \frac{-2ص}{س}$$

٤٠) جا ص = جتا س ، اثبت ان $(ص')^2 = \frac{ص''}{ظا ص} + 1$

الحل :- اشتق

ص' جتا ص = -جا س   اشتق مرة اخرى

$-ص' \times ص' جا ص + جتا ص \times ص'' = -جتا س$

$(ص')^2 جا ص = جتا س + ص'' جتا ص$ نقسم على جا ص

$(ص')^2 = \frac{جتا س}{جا ص} + \frac{ص'' جتا ص}{جا ص}$ لكن جتا س = جا ص

$(ص')^2 = \frac{جا ص}{جا ص} + ص'' ظتا ص = \frac{ص''}{ظا ص} + 1$

---

٤١) س + ص = قا(س + ص) اثبت ان $\frac{دص}{دس} = -1$

الحل :- اشتق

$1 + ص' = قا(س+ص) ظا(س+ص)(1 + ص')$ اجعل ص' موضوع قانون

$1 + ص' = قا(س+ص) ظا(س+ص) + ص' \times قا(س+ص) ظا(س+ص)$

$ص' - ص' قا(س+ص) ظا(س+ص) = قا(س+ص) ظا(س+ص) - 1$

$ص'(1 - قا(س+ص) ظا(س+ص)) = قا(س+ص) ظا(س+ص) - 1$

$\frac{دص}{دس} = \frac{قا(س+ص) ظا(س+ص) - 1}{1 - قا(س+ص) ظا(س+ص)} = -1$

---

٤٢) $ص^2 = \frac{س}{س+1}$ اثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^3}{2س^2}$

الحل :- اشتق

$2ص ص' = \frac{س + 1 - س}{(س+1)^2} = \frac{1}{(س+1)^2}$ ترتيب

$ص' = \frac{1}{(س+1)^2 \times 2ص}$ لكن $س + 1 = \frac{س}{ص^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{\frac{س^2}{ص^4} \times 2ص} = \frac{1}{\frac{2س^2}{ص^3}} = \frac{ص^3}{2س^2}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤٣) $س = \sqrt{ص - \frac{1}{ص}}$ اثبت ان $\frac{ص}{س} = \frac{2س ص^2}{ص^2 + 1}$

الحل :- نربع

$س^2 = ص - \frac{1}{ص}$ اشتقم

$2س = ص' + \frac{ص'}{ص^2}$ اجعل $ص'$ موضوع قانون

$ص'(1 + \frac{1}{ص^2}) = 2س$

$ص'(\frac{ص^2+1}{ص^2}) = 2س$

$ص' = \frac{2س}{\frac{ص^2+1}{ص^2}} = \frac{2س ص^2}{ص^2+1}$

---

٤٤) $س = ظا ص$ اثبت ان $ص'' + ص' ظا 2ص = 0$

الحل :- اشتقم

$1 = ص' قا^2 ص$ اشتقم مره اخرى

$0 = ص' \times 2 قا^2 ص ظا ص \times ص' + قا^2 ص \times ص''$ نربت

$2(ص')^2 قا^2 ص ظا ص + قا^2 ص \times ص'' = 0$ نقسم على $قا^2 ص$

$2(ص')^2 ظا ص + ص'' = 0$ ∴ بما $ص' = \frac{1}{قا^2 ص} = ظا^2 ص$

$2ص' \times ظا^2 ص ظا ص + ص'' = 0$

$2ص' \times ظا^2 ص \times \frac{ظا ص}{ظا ص} + ص'' = 0$

$2ص' \times ظا 2ص + ص'' = 0$

$ص'' + ص' ظا 2ص = 0$

---

٤٥) $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 2$ اثبت ان $ص'' = \frac{1}{\sqrt{س^3}}$

الحل :- $\sqrt{ص} = 2 - \sqrt{س}$ نربع

$ص = 4 - 4\sqrt{س} + س$ اشتقم

$ص' = \frac{-4}{4\sqrt{س}} + 1 = \frac{-2}{\sqrt{س}} + 1$

$ص'' = 2 \times \frac{\frac{1}{\sqrt{س}}}{س} = \frac{\frac{1}{\sqrt{س}}}{س} = \frac{1}{\sqrt{س^3}}$

٤٦) $(ص+1)^3 = (س-2)^2$ اثبت ان $|ص| = \frac{2}{1+ص^{3/2}}$

الحل :- اشتقاق

$3(ص+1)^2 \times ص' = 2(س-2)$

$ص' = \frac{2(س-2)}{3(ص+1)^2}$ نربع

$(ص')^2 = \frac{4(س-2)^2}{9(ص+1)^4} = \frac{4(س-2)^2}{9(ص+1)^3(ص+1)}$

$\therefore \sqrt{ص'} = \frac{(س-2)^2}{(ص+1)^3} = 1$

$(ص')^2 = \frac{4}{9(ص+1)}$ ناخذ جذر الطرفين

$|ص| = \frac{2}{1+ص^{3/2}}$

---

٤٧) $س^2 + ص = 3ص^2$ اثبت ان $ص'' = \frac{6(ص')^2 - 2}{1-6ص}$

الحل :- اشتقاق

$2س + ص' = 6ص ص' \leftarrow 6ص ص' - ص' = 2س$

$ص'(6ص-1) = 2س \leftarrow ص' = \frac{2س}{6ص-1}$ اشتقاق مرة اخرى

$ص'' = \frac{(6ص-1)\times 2 - 2س \times 6ص'}{(6ص-1)^2}$ لكن $2س = ص'(6ص-1)$

$ص'' = \frac{(6ص-1)\times 2 - ص'(6ص-1)\times 6ص'}{(6ص-1)^2} = \frac{(6ص-1)(2 - 6(ص')^2)}{(6ص-1)^2}$

$ص'' = \frac{2 - 6(ص')^2}{6ص-1} = \frac{6(ص')^2 - 2}{1-6ص}$

---

٤٨) $ص = \frac{ص_1 س}{س-1}$ اثبت ان $ص'' + ص = \frac{-2ص'}{س-1}$

الحل :- $ص(س-1) = ص_1 س$ اشتقاق $ص \times 1 + (س-1)ص' = ص_1 س$ اشتقاق

$ص' + (س-1)ص'' + ص' = ص_1$ (ترتيب) لكن $ص_1 س = ص(س-1)$

$ص' + (س-1)ص'' + ص' + ص(س-1) = 0 \therefore$

$2ص' + (س-1)(ص'' + ص) = 0 \leftarrow (س-1)(ص'' + ص) = -2ص'$

$ص'' + ص = \frac{-2ص'}{س-1}$

٤٩) $\frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} = ١٠$ ، اثبت ان $ص' = \frac{ص}{س}$

الحل: نوحد المقامات ثم تبادلي

$\frac{ص^2 + س^2}{س ص} = ١٠$ ومنه $ص^2 + س^2 = ١٠ س ص$ ← اشتق

$٢ ص ص' + ٢ س = ١٠ س ص' + ١٠ ص$ نقسم على (٢)

$ص ص' + س = ٥ س ص' + ٥ ص$ اجعل ص' موضوع قانون

$ص ص' - ٥ س ص' = ٥ ص - س$

$ص' (ص - ٥ س) = ٥ ص - س$

$ص' = \frac{٥ ص - س}{ص - ٥ س} \times \frac{س}{ص} \times \frac{ص}{س}$

$ص' = \frac{٥ س ص - س^2}{ص^2 - ٥ س ص} \times \frac{ص}{س}$ لكن $ص^2 + س^2 = ١٠ س ص$ ومنه $س^2 = ١٠ س ص - ص^2$

$ص' = \frac{٥ س ص - ١٠ س ص + ص^2}{ص^2 - ٥ س ص} \times \frac{ص}{س}$

$ص' = \frac{ص^2 - ٥ س ص}{ص^2 - ٥ س ص} \times \frac{ص}{س} = ١ \times \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$

---

٥٠) $أ س^2 + ب ص^2 = جـ$ ، اثبت ان $\frac{1}{س} ص' - \frac{1}{ص} (ص')^2 = ص''$

الحل: اشتق

$٢ أ س + ٢ ب ص ص' = ٠$ نقسم على (٢)

$أ س + ب ص ص' = ٠$ اشتق

$أ + ب ص' ص' + ص ب ص'' = ٠$ نرتب

$ب ص ص'' = - ب (ص')^2 - أ$ نقسم على ب ص

$ص'' = \frac{-(ص')^2}{ص} - \frac{أ}{ب ص}$ لكن $أ س + ب ص ص' = ٠$ ← $أ = \frac{- ب ص ص'}{س}$

$ص'' = \frac{-(ص')^2}{ص} - \frac{1}{ب ص} \times \frac{- ب ص ص'}{س}$

$ص'' = \frac{-(ص')^2}{ص} + \frac{1}{س} ص'$

(١٥) ٢ + ص = √(ص² + س ص) ، اثبت ان ص' = $\frac{-٤}{(س-٤)^٢}$

الحل :- نربع :-

٤ + ٤ص + ص² = ص² + س ص ، اجعل ص موضوع القانون

س ص − ٤ص = ٤

ص(س − ٤) = ٤

ص = $\frac{٤}{س-٤}$ ← اشتق

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٤}{(س-٤)^٢}$

---

(٢) جتاس + جاص = ٠ ، اثبت ان $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = صفراً

الحل : ١ اشتق

−جاس + ص' جتاص = ٠ . اجعل ص' موضوع قانون

ص' جتاص = جاس

ص' = $\frac{جاس}{جتاص}$ ← اشتق مره اخرى

ص'' = $\frac{جتاص × جتاس + جاس × ص' جاص}{جتا^٢ص}$ ، لكن ص' = $\frac{جاس}{جتاص}$

ص'' = $\frac{جتاص جتاس + جاس × \frac{جاس}{جتاص} جاص}{جتا^٢ص}$

لكن :- جا²س = ١ − جتا²س = ١ − جا²ص = جتا²ص

ص'' = $\frac{جتاص جتاس + \frac{جتا^٢ص}{جتاص} × جاص}{جتا^٢ص}$ وزع

ص'' = $\frac{-جتاص جاص}{جتا^٢ص} + \frac{جتاص جاص}{جتا^٢ص}$

ص'' = −طاص + طاص = صفراً