الدرس الأول :أوتار الدائرة

تذكر ◘ : نصف قطر الدائرة : هي القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة من نقاطها .

◘.الوتر : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة

◘ . القطر : هو وتر الدائرة المار في مركزها ، وهو أطول اوتار الدائرة

◘ . القاطع : هو مستقيم يحتوي على وتر في الدائرة

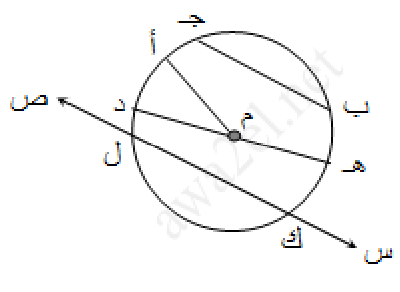
◘ . القوس : هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين منها .

◘المسافة بين نقطتين : هي طول القطعة المستقيمة الواصلة بينهما

◘ . أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم تساوي طول العمود النازل من تلك النقطة إلى ذلك المستقيم.

مثال

في الشكل دائرة مركزها م ، النقط هـ ، م ، د على استقامة واحدة .عين لهذه الدائرة ما يأتي :



1) ثلاثة أنصاف أقطار . 2) قطراً .

3) أربعة أقواس . 4) قاطعاً .

الحل :

1) أنصاف أقطار : المستقيمات : م أ ، م هـ ، م د

2) قطراً : المستقيم هـ د : وهو أطول وتر فيها .

3) أربعة أقواس : ب جـ ، هـ ك ، ك ل ، أ د

4) قاطعاً : المستقيم س ص قاطع للدائرة لاحظ أنه يحتوي على الوتر ك ل .

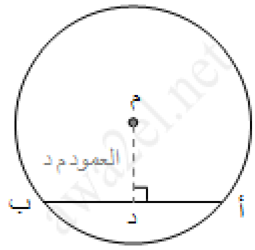
نظرية :

1) العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه .

2) المستقيم الواصل بين مركز دائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يكون عموداً على الوتر .

3) العمود المقام من منتصف وتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .

انظر الشكل المجاور >>



*** الجزء الأول من النظرية : العمود م د النازل من المركز م ينصف الوتر أ ب أي يصبح أ د = د ب**

*** الجزء الثاني من النظرية : إذا كان المستقيم م د ينصف الوتر أب فإن م د يكون عموداً على الوتر .**

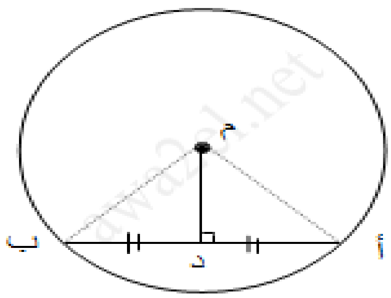
*** الجزء الثالث من النظرية : إذا اقيم عموداّ من منتصف وتر في دائرة فإن هذا العمود سيمر بمركز الدائرة .**

مُلاحظة : جميع أجزاء النظرية الثلاثة مُتشابهة وتؤدي إلى نفس النتيجة

سؤال :

برهن أنّ : المستقيم الواصل بين مركز دائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يكون عموداً على الوتر .

الحل :



نصل م أ ، م ب ثم نبحث في تطابق المثلثين

Δ م د أ و Δ م د ب فيهما :

م أ = م د (أنصاف أقطار)

أ د = د ب (معطيات السؤال)

م د ضلع مشترك بين المثلثين

∴ يتطابق المثلثين بتطابق ثلاثة أضلاع وينتج أنّ :

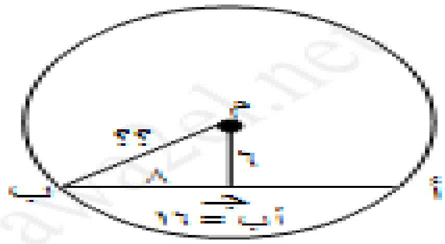
∡ أ د م = ∡ ب د م وهما يقعان على خط مستقيم ، ∴ قياس كل منهما 90°

أي أنّ المستقيم م د عموديًا على الوتر أ ب .. وهو المطلوب .

مثال

أ ب وتر في دائرة مركزها م طوله 16 سم ، جـ منتصف أ ب ، إذا كان م جـ = 6سم ، فما طول نصف قطر الدائرة ؟

الحل :



- **بما أن جـ منتصف أب ، ∴ جـ م عمودياً على أب (نظرية)**

إذن صل م ج ، وصل م ب نصف قطر الدائرة

- **أب = 16 ، جـ منتصف أ ب ==> ج ب = 8 سم**
- **طبق الآن نظرية فيثاغورس ، في Δ م ج ب القائم في جـ فيه :**

(م ب)^2 = (م جـ)^2 + (جـ ب)^2 ==> (م ب)^2 = 6^2 + 8^2 ==> م ب = 10 سم

وهو يمثل نصف قطر الدائرة .

مثال ③ أب وتر في دائرة نصف قطرها ١٣ سم . إذا كان طول العمود النازل من م على الوتر أب = ٥ سم . جد طول أب

الحل : حسب نظرية فيثاغورس

(الوتر)^2 = (الأول)^2 + (الثاني)^2

(١٣)^2 = (٥)^2 + (أ د)^2

١٦٩ = ٢٥ + (أ د)^2

١٦٩ − ٢٥ = (أ د)^2

$\sqrt{١٤٤}$ = $\sqrt{(أ د)^2}$ ⟸ أ د = ١٢ سم وبالتالي أب = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

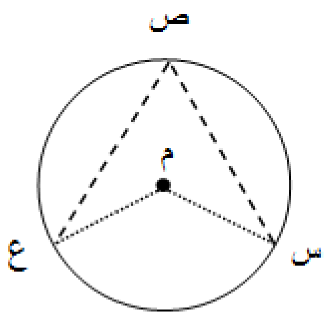
"الزاوية المحيطية والزاوية المركزيه"

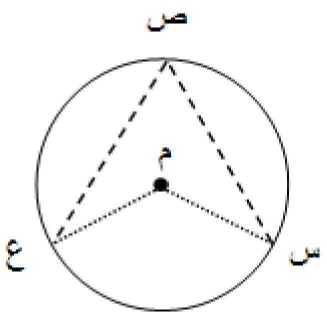
<< **تعريف :**

<u>الزاوية المركزية</u> : هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة .

<u>الزاوية المحيطية</u> : هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها يحتويان على وترين في الدائرة .

انظر الشكل ==>





∡ س م ع زاوية مركزية حيث رأسها في مركز الدائرة .

∡ س ص ع زاوية محيطية لأن رأسها يقع على الدائرة

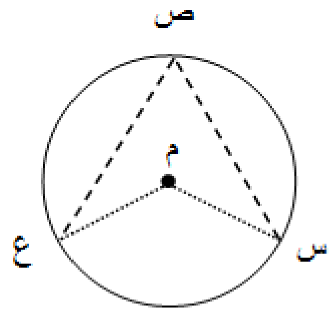
وضلعاها وترين في الدائرة .

(لاحظ ∡ س ص ع ، ∡ س م ع مرسومتان على نفس القوس هو س ع) .

نظرية (1) :

قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرسومة معها على القوس نفسه .

بناءً على النظرية لاحظ الدائرة المرسومة فإن :



- **قياس ∡ المركزية س م ع = 2 ∡ المحيطية س ص ع**
- **وعليه فإن ∡ المحيطية س ص ع = ½ ∡ المركزية س م ع**

لاحظ الزاويتين مرسومتين على نفس القوس س ع

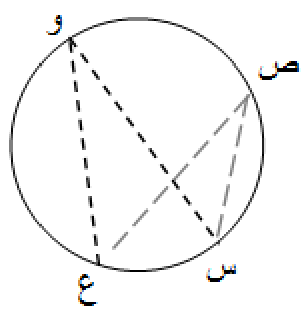
نظرية (2) :

الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد في الدائرة لهما القياس نفسه.

وبصورة عامة :

الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة أو أقواس متطابقة تكون متساوية .

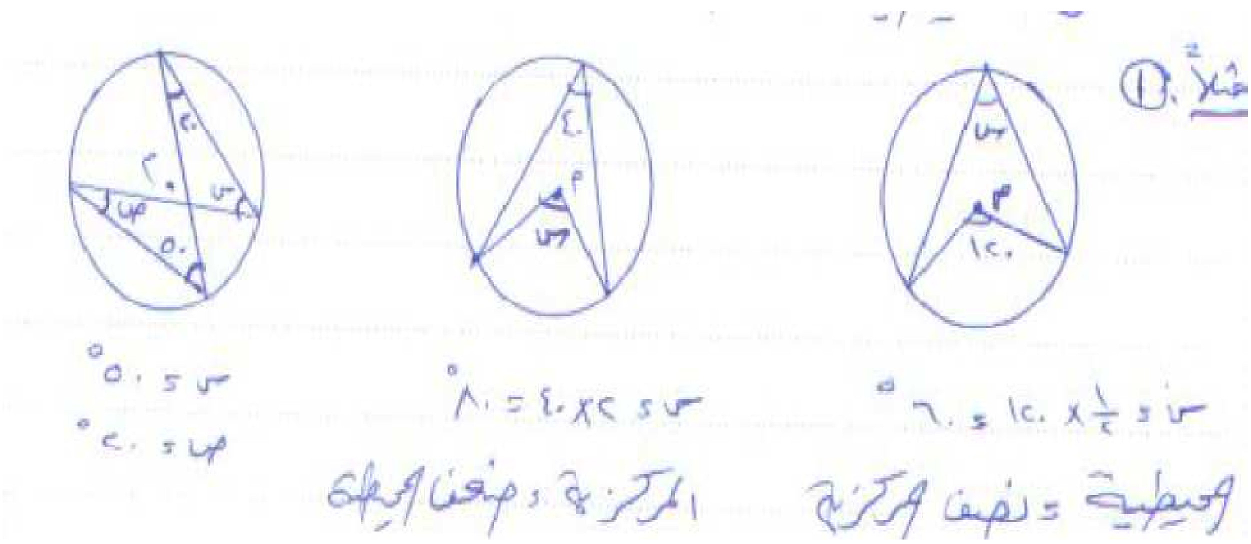
انظر الشكل ==>



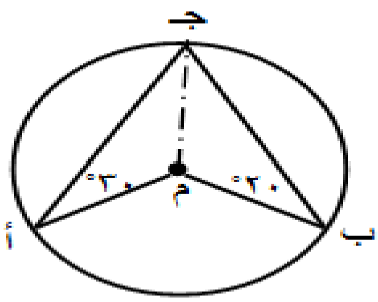
- **لاحظ ∡ المحيطية س ص ع مرسومة على القوس س ص ، وأيضا ∡ س و ع مرسومة على نفس القوس س ص .**

لذا ∡ س ص ع = ∡ س و ع

مثال (1):



مثال (2)



احسب قياس ∡ أ م ب في الشكل إذا كان م مركز الدائرة ، قياس ∡ م أ جـ = 30°وقياس ∡ م ب ج = 20° .

الحل :

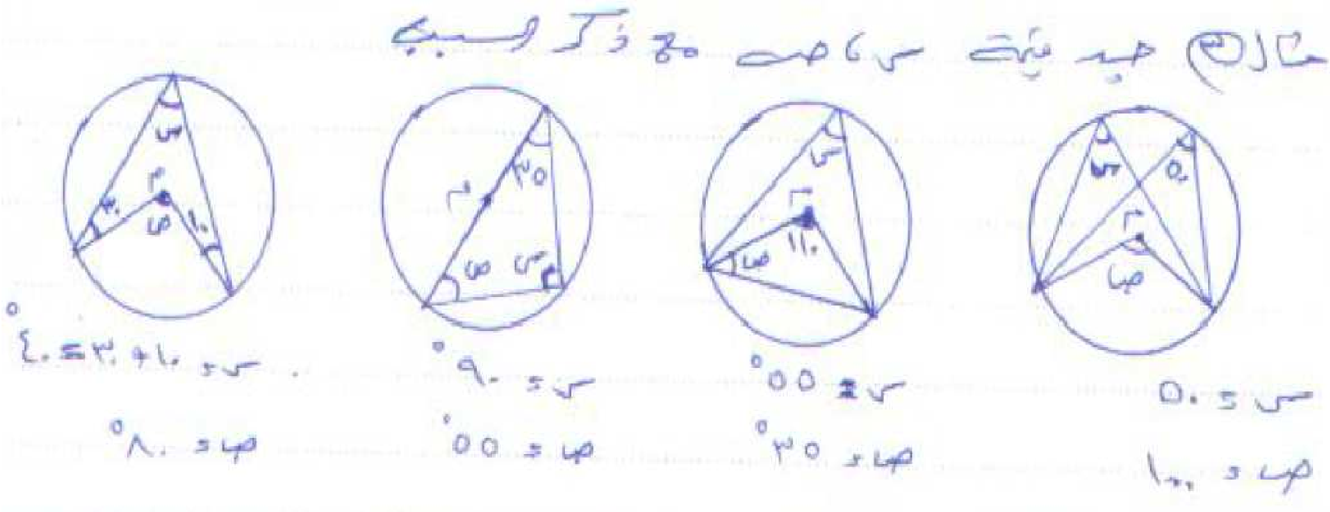
∡ أ م ب (زاوية مركزية) = 2 ∡ أ جـ ب (زاوية محيطية)

- **صل جـ م ، ينتج ∆ ب م جـ متساوي الساقين فيه ب م = م جـ (أنصاف أقطار). وعليه فإن زوايا القاعدة متساوية أي ∡ ب جـ م = ∡ أ م ب = 20° .**

وأيضًا في ∆ أ م جـ ، فإن ∡ م جـ أ = ∡ م أ جـ = 30° .

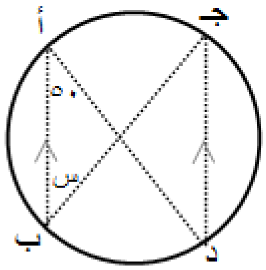
==> ∡ أ جـ ب = 20 + 30 = 50°

∴ ∡ أ م ب = 2 × ∡ أ جـ ب = 2 × 50° = 100° وهو المطلوب .



مثال (4)

في الشكل إذا علمت أنّ قياس ∡ د أ ب = 50° ، أ ب // ج د ، فجد قيمة س .



الحل :

∡ د جـ ب = ∡ د أ ب = 50° (مرسومتان على نفس القوس) .

∡ أ ب جـ = ∡ د جـ ب = 50° (بالتبادل بسبب توازي المستقيمين أ ب ، جـ د)) .

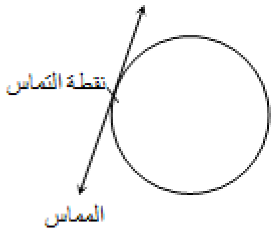
∴ ∡ س = 50°

مماسات الدائرة

مماس الدائرة : هو ذلك المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط .

- وتسمى هذه النقطة نقطة التماس .

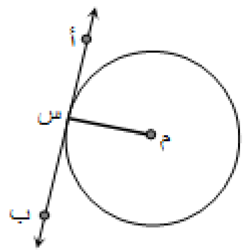
انظر الشكل <<



<< نـــظـــريـــة (1)

مماس الدائرة في نقطة ما عليها يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس .

انظر الشكل <<



<< مماس الدائرة أ ب عمودي على نصف القطر م س المار بنقطة التماس س .

أي أن ∡ أ س م ، ∡ ب س م قوائم .

<< نـــظـــريـــة (2)

المستقيم الذي يعامد نصف قطر الدائرة عند نهايته يكون مماساً للدائرة

****لاحظ هذه النظرية هي عكس النظرية السابقة ، وتعني نفس المفهوم .**

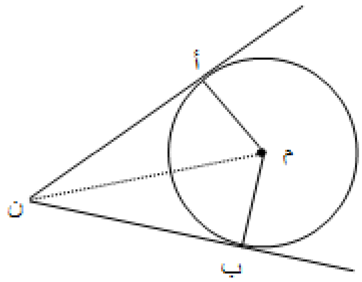
>> نـــظـــريـــة (3)

إذا رُسم مماسان لدائرة من نقطة خارجها فإنّ :

1) القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان نقطتي التماس مع نقطة تلاقي المماسين متطابقان .

2) المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ونقطة تلاقي المماسين ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين وينصف الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين المارين بنقطة التماس .

***** وهذه النظرية هي استنتاج من تطابق المثلثين أ م ن ، ب م ن**



سؤال : اثبت تطابق المثلثين أ م ن ، ب م ن

- **م ب = م أ (أنصاف أقطار في الدائرة) .**
- **م ن ضلع مشترك بين المثلثين .**
- **∡ ن أ م = ∡ ن ب م (زاويتين قائمتين ، بحسب نظرية (1) مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس) .**

∴ ينطبق المثلثان ن أ م ، ن ب م بضلعين وزاوية . ونستنتج أن :

الجزء الأول من النظرية

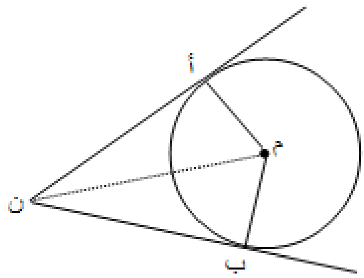
أ ن = ب ن وهما القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان نقطتي التماس مع نقطة تلاقي المماسين .

الجزء الثاني من النظرية

من التطابق ينتج أنّ ∡ أ ن م = ∡ ب ن م ، وأيضا ∡ أ م ن = ∡ ب م ن

سؤال :

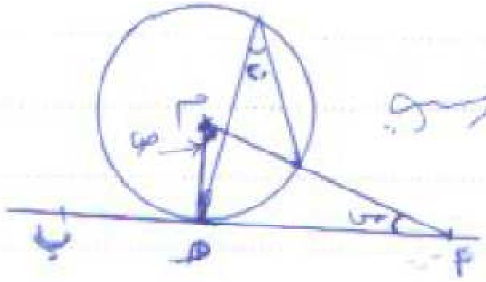
رُسم من نقطة ن خارج دائرة مركزها م المماسان ن أ ، ن ب كما في الشكل ورُسم م أ ، م ب ، م ن ، أثبت تطابق المثلثين ن أ م ، ن ب م



الحل :

- م ب = م أ (أنصاف أقطار في الدائرة) .
- م ن ضلع مشترك بين المثلثين .
- ∢ ن أ م = ∢ ن ب م (زاويتين قائمتين بحسب نظرية (1) مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس) .

∴ ينطبق المثلثان ن أ م ، ن ب م بضلعين وزاوية .



سؤال ① جد قيمة س، ص مع ذكر السبب

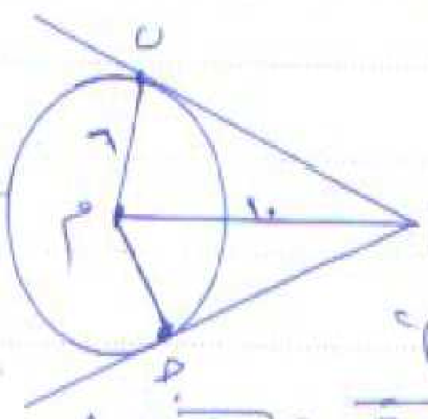
الحل: ص = ٢ × ٢٠ = ٤٠

لأنها مركزية وتساوي ضعف المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

لاحظ أن م هـ جـ مثلث قائم في هـ لأن نصف القطر يمر في نقطة التماس ⇐ عمودي على المماس.

⇐ س = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠°

سؤال ② $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{أد}$ مماسان لدائرة مركزها م حيث أم = ١٠ سم، م ب = ٦ سم جد طول أب، أد.



الحل: أ م ب مثلث قائم الزاوية في ب لأن نصف القطر عمودي على المماس في نقطة التماس

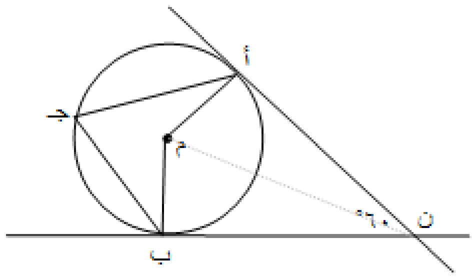
لذلك حسب فيثاغورس: $(أم)^2 = (م ب)^2 + (أ ب)^2$

$(١٠)^2 = (٦)^2 + (أب)^2$ ⇐ أب = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$

أد = أب = ٨ سم (حسب النظرية)

مثال 3:

ن أ ، ن ب مماسان لدائرة مركزها م ، كما في الشكل قياس ∠ أ ن ب = 60˚ ، جـ نقطة على القوس أ ب الأكبر



جد قياس كل من ∠ أ م ب ، ∠ أ جـ ب .

الحل :

صل م ن ، ∠ أ ن م = ∠ ب ن م = 30˚ (نظرية 3)

∠ ن أ م = 90˚ قائمة (نظرية 1) ، ∠ ن ب م = 90˚ قائمة (نظرية 1)

∠ أ م ن = ∠ ب م ن = 180˚ - (90˚ + 30˚) = 60 ˚

∴ ∠ أ م ب = 2 × 60 ˚ = 120 ˚

∠ أ جـ ب = ½ ∠ أ م ب (محيطية ومركزية) ، أي أن ∠ أ جـ ب = 60˚

مثال:

مست دائرة مركزها م مستقيمين متوازيين في أ ، ب ثم رسم مماس ثالث للدائرة فقطع المتوازيين في جـ ، د . أثبت أنّ قياس ∠ جـ م د = 90˚ .

الحل :

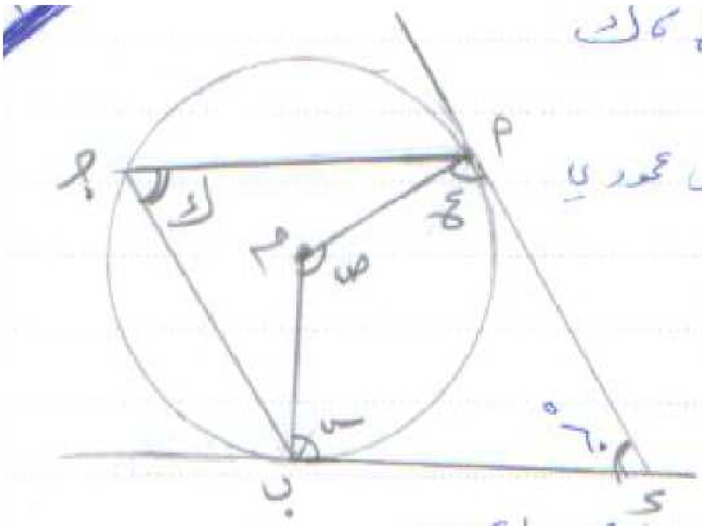
- ∠ أ جـ د + ∠ ب د جـ = 180˚ (متحالفتان داخل متوازيين وقاطعهما)
- ∠ 1 = ½ ∠ أ جـ د (نظرية (3) لأن م جـ ينصف ∠ أ جـ د)
- ∠ 2 = ½ ∠ ب د جـ (نظرية (3))

ومنه نستنتج أن في Δ جـ م د :

∠ 1 + ∠ 2 = ½ (∠ أ جـ د + ∠ ب د جـ) = ½ × 180˚ = 90˚

==> ∠ جـ م د = 180 - (∠ 1 + ∠ 2) = 180 – 90 = 90˚ .. وهو المطلوب .

مثال (٣) جد قيمة س، ص، ع، ك
في الشكل المجاور



الحل: س = ٩٠° لأن نصف القطر عمودي على المماس

ع = ٩٠° لنفس السبب

ص = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠)

= ٣٦٠ − ٢٤٠

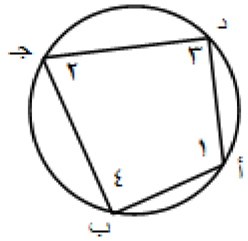
= ١٢٠ مجموع قياسات زوايا الرباعي

ك = ½ × ١٢٠ = ٦٠° المحيطية = نصف المركزية

مثال (٤) في الشكل السابق إذا كان نصف قطر الدائرة يساوي (٦سم) وطول د أ = ٦√٣ ، جد طول د م . ((الجواب : ١٢سم))

"الشكل الرباعي الدائري"

**إذ أمكن رسم دائرة تمر بالنقط أ ، ب ، جـ ، د التي ليس فيها ثلاث على استقامة واحدة ، فإن الشكل الرباعي أ ب جـ د يُسمى شكل رباعي دائري .



(انظر الشكل) <=

نظرية (1)

مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتيـن في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

في الشكل السابق : وبحسب النظرية فإن :

قياس ∡ 1 + قياس ∡ 2 = 180°

وقياس ∡ 3 + قياس ∡ 4 = 180°

نظرية (2)

إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي 180° ، كان هذا الشكل رباعياً دائرياً .

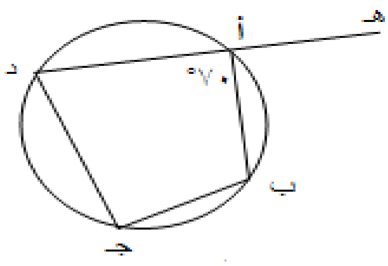
تعريف : إذا مُدّ أحد أضلاع الشكل الرباعي على استقامته ، سُميت الزاوية المحصورة بين امتداد هذا الضلع والضلع المجاور له ، <u>الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي</u> .

نظرية (3)

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية المقابلة للمجاورة لها .

مثال (1)

أ ب جـ د رباعي دائري فيه قياس ∠ أ = 70° ، مُدَّ د أ إلى هـ ، جد قياس كل من : ∠ ب جـ د ، ∠ ب أ هـ



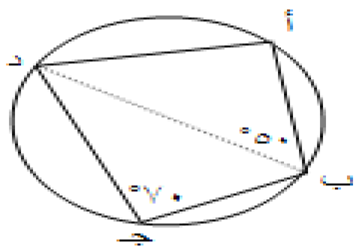
الحل :

∠ ب جـ د = 180° - 70° = 110° (زاويتين متقابلتين في شكل رباعي دائري)

∠ ب أ هـ = 180 - 70 = 110° (زاويتين متجاورتين على خط مستقيم)

مثال (2)

أ ب جـ د شكل رباعي فيه قياس ∠ ب جـ د = 70° ، قياس ∠ أب د = 50°



جد قياس ∠ أ د ب التي تجعل أ ب جـ د شكلاً رباعياً دائرياً .

الحل :

صلْ ب د

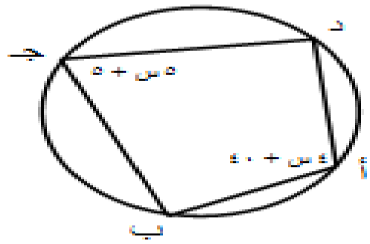
∠ ب أ د = 180° - 70° = 110° (لأن الشكل أ ب جـ د رباعي)

مجموع زوايا المثلث أ ب د = 180°

∴ قياس ∠ أ د ب = 180° - (110° + 50°) = 180° - 160° = 20°

مثال (3)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه قياس ∡ أ = 4س + 40° ، وقياس



∡ جـ = 5س + 5° ، جد قيمة س بالدرجات ، ثم جد قياس كل من ∡ أ ، ∡ جـ .

الحل :

بما أن الشكل رباعي دائري

∴ قياس ∡ أ + قياس ∡ جـ = 180°

أي : 4س + 40 + 5س + 5 = 180 وبحل المعادلة ينتج :

9س + 45 = 180 ==> 9س = 135 ومنها س = 15°

∡ أ = 4س + 40 ==> قياس ∡ أ = 4 × 15 + 40 = 100°

∡ ب = 5س + 5 ==> قياس ∡ ب = 5 × 15 + 5 = 80°

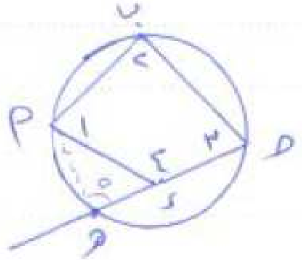
مثال ① جد قيمة س ، ص

الحل: س = ١٨٠ - ١٢٠ = ٦٠°

ص = ١٨٠ - ١٠٠ = ٨٠°

مثال ② إذا كان مجموع قياس زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي ١٨٠° فإن هذا الشكل رباعياً دائرياً. أثبت ذلك

الحل: نكمل أ ب جـ د حالة رباعية



ق∠أ + ق∠جـ = ١٨٠°

∠١ + ∠٣ = ١٨٠°

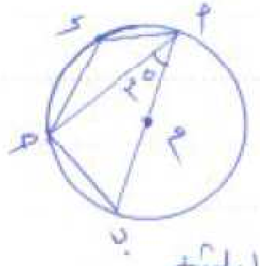
كذلك ∠٢ + ∠٤ = ١٨٠° أيضاً

لكن ق∠٢ + ق∠٥ = ١٨٠° لأنها متقابلتان في شكل رباعي دائري

⟸ ∠٤ = ∠٥ وهذا يعني أن (د) هي نفسها (هـ).

⟸ أ ب جـ د رباعي دائري

مثال ③ أ ب جـ د شكل رباعي دائري بحيث أب قطر الدائرة إذا كان ق∠ب أ جـ = ٣٥° جد قياس ∠أ د جـ



الحل: ∠أ جـ ب = ٩٠° لأنها محيطية تقابل قطراً

∠ب = ١٨٠ - (٣٥ + ٩٠)

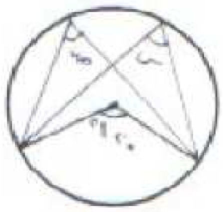
= ١٨٠ - ١٢٥

= ٥٥°

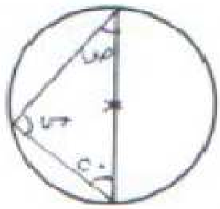
∠أ د جـ = ١٨٠ - ٥٥ لأن ∠د ، ∠ب متقابلتان في رباعي دائري ⟸ مجموعهما ١٨٠°

= ١٢٥

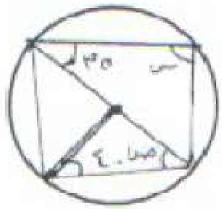
س =
ص =



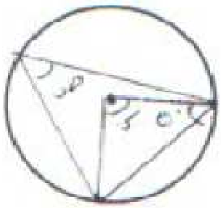
س =
ص =



س =
ص =

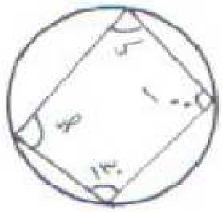


س =
ص =

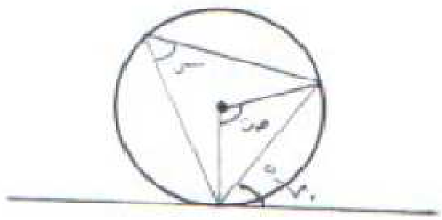


س =
ص =

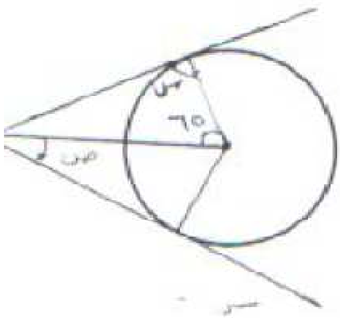
س =
ص =



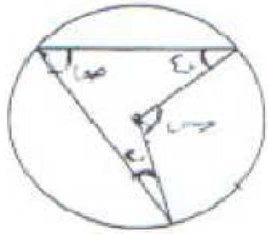
س =
ص =



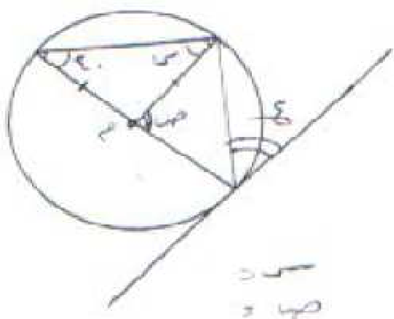
س =
ص =



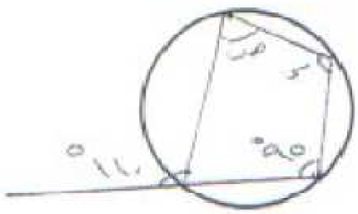
س =
ص =



س =
ص =

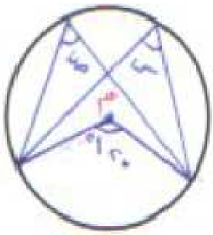


س =
ص =
ع =

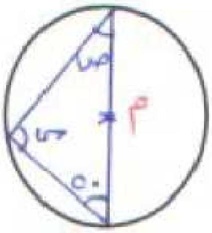


س =
ص =

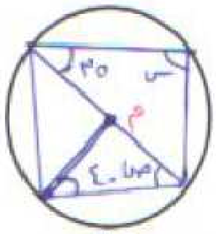
س = ٨٠°
ص = ٥٠°



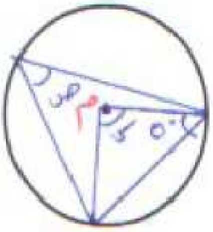
س = ٦٠°
ص = ٦٠°



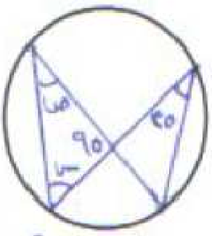
س = ٩٠°
ص = ٤٠°



س = ٩٠°
ص = ٤٠°

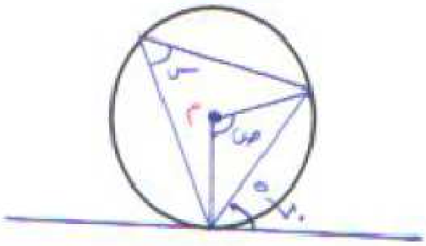


س = ٨٠°
ص = ٤٠°

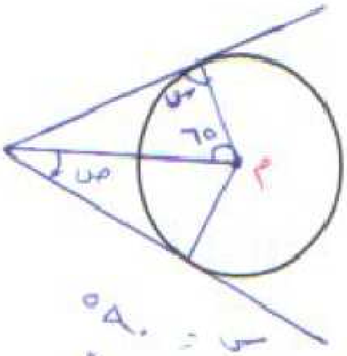


س = ٦٠°
ص = ٢٥°

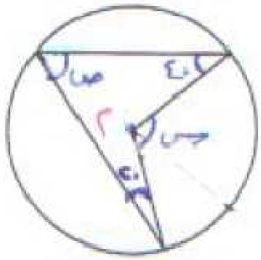
س = ٥٠°
ص = ٨٠°



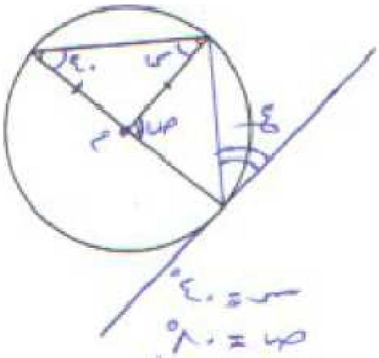
س = ٧٠°
ص = ١٤٠°



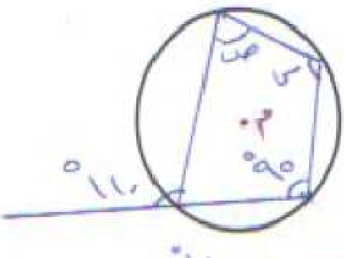
س = ٩٠°
ص = ٢٥°



س = ١٤٠°
ص = ٩٠°



س = ٤٠°
ص = ٨٠°
ع = ٤٠°



س = ١١٠°
ص = ٨٥°