الوحدة الثالثة : الاقتران التربيعي

٣ – ١ الاقتران التربيعي ورسم منحناه

مراجعة :

- العلاقة : العلاقة من أ إلى ب : هي مجموعة الأزواج المرتبة (س،ص) التي مساقطها الأولى س تنتمي إلى المجموعة أ ، ومساقطها الثانية ص تنتمي إلى المجموعة ب .
- الاقتران : هو علاقة تربط بين مسقطيها س (المجال) و ص (المدى) ؛ بحيث يرتبط كل عنصر في المجال بصورة واحدة فقط في المدى .
- الاقتران الخطي : هو الاقتران الذي يكتب على الصورة ن(س) = أس + ب حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ٠ .

سؤال : أي من الاقترانات الآتية اقتران خطي ؟

أ) ن(س) = ٤س – ٧ ب) هـ(س) = ٢س – ٤ جـ) ل(س) = ٤س^{٢} + ٧س + ٢

الحل :

لاحظ أنه في الاقترانين ن(س) ، هـ(س) العبارة المرتبطة في كل اقتران عبارة خطية ، لذلك فإن الاقترانين اقترانيين خطيين ، بينما في الاقتران ل(س) العبارة المرتبطة في الاقتران عبارة تربيعية ، مثل هذا الاقتران يسمى اقتراناً تربيعياً .

<u>تعريف (١)</u>

إذا كان ق : ح ⟵ ح ، حيث ن(س) = أس^{٢} + ب س+جـ ، وكانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران ق يسمى اقتراناً تربيعياً ، ويسمى العدد أ معامل س^{٢} ، ويسمى العدد ب معامل س ويسمى العدد جـ الحد المطلق ، وبتعبير عام تسمى أ ، ب ، جـ معاملات الاقتران التربيعي ق ، ومجال ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، ومداه مجموعة صور المجال .

مثال (١) : شامل مثال (٣ – ١) + تدريب (٣ – ١)كتاب مدرسي ص٨٣

أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟ ثم اكتب معاملات الاقتران إذا كان تربيعي

الاقتران	تربيعي	ليس تربيعي	معامل س^{٢}	معامل س	الحد المطلق	السبب
ن(س) = س^{٢} + ٣س + ٧	✓		١	٣	٧	
هـ(س) = ٢س − س^{٢} هـ(س) = − س^{٢} + ٢س	✓		١-	٢	٠	
ع(س) = س + ٤		✓	لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي			
ى(س) = ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ١		✓	لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي			
ن(س) = ٢س^{٢}	✓		٢	٠	٠	
هـ(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ − س^{٢}، س > ٠		✓	لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي			
ك(س) = س^{٢} − ٥س + $\frac{١}{٢}$	✓		١	٥-	$\frac{١}{٢}$	

:: التمثيل البياني للاقتران التربيعي :

١) عند تمثيل منحنى الاقتران التربيعي بيانياً نحصل على أحد المنحنيات التالية :

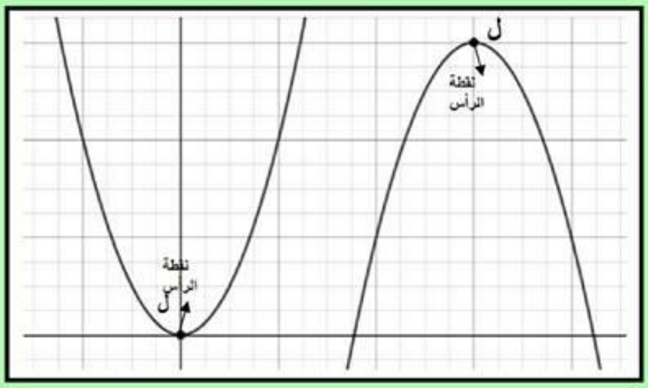
مفتوح للأعلى   مفتوح للأسفل

٢) من خلال تعريف (١) العدد الحقيقي أ (معامل س^{٢}) ، حيث أ ≠ ٠ ، إما أن يكون موجباً (أ > ٠) ، أو سالباً (أ < ٠) ، وأهمية إشارة معامل س^{٢} أنها تحدد هل منحنى الاقتران ق مفتوح للأعلى أو للأسفل . (الشكل أعلاه)

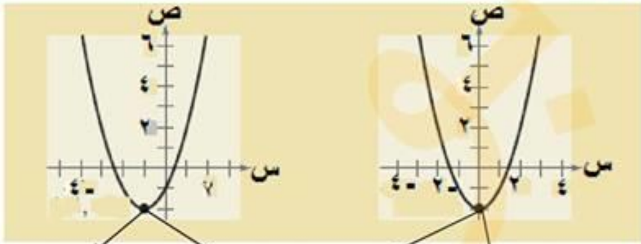
٣) في الشكل المجاور النقطة
ل تسمى رأس الاقتران
وإحداثيات هذه النقطة

$$\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$$

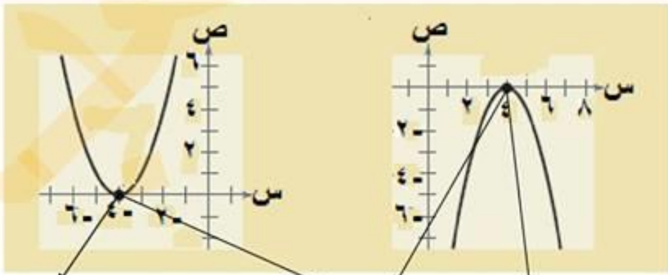
حيث أ معامل (س^{٢}) ،
ب معامل (س)



مثال (٢) في الأشكال التالية اكتب إحداثيات نقطة رأس الاقتران :



الحل : (٠ ، -٢) نقطة الرأس (-١ ، -٢)



الحل : (٤ ، ٠) نقطة الرأس (-٤ ، ٠)

سليمان دلدوم أبو هبه

مثال (٣) : لكل من الاقترانات التربيعية التالية جد إحداثيات نقطة الرأس :

أ) $\text{ن}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣$ ب) $\text{هـ}(\text{س}) = -٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س}$

جـ) $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١$ د) $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣$

الحل : أ) $\text{ن}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣$

أ (معامل س^{٢}) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٤}{٢\times٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $\text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) = \text{ن}(-١)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$\text{ن}(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٣$$
$$= ٢\times١ + -٤ + ٣ = ٢ + -٤ + ٣ = ١$$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right) = (-١ ، ١)$

ب) $\text{هـ}(\text{س}) = -٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س}$

أ (معامل س^{٢}) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{هـ}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-(-٦)}{٢\times-٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $\text{هـ}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) = \text{هـ}\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$\text{هـ}\left(\frac{-٣}{٢}\right) = -٢\left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٢} - ٦\left(\frac{-٣}{٢}\right)$$
$$= -٢\times\frac{٩}{٤} + \frac{١٨}{٢} = \frac{-٩}{٢} + \frac{١٨}{٢} = \frac{٩}{٢} = ٤و٥$$

إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{هـ}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right) = (-١و٥ ، ٤و٥)$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$

الحل :

أ (معامل $س^{٢}$) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ل(-٢)$ نعوض في قاعدة الاقتران

$$ل(-٢) = (-٢)^{٢} + ٤(-٢) - ١$$
$$= ٤ - ٨ - ١ = -٥$$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right) = (-٢ ، -٥)$

د) $ن(س) = س^{٢} + ٣$

الحل :

أ (معامل $س^{٢}$) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢ \times ١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(٠)$ نعوض في قاعدة الاقتران

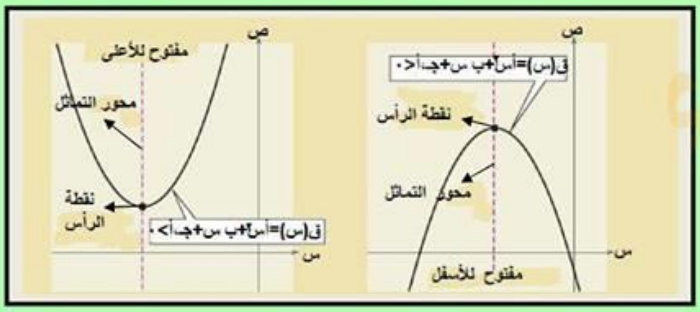
$$ن(٠) = (٠)^{٢} + ٣$$
$$= ٠ + ٣ = ٣$$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right) = (٠ ، ٣)$

٤) محور التماثل : هو المستقيم المار بنقطة الرأس لمنحنى الاقتران موازياً لمحور الصادات ،

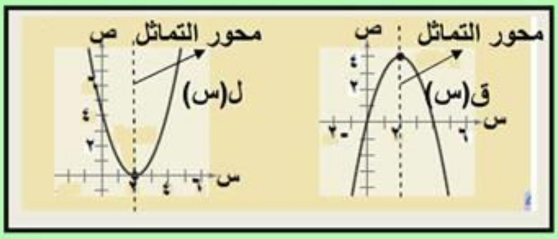
ومعادلته : س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، رمزاً ← $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$

الشكل المجاور يوضح موقع محور التماثل في منحنى الاقتران التربيعي



مثال (٤) :

في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل ، جد معادلة محور التماثل لكل منهما .



الحل :

- نقطة رأس منحنى الاقتران ق (س) : (٢ ، ٤) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :
  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$
- نقطة رأس منحنى الاقتران ل (س) : (٢ ، ٠) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :
  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$

مثال (٥) : في المثال (٣) : جد معادلة محور التماثل لكل اقتران :

الحل : أ) $ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$

أ (معامل $س^{٢}$) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢×٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- معادلة محور التماثل : ← $\boxed{س = -١}$

ب) هـ(س) = −٢س^{٢} − ٦س

أ (معامل س^{٢}) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢\times -٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- معادلة محور التماثل : ← $\boxed{س = \frac{-٣}{٢}}$

جـ) ل(س) = س^{٢} + ٤س − ١

أ (معامل س^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times ١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- معادلة محور التماثل : ← $\boxed{س = -٢}$
- د) ن(س) = س^{٢} + ٣
- أ (معامل س^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣
- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times ١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- معادلة محور التماثل : ← $\boxed{س = ٠}$

٥) القيمة الصغرى والعظمى للاقتران التربيعي

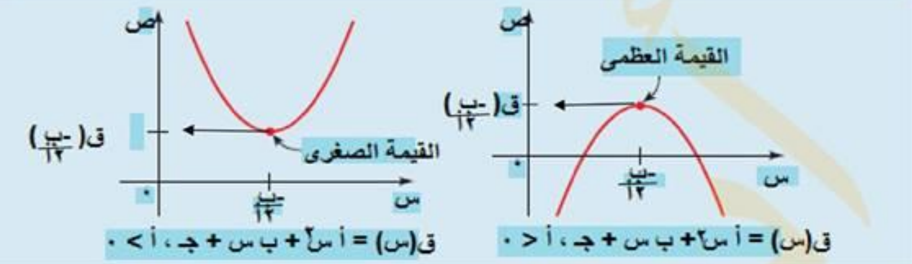
ن(س) = أس^{٢} + بس + جـ ، ونقطة رأسه $\left(\frac{-ب}{أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- إذا كانت $\boxed{أ \succ ٠}$ ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ن$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- إذا كانت $\boxed{أ \prec ٠}$ ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ن$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

لاحظ أن القيمة الصغرى والعظمى للاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

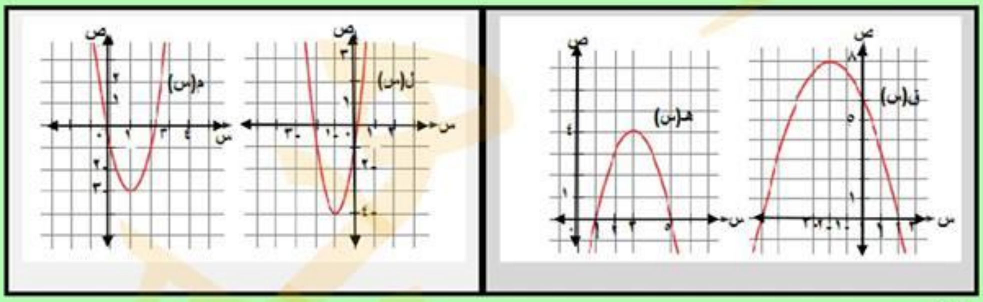
أنظر الشكل التالي :

- إذا كانت $أ \succ ٠$ ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- إذا كانت $أ \prec ٠$ ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$



مثال (٦) :

يبين الشكل منحنيات أربعة اقترانات تربيعية ، جد نقطة الرأس لكل اقتران ثم بين هل للاقتران قيمة عظمى أم صغرى ثم حدد هذه القيمة :



الحل :

- الاقتران ق (س) : نقطة الرأس (-٢ ، ٨) ، قيمة عظمى ومقدارها ٨
- الاقتران هـ (س) : نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، قيمة عظمى ومقدارها ٤
- الاقتران ل(س) : نقطة الرأس (-١ ، -٤) ، قيمة صغرى ومقدارها -٤
- الاقتران م (س) : نقطة الرأس (١ ، -٣) ، قيمة صغرى ومقدارها -٣

مثال (٧) :

جد القيمة العظمى أو الصغرى لكل من الاقترانات التربيعية التالية :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$ ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

جـ) $ل(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - ٦$ د) $ك(س) = ٢س(٤ - س) + ٧$

الحل :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$

أ (معامل $س^{٢}$) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(-١)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

  $ن(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) - ١ \leftarrow ن(-١) = ٢ - ٤ - ١ = -٣$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١ ، -٣)$

- **وبما أن معامل $س^{٢}$ أكبر من صفر ($\boxed{أ > ٠}$) ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ ، وهي -٣ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

نكتب الاقتران على الصورة العامة $هـ(س) = -س^{٢} - ٤س + ٣$

أ (معامل $س^{٢}$) = -١ ،، ب (معامل س) = -٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢\times-١} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس هـ$\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)$ = هـ(-٢) نعوض في قاعدة الاقتران

هـ$(-٢) = -(-٢)^{٢} - ٤(-٢) + ٣ \leftarrow$ هـ$(-٢) = -٤ + ٨ + ٣ = ٧$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{هـ}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right) = (-٢ ، ٧)$

- وبما أن معامل س^{٢} أصغر من صفر $\left(\boxed{\text{أ} < ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = -٢ ، وهي ٧ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .

جـ) ل(س) $= \frac{١}{٢}$س^{٢} + ٢س − ٦

أ (معامل س^{٢}) = $\frac{١}{٢}$ ،، ب (معامل س) = ٢ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -٦

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ل}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\leftarrow \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٢}{٢ \times \frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{١} = -٢$

- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ل$\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)$ = ل(-٢) نعوض في قاعدة الاقتران

ل$(-٢) = \frac{١}{٢}(-٢)^{٢} + ٢(-٢) - ٦ \leftarrow$ ل$(-٢) = ٢ - ٤ - ٦ = -٨$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ل}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right) = (-٢ ، -٨)$

- وبما أن معامل س^{٢} أكبر من صفر $\left(\boxed{\text{أ} > ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -٢ ، وهي - ٨ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .

د) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}(٤ - \text{س}) + ٧$

نكتب الاقتران على الصورة العامة $\text{ق}(\text{س}) = ٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢} + ٧ \leftarrow \boxed{\text{ق}(\text{س}) = -٢\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٧}$

أ (معامل $\text{س}^{٢}$) = -٢ ،، ب (معامل س) = ٨ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٧

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \dfrac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \dfrac{-٨}{٢ \times -٢} = \dfrac{-٨}{-٤} = ٢$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $\text{ق}\left(\dfrac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) = \text{ق}(٢)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$\text{ق}(٢) = -٢(٢)^{٢} + ٨(٢) + ٧ \leftarrow \text{ق}(٢) = -٨ + ١٦ + ٧ = ١٥$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\dfrac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{ق}\left(\dfrac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right) = (٢ ، ١٥)$
- **وبما أن معامل $\text{س}^{٢}$ أصغر من صفر** $\left(\boxed{\text{أ} \prec ٠}\right)$ **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٢ ، وهي ١٥ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

٦) مجال ومدى الاقتران التربيعي

- **مجال الاقتران التربيعي هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، أو كفترة** $(-\infty ، \infty)$.

أو هي مجموعة قيم س التي يمكن التعويض بها في قاعدة الاقتران ، وهي تمثل محور السينات أو مجموعة جزئية منه (حسب ما يحدد السؤال)

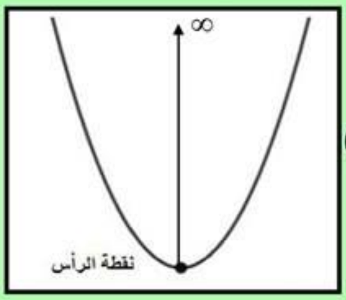
- **مدى الاقتران التربيعي : هي مجموعة صور المجال**

أو قيم ص الناتجة من تعويض قيم س في قاعدة الاقتران التربيعي ، والشكل التالي يوضح العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى

عناصر المجال (قيم س) ← قاعدة الاقتران ← عناصر المدى (قيم ص)

- **كيف نجد مدى الاقتران التربيعي :**

أولاً : بيانياً



:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأعلى (الشكل المجاور) فإن أقل قيمة يصل إليها منحنى الاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو من أقل قيمة (الصغرى) إلى ما لانهاية ورمزاً :

$$ص \in \left[ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) ، \infty\right) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{ص : ص \geq ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right\}$$

:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأسفل (الشكل المجاور) فإن أعلى قيمة يصل إليها الاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو من سالب ما لانهاية إلى أكبر قيمة (العظمى) ورمزاً :

$$ص \in \left(-\infty ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{ص : ص \leq ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right\}$$

ثانياً : إذا علمت قاعدة الاقتران :

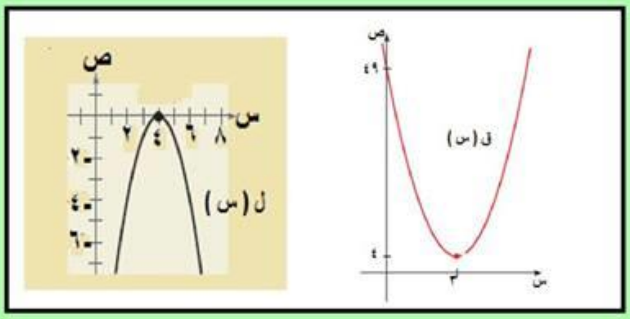
:: إذا كان معامل $س^٢$ أصغر من صفر $\left(\boxed{أ < ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$ص \in \left(-\infty ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{ص : ص \leq ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right\}$$

:: إذا كان معامل $س^٢$ أكبر من صفر $\left(\boxed{أ > ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$ص \in \left[ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) ، \infty\right) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{ص : ص \geq ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right\}$$

مثال (٨) :



اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل جد مدى كل منهما .

الحل :

- الاقتران ق (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، ومفتوح للأعلى ، إذا :

  مدى ق (س) = {ص : ص ≤ ٤}

- الاقتران ل (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٤ ، ٠) ، ومفتوح للأسفل ، إذا :

  مدى ل (س) = {ص : ص ≥ ٠}

مثال (٩) : جد مدى كل من الاقترانات التالية :

أ) ن(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤

جـ) ل(س) = ٣س^{٢} + ٦س د) ك(س) = ٣س^{٢} + ٦س − ٢

الحل :

أ) ن(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢\times١} = \frac{٢}{٢} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ن(١) = ١ − ٢ + ٣ = ٢ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ٢) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{أ > ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = ١ وهي ٢

إذا مدى ق = {ص : ص ≤ ٢}

ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤ ←←← أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times -١} = \frac{-٦}{-٢} =$ ٣ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

هـ(٣) = −٩ + ١٨ + ٤ = ١٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (٣ ، ١٣) نقطة الرأس

وبما أن $\left(\boxed{\text{أ} < ٠}\right)$ ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٣ وهي ١٣

إذا مدى هـ = {ص : ص ≤ ١٣}

جـ) ل(س) = ٣س^{٢} + ٦س ←←← أ = ٣ ، ب = ٦ ، جـ = ٠

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times ٣} = \frac{-٦}{٦} =$ −١ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ل(−١) = ٣ − ٦ = −٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (−١ ، −٣) نقطة الرأس

وبما أن $\left(\boxed{\text{أ} > ٠}\right)$ ، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ وهي -٣

إذا مدى ل = {ص : ص ≥ −٣}

د) ك(س) = −٣س^{٢} + ٦س − ٢ ←←← أ = −٣ ، ب = ٦ ، جـ = −٢

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times -٣} = \frac{-٦}{-٦} =$ ١ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

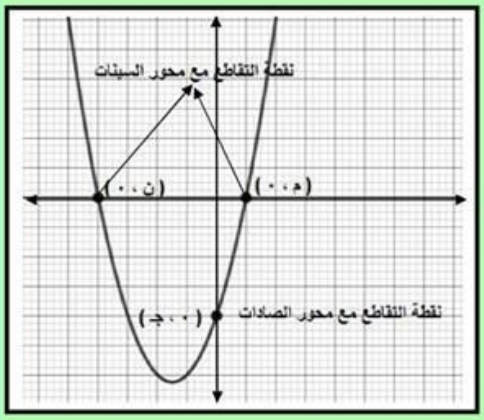
ك(١) = −٣ + ٦ − ٢ = ١ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ١) نقطة الرأس

وبما أن $\left(\boxed{\text{أ} < ٠}\right)$ ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ١ وهي ١

إذا مدى ك = {ص : ص ≤ ١}

٧) نقاط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين

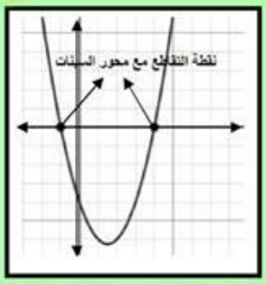
الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران التربيعي مبيناً عليه نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين السيني والصادي .



- النقطة (٠ ، جـ) نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور الصادات .
- النقطتين (م ، ٠) ، (ن ، ٠) نقطتي تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

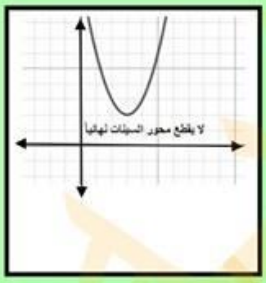
::: ملاحظات مهمة جداً :

- منحنى الاقتران التربيعي دائما يقطع محور الصادات وإحداثيات نقطة التقاطع هي (٠ ، جـ) حيث جـ الحد المطلق في الاقتران التربيعي (بشرط مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح) .
- منحنى الاقتران التربيعي يقطع محور السينات في نقطتين على الأكثر (أي يمكن أن يقطعه في نقطتين ، أو نقطة واحدة ، أو لا يقطعه نهائياً) والأشكال التالية توضح ذلك .



يقطع محور السينات في نقطتين

يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط



لا يقطع محور السينات نهائياً

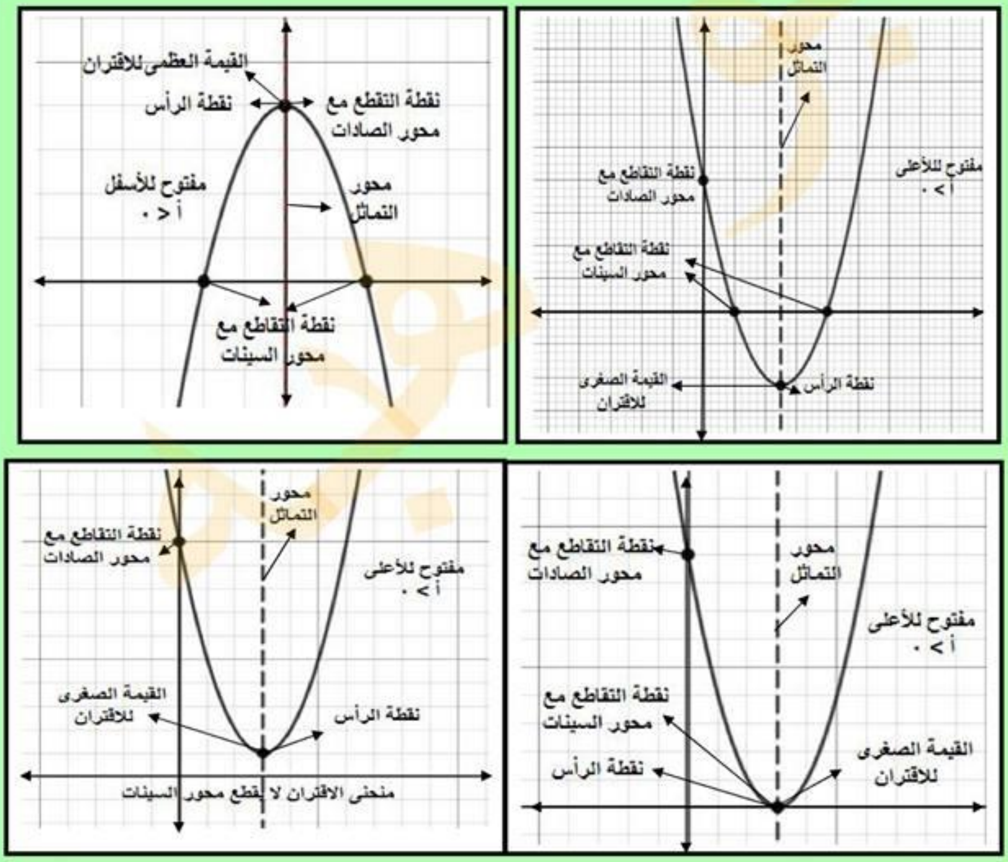
- في هذا الدرس سوف نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور السينات (إن وجدت) بيانياً
- لإيجاد نقطة تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور الصادات إذا علمت قاعدته ، نعوض الصفر بدل كل س في قاعدة الاقتران ، فنجد الناتج يساوي الحد المطلق
← ق(٠) = جـ ← (٠ ، جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات .

ملخص أولي لما سبق :

- الصورة العامة للاقتران التربيعي ق(س) = أس^{٢} + بس+جـ

المدى	فتحة المنحنى	قيمة عظمى أو صغرى	معادلة محور التماثل	نقطة الرأس	أ
ص ≥ ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$	للأعلى	صغرى	س = $\frac{-ب}{٢أ}$	$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right.$، ق$\left.\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$	أ ≻ ٠
ص ≤ ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$	للأسفل	عظمى	س = $\frac{-ب}{٢أ}$	$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right.$، ق$\left.\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$	أ ≺ ٠

- بيانياً :



سليمان دلدوم أبو هبه

الآن ننتقل إلى التمثيل البياني لمنحنى الاقتران التربيعي على المستوى الإحداثي

- من الطرق المستخدمة في تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً :

١) طريقة الجدول ٢) استخدام برامج للرسم مثل برنامج إكسل أو غيره

١) طريقة الجدول

- نجد الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-ب}{٢أ}$ ، ثم نجد إحداثي نقطة الرأس
- ننشئ جدول يتكون من ٨ أعمدة وصفين كما يلي :

نقطة الرأس

س				$\frac{-ب}{٢أ}$			
ق (س)				$ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$			

- نعبئ خانات قيم س في أعداد أقل من $\frac{-ب}{٢أ}$ على يمينها ، وأعداد أكبر منها على يسارها
- نعوض قيم س في قاعدة الاقتران لإيجاد قيم ص = ق (س)
- نعين النقاط الناتجة من الخطوة السابقة عل المستوى الإحداثي ثم نصل بينها بخط منحن

مثال (١٠) : شامل مثال (٣ – ٣) ص٨٦

ارسم منحنى كلاً من الاقترانات التربيعية التالية في المستوى الإحداثي

أ) ق(س) = س^٢ – ٤س + ١ ب) هـ(س) = –س^٢ + ٦س + ٤

جـ) ل(س) = س^٢ – ٢س + ٣

الحل :

أ) ق(س) = س^{٢} − ٤س + ١ ←←← أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ١ **(كتاب مدرسي ص٨٦)**

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢×١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = ٢
- ق(٢) = (٢)^{٢} − ٤×٢ + ١ = −٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (٢، −٣) نقطة الرأس
- الجدول

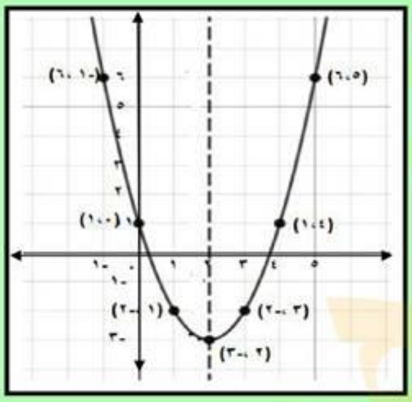
س	١-	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص=ق(س)	٦	١	٢-	٣-	٢-	١	٦

- نجد قيم ص

ق(١)=١−٤+١=−٢ ، ق(٣)=٩−١٢+١=−٢

ق(٠)=٠−٠+١=١ ، ق(٤)=١٦−١٦+١=١

ق(−١)=١+٤+١=٦ ، ق(٥)=٢٥−٢٠+١=٦



- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .

ب) هـ(س) = −س^{٢} + ٦س + ٤ ←←← أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٦}{٢×-١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = ٣
- هـ(٣) = −٩ + ١٨ + ٤ = ١٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (٢، −٣) نقطة الرأس
- الجدول

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص=هـ(س)	٤	٩	١٢	١٣	١٢	٩	٤

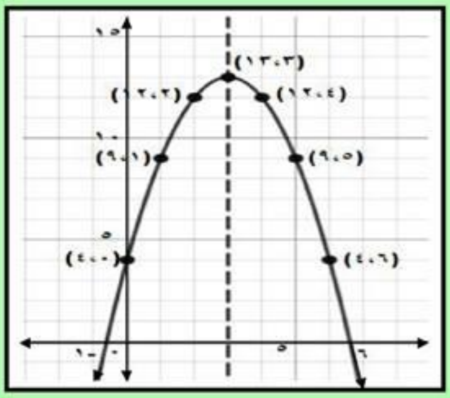
- **نجد قيم ص**

هـ(٠)=−٠+٠+٤=٤ ، هـ(٦)=−٣٦+٣٦+٤=٤

هـ(١)=−١+٦+٤=٩ ، هـ(٥)=−٢٥+٣٠+٤=٩

هـ(٢)=−٤+١٢+٤=١٢ ، هـ(٤)=−١٦+٢٤+٤=١٢

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**



جـ) ل(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢\times١} = \frac{٢}{٢} = ١$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = ١
- ل(١) = ١ − ٢ + ٣ = ٢ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (١،٢) نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص=ق(س)	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١

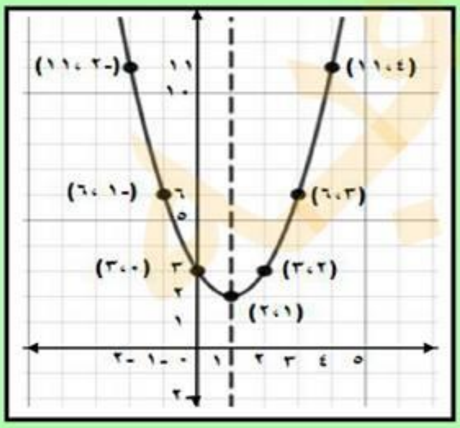
- **نجد قيم ص**

ل(−٢)=٤+٤+٣=١١ ، ل(٤)=١٦−٨+٣=١١

ل(−١)=١+٢+٣=٦ ، ل(٣)=٩−٦+٣=٦

ل(٠)=٠−٠+٣=٣ ، ل(٢)=٤−٤+٣=٣

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**



٢) استخدام برامج الرسم

نختار أي برنامج للرسم مثل : برنامج إكسل ، ديسموس ، جيوجبرا ، fx-draw ، ....

حل تدريب (٣ – ٢) ص٨٨

ارسم منحنى الاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} + ٤س – ٥

الحل : تم استخدام برنامج ديسموس في الرسم

ق(س) = س^{٢} + ٤س – ٥ ←←← أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = –٥

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = –٢
- ق(–٢) = ٤ – ٨ – ٥ = –٩ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (–٢، –٩) نقطة الرأس
- الجدول

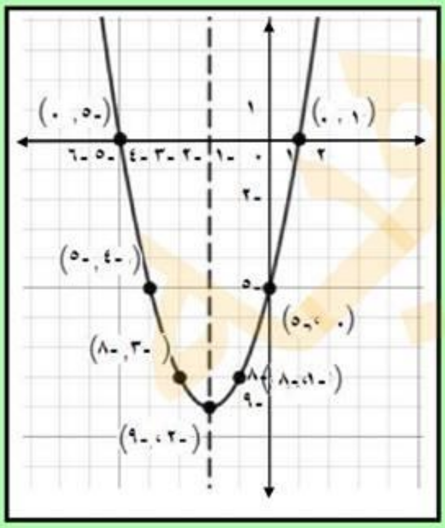
س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١
ص=ق(س)	٠	٥-	٨-	٩-	٨-	٥-	٠

- نجد قيم ص

ق(–٥)=٢٥–٢٠–٥=٠   ق(١)=١+٤–٥=٠

ق(–٤)=١٦–١٦–٥=–٥   ق(٠)=٠+٠–٥=–٥

ق(–٣)=٩–١٢–٥=–٨   ق(–١)=١–٤–٥=–٨



- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .

حل تدريب (٣ – ٣) ص٨٨

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، حيث ق(س) = س^{٢} + ٢س

أ) هل منحنى الاقتران ق مفتوح إلى الأعلى أم إلى الأسفل ؟

ب) هل للاقتران ق قيمة صغرى أم قيمة عظمى ؟ جدها

جـ) ما مدى الاقتران ق ؟

الحل :

الجواب في الأفرع الثلاثة يعتمد على إشارة معامل س^{٢} ← أ = ١ > ٠ (موجبة)

أ) مفتوح إلى الأعلى ← إشارة معامل س^{٢} ← أ = ١ > ٠ (موجبة)

ب) قيمة صغرى

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢} = -١$ ← ق(−١) = ١ − ٢ = −١ القيمة الصغرى

جـ) مدى الاقتران ق = {ص : ص ≥ −١}

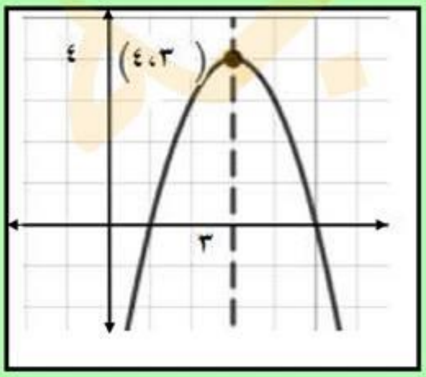
حل تدريب (٣ – ٤) ص٨٩

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، قيمته العظمى تساوي ٤ ومعادلة محور تماثله هي س = ٣ ، ارسم رسماً تقريبياً لمنحنى الاقتران ق .

الحل :

بما أن للاقتران قيمة عظمى وتساوي ٤، إذاً :

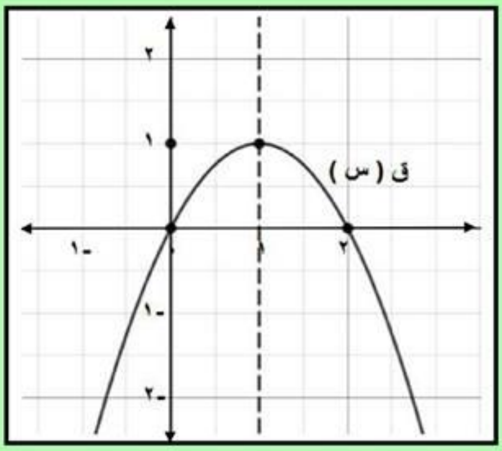
- الاقتران مفتوح إلى الأسفل
- نقطة الرأس (٣ ، ٤)



حل تدريب (٣ – ٥) ص٨٩

استخدم الآلة الراسمة لرسم منحنى الاقتران التربيعي : $ق(س) = ٢س - س^{٢}$.

معتمداً على الرسم جد إحداثيي نقطة الرأس ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى للاقتران ق .



الحل :

- نقطة الرأس (١ ، ١)
- معادلة محور التماثل : س = ١
- القيمة العظمى : ١
- مدى الاقتران ق = {ص : ص ≤ ١}

حل تدريب (٣ – ٦) ص٩٠

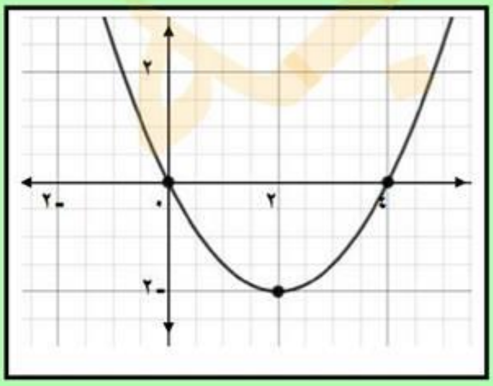
إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س$

أ) استعمل برنامج إكسل في رسم منحنى الاقتران ق .

ب) ما النقط التي يقطع عندها المنحنى محور السينات ؟

جـ) ما النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور الصادات ؟

الحل :



أ) الشكل المجاور

ب) نقط التقاطع مع محور السينات

(٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات

(٠ ، ٠)

أمثلة حياتية على الاقتران التربيعي

مثال (١١) : مثال (٣ – ٦) كتاب مدرسي ص٩٠

في لعبة الرماية استخدم عز الدين قوساً لقذف سهم إلى الأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٤٠ متراً / ثانية وفق العلاقة ل = ٤٠ ن – ٥ ن^{٢} ، حيث ن الزمن بالثواني ، ل الارتفاع بالأمتار ، ما أقصى ارتفاع يمكن أن يصله السهم ؟ الشكل المجاور .

الحل :

لاحظ أن العلاقة التي يسير فيها السهم تمثل اقتران تربيعي ، نكتب العلاقة بالصورة العامة :

ل(ن) = –٥ ن^{٢} + ٤٠ ن ⟵ ⟵ ⟵ أ = –٥ ، ب = ٤٠ ، جـ = ٠

أقصى ارتفاع يصله السهم يمثل القيمة العظمى للاقتران حيث أ ≻ ٠ .

ن = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}$ = $\frac{-٤٠}{٢\times -٥}$ = ٤ث ، **يصل السهم إلى أقصى ارتفاع بعد مرور ٤ ثوان من قذفه**

أقصى ارتفاع ⟵ ل(٤) = –٥ × ١٦ + ٤٠ × ٤ ⟵ ل(٤) = –٨٠ + ١٦٠ = ٨٠ **متراً**

حل تمارين ومسائل ص٩١

١) أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟

أ) ق(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ + س ، س ≻ ٠

ليس اقتران تربيعي ، حيث لا يمكن كتابته على الصورة العامة للاقتران التربيعي .

ب) هـ(س) = س(س – ١) + ٥

هـ(س) = س^{٢} – س + ٥ **اقتران تربيعي**

جـ) ل(س) = ٢س + ١   **ليس اقتران تربيعي**

د) هـ(س) = س^{٢} (٣ − س^{٢}) + س + ٤

هـ(س) = −س^{٤} + ٣س^{٢} + س + ٤   **ليس اقتران تربيعي**

٢) ما معادلة محور تماثل الاقتران التربيعي ن(س) = س^{٢} + ٢٥و٠ + س

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

ن(س) = س^{٢} + س + ٢٥و٠ ←← أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ٢٥و٠

معادلة محور التماثل : س = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-١}{٢\times١} = \frac{-١}{٢}$ ← $\boxed{س = \frac{-١}{٢}}$

٣) ما مجال ومدى الاقتران التربيعي ن(س) = ١ − س^{٢}

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

ن(س) = −س^{٢} + ١ ←←← أ = −١ ، ب = ٠ ، جـ = ١

- **مجاله : مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، أو** (−∞ ، ∞)
- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس :** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times-١} = ٠$

الإحداثي الصادي لنقطة الرأس : ن(٠) = −٠ + ١ = ١ ←← (٠ ، ١) **نقطة الرأس**

وبما أن معامل س^{٢} إشارته سالبة (أ < ٠) ، **إذاً مدى ق** = {ص : ص ≤ ١}

٤) إذا كان ق : ح ← ح : حيث ن(س) = س^{٢} − ٥س + ٤ **فجد** ن(−٢) ، ن(١) ، ن(٤)

الحل :

قيم س	ن(س) = س^{٢} − ٥س + ٤	(س ، ص)
−٢	ن(−٢) = (−٢)^{٢} − ٥ × −٢ + ٤ = ١٨	(−٢ ، ١٨)
١	ن(١) = (١)^{٢} − ٥ × ١ + ٤ = ٠	(١ ، ٠)
٤	ن(٤) = (٤)^{٢} − ٥ × ٤ + ٤ = ٠	(٤ ، ٠)

٥) جد معادلة محور التماثل ، ورأس المنحنى ، والقيمة العظمى أو القيمة الصغرى ، والمجال ، والمدى لكل من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = س^٢ + ٦س − ٧   ب) و(س) = ٢س − س^٢ + ٤   جـ) هـ(س) = س^٢

الحل : المجال لكل الاقترانات هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

الاقتران	أ	ب	جـ	معادلة محور التماثل	رأس المنحنى	عظمى أو صغرى	المدى
ق(س) = س^٢ + ٦س − ٧	١	٦	٧-	س = −ب/٢أ = −٦/(٢×١) = −٣	ق(−٣) = ٩ − ١٨ − ٧ = −١٦ ← (−٣، −١٦)	١٦- صغرى	ص ≥ −١٦
و(س) = −س^٢ + ٢س + ٤	١-	٢	٤	س = −ب/٢أ = −٢/(٢×−١) = ١	و(١) = −١ + ٢ + ٤ = ٥ ← (١، ٥)	٥ عظمى	ص ≤ ٥
هـ(س) = س^٢	١	٠	٠	س = −ب/٢أ = ٠/(٢×١) = ٠	هـ(٠) = ٠ ← (٠،٠)	٠ صغرى	ص ≥ ٠

٦) ارسم منحنى الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = (س + ٢)^٢ − ١   ب) هـ(س) = س^٢ − ٢س + ٤

الحل : الطريقة الأولى (المعتمدة للصف التاسع)

أ) ق(س) = (س + ٢)^٢ − ١ : نكتب قاعدة الاقتران على الصورة العامة

ق(س) = س^٢ + ٤س + ٤ − ١ ← ق(س) = س^٢ + ٤س + ٣

ق(س) = س^٢ + ٤س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٣

- −ب/٢أ = −٤/(٢×١) = −٤/٢ = −٢ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = −٢
- ق(−٢) = ٤ − ٨ + ٣ = −١ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (−٢، −١) نقطة الرأس
- الجدول

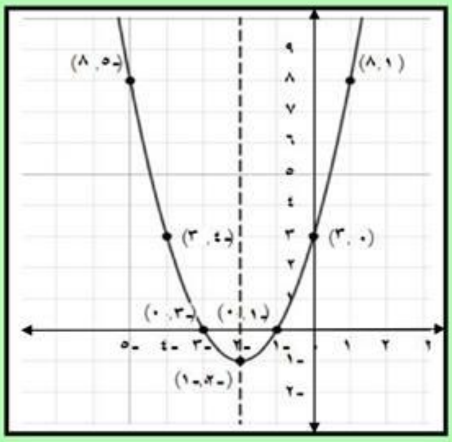
سليمان دلدوم أبو هبه

س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١
ص=ق(س)	٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨

- **نجد قيم ص**

ق(-٥)=٢٥-٢٠+٣=٨   ق(١)=١+٤+٣=٨
ق(-٤)=١٦-١٦+٣=٣   ق(٠)=٠+٠+٣=٣
ق(-٣)=٩-١٢+٣=٠   ق(-١)=١-٤+٣=٠

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠**

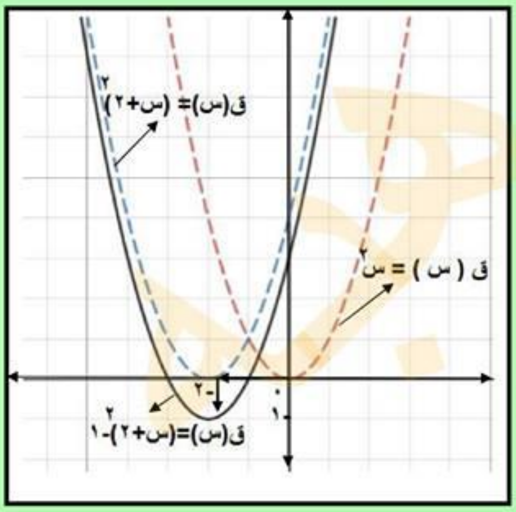


الطريقة الثانية : فرع أ فقط

طريقة الانسحاب الأفقي والعمودي لمنحنى الاقتران التربيعي الإمام ق(س) = س^{٢}

خطوات الرسم (الشكل المجاور)

- **نرسم الاقتران الإمام ق(س) = س^{٢}**
- **نسحب منحنى الاقتران الإمام وحدتين لليسار** ← ق(س) = (س + ٢)^{٢}
- **نسحب منحنى الاقتران الناتج من الخطوة السابقة وحدة واحدة إلى الأسفل**
← ق(س) = (س + ٢)^{٢} − ١



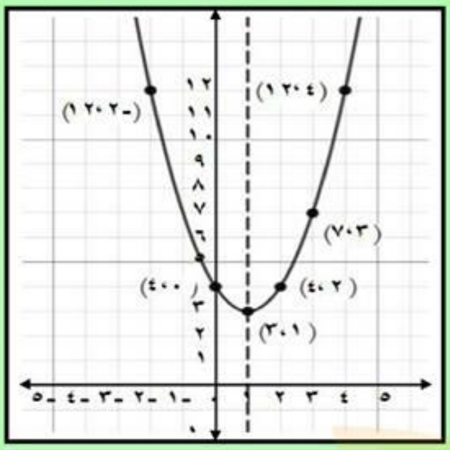
ملاحظة : الاقتران ق في هذا السؤال كتب على الصورة القياسية (تشرح في نهاية الوحدة)

الصورة القياسية للاقتران التربيعي ← ق(س) = أ (س − د)^{٢} + ك

ب) هـ(س) = س^٢ − ٢س + ٤ ← ← ← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٤

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢ \times ١} = \frac{٢}{٢}$ = ١ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = ١
- هـ(١) = ١ − ٢ + ٤ = ٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (١ ، ٣) نقطة الرأس

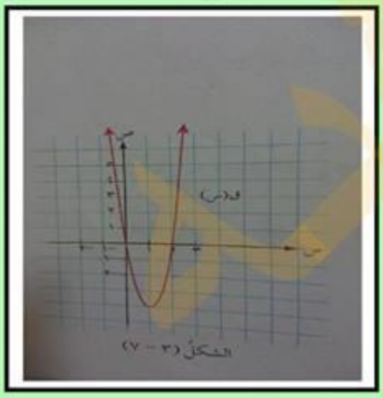
س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص=هـ(س)	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢



- نجد قيم ص

هـ(−٢)=٤+٤+٤=١٢ هـ(٤)=١٦−٨+٤=١٢
هـ(−١)=٦−٢+٤=٧ هـ(٣)=٩−٦+٤=٧
هـ(٠)=٠−٠+٤=٤ هـ(٢)=٤−٤+٤=٤

- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .



٧) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق ، اكتب قاعدة الاقتران معتمداً على الرسم .

الحل : ق(س) = أس^٢ + ب س + جـ

لإيجاد قاعدة الاقتران ، نجد قيم أ ، ب ، جـ

الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٠) ← $\boxed{\text{جـ = ٠}}$ ...(١)

معادلة محور التماثل س = ١ = $\frac{-ب}{٢أ}$ ← $\boxed{\text{ب = −٢أ}}$ ...(٢)

(١ ، −٤) نقطة رأس المنحنى ق(١) = −٤ ← $\boxed{\text{أ+ب+جـ = −٤}}$ ...(٣)

وبتعويض المعادلتين (١)،(٢) في معادلة (٣) أ − ٢أ + ٠ = −٤ ← $\boxed{\text{أ = ٤}}$

وبتعويض قيمة أ في م (٢) ← $\boxed{\text{ب = −٨}}$ منها قاعدة الاقتران $\boxed{\text{ق(س) = ٤س}^٢\text{ − ٨س}}$

سليمان دلدوم أبو هبه

٨) إذا علمت أن منحنى الاقتران التربيعي ق يقطع محور السينات عندما $س = -٢$ ، $س = ٢$ ، ويمر بالنقطة $(١ ، -٣)$ ، جد قاعدة الاقتران ق ، ثم ارسم منحناه مستخدما برنامج إكسل .

الحل :

قاعدة الاقتران $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$

منحنى الاقتران يقطع محور السينات في النقطتين $(-٢ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$ ، إذاً :

معادلة محور التماثل $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢+٢}{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{ب = ٠}$

تصبح قاعدة الاقتران $ق(س) = أ س^{٢} + جـ$ ، وبتعويض النقطتين $(١ ، -٣)$ ، $(٢ ، ٠)$

$(١ ، -٣) \leftarrow ق(١) = -٣ \leftarrow أ + جـ = -٣ \ldots (١)$

$(٢ ، ٠) \leftarrow ق(٢) = ٠ \leftarrow ٤أ + جـ = ٠ \ldots (٢)$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) بطريقة الحذف أو التعويض نجد أن $\boxed{أ = ١ ، ب = -٤}$

إذاً قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = س^{٢} - ٤$

٩) قذف جسيم إلى أعلى وفق العلاقة : $ف(ن) = ٨٠ن - ٥ن^{٢}$ ، حيث ف : الارتفاع بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

الحل :

قاعدة العلاقة بالصورة العامة : $ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٨٠ن \leftarrow أ = -٥ ، ب = ٨٠ ، جـ = ٠$

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٨٠}{٢\times-٥} = \frac{٨٠}{١٠} = ٨ن$ الزمن اللازم للوصول إلى أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع : $ف(٨) = -٥\times٦٤ + ٨٠\times٨ \leftarrow ف(٨) = -٣٢٠ + ٦٤٠ = ٣٢٠$ متراً .

١٠) جد العددين اللذين مجموعهما ٤٠ ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض : العدد الأول س ⟵ العدد الثاني ٤٠ – س ،،، حاصل الضرب م

حاصل ضرب العددين = العدد الأول × العدد الثاني ⟵⟵ $\text{م} = \text{س}(\text{٤٠} - \text{س})$

$\text{م}(\text{س}) = -\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤٠س} \longleftarrow\longleftarrow \text{أ} = -\text{١} \text{ ، ب} = \text{٤٠} \text{ ، جـ} = \text{٠}$

معادلة محور التماثل $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{٤٠}}{\text{٢} \times -\text{١}} = \frac{-\text{٤٠}}{-\text{٢}} = \text{٢٠} \leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢٠}}$

بما أن معامل $\text{س}^{\text{٢}} \succ \text{٠}$ ، يكون للاقتران قيمة عظمى عند $\text{س} = \text{٢٠}$ العدد الأول

إذاً العددان هما ٢٠ ، ٢٠

١١) اتفقت شركة استيراد وتصدير مع أحد المصانع على استيراد نوع من الماكنات ، بشرط أن يكون مقدار ما تربحه الشركة (ق) (مقدراً بآلاف الدنانير) مرتبطاً مع الزمن اللازم للاستيراد (ن) (مقدراً بالأسابيع) حسب العلاقة $\text{ق}(\text{ن}) = \text{٤ن} - \text{ن}^{\text{٢}}$ ، ما الزمن اللازم لتحصل الشركة على أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

العلاقة $\text{ق}(\text{ن}) = \text{٤ن} - \text{ن}^{\text{٢}}$ هي اقتران تربيعي تربط ما بين الربح والزمن ، لذلك تحصل الشركة على أكبر ربح عندما يكون لهذا الاقتران قيمة عظمى .

بما أن معامل $\text{ن}^{\text{٢}} \succ \text{٠}$ ، تحصل الشركة على أكبر ربح عندما :

$\text{ن} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{٤}}{\text{٢} \times -\text{١}} = \frac{-\text{٤}}{-\text{٢}} = \text{٢} \leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢}}$ أسبوع

١٢) حل المسألة الواردة في بداية الدرس .

يملك أحمد سياجاً طوله ٢٠ م ، ينوي عمل حظيرة بهذا السياج على شكل مستطيل ، ما أبعاد الحظيرة بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن ؟

الحل :

- نفرض بعدي الحظيرة س ،، ص
- محيط الحظيرة ٢٠

$\leftarrow$ ٢س + ٢ص = ٢٠ $\leftarrow$ $\boxed{\text{س + ص = ١٠}}$ ...(١)

- نفرض مساحة الحظيرة م $\leftarrow$ م = س ص ...(٢)
- من معادلة (١) $\boxed{\text{ص = ١٠ − س}}$ تعوض في معادلة (٢)

م = س (١٠ − س) $\leftarrow$ $\boxed{\text{م(س) = −س}^{٢}\text{ + ١٠س}}$ اقتران تربيعي

بما أن معامل س^{٢} $\prec$ ٠ ، يكون للاقتران قيمة عظمى عند س = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-١٠}{٢\times -١}$ = ٥

إذاً البعد الأول : س = ٥ متر ،، البعد الثاني ص = ١٠ ـ ٥ $\leftarrow$ ص = ٥ متر

مثال (١٢) : للفائدة

الشكل المجاور ، يمثل نافذة مصممة على شكل نصف دائرة تعلو مستطيل ، إذا علمت أن محيط النافذة ١٦ قدم ، اكتب مساحة الدائرة على صورة اقتران تربيعي بدلالة س .

تذكر :

محيط الدائرة = ٢πنق

مساحة الدائرة = πنق^{٢}

الحل :

أبعاد المستطيل س ، ص ،،،، نصف قطر الدائرة = $\frac{١}{٢}$ س

محيط المستطيل = س + ٢ص (لماذا؟) ،،، محيط نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}\left(٢\pi \times \frac{١}{٢}\text{س}\right) = \frac{١}{٢}\pi$س

محيط المستطيل + محيط نصف الدائرة = محيط النافذة

س + ٢ص + $\frac{١}{٢}\pi$س = ١٦ $\leftarrow$ ٢س + ٤ص + πس = ٣٢ $\leftarrow$ $\boxed{\text{٤ص + (٢ + }\pi\text{)س = ٣٢}}$ ...(١)

- مساحة المستطيل = س ص ،، مساحة نصف الدائرة = $\frac{1}{2}\left(\pi \times \left(\frac{1}{2}\text{س}\right)^{2}\right) = \frac{1}{16}\pi \text{س}^{2}$

مساحة النافذة (م) = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

$$\text{م} = \text{س ص} + \frac{1}{16}\pi \text{س}^{2} \ldots\ldots (2)$$

لكن من معادلة (١) $4\text{ص} + (2+\pi)\text{س} = 32 \leftarrow \text{ص} = 8 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi\right)\text{س}$

وبالتعويض في معادلة (٢) : نجد مساحة النافذة بدلالة س

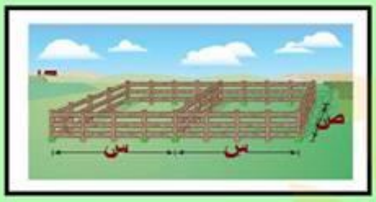
$$\text{م} = \text{س}\left(8 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi\right)\text{س}\right) + \frac{1}{16}\pi \text{س}^{2}$$

$$= 8\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} - \frac{1}{2}\pi \text{س}^{2} + \frac{1}{16}\pi \text{س}^{2}$$

$$= 8\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} - \frac{7}{16}\pi \text{س}^{2}$$

$$= 8\text{س} - \left(\frac{15+\pi}{16}\right)\text{س}^{2}$$

سؤال (١) :



يمتلك أبو فوزي 200 متراً من السياج ، ينوي

عمل حظيرتين بهذا السياج (الشكل)

١) اكتب مساحة الحظيرتين كاقتران تربيعي بدلالة س .

٢) جد أبعاد كل حظيرة لتكون مساحة كل منهما أكبر ما يمكن

سؤال (٢) :

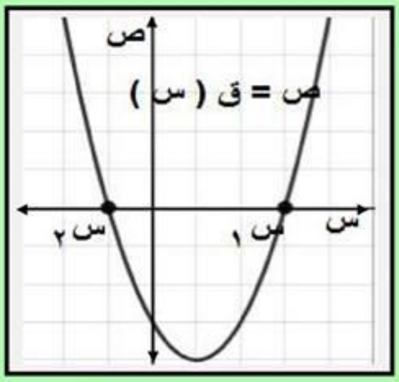
لشركة تجارية إذا كان الإيراد (د) (بالدينار) مرتبطا مع سعر سلعة (س) (بالدينار) تبيعها ،حسب العلاقة التالية:

د (س) = - ١٢ س٢ + ١٥٠ س

١)جد الإيراد إذا كان سعر السلعة : ٤ دينار ، ٦ دينار ، ٨ دينار

٢)جد سعر السلعة التي يكون عندها الإيراد أكبر ما يمكن

٣ ـ ٢ أصفار الاقتران التربيعي



- يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق (س)

لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

$س = س_١$ ، $س = س_٢$ ، وهذا يعني أن الإحداثي

الصادي لكلا النقطتين يساوي صفراً ، أي أن :

$$ق(س_١) = ٠ \quad ، \quad ق(س_٢) = ٠$$

يسمى العددان $س_١$ ، $س_٢$ <u>أصفار الاقتران التربيعي</u>

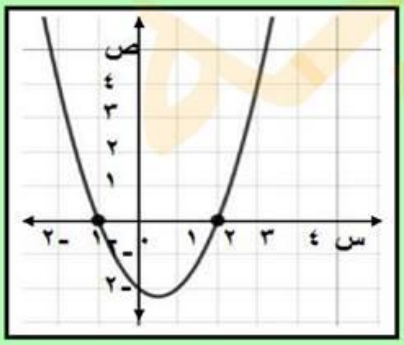
تعريف

- إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، فإن الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات تمثل أصفار هذا الاقتران .
- أي أن العدد $س_١$ يسمى صفراً للاقتران ق إذا كان $ق (س_١) = ٠$ ، حيث $س_١$ عدد حقيقي

مثال (١٣) : مثال (٣ ـ ٧) كتاب مدرسي ص٩٣

ارسم منحنى الاقتران $ق (س) = س^٢ - س - ٢$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره .

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين (-١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، وبما أن أصفار

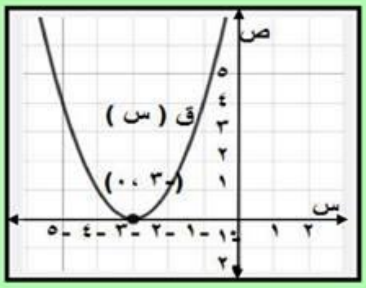
الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران

إذاً صفري الاقتران هما (س = -١) ، (س = ٢)

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} + ٦س + ٩ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره .

الحل :

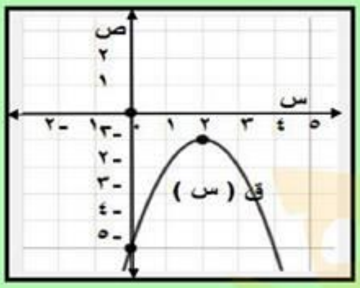


من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)
لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات
في النقطة (-٣ ، ٠) ، وبما أن أصفار الاقتران هي
هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران إذاً صفر
الاقتران هو (س = -٣)

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = -س^{٢} + ٤س - ٥ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره .

الحل :

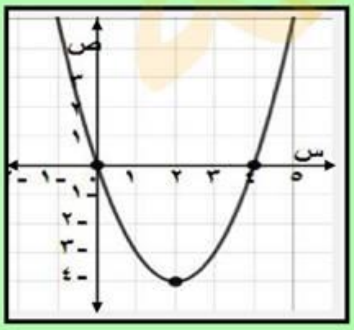


لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران
ق (س) أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات
نهائياً ، لذلك فإنه لا يوجد أصفار للاقتران .

حل تدريب (٣ - ٧) ص٩٤

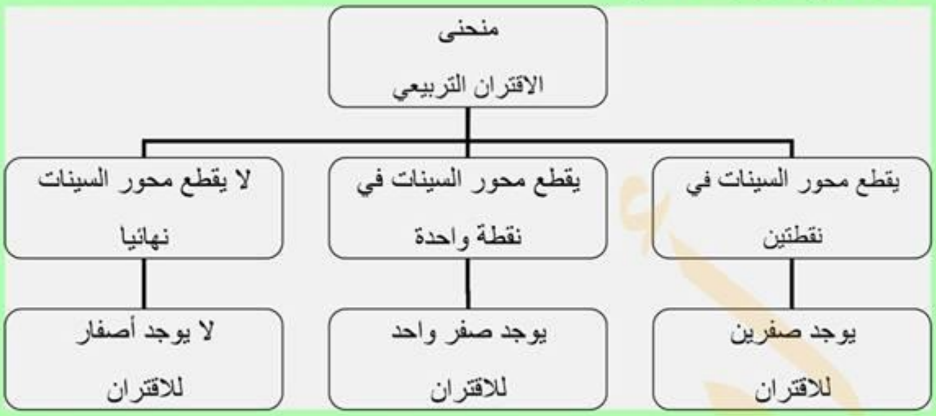
ارسم منحنى الاقتران ق بيانياً ، حيث ق (س) = س^{٢} - ٤س ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفار الاقتران ق .

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)
لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات
في النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، وبما أن أصفار
الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران
إذاً صفري الاقتران هما (س = ٠) ، (س = ٤)

لاحظ من خلال الأمثلة السابقة



مثال (١٥) :

أي من الأعداد ٢ ، ٠ ، −١ ، −٨ ، ٨ يعتبر صفراً للاقتران ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٨ :

الحل : نعوض كل عدد في قاعدة الاقتران ، والعدد الذي ناتج تعويضه = ٠ ، يعتبر صفراً للاقتران

العدد	الاقتران ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٨	الحكم
٢	ق (٢) = ٤ − ١٤ − ٨ = −١٨	ليس صفراً للاقتران
٠	ق (٠) = −٠ − ٠ − ٨ = −٨	ليس صفراً للاقتران
−١	ق (−١) = ١ + ٧ − ٨ = ٠	صفراً للاقتران
−٨	ق (−٨) = ٦٤ + ٥٦ − ٨ = ١١٢	ليس صفراً للاقتران
٨	ق (−٨) = ٦٤ − ٥٦ − ٨ = ٠	صفراً للاقتران

<u>حل تدريب (٣ − ٨) ص٩٤</u>

إذا علمت أن العدد (٧) هو صفراً للاقتران ق : ق (س) = أس^{٢} − ٤س − ٢١ **، أوجد قيمة الثابت أ ؟**

الحل : ٧ صفراً للاقتران ⟵ ق (٧) = ٠ **،، نعوض ٧ في قاعدة الاقتران ق**

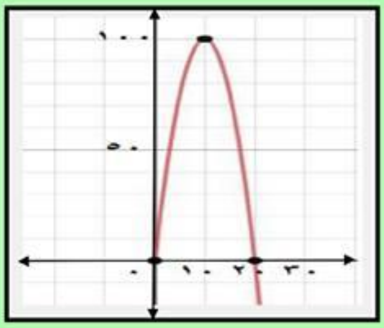
ق (٧) = أ (٧)^{٢} − ٤(٧) − ٢١ = ٠ ⟵ ٤٩أ − ٢٨ − ٢١ = ٠

٤٩أ − ٤٩ = ٠ ⟵ ٤٩أ = ٤٩ ⟵ $\boxed{\text{أ = ١}}$

حل تدريب (٣ – ٩) ص٩٥

يبيع مربي دواجن (س) بيضة يومياً ، إذا كان الربح الذي سيحصل عليه عند بيعها ممثلاً في العلاقة :
ص = ٤٠٠ س – س ^{٢} (قرشاً) ، استخدم برنامج إكسل لمعرفة عدد البيض اللازم بيعه ليكون الربح صفراً ، وما عدد البيض اللازم بيعه لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟ وما مقدار الربح آنذاك ؟

الحل : باستخدام برنامج ديسموس



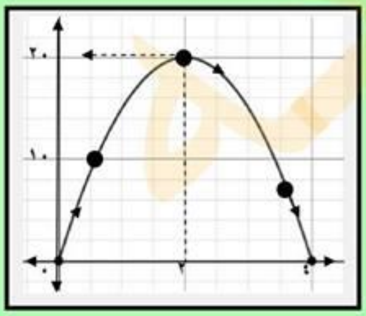
- بما أن عدد البيض لا يمكن أن يكون سالباً ، فإن مجال العلاقة هو س ≥ ٠
- من خلال الرسم تلاحظ أن الربح يساوي صفراً عندما س = ٢٠ ،، عند س = ٠ لم يبع أي بيضة
- لتحقيق أكبر ربح يجب عليه بيع ١٠ بيضات ، ويكون مقدار الربح ١٠٠ قرشاً ٠

مثال (١٦) :

قذفت كرة إلى الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ ث ، فإذا كان ارتفاع الكرة (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية معطى وفقاً للقاعدة ف : ف (ن) = ٢٠ن – ٥ن ^{٢}

- متى تعود الكرة إلى سطح الأرض ؟
- ما أقصى ارتفاع ممكن أن تصله الكرة ؟

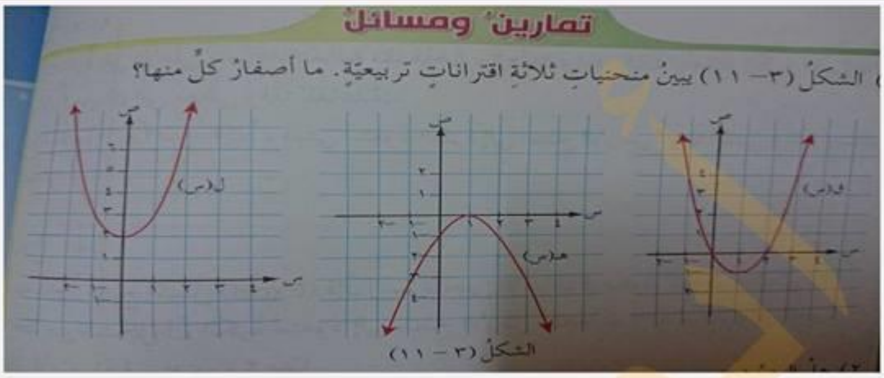
الحل :



- الشكل المجاور يمثل منحنى العلاقة بين الزمن ومسار الكرة ٠
- لاحظ أن الكرة تعود إلى سطح الأرض بعد مرور ٤ ثوان
- أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو بعد مرور ثانيتين ويساوي ٢٠ متراً ٠

حل تمارين ومسائل ص٩٦

١) الشكل يبين منحنيات ثلاثة اقترانات تربيعية ، ما أصفار كل منها ؟



الحل : (س = ٠) ، (س = ٢)   (س = ١)   **لا يوجد**

٢) هل العدد (١) صفر للاقتران ن : ن (س) = ٥س^{٢} + س − ٦ ؟ برر إجابتك ؟

الحل :

نجد ن(١) ← ن (١) = ٥(١)^{٢} + ١ − ٦ = ٥ + ١ − ٦ = ٠

وبما أن ن(١) = ٠ ، **إذاً العدد (١) صفر للاقتران .**

٣) ارسم منحنى الاقترانات التالية ، ثم جد أصفار كل منها :

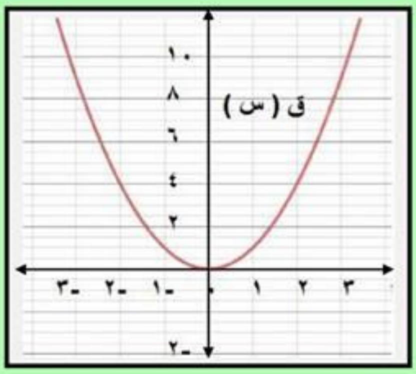
أ) ن (س) = س^{٢} ب) هـ(س) = س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} جـ) ن(س) = ٤ + س^{٢} − ٤س

الحل :

أ) ن (س) = س^{٢} ←←← أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

- $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ←← ن(٠) = (٠)^{٢} = ٠ ← (٠ ، ٠) **نقطة الرأس للمنحنى**

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = ق (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

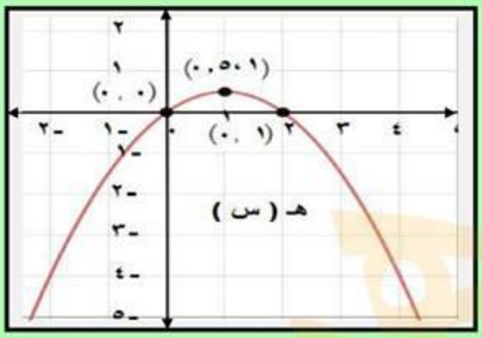


صفر الاقتران (س = ٠)

ب) هـ(س) = $-\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س ← ← ← ا = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ١ ، جـ = ٠

$\frac{-ب}{٢ا} = \frac{-١}{٢ \times \frac{-١}{٢}}$ = ١ ← ← ن (١) = $\frac{-١}{٢}$(١)^{٢} + ١ = ٥و٠ ← (١ ، ٥و٠) نقطة الرأس للمنحنى

س	ص = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢} + س	(س ، ص)
-٢	$\frac{-١}{٢}$ × ٤ + -٢ = -٤	(-٢ ، -٤)
-١	$\frac{-١}{٢}$ × ١ + -١ = -٥و١	(-١ ، -٥و١)
٠	$\frac{-١}{٢}$ × ٠ + ٠ = ٠	(٠ ، ٠)
١	$\frac{-١}{٢}$ × ١ + ١ = ٥و٠	(١ ، ٥و٠)
٢	$\frac{-١}{٢}$ × ٤ + ٢ = ٠	(٢ ، ٠)
٣	$\frac{-١}{٢}$ × ٩ + ٣ = -٥و١	(٣ ، -٥و١)
٤	$\frac{-١}{٢}$ × ١٦ + ٤ = -٤	(٤ ، -٤)



صفري الاقتران (س = ٠) ، (س = ٢)

٤) إذا كان العدد ٢ صفراً للاقتران ن (س) = ا س^{٢} + ب س + ٦ ، وكان ن (١) = ٢ ، فجد قيمة كل من العددين الحقيقين ا ، ب

الحل :

- لاحظ أنه يوجد مجهولان هما ا ، ب لذلك يجب أن يكون لدينا معادلتان لإيجاد قيمة كل منهما .
- في السؤال يوجد لدينا معلومتان نستطيع من خلالهما تكوين المعادلتين :

المعلومة الأولى : العدد ٢ صفراً للاقتران ن (٢) = ٠ ، ومن خلال تعويض العدد ٢ في قاعدة الاقتران : ن (٢) = ٠ ← ٤ا + ٢ب + ٦ = ٠ ← $\underbrace{٤ا + ٢ب = -٦}_{÷٢}$ ← $\boxed{٢ا + ب = -٣}$ ...(١)

المعلومة الثانية : ن (١) = ٢ نعوض العدد ١ في قاعدة الاقتران ق

ن (١) = ٢ ← أ + ب + ٦ = ٢ ← $\boxed{\text{أ + ب = −٤}}$ . . . (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) ، باستخدام طريقة الحذف أو التعويض (نستخدم الحذف)

٢أ + ب = −٣ ، −١ × (أ + ب = −٤) ← ٢أ + ب = −٣ ، −أ − ب = ٤ ← $\boxed{\text{أ = ١}}$

وبتعويض قيمة أ في معادلة (٢) ← ١ + ب = −٤ ← $\boxed{\text{ب = −٥}}$

إذاً قيمة كل من العددين الحقيقين أ ، ب هما : (أ = ١) ، (ب = −٥)

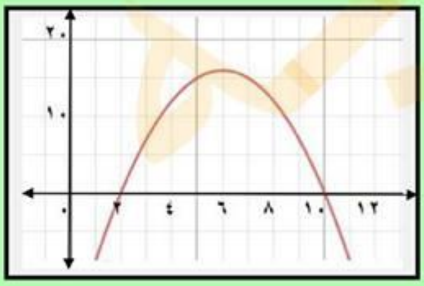
٥) يتغير بعدا مستطيل ، بحيث يبقى محيطه ٢٤ سم ، جد طوله عندما تصبح مساحته ٢٠ سم٢ .

الحل :

- نفرض بعدي المستطيل : الطول = س ،، العرض = ص
- محيط المستطيل = ٢٤ ← ٢س + ٢ص = ٢٤ ← س + ص = ١٢ ← $\boxed{\text{ص = ١٢ − س}}$ . . . (١)
- المساحة (م) = ٢٠ ← م = س ص ← $\boxed{\text{م = س ص = ٢٠}}$ . . . (٢)
- وبتعويض معادلة ١ في معادلة ٢ وكتابة الاقتران بدلالة س

م(س) = س (١٢ − س) − ٢٠ ← $\boxed{\text{م(س) = −س}^{٢}\text{ + ١٢س − ٢٠}}$

- نمثل الاقتران بيانياً



لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

س = ١٠ ،، س = ٢

- عند س = ١٠ ← ص = ٢
- عند س = ٢ ← ص = ١٠

وبما أن الطول أكبر من العرض إذاً : الطول س = ١٠ سم .

٦) أضيف مربع العدد الموجب س إلى العدد ٢٥ وطرح من الناتج ١٠ أمثال س ، وكان ناتج الطرح صفراً ، كيف يمكنك معرفة قيمة س ؟

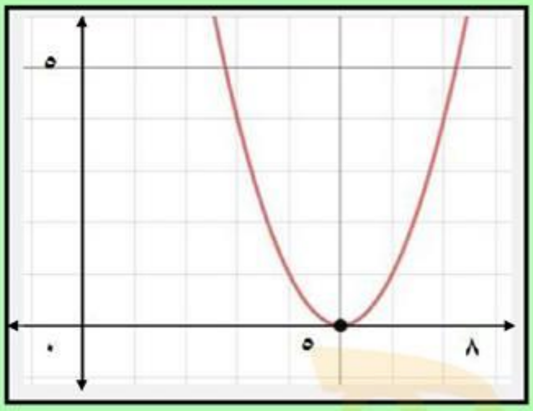
الحل :

العدد س ← مربع العدد س = $س^{٢}$ ،، ١٠ أمثال س = ١٠ س

نكتب المعادلة لفظاً :

مربع العدد س + ٢٥ – ١٠ س = ٠ ← $س^{٢}$ – ١٠س + ٢٥ = ٠

نفرض أن ن(س) = $س^{٢}$ – ١٠س + ٢٥ ونمثل الاقتران بيانياً ، نقطة تقاطع منحناه مع محور السينات هي قيمة س المطلوبة .



لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع

محور السينات عند س = ٥

إذاً قيمة س هي ٥