المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف التاسع - دليل المعلم

الفصل الدراسي الثاني

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   يوسف سليمان جرادات

نور محمد حسان   بيان هاني الكريمين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـررت وزارة التربيــة والتعليــم اســتخدام هــذا الدليــل في مــدارس المملكــة الأردنيــة الهاشــمية جميعهــا، بنــاء عــلى قــرار المجلــس الأعــلى للمركــز الوطنــي لتطويــر المناهــج في جلســته رقــم (2025/4)، تاريــخ 2025/5/6 م، وقــرار مجلــس التربيــة والتعليــم رقــم (2025/122) تاريــخ 2025/6/17 م بــدءًا مــن العــام الــدراسي 2025 / 2026 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 990 - 8

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/6/3032)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات (دليل المعلم): الصف التاسع، الفصل الدراسي الثاني
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	371.3
الواصفات	/ أساليب التدريس/ / طرق التعلم/ / المدرسون/ / الأدلة/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي: أ. د. عـدنـان سليـم عـابـد

التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي: محـمـد صالـح شنيور

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1447 هـ / 2025 م

المقدمة

يســـرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات دليل المُعلِّم للصف التاسع، آملًا أنْ يكون لهم مُرشِدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنســـخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغْني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشـــار إليها في الدروس، ويُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهْد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة»، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَرَوٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشـــادات تســـاعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلًا عن الأخطاء المفاهيمة الشـــائعة والإرشادات التي تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة حول كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تســـاعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم السابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناســـبة، تســـاعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّـــم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي ســـوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

ونحـــن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنـــا وزميلاتنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المطورة

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسرُّنا في هذه المُقدِّمة أنْ نُبيِّن الأسس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوَّرة بطريقة مُبسَّطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلّى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإنّا نأمل أنْ تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوَّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل الغرفة الصفية، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

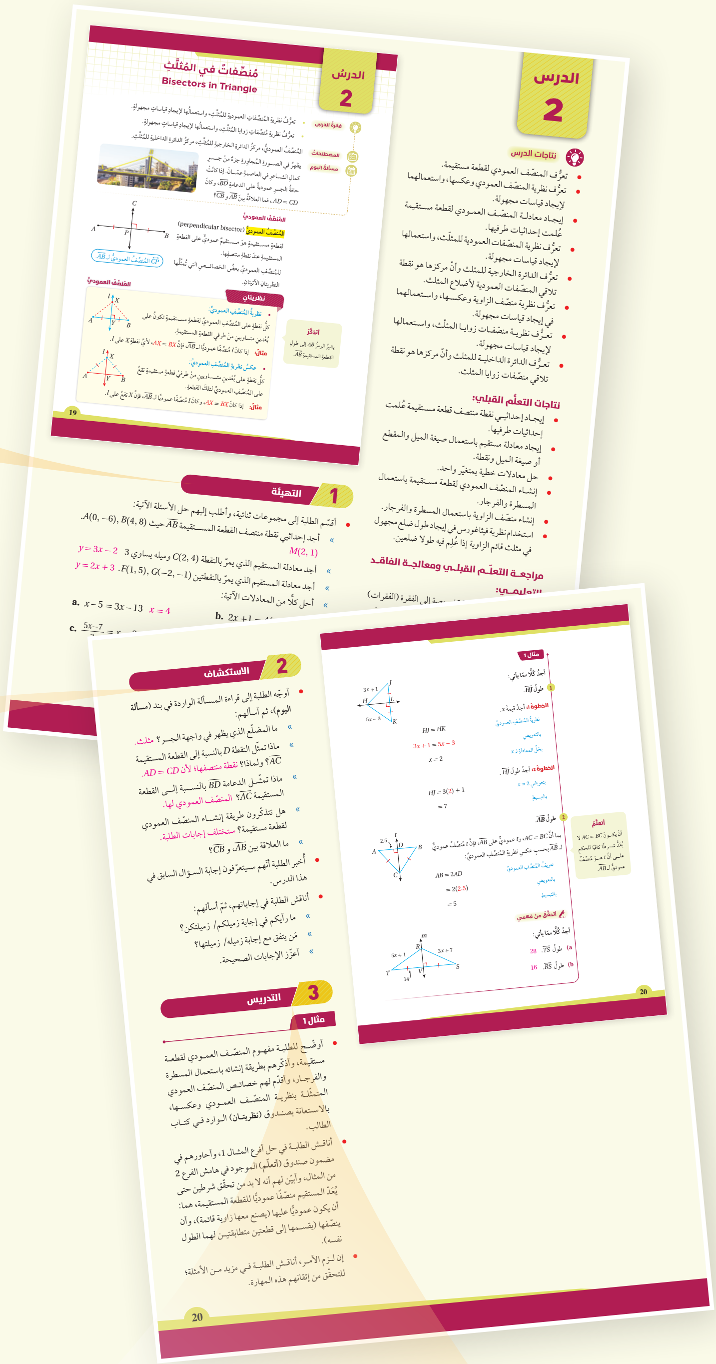
تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم، وأدواته.
   - التقويم القبلي.
   - التقويم التكويني.
   - التقويم الختامي.
3. بعض استراتيجيات التعلُّم:
   - التعلُّم القائم على المشاريع.
   - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
   - الخطوات الأربع لحلِّ المسألة (خطة حلِّ المسألة).
   - التعلُّم بالاستكشاف.
4. مهارات التفكير العليا.
5. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.
7. مراجعة التعلُّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي.
   - مصادر التعلُّم المُيسِّرة لتنفيذ خطة معالجة الفاقد التعليمي.
   - إجراءات معالجة الفاقد التعليمي في كل حصة صفية.

وفي نهاية هذه المُقدِّمة، توجد بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.



1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يُمكِن أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بَدْء الدرس.

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلُّم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا يتعيَّن عليك تقبُّل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، والتحقُّق من صحتها، علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (مسألة اليوم)؛ لحلِّها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم؛ للتمكُّن من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعيَّن الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكُّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

4 التدريب

في هـــذه المرحلة، يتدرَّب الطلبـــة على أنواع مختلفة مـــن المســـائل المجرَّدة والمســـائل الحياتية في بند (أتدرَّب وأحُلّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل الغرفة الصفية؛ لترســـيخ المفاهيم الجديدة، وزيـــادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة فـــي المنزل، وكذلـــك التدريبات والمســـائل الواردة في الصفحة المُقابِلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

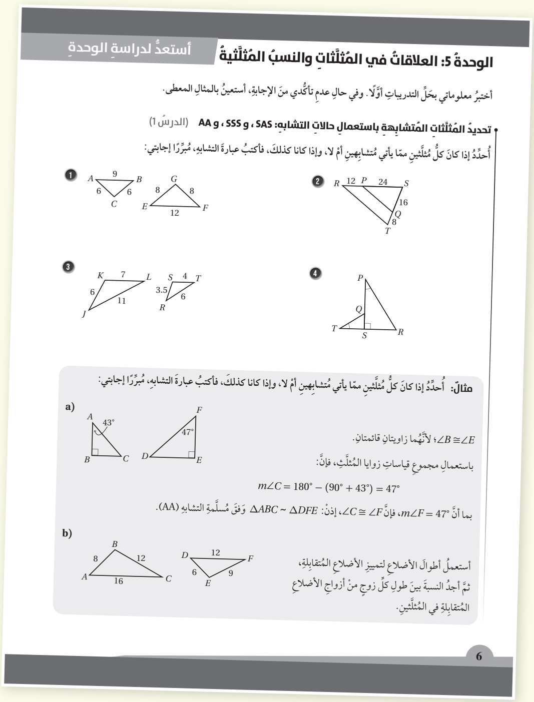
تُعَدُّ توســـعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأســـاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشـــراك الطلبـــة في مهام تتضمَّـــن مفاهيم وعمليات أوســـع وأكثـــر عمقـــا. تُوفِّر مناهج الرياضيات المُطوَّرة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بند الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مســـألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاســـوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الـــذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

هـي المرحلـة الأخيـرة مـن مراحـل تقديـم الـدرس، وتهـدف إلـى تجميـع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنهـا الـدرس، ثـم عرضهـا بصـورة مترابطـة، فضلًا عن اشـتمالها علـى مقترحات تسـاعد على تقديـم هـذه المرحلـة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي.**



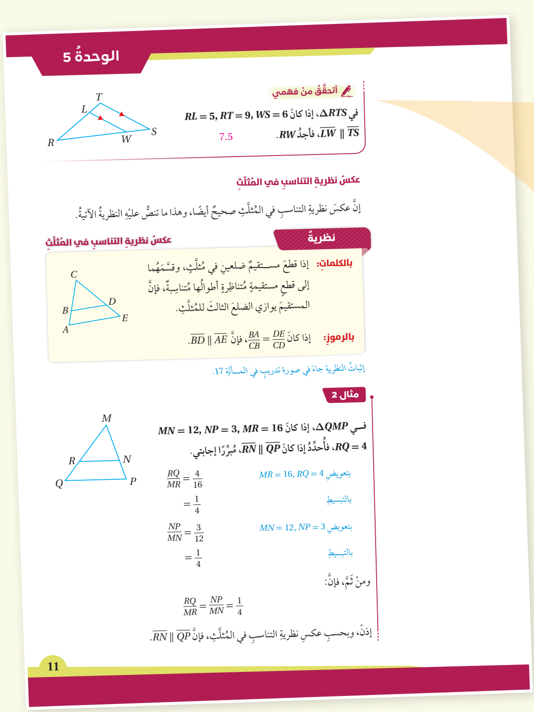
أ التقويم القبلي:

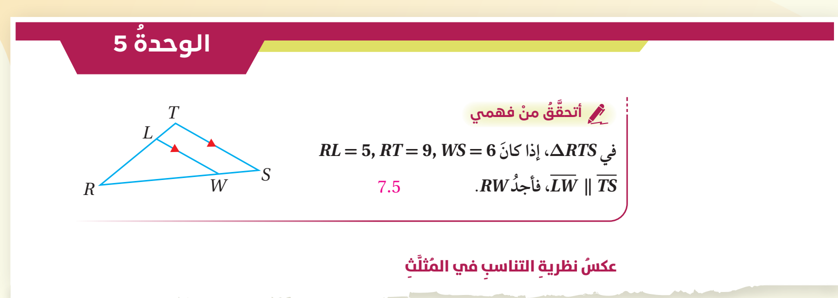
يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلُّم الطلبة أوَّلًا بأوَّل، والتأكُّد أنَّ العملية التعليمية التعلُّمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنَّه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. أمّا أبرز أدوات التقويم التكويني فهي: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.

تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل بند (أتحقَّق من فهمي) التي تلي كل مثال.

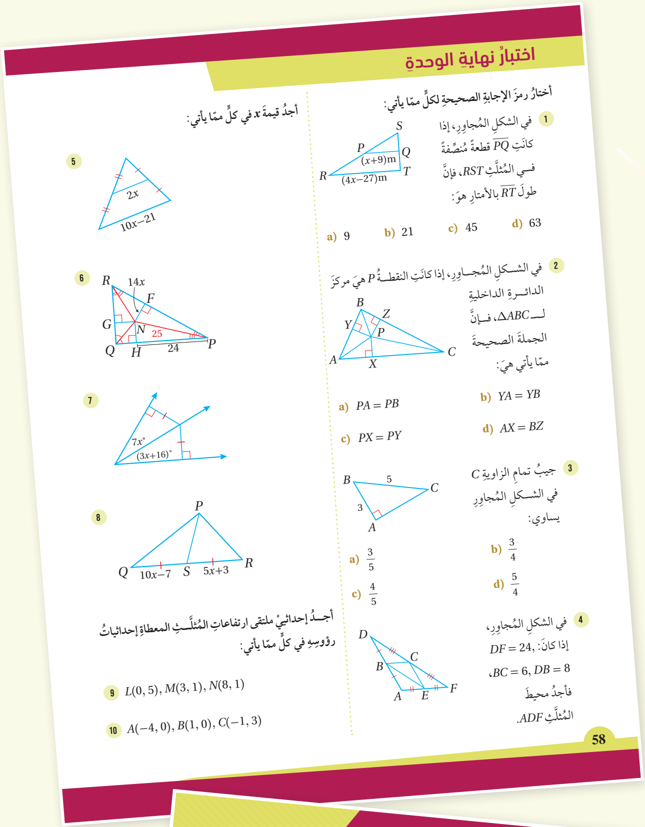




ج التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي قُدِّمت لهم.

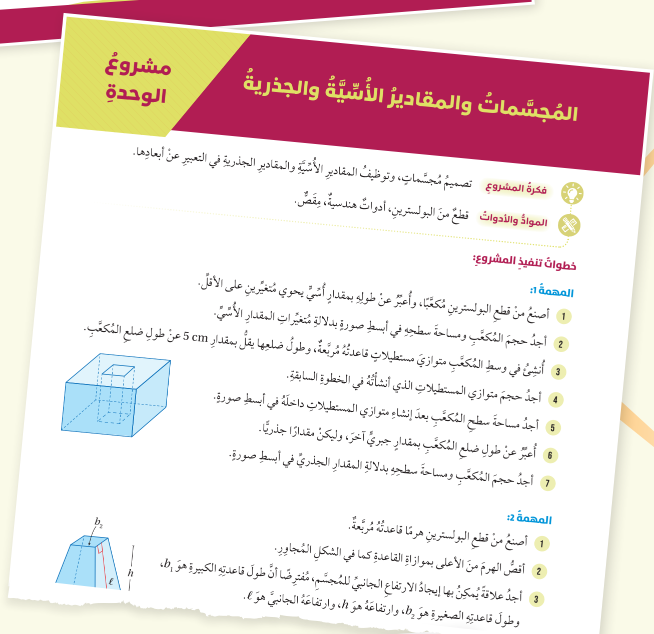
تُوفِّر المناهج المُطوَّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في بند (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.



3 بعض استراتيجيات التعلُّم:

أ التعلُّم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلُّم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلُّم الحديثة التي تجمع بين المعرفة والتطبيق؛ إذ يُمكِن للطلبة دراسة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم تطبيقها في حلِّ مشكلات حقيقية، وصولًا إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفِّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحمُّل المسؤولية، وتُعِدُّهم للحياة، وتحثُّهم على العمل والإنتاج.



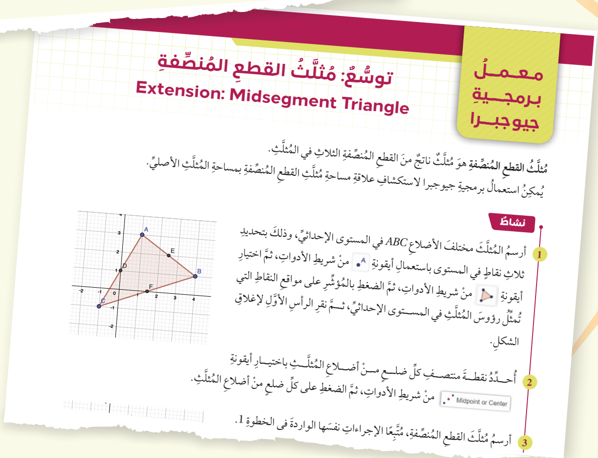
نشاط التكنولوجيا

أوضِّح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد مركز أي مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات المُبيَّنة في صندوق **(الدعم البياني)** الوارد في كتاب الطالب صفحة 34، وأطلب إليهم اتباع تلك الخطوات لإعادة حل المثال 2 باستعمال البرمجية.

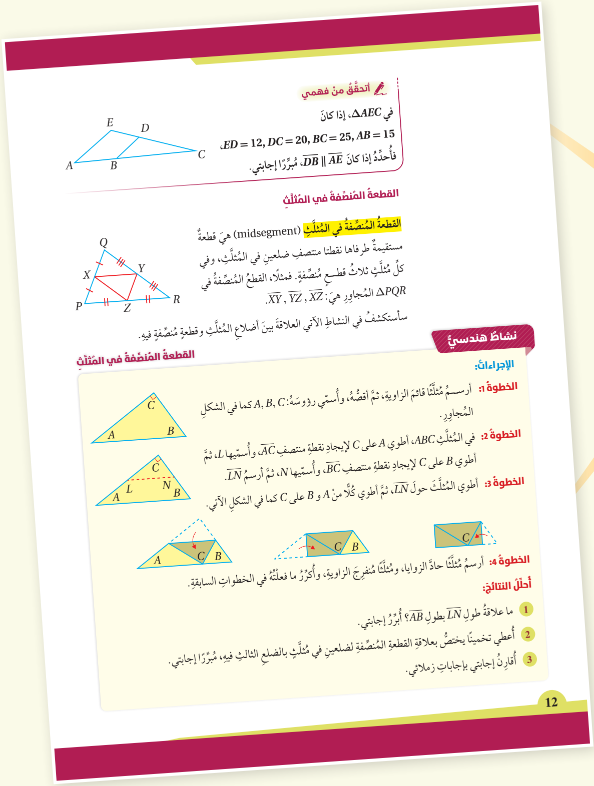
ب التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.

تُسهِم التكنولوجيا إسهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمُّل والتحليل والتفكير بدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنح أدلة المُعلِّم في مناهج الرياضيات المُطوَّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.



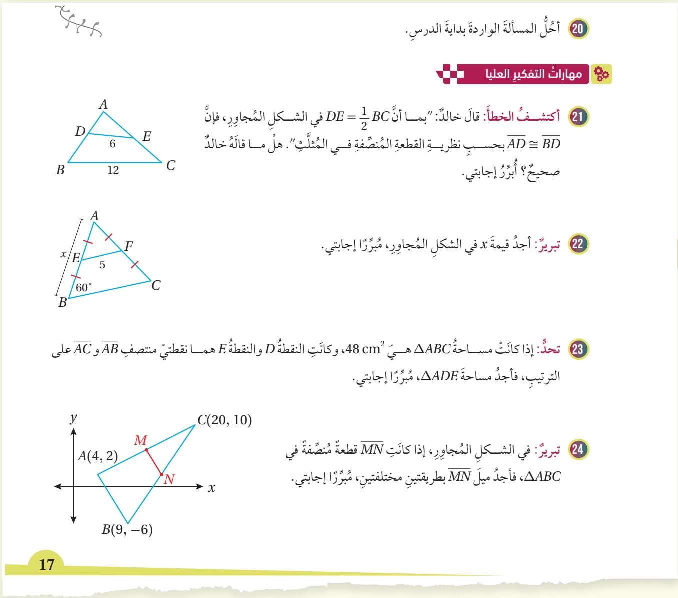
ج التعلُّم بالاستكشاف.



التعلُّم بالاستكشاف نموذج تعليمي يعمل فيه الطلبة على معالجة المعلومات، وتركيبها، وتحويلها، وصولًا إلى معلومات جديدة باستعمال نشاط مفاهيمي يتضمَّن عمليات الاستقراء، أو الاستنباط، أو أيِّ طريقة أُخرى. يمتاز هذا النوع من التعلُّم بتحفيز الطلبة، وإثارة حماسهم، وزيادة دافعيتهم إلى التعلُّم، بما يُوفِّره لهم من تشويق أثناء اكتشافهم المعلومات باستعمال الأدوات التكنولوجية، أو المحسوسات، أو غير ذلك.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطبيق هذا النموذج؛ فهي تحوي أنشطة مفاهيمية خاصة تسبق بعض الدروس.

4 مهارات التفكير العليا:



تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتاجات الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

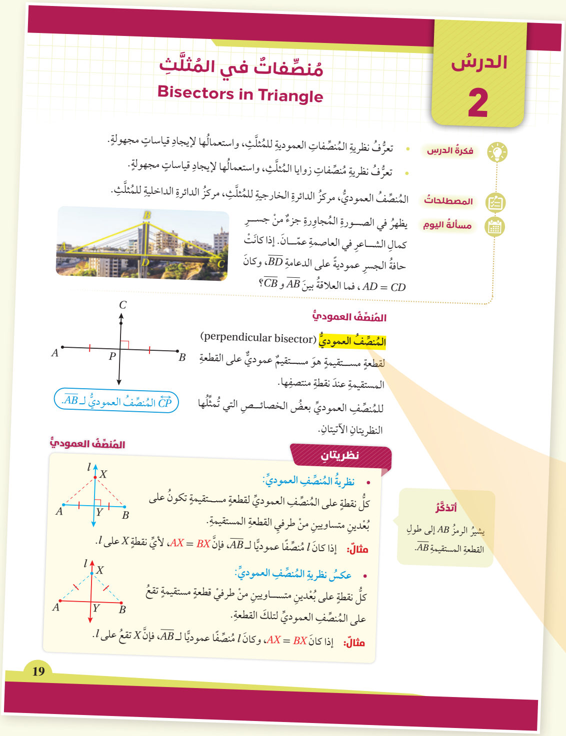
تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

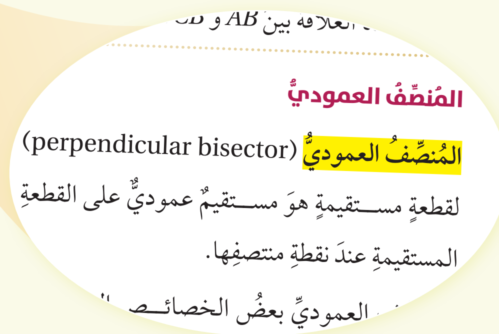
مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.





5 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:

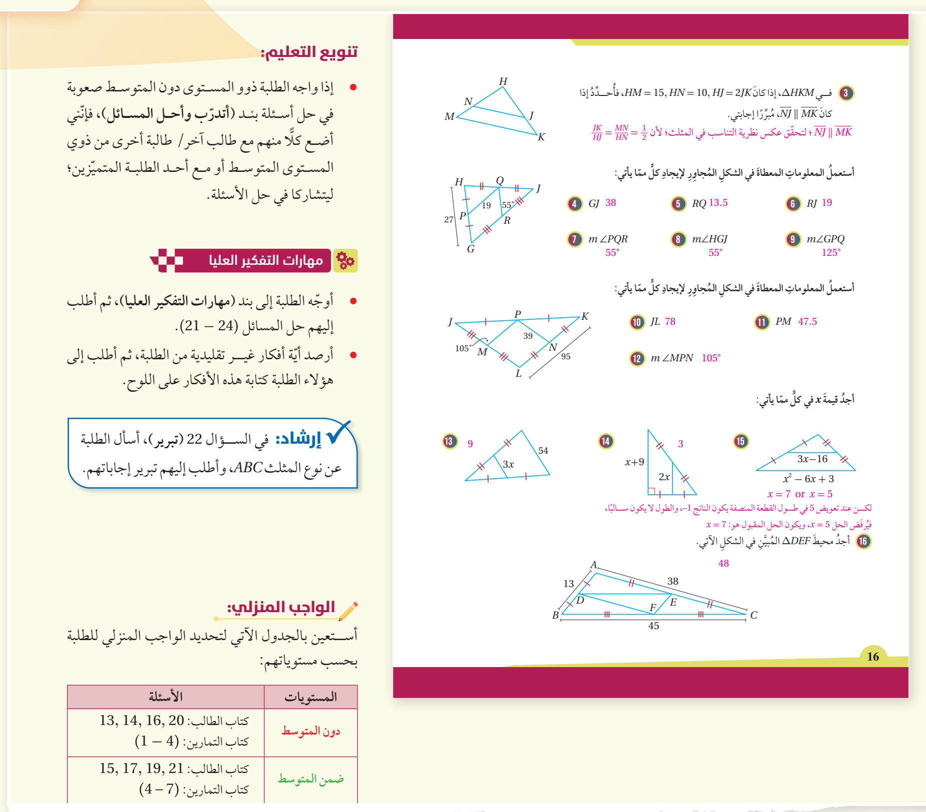
تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أوَّل مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كلٍّ منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوُّق لديهم.

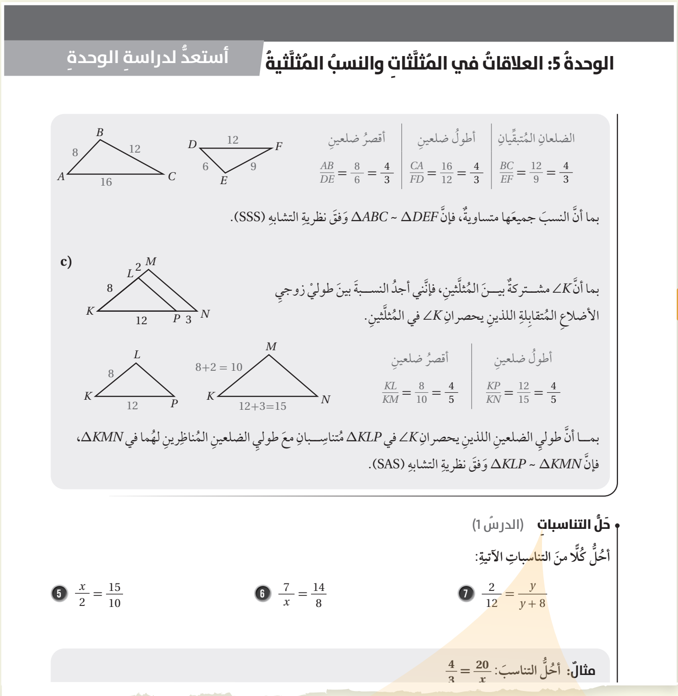
تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.



7 مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

أولًا: مصادر التعلُّم المُيسِّرة لتنفيذ خطة معالجة الفاقد التعليمي


الوحدةُ 5: العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

الضلعانِ المُتبقِّيانِ	أطولُ ضلعينِ	أقصرُ ضلعينِ
$\frac{BC}{EF}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$	$\frac{CA}{FD}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$	$\frac{AB}{DE}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

بما أنَّ النسبَ جميعَها متساويةٌ، فإنَّ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وَفقَ نظريةِ التشابهِ (SSS).

c) بما أنَّ $\angle K$ مشتركةٌ بينَ المُثلَّثينِ، فإنَّني أجدُ النسبةَ بينَ طوليْ زوجيِ الأضلاعِ المُتقابِلةِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في المُثلَّثينِ.

أطولُ ضلعينِ	أقصرُ ضلعينِ
$\frac{KP}{KN}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$\frac{KL}{KM}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

بما أنَّ طولَي الضلعينِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في ΔKLP مُتناسِبانِ معَ طولَي الضلعينِ المُناظِرينِ لهُما في ΔKMN، فإنَّ $\Delta KLP \sim \Delta KMN$ وَفقَ نظريةِ التشابهِ (SAS).

حَلُّ التناسباتِ (الدرسُ 1)

أحُلُّ كُلًّا منَ التناسباتِ الآتيةِ:

5) $\frac{x}{2}=\frac{15}{10}$ 6) $\frac{7}{x}=\frac{14}{8}$ 7) $\frac{2}{12}=\frac{y}{y+8}$

مثالٌ: أحُلُّ التناسبَ: $\frac{4}{3}=\frac{20}{x}$

أ صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين.

يشتمل كتاب التمارين على صفحات تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة)، وهي تساعد الطلبة على تذكُّر ما درسوه في صف سابق أو صفين سابقين، وتحوي فقرات يُعالِج كلٌّ منها مفهومًا رياضيًّا مختلفًا، يرتبط بدرس مُحدَّد في كتاب الطالب.

حَلُّ التناسباتِ (الدرسُ 1)

ب أوراق العمل الداعمة

تهدف أوراق العمل الداعمة إلى معالجة المفاهيم الرياضية البسيطة التي تُعَدُّ أساسًا للتعلُّم الحالي، علمًا بأنَّ الطلبة درسوها في صفوف بعيدة زمنيًّا عن صفهم الآن.

بُنِيَت أوراق العمل الداعمة بطريقة مُشابِهة لصفحات (أستعد لدراسة الوحدة)؛ تسهيلًا على كلٍّ من المُعلِّمين/ المُعلِّمات والطلبة؛ الذين اعتادوا هذا النمط.

جـ دليل المعلم

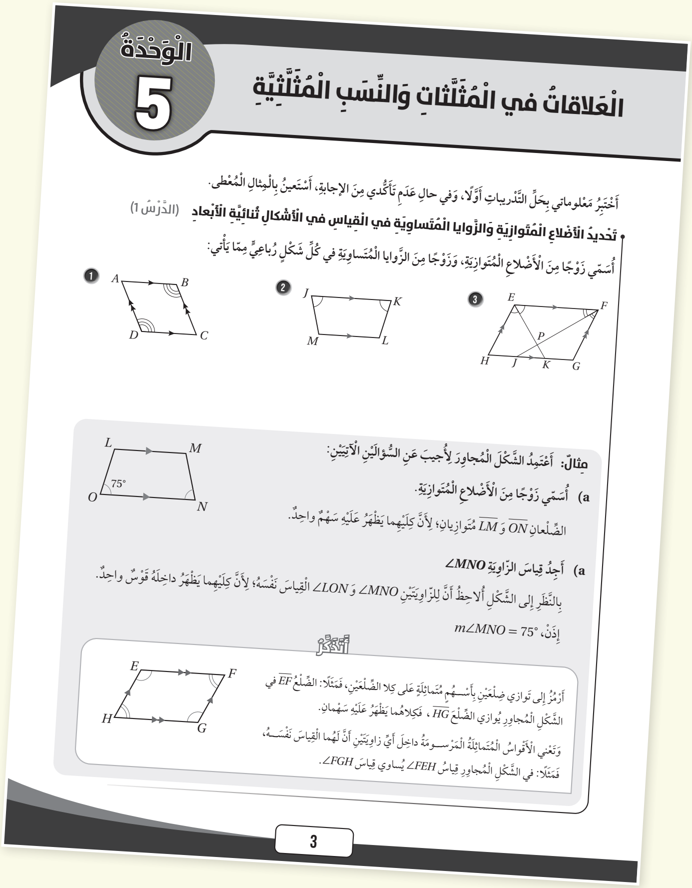
يقدّم دليل المعلم في مبحث الرياضيات إرشادات تفصيلية لإجراءات معالجة الفاقد التعليمي في الحصّة الصفّيّة بطريقة تضمن استمرار تدريس الكتاب المدرسي في كل حصة؛ بوصفه مصدرًا أساسيًّا للتعلُّم، مع الحرص على تمكين الطلبة جميعهم وبمختلف مستوياتهم من اللحاق بالتعلم الحاليّ في أسرع وقت ممكن.

أمسح الرمز المجاور للحصول على نسخة إلكترونية من كتيب أوراق العمل الداعمة.

ثانيًا: إجراءات معالجة الفاقد التعليمي في كل حصة صفية

- يحدد المعلم/ المعلمة من كُتيّب أوراق العمل الداعمة الفقرات المرتبطة بنتاجات الدرس التي يُتوقَّع تحقيقها في الحصة القادمة، ويطلب إليهم جميعًا حلّها واجبًا منزليًّا بوصفه اختبارًا تشخيصيًّا؛ لغايات تقييم الطلبة وتحديد مستوياتهم واحتياجاتهم.

- في الدقائق العشر الأولى من الحصة التالية، يتجوّل المعلّم/ المعلّمة بين الطلبة؛ لتحديد الفقرات التي أظهرت حاجتهم إلى التحسين فيها، ويشاركهم بمناقشة الأمثلة المحلولة في تلك الفقرات على اللوح، ثم يطلب إليهم حل التدريبات المرتبطة بتلك الأمثلة.



الْوَحْدَةُ 5

الْعَلاقاتُ في الْمُثَلَّثاتِ وَالنِّسَبِ الْمُثَلَّثِيَّةِ

أَخْتَبِرُ مَعْلوماتي بِحَلِّ التَّدْريباتِ أَوَّلًا، وَفي حالِ عَدَمِ تَأَكُّدي مِنَ الإِجابَةِ، أَسْتَعينُ بِالْمِثالِ الْمُعْطى.

تَحْديدُ الأَضْلاعِ الْمُتَوازِيَةِ وَالزَّوايا الْمُتَساوِيَةِ في الْقِياسِ في الأَشْكالِ ثُنائِيَّةِ الأَبْعادِ (الدَّرْسُ 1)

أُسَمّي زَوْجًا مِنَ الأَضْلاعِ الْمُتَوازِيَةِ، وَزَوْجًا مِنَ الزَّوايا الْمُتَساوِيَةِ في كُلِّ شَكْلٍ رُباعِيٍّ مِمّا يَأْتي:

1 2 3

مِثالٌ: أَعْتَمِدُ الشَّكْلَ الْمُجاوِرَ لِأُجيبَ عَنِ السُّؤالَيْنِ الآتِيَيْنِ:

a) أُسَمّي زَوْجًا مِنَ الأَضْلاعِ الْمُتَوازِيَةِ.

الضِّلْعانِ $\overline{ON}$ وَ $\overline{LM}$ مُتَوازِيانِ؛ لِأَنَّ كِلَيْهِما يَظْهَرُ عَلَيْهِ سَهْمٌ واحِدٌ.

a) أَجِدُ قِياسَ الزّاوِيَةِ $\angle MNO$

بِالنَّظَرِ إِلى الشَّكْلِ أُلاحِظُ أَنَّ لِلزّاوِيَتَيْنِ $\angle MNO$ وَ $\angle LON$ الْقِياسَ نَفْسَهُ؛ لِأَنَّ كِلَيْهِما يَظْهَرُ داخِلَهُ قَوْسٌ واحِدٌ.

إِذَنْ، $m\angle MNO = 75°$

أَتَذَكَّرُ

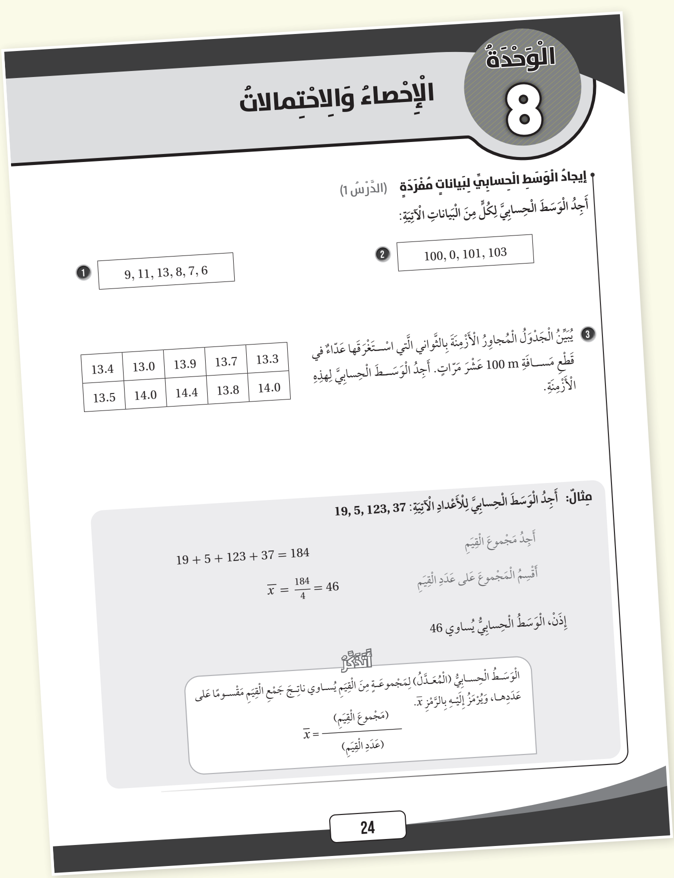
أَرْمُزُ إِلى تَوازي ضِلْعَيْنِ بِأَسْهُمٍ مُتَماثِلَةٍ عَلى كِلا الضِّلْعَيْنِ، فَمَثَلًا: الضِّلْعُ $\overline{EF}$ في الشَّكْلِ الْمُجاوِرِ يُوازي الضِّلْعَ $\overline{HG}$، فَكِلاهُما يَظْهَرُ عَلَيْهِ سَهْمانِ.

وَتَعْني الأَقْواسُ الْمُتَماثِلَةُ الْمَرْسومَةُ داخِلَ أَيِّ زاوِيَتَيْنِ أَنَّ لَهُما الْقِياسَ نَفْسَهُ، فَمَثَلًا: في الشَّكْلِ الْمُجاوِرِ قِياسُ $\angle FEH$ يُساوي قِياسَ $\angle FGH$.

3

- بعد ذلك يوجّه المعلم/ المعلمة الطلبة جميعهم إلى الفقرات المرتبطة بنتاجات الدرس التي يُتوقَّع تحقيقها في الحصة الحالية من صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم حلّ تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية، تحت إشرافه وبمتابعته الحثيثة.

- يتجوّل المعلم/ المعلمة بين الطلبة لمتابعتهم في أثناء الحلّ، وفي حال واجهتهم صعوبة في الحلّ يتم توجيههم إلى الاسترشاد بالمثال المعطى. وإذا أنهى الطلبة ذوو المستويين المتوسط وفوق المتوسط الحلّ، يُطلب إليهم مساعدة زملائهم/ زميلاتهم من ذوي المستوى دون المتوسط؛ تجسيدًا لأسلوب التعلّم بالأقران.



الْوَحْدَةُ 8

الإِحْصاءُ وَالاحْتِمالاتُ

إِيجادُ الْوَسَطِ الْحِسابِيِّ لِبَياناتٍ مُفْرَدَةٍ (الدَّرْسُ 1)

أَجِدُ الْوَسَطَ الْحِسابِيَّ لِكُلٍّ مِنَ الْبَياناتِ الآتِيَةِ:

1 9, 11, 13, 8, 7, 6

2 100, 0, 101, 103

3 يُبَيِّنُ الْجَدْوَلُ الْمُجاوِرُ الأَزْمِنَةَ بِالثَّواني الَّتي اسْتَغْرَقَها عَدّاءٌ في قَطْعِ مَسافَةِ 100 m عَشْرَ مَرّاتٍ. أَجِدُ الْوَسَطَ الْحِسابِيَّ لِهَذِهِ الأَزْمِنَةِ.

13.4	13.0	13.9	13.7	13.3
13.5	14.0	14.4	13.8	14.0

مِثالٌ: أَجِدُ الْوَسَطَ الْحِسابِيَّ لِلأَعْدادِ الآتِيَةِ: 19, 5, 123, 37

أَجِدُ مَجْموعَ الْقِيَمِ $19 + 5 + 123 + 37 = 184$

أَقْسِمُ الْمَجْموعَ عَلى عَدَدِ الْقِيَمِ $\bar{x} = \frac{184}{4} = 46$

إِذَنْ، الْوَسَطُ الْحِسابِيُّ يُساوي 46

أَتَذَكَّرُ

الْوَسَطُ الْحِسابِيُّ (الْمُعَدَّلُ) لِمَجْموعَةٍ مِنَ الْقِيَمِ يُساوي ناتِجَ جَمْعِ الْقِيَمِ مَقْسومًا عَلى عَدَدِها، وَيُرْمَزُ إِلَيْهِ بِالرَّمْزِ $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{(\text{مجموع القيم})}{(\text{عدد القيم})}$$

24

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل الغرفة الصفية؛ فأنت أكثر علمًا بأحوال الغرفة الصفية، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

تُسهِم هذه الاستراتيجية في تعزيز مهارات التعلُّم الذاتي، واستثمار وقت الحصة الصفية بفاعلية، والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بصورة مُكثَّفة. وهي تتيح للمُعلِّم/ للمُعلِّمة إعداد الدروس، وإطلاع الطلبة عليها مُقدَّمًا باستعمال التقنيات الحديثة وشبكة الإنترنت؛ إذ يُمكِن بها إرسال ما هو مطلوب إلى الطلبة من مقاطع مرئية (فيديو)، وملفات صوتية، وغير ذلك من الوسائط، ثم الطلب إليهم الاطلاع عليها في المنزل قبل وقت كافٍ من عرضها في غرفة الصف، عن طريق الوسائل المتوافرة لديهم، مثل: جهاز الحاسوب، والهاتف المحمول، والجهاز اللوحي. ومن ثَمَّ، يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة إعداد أنشطة مُتنوِّعة لتنفيذها في اللقاء الصفي؛ تطبيقًا للمفاهيم التي اكتسبها الطلبة، ومناقشة المحتوى العام للدرس. وتشمل هذه الأنشطة التعلُّم النشط، والاستقصاء، والتجريب، وحلَّ المسائل الرياضية؛ ما يُعزِّز مهارات العمل بروح الفريق، ويساعد على تقييم عملية التعلُّم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة. بعد ذلك يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة رفع اليد، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع اليد يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلب المُعلِّم/ المُعلِّمة الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب مَنْ يقع عليه/ عليها الاختيار عن السؤال، وقد يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكُّن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة
5

العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ
Relationships in Triangles and Trigonometric Ratios

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: الأجزاء المتناسبة في المثلثات	• تعرُّف الأجزاء المتناسبة في المثلث. • تعرُّف نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل. • تعرُّف عكس نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل. • تعرُّف نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.	القطعة المنصّفة في المثلث.	• أدوات هندسية للرسم. • أقلام ملوّنة.	4
معمل برمجية جيوجبرا: توسّع: مثلث القطع المنصّفة	• استكشاف العلاقة بين مساحة مثلث القطع المنصّفة ومساحة المثلث الأصلي باستعمال برمجية جيوجبرا.	مثلث القطع المنصّفة.	• مختبر الحاسوب. • برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 2: منصّفات في المثلث	• تعرُّف المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة. • تعرُّف نظرية المنصّف العمودي وعكسها، واستعمالهما لإيجاد قياسات مجهولة. • إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها. • تعرّف نظرية المنصّفات العمودية للمثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • تعرُّف الدائرة الخارجية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث. • تعرُّف نظرية منصّف الزاوية وعكسها، واستعمالهما في إيجاد قياسات مجهولة. • تعرّف نظرية منصّفات زوايا المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • تعرُّف الدائرة الداخلية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث.	المنصّف العمودي. مركز الدائرة الخارجية للمثلث. مركز الدائرة الداخلية للمثلث.	• أدوات هندسية للرسم. • أقلام ملوّنة. • ورقة المصادر 4	5
نشاط مفاهيمي: القطع المتوسطة في المثلث	• استكشاف العلاقة بين طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث ونقطة توازن المثلث، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة منتصف ضلع المثلث والرأس المقابل لها.		• مثلثات متنوعة من ورق مقوّى.	نصف حصة
الدرس 3: القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث	• تعرُّف القطعة المتوسطة في المثلث، ومركز المثلث. • تعرُّف نظرية مركز المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة. • إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه. • تعرُّف ارتفاع المثلث وملتقى ارتفاعاته. • إيجاد ملتقى ارتفاعات المثلّث في المستوى الإحداثيّ.	القطعة المتوسطة للمثلث. مركز المثلث. ارتفاع المثلث. ملتقى ارتفاعات المثلث.	• لوح رسم بياني. • ورقة المصادر 5	4
نشاط مفاهيمي: النسب المثلثية	• استقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلّثات ذات الزوايا القائمة.		• أدوات هندسية للرسم. • ورقة المصادر 3	نصف حصة
الدرس 4: النسب المثلثية	• تعرّف جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلث قائم الزاوية. • إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة المرسومة في مثلث قائم الزاوية عُلم قياس اثنين من أضلاعه على الأقل. • استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزوايا حادة عُلم قياسها. • استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية عُلمت إحدى نسبها باستعمال معكوس تلك النسبة. • استعمال متطابقة فيثاغورس لإيجاد جيب الزاوية أو جيب تمامها إذا عُلمت إحداهما. • استعمال العلاقة بين النسب المثلثية للزوايا المتتامة لإيجاد نسب مجهولة.	النسبة المثلثية. الجيب. جيب التمام. الظل. معكوس النسبة المثلثية. متطابقة فيثاغورس.	• آلة حاسبة علمية. • أقلام تلوين.	4
الدرس 5: تطبيقات النسب المثلثية	• استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية. • إيجاد قياسات زوايا مجهولة في المثلث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية ومعكوساتها. • استعمال النسب المثلثية للزوايا الخاصة $30°, 45°, 60°$ لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية. • استعمال زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لإيجاد قياسات مجهولة في مثلث قائم الزاوية.	زاوية الارتفاع. زاوية الانخفاض.	• آلة حاسبة علمية. • أقلام تلوين. • ورقة المصادر 6	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				25 حصة

الوحدة 5

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة نظريات هندسية تخصّ المثلثات وقطع مستقيمة خاصة فيها، وسيستعملون هذه النظريات لإيجاد قياسات مجهولة في المثلثات، وسيتعرّفون مركز الدائرة الخارجية، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، وملتقى القطع المتوسطة فيه وملتقى ارتفاعاته، ويحدّدون هذه النقاط يدويًّا وباستعمال التكنولوجيا.

إضافة إلى ما سبق، سيتعرّف الطلبة النسب المثلثية للزوايا الحادة (جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها) بوصفها نسبًا بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، ويوظفون النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة وقياسات زوايا مجهولة في مثلثات قائمة الزاوية. وسيستعملون زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لحل مسائل حياتية وإيجاد مسافات يصعب قياسها بصورة مباشرة.

الوحدةُ 5

العلاقاتُ في المُثلَّثاتِ والنسبُ المُثلَّثيةُ

Relationships in Triangles and Trigonometric Ratios

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

المُثلَّثُ هوَ أبسطُ المُضلَّعاتِ، لكنَّ أضلاعَهُ وزواياهُ تمتازُ بخصائصَ فريدةٍ جعلتْهُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ الهندسيةِ استعمالًا في التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ. فمثلًا، يستعملُ المهندسونَ المُثلَّثاتِ لتصميمِ جسورٍ قويةٍ تتوزَّعُ فيها الأحمالُ على الأعمدةِ بالتساوي، ويستعملونَ النسبَ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ لتحديدِ المسافاتِ التي يصعبُ قياسُها بصورةٍ مباشرةٍ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتشابِهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابهِ: SAS، وSSS، و AA.
- ✓ تحديدَ المُثلَّثاتِ المُتطابِقةِ باستعمالِ الحالاتِ الآتيةِ: SSS، و SAS، و AAS، و ASA، و HL.
- ✓ توظيفَ نظريةِ فيثاغورس في إيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ استعمالَ تشابهِ المُثلَّثاتِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تطبيقَ النظرياتِ الخاصةِ بالأجزاءِ المُتناسِبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- استعمالَ مُنصِّفاتِ المُثلَّثِ العموديةِ ومُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادَ مركزِ مُثلَّثٍ، وملتقى ارتفاعاتِهِ.
- تمييزَ جيبِ الزاويةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، واستعمالَها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ.

6

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف الثامن

- تعرُّف مفهوم تطابق المثلثات، وتحديد المثلثات المتطابقة باستعمال الحالات الآتية: SSS، وSAS، وAAS، وASA، وHL.
- تعرُّف تشابه المثلثات، وتحديد المثلثات المتشابهة باستعمال حالات التشابه: AA، و SSS، و SAS.
- استعمال تشابه المثلثات لإيجاد قياسات مجهولة.
- توظيف نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال مجهولة في المثلث القائم الزاوية.

الصف التاسع

- تطبيق النظريات الخاصة بالأجزاء المتناسبة في المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- استعمال منصّفات المثلث العمودية ومنصّفات زوايا المثلّث لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد مركز مثلّث، وملتقى ارتفاعاته، وتحديد إحداثيي كلّ منهما.
- تمييز جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلّث قائم الزاوية، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة في المثلّث.
- حل مسائل حياتية تتضمن زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.

الصف العاشر

- ربط النسب المثلثية للزوايا بإحداثيي نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.
- إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا ضمن دورة واحدة: $0° \leq \theta < 360°$
- تمثيل الاقترانات المثلثية الأساسية بيانيًّا يدويًّا، وباستعمال التكنولوجيا (ضمن دورة واحدة).
- حل معادلات مثلثية ضمن دورة واحدة.
- تعرّف قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام واستعمالهما لحل المثلث، وحل مسائل رياضية وحياتية.
- استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- إيجاد أطوال وزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

مشروعُ الوحدةِ

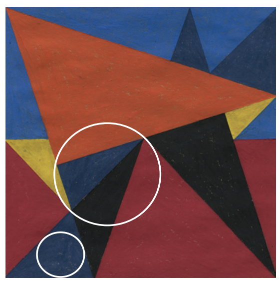
الهندسةُ والفنُّ

فكرةُ المشروعِ توظيفُ مفاهيمَ هندسيةٍ في عملِ لوحةٍ فنيةٍ.

الموادُّ والأدواتُ ورقةٌ مقاسُها (A3)، ألوانٌ، أدواتٌ هندسيةٌ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أرسمُ على الورقةِ مجموعةً منَ المُثلَّثاتِ المختلفةِ، بحيثُ تكونُ مُتداخِلةً في ما بينَها، وتمتدُّ على مساحةِ الورقةِ كلِّها.
2. أختارُ مُثلَّثينِ منْ هذهِ المُثلَّثاتِ، ثمَّ أرسمُ مُثلَّثَ القطعِ المُنصِّفةِ لكلٍّ منْهُما.
3. أُشاهِدُ مقطعَ الفيديو في الرمزِ المجاورِ الذي تظهرُ فيهِ خطواتُ رسمِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.
4. أختارُ مُثلَّثينِ منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ لكلٍّ منْهُما دائرةً خارجيةً، مُتَّبِعًا الخطواتِ الواردةَ في مقطعِ الفيديو.
5. أُشاهِدُ مقطعَ الفيديو في الرمزِ المجاورِ الذي تظهرُ فيهِ خطواتُ رسمِ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.
6. أختارُ مُثلَّثينِ منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ لكلٍّ منْهُما دائرةً داخليةً، مُتَّبِعًا الخطواتِ الواردةَ في مقطعِ الفيديو.
7. أختارُ مُثلَّثًا منَ الشكلِ، ثمَّ أرسمُ ارتفاعاتِهِ الثلاثةَ.
8. أُلوِّنُ أجزاءَ اللوحةِ بألوانٍ مناسبةٍ.
9. أختارُ ثلاثةَ مُثلَّثاتٍ قائمةٍ منَ اللوحةِ، ثمَّ أجدُ جميعَ النسبِ المُثلَّثيةِ لزواياها الحادَّةِ.
10. أختارُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ منَ اللوحةِ، ثمَّ أكتبُ مسألةً لإيجادِ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في هذا المُثلَّثِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلٍ لي إيجادَ الطولِ المجهولِ.
11. أختارُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ منَ اللوحةِ، ثمَّ أكتبُ مسألةً لإيجادِ قياسِ زاويةٍ حادَّةٍ في هذا المُثلَّثِ، ثمَّ أطلبُ إلى زميلٍ لي إيجادَ قياسِ الزاويةِ المجهولةِ.



عرضُ النتائجِ:

أُصمِّمُ مطويةً أعرضُ فيها:

- خطواتِ عملِ المشروعِ، والنتائجَ التي توصَّلْتُ إليْها.
- شرحًا مُختصَرًا عنِ العلاقاتِ في المُثلَّثاتِ التي ظهرَتْ في اللوحةِ.
- معلومةً إضافيةً عرفْتُها عنِ المُثلَّثاتِ في أثناءِ العملِ في المشروعِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	رسم مثلثات مختلفة متداخلة في ما بينها وتمتد على مساحة الورقة كلّها.			
2	اختيار مثلثين ورسم مثلث القطع المنصّفة لكل منهما.			
3	اختيار مثلثين آخرين، ورسم الدائرة الخارجية لكل منهما.			
4	اختيار مثلثين آخرين، ورسم الدائرة الداخلية لكل منهما.			
5	اختيار مثلث آخر، ورسم ارتفاعاته الثلاثة.			
6	اختيار ثلاثة مثلثات قائمة، وإيجاد النسب المثلثية لزواياها الحادة.			
7	كتابة مسألة لإيجاد طول ضلع مجهول في أحد المثلثات، وإيجاد ذلك الطول.			
8	كتابة مسألة لإيجاد قياس زاوية حادّة في أحد المثلثات، وإيجاد ذلك القياس.			
9	إعداد المشروع في الوقت المحدد، وعرضه بطريقة واضحة (مهارة التواصل).			
10	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى توظيف مفاهيم هندسية وما يتعلّمه الطلبة من مهارات خلال دراسة هذه الوحدة في عمل لوحة فنية.

ويهدف مشروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكّد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوّلًا بأوّل، وتعزيزها بالصور.
- أذكّر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحدًا منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض اللوحة والمسائل التي كتبها أفراد المجموعة مع حلولها (تتمثّل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذِكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- تعرُّف نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.
- تعرُّف عكس نظرية التناسب في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.
- تعرُّف نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، واستعمالها في حل المسائل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف علاقات الزوايا الناتجة عن مستقيمات متوازية وقاطع لها.
- تعرُّف المثلثات المتشابهة، وكتابة تناسب الأضلاع المتناظرة فيها.
- حل معادلات خطية وتربيعية بمتغيّر واحد.
- حل تناسبات.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

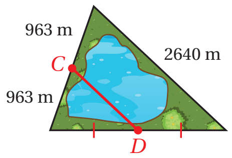
الدرس 1

الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثاتِ
Proportional Parts in Triangles

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الأجزاءِ المُتناسِبةِ في المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

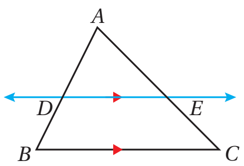
المصطلحاتُ القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المُجاوِرُ بحيرةً شُيِّدَ فوقَها الجسرُ $\overline{CD}$. أجدُ طولَ الجسرِ.



الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثِ

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ المُثلَّثَ ABC، حيثُ: $\overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$، و $\overleftrightarrow{DE}$ يقطعُ $\overline{AB}$ في D، ويقطعُ $\overline{AC}$ في E. ما العلاقةُ بينَ $\triangle ABC$ و $\triangle ADE$؟



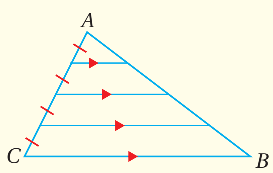
يُمكِنُ استكشافُ هذهِ العلاقةِ عنْ طريقِ تنفيذِ النشاطِ الهندسيِّ الآتي.

نشاطٌ هندسيٌّ — **التناسبُ في المُثلَّثِ**

الإجراءاتُ:

الخطوةُ 1: أرسمُ المُثلَّثَ ABC مُختلفَ الأضلاعِ كما في الشكلِ المجاورِ.

الخطوةُ 2: أُقسِّمُ أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، وليكنْ $\overline{AC}$، إلى أربعةِ أجزاءٍ مُتطابِقةٍ، ثمَّ أستعملُها لرسمِ قطعٍ مستقيمةٍ مُوازِيةٍ للضلعِ $\overline{CB}$ كما في الشكلِ المُجاوِرِ.



2) طول القطعة الأولى من الأعلى $\frac{1}{4}CB$ ، طول القطعة الثانية من الأعلى $\frac{1}{2}CB$، طول القطعة الثالثة من الأعلى $\frac{3}{4}CB$

أحلِّلُ النتائجَ:

1. كمْ مُثلَّثًا في الشكلِ يُشابِهُ المُثلَّثَ ABC ؟ أُبرِّرُ إجابتي. 3
2. ما علاقةُ طولِ كلِّ قطعةٍ منَ القطعِ المستقيمةِ المُتوازِيةِ بطولِ $\overline{CB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

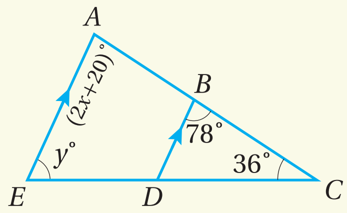
أتذكَّرُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إثباتُ تشابهِ مُثلَّثينِ باستعمالِ عددٍ منَ المُسلَّماتِ والنظرياتِ، مثلِ: التشابهِ بزاويتينِ (AA)، والتشابهِ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)، والتشابهِ بضلعينِ وزاويةٍ محصورةٍ (SAS).

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:



» أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور لأجيب عن كلّ مما يأتي:

a) أبيّن أن المثلثين CBD, CAE متشابهان، وأكتب التناسب الناتج عن ذلك.

حالة التشابه AA؛ الزاوية $\angle C$ مشتركة في المثلثين؛

و $\angle CBD \cong \angle CAE$ (زاويتان متناظرتان بين متوازيين وقاطعهما)

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{EC}{DC}$$

b) أجد قيمة كل من x، و y، وأبرر إجابتي. $x = 29, y = 66$، أنظر تبرير الطلبة.

» إذا كانت نسبة الطلبة إلى المعلمين في إحدى المدارس الثانوية هي $85 : 3$، وكان عدد طلبة المدرسة 1615 طالبًا، فما عدد المعلمين في هذه المدرسة؟ 57 معلمًا.

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ماذا تمثّل النقطة C بالنسبة إلى الضلع الأيسر للمثلث الذي يحيط بالبحيرة؟ نقطة منتصف هذا الضلع.

» ماذا تمثّل النقطة D بالنسبة إلى الضلع السفلي للمثلث الذي يحيط بالبحيرة؟ نقطة منتصف هذا الضلع.

» كم مثلثًا يظهر في الرسم؟ مثلثان.

» ما العلاقة بين هذين المثلثين؟ ولماذا؟ متشابهان؛ لأنهما يشتركان في زاوية، والنسبة بين ضلعي هذه الزاوية المتناظرين في المثلثين ثابتة.

» ما النسبة بين الأضلاع المتناظرة في المثلث الكبير إلى المثلث الصغير؟ $2 : 1$

» كيف يمكن إيجاد طول الجسر $\overline{CD}$؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

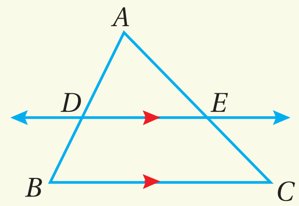
» أعزّز الإجابات الصحيحة.

- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأوّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

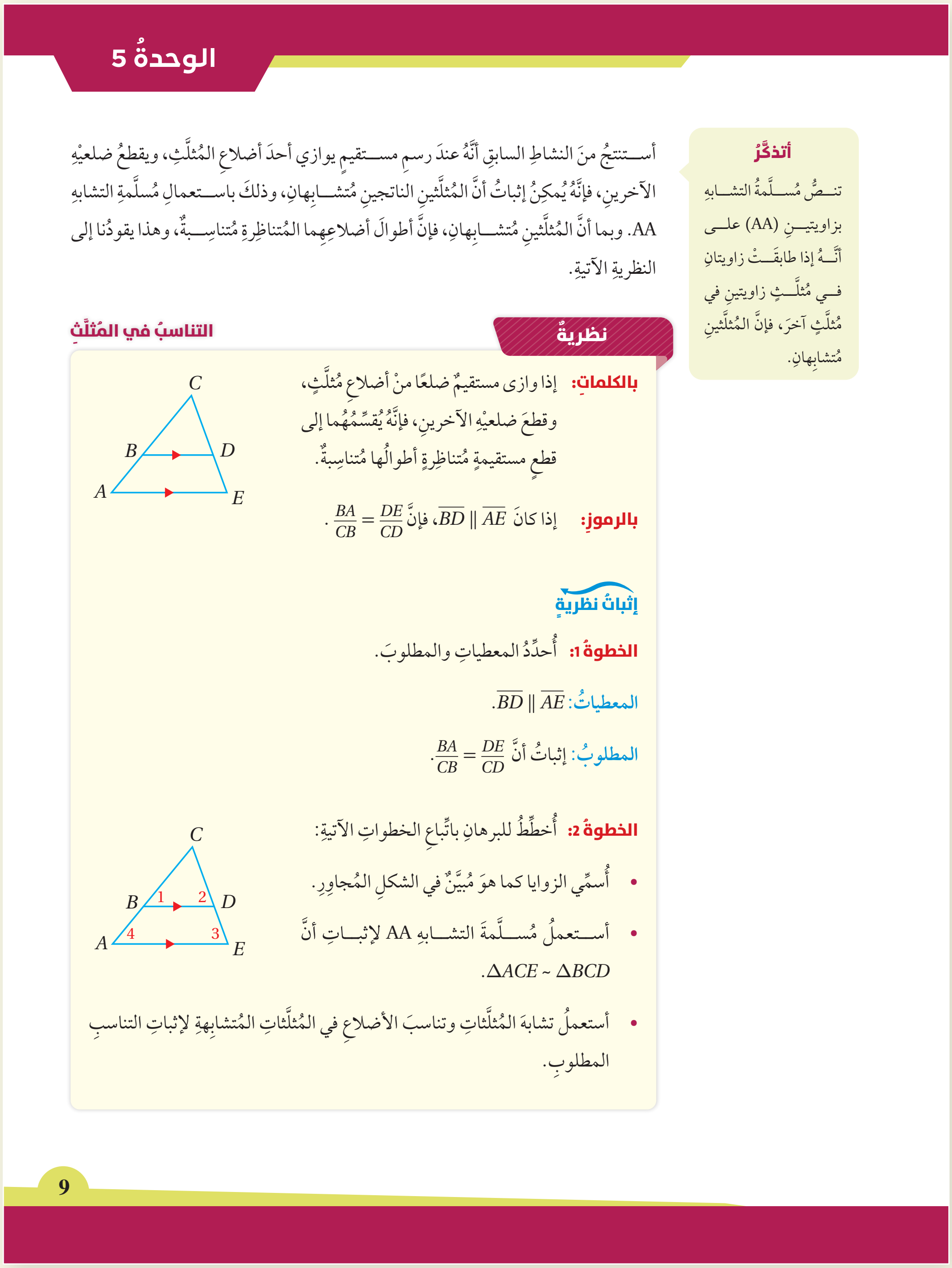
3 التدريس

نشاط هندسي

- أرسم الشكل الآتي على اللوح، وأناقش مع الطلبة المعلومات المعطاة عليه، ثم أسألهم: ما العلاقة بين ΔABC و ΔADE؟



- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، ثم أبيّن لهم أنه يمكنهم استكشاف هذه العلاقة من خلال تنفيذ النشاط الهندسي الوارد في الصفحة 8 من كتاب الطالب.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إليهم تنفيذ النشاط الهندسي، وأسألهم عن العلاقة بين أجزاء الضلع $\overline{AB}$، وأطلب إليهم تسمية طرفي كلّ من القطع الموازية للضلع $\overline{CB}$، وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة في كل مثلثين متشابهين.
- أوجّه المجموعات إلى الإجابة عن أسئلة بند (**أحلّل النتائج**) الواردة في النشاط الهندسي مع تبرير إجاباتهم.
- أناقش المجموعات في ما يتوصّلون إليه من نتائج، ثم أوضّح للطلبة أن هذا النشاط يقود إلى نظرية التناسب في المثلث، ثم أقدّم لهم النظرية بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب. وأناقشهم في برهان النظرية، وأطلب إليهم تبرير خطوات البرهان.



أستنتجُ منَ النشاطِ السابقِ أنَّهُ عندَ رسمِ مستقيمٍ يوازي أحدَ أضلاعِ المُثلَّثِ، ويقطعُ ضلعيْهِ الآخرينِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إثباتُ أنَّ المُثلَّثينِ الناتجينِ مُتشابهانِ، وذلكَ باستعمالِ مُسلَّمةِ التشابهِ AA. وبما أنَّ المُثلَّثينِ مُتشابهانِ، فإنَّ أطوالَ أضلاعِهما المُتناظرةِ مُتناسِبةٌ، وهذا يقودُنا إلى النظريةِ الآتيةِ.

أتذكَّرُ

تنصُّ مُسلَّمةُ التشابهِ بزاويتينِ (AA) على أنَّهُ إذا طابقَتْ زاويتانِ في مُثلَّثٍ زاويتينِ في مُثلَّثٍ آخرَ، فإنَّ المُثلَّثينِ مُتشابِهانِ.

نظريةٌ — **التناسبُ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: إذا وازى مستقيمٌ ضلعًا منْ أضلاعِ مُثلَّثٍ، وقطعَ ضلعيْهِ الآخرينِ، فإنَّهُ يُقسِّمُهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ.

بالرموزِ: إذا كانَ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإنَّ $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

إثباتُ نظريةٍ

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ المعطياتِ والمطلوبَ.

المعطياتُ: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

المطلوبُ: إثباتُ أنَّ $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

الخطوةُ 2: أُخطِّطُ للبرهانِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

- أُسمِّي الزوايا كما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ المُجاوِرِ.
- أستعملُ مُسلَّمةَ التشابهِ AA لإثباتِ أنَّ $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.
- أستعملُ تشابهَ المُثلَّثاتِ وتناسبَ الأضلاعِ في المُثلَّثاتِ المُتشابهةِ لإثباتِ التناسبِ المطلوبِ.

أتذكَّرُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمينِ مُتوازِيينِ في المستوى نفسِهِ، فإنَّ هذا يقودُ إلى مجموعةٍ منَ النظرياتِ عنِ العلاقةِ بينَ أزواجِ الزوايا الناتجةِ منْ هذا التقاطعِ، مثلِ النظريةِ التي تنصُّ على أنَّ الزوايا المُتناظِرةَ مُتطابِقةٌ.

أتذكَّرُ

إذا تشابهَ مُضلَّعانِ، فإنَّ زواياهُما المُتناظِرةَ مُتطابِقةٌ، وأطوالَ أضلاعِهِما المُتناظِرةِ مُتناسِبةٌ.

نظريةٌ — التناسبُ في المُثلَّثِ (يتبعُ)

الخطوةُ 3: أُبرهِنُ.

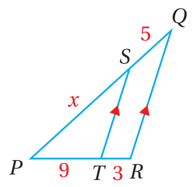
- بما أنَّ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$، فإنَّ $\angle 1 \cong \angle 4$، و $\angle 3 \cong \angle 2$، وَفقًا لمُسلَّمةِ الزاويتينِ المُتناظِرتينِ. وبذلكَ، فإنَّ $\Delta BCD \sim \Delta ACE$ بحسبِ مُسلَّمةِ التشابهِ (AA).
- بناءً على تعريفِ المُضلَّعاتِ المُتشابِهةِ، فإنَّ $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$.
- بما أنَّ $CA = BA + CB$، و $CE = DE + CD$، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ التناسبِ المطلوبِ على النحوِ الآتي:

تعريفُ المُضلَّعاتِ المُتشابِهةِ	$\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$
بالتعويضِ	$\frac{BA+CB}{CB} = \frac{DE+CD}{CD}$
بتوزيعِ المقامِ على البسطِ	$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$
$\frac{CB}{CB} = 1, \frac{CD}{CD} = 1$	$\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$
بطرحِ 1 منْ طرفيِ المعادلةِ	$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ لإيجادِ أطوالِ قطعٍ مستقيمةٍ مجهولةٍ.

مثال 1

في ΔPQR، إذا كانَ $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$، $SQ = 5, PT = 9, TR = 3$، فأجدُ PS.



نظريةُ الأجزاءِ المُتناسِبةِ	$\frac{SQ}{PS} = \frac{TR}{PT}$
بالتعويضِ	$\frac{5}{x} = \frac{3}{9}$
بالتبسيطِ	$\frac{5}{x} = \frac{1}{3}$
باستعمالِ خاصيةِ الضربِ التبادليِّ	$x = 15$

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ كتابةُ التناسبِ بطريقةٍ أُخرى؟

مثال 1

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال نظرية التناسب في المثلث لإيجاد أطوال قطع مستقيمة مجهولة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح بوصفه تطبيقًا على هذه النظرية، لإيجاد أطوال قطع مستقيمة مجهولة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

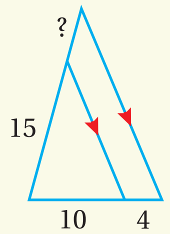
إرشادات:

- عند مناقشة إثبات نظرية التناسب في المثلث مع الطلبة، أذكّرهم بنصّ مسلّمة (AA) التي سيستعملونها في إثبات تشابه المثلثين.
- أذكّر الطلبة بالعلاقات بين أزواج الزوايا الناتجة من قطع مستقيم مستقيمين متوازيين في المستوى نفسه.
- أناقش الطلبة في الإجابة عن السؤال الوارد في صندوق (**أفكّر**) الوارد في هامش المثال 1، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن كتابة التناسب على الصورة الآتية:

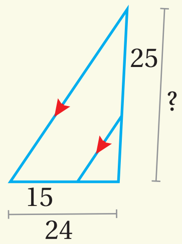
$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$$

مثال إضافي:

أجد الطول المجهول في كل ممّا يأتي:

1


6

2


40

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

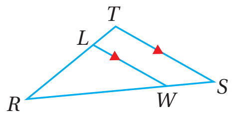
- أسـأل الطلبة عـن تصوّرهم لمفهوم عكـس نظرية ما، وأطلب إليهم ذكر أمثلة سـابقة لعكس نظرية ما، وعن توقّعهـم لنصّ عكس نظرية التناسـب فـي المثلث، ثم أقـدّم لهم نص النظرية بالكلمات والرموز بالاسـتعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقـش الطلبـة في إثبـات تـوازي مسـتقيمين، بإثبات وجـود زوايا متناظرة متطابقـة، أو زوايا داخلية متبادلة متطابقـة، ثـم أبيّن لهم أنهم سـيبرهنون عكـس نظرية التناسـب في المثلث في السـؤال 17 مـن بند (**أتدرّب وأحل المسائل**).
- أناقش حل المثال 2 بوصفه تطبيقًا مباشرًا على عكس نظرية التناسب في المثلث.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشـاد: أوجّه الطلبة إلى تسـجيل الأطوال المعلومــة على الرســم، إذ يســاعدهم على إيجاد بعض الأطوال البسيطة التي تحتاج إلى جمع طولين أو طرح أحدهما مــن الآخر، وتســهّل عليهم كتابة التناسب الصحيح المناســب الذي يُستعمَل لإيجاد الطول المجهول.

أتحقَّقُ من فهمي

في $\triangle RTS$، إذا كانَ $RL = 5, RT = 9, WS = 6$ و $\overline{LW} \parallel \overline{TS}$، فأجدُ RW.

7.5

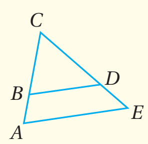


عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ

إنَّ عكسَ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ صحيحٌ أيضًا، وهذا ما تنصُّ عليهِ النظريةُ الآتيةُ.

نظريةٌ — **عكسُ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: إذا قطعَ مسـتقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقَسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ.

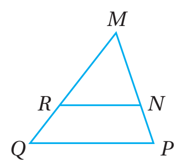


بالرموزِ: إذا كانَ $\frac{DE}{CD} = \frac{BA}{CB}$، فإنَّ $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 17.

مثال 2

فـي $\triangle QMP$، إذا كانَ $MN = 12, NP = 3, MR = 16$ و $RQ = 4$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$، مُبرِّرًا إجابتي.



$$\frac{RQ}{MR} = \frac{4}{16}$$ بتعويضِ $MR = 16, RQ = 4$

$$= \frac{1}{4}$$ بالتبسيطِ

$$\frac{NP}{MN} = \frac{3}{12}$$ بتعويضِ $MN = 12, NP = 3$

$$= \frac{1}{4}$$ بالتبسيطِ

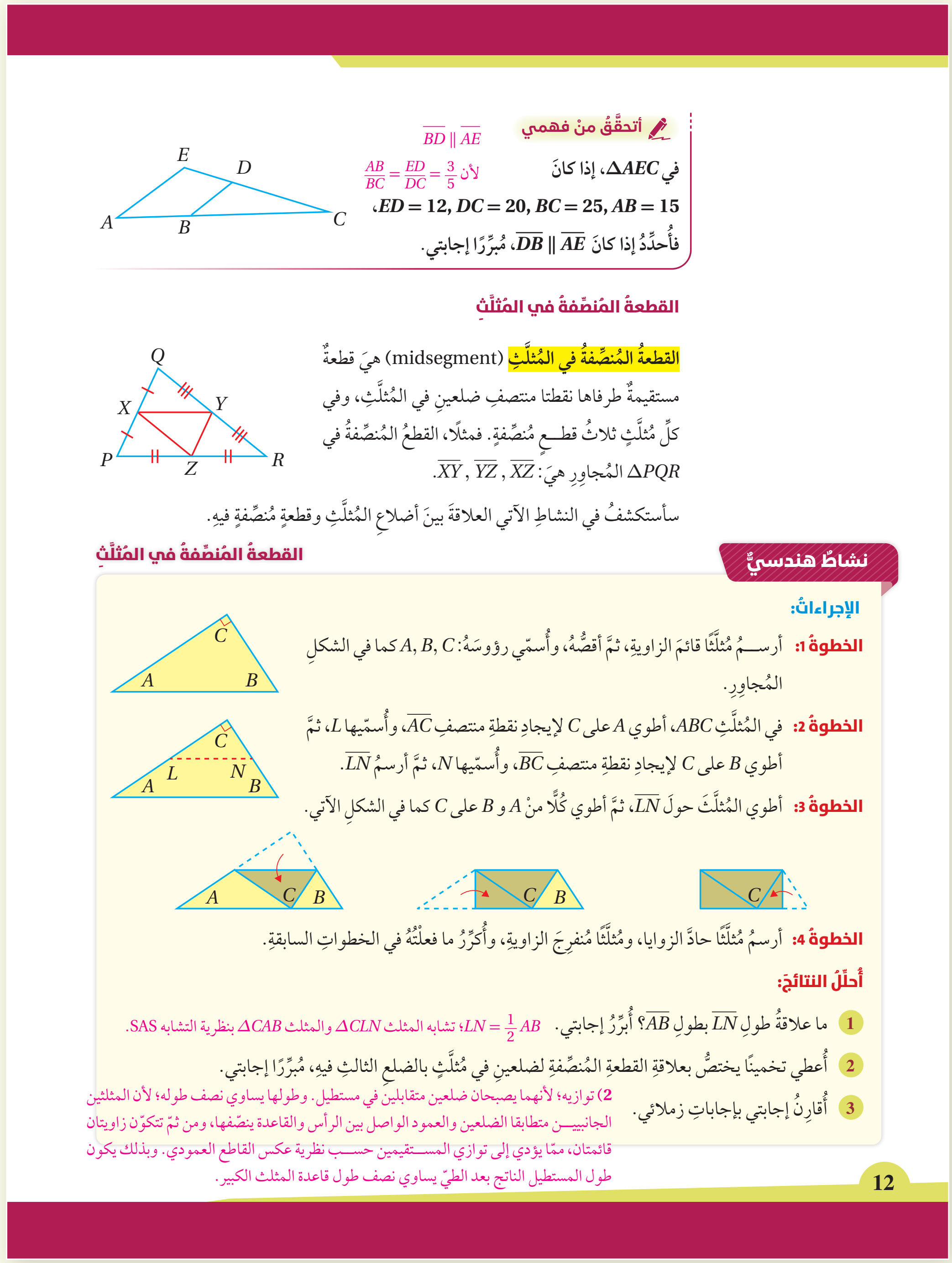
ومنْ ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{RQ}{MR} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{4}$$

إذنْ، وبحسبِ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ، فإنَّ $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$.

نشاط هندسي

- أوضّح للطلبة مفهوم القطعة المنصّفة في المثلث، وأبيّن لهم أنه توجد ثلاث قطع منصّفة في أي مثلث بالاستعانة بشكل توضيحي، ثم أبيّن لهم أنهم سيستكشفون العلاقة بين أضلاع المثلث وقطعة منصّفة فيه عن طريق تنفيذ النشاط الهندسي الوارد في الصفحة 12 من كتاب الطالب.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم تنفيذ النشاط الهندسي.
- أوجّه المجموعات إلى الإجابة عن أسئلة بند (**أحلّل النتائج**) الواردة في النشاط الهندسي مع تبرير إجاباتهم، ومقارنتها مع إجابات المجموعات الأخرى.
- أناقش المجموعات في ما يتوصلون إليه من نتائج، ثم أوضّح للطلبة أن هذا النشاط يقود إلى نظرية القطعة المنصّفة في المثلث، ثم أقدّم لهم نص النظرية بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب، وأبيّن أن برهان هذه النظرية متروك بوصفه تدريبًا لهم، وأطلب إليهم كتابة برهان النظرية مع تبرير كل خطوة من خطوات البرهان.



أتحقَّقُ منْ فهمي

في ΔAEC، إذا كانَ $ED = 12, DC = 20, BC = 25, AB = 15$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{AE} \parallel \overline{DB}$، مُبرِّرًا إجابتي.

$\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ لأن $\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{3}{5}$

القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ

القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ (midsegment) هيَ قطعةٌ مستقيمةٌ طرفاها نقطتا منتصفِ ضلعينِ في المُثلَّثِ، وفي كلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُنصِّفةٍ. فمثلًا، القطعُ المُنصِّفةُ في ΔPQR المُجاوِرِ هيَ: $\overline{XZ}, \overline{YZ}, \overline{XY}$.

سأستكشفُ في النشاطِ الآتي العلاقةَ بينَ أضلاعِ المُثلَّثِ وقطعةٍ مُنصِّفةٍ فيهِ.

نشاطٌ هندسيٌّ — القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ

الإجراءاتُ:

الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلَّثًا قائمَ الزاويةِ، ثمَّ أقصُّهُ، وأُسمّي رؤوسَهُ: A, B, C كما في الشكلِ المُجاوِرِ.

الخطوةُ 2: في المُثلَّثِ ABC، أطوي A على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{AC}$، وأُسمّيها L، ثمَّ أطوي B على C لإيجادِ نقطةِ منتصفِ $\overline{BC}$، وأُسمّيها N، ثمَّ أرسمُ $\overline{LN}$.

الخطوةُ 3: أطوي المُثلَّثَ حولَ $\overline{LN}$، ثمَّ أطوي كُلًّا منْ A و B على C كما في الشكلِ الآتي.

الخطوةُ 4: أرسمُ مُثلَّثًا حادَّ الزوايا، ومُثلَّثًا مُنفرِجَ الزاويةِ، وأُكرِّرُ ما فعلْتُهُ في الخطواتِ السابقةِ.

أُحلِّلُ النتائجَ:

1. ما علاقةُ طولِ $\overline{LN}$ بطولِ $\overline{AB}$؟ أُبرِّرُ إجابتي. $LN = \frac{1}{2} AB$؛ تشابه المثلث ΔCLN والمثلث ΔCAB بنظرية التشابه SAS.
2. أُعطي تخمينًا يختصُّ بعلاقةِ القطعةِ المُنصِّفةِ لضلعينِ في مُثلَّثٍ بالضلعِ الثالثِ فيهِ، مُبرِّرًا إجابتي.
3. أُقارِنُ إجابتي بإجاباتِ زملائي.

2) توازيه؛ لأنهما يصبحان ضلعين متقابلين في مستطيل. وطولها يساوي نصف طوله؛ لأن المثلثين الجانبيين متطابقا الضلعين والعمود الواصل بين الرأس والقاعدة ينصّفها، ومن ثمّ تتكوّن زاويتان قائمتان، ممّا يؤدي إلى توازي المستقيمين حسب نظرية عكس القاطع العمودي. وبذلك يكون طول المستطيل الناتج بعد الطيّ يساوي نصف طول قاعدة المثلث الكبير.

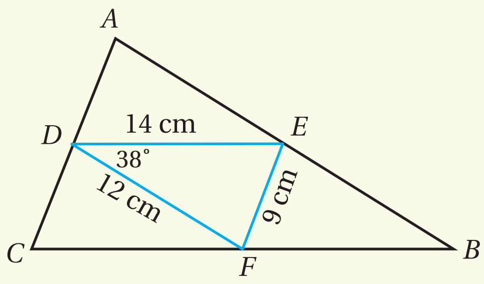
مثال 3

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال نظرية القطعة المنصّفة في المثلث لإيجاد أطوال مجهولة.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أبيّن للطلبة أن نظرية القطعة المنصّفة في المثلث حالة خاصة من عكس نظرية التناسب في المثلث، ثم أطلب إليهم تفسير ذلك.

مثال إضافي:

في الشكل المجاور، إذا كانت النقاط D, E, F هي منتصفات الأضلاع $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب، فأجد كلًّا مما يأتي:



1. محيط المثلث ABC. 70 cm
2. قياس $\angle DFC$. 38°

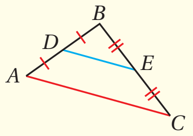
توجدُ علاقتانِ بينَ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ والضلعِ المُقابِلِ لها، وهما مُوضَّحتانِ في النظريةِ الآتيةِ.

نظريةٌ — **القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ**

بالكلماتِ: القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ توازي الضلعَ المُقابِلَ لها، وطولُها يساوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ.

بالرموزِ: إذا كانَتِ النقطةُ D والنقطةُ E هما نقطتَيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ على الترتيبِ، فإنَّ:

$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ و $DE = \frac{1}{2} AC$



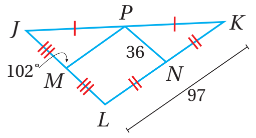
أتعلَّمُ
تُعَدُّ نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ حالةً خاصةً منْ عكسِ نظريةِ التناسبِ في المُثلَّثِ.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 18.

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ لإيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ.

مثال 3

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



1. طولُ $\overline{JL}$.

$PN = \frac{1}{2} JL$	نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ
$36 = \frac{1}{2} JL$	بتعويضِ $PN = 36$
$JL = 72$	بالتبسيطِ

2. طولُ $\overline{PM}$.

$PM = \frac{1}{2} LK$	نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ
$= \frac{1}{2}(97)$	بتعويضِ $LK = 97$
$= 48.5$	بالتبسيطِ

3 قياسُ $\angle MPN$.

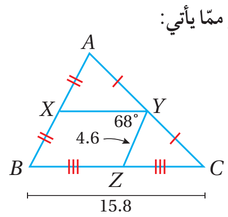
نظريةُ الزاويتينِ المُتبادِلتينِ داخليًّا	$\angle MPN \cong \angle JMP$
تعريفُ تطابقِ الزوايا	$m\angle MPN = m\angle JMP$
بالتعويضِ	$= 102°$

أتذكَّرُ

بما أنَّ $\overline{JL} \parallel \overline{PN}$، فإنَّ $\angle MPN \cong \angle JMP$؛ لأنَّهُما زاويتانِ مُتبادِلتانِ داخليًّا.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



a) طولُ $\overline{XY}$. $XY = 7.9$

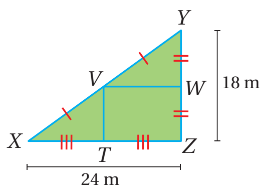
b) طولُ $\overline{AX}$. $AX = 4.6$

c) قياسُ $\angle YZC$. $m\angle YZC = 68°$

يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

حديقةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُخطَّطًا لحديقةٍ عامةٍ على شكلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، وفي داخلِها ممرّا مشاةٍ بحاجةٍ إلى إعادةِ تبليطٍ، هما: $\overline{VW}$، و $\overline{TV}$. أجدُ تكلفةَ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ، علمًا بأنَّ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ للممرِّ هيَ JD 12.



الخطوةُ 1: أجدُ طولَ كلٍّ منَ الممرَّينِ.

- أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{VW}$:

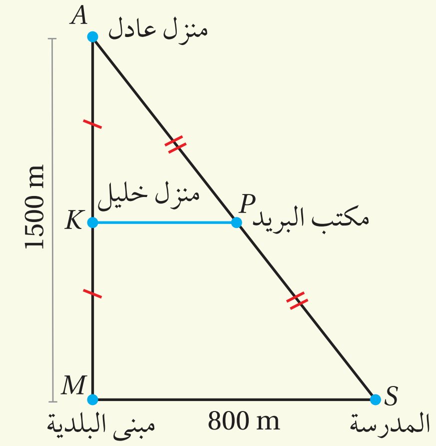
نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ	$VW = \frac{1}{2} XZ$
بتعويضِ $XZ = 24$	$= \frac{1}{2}(24)$
بالتبسيطِ	$= 12$

مثال 4: من الحياة

- أبيّن للطلبة استعمالات نظرية القطعة المنصّفة في التطبيقات الحياتية، مثل: استعمالها في فن العمارة، ورسم مخططات الأبنية، وتطبيقات أخرى كثيرة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، بتوجيه السؤالين الآتيين إليهم:
  - » كيف يمكن حساب تكلفة تبليط الممرّين؟ بإيجاد مجموع طوليهما وضرب الناتج في تكلفة تبليط المتر الواحد.
  - » ما طول $\overline{WV}$؟ طوله يساوي نصف طول $\overline{XZ}$ وفق نظرية القطعة المنصّفة.
- أكلّف أحد الطلبة إيجاد طول كل من $\overline{WV}$، و $\overline{VT}$ على اللوح، ثم أكلّف آخر إيجاد مجموع طولي الممرّين، وحساب تكلفة تبليطهما.

مثال إضافي:

يبيّن الشكل المجاور جزءًا من مخطط طرق في إحدى البلدات على شكل مثلث قائم الزاوية. يغادر عادل منزله يوميًّا متوجهًا إلى المدرسة مرورًا بمنزل صديقه خليل ثم مكتب البريد. أجد المسافة التي يقطعها عادل يوميًّا عند ذهابه إلى المدرسة.



2000 m

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (أتدرّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 12) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

- أجدُ طولَ الممرِّ $\overline{TV}$:

$TV = \frac{1}{2} YZ$ نظريةُ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ

$= \frac{1}{2}(18)$ بتعويضِ $YZ = 18$

$= 9$ بالتبسيطِ

إذنْ، مجموعُ طولِ الممرَّينِ معًا هوَ: $9\text{ m} + 12\text{ m} = 21\text{ m}$

الخطوةُ 2: أجدُ التكلفةَ.

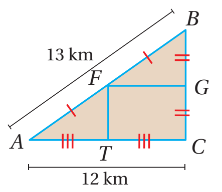
لإيجادِ تكلفةِ إعادةِ تبليطِ الممرَّينِ، أضربُ تكلفةَ تبليطِ المترِ الطوليِّ الواحدِ في مجموعِ طولَي الممرَّينِ على النحوِ الآتي:

$$12 \times 21 = 252$$

إذنْ، تكلفةُ تبليطِ الممرَّينِ التي ستدفعُها إدارةُ البلديةِ هيَ: JD 252

أتحقَّقُ منْ فهمي

مرورٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُخطَّطًا لمنطقةٍ منْ مدينةِ عمّانَ على شكلِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ. تقودُ غديرُ سيّارتَها في هذهِ المنطقةِ أثناءَ توجُّهِها إلى عملِها، وتسيرُ على الطريقِ $\overline{GF}$ والطريقِ $\overline{FT}$. أجدُ المسافةَ التي تقطعُها غديرُ بسيّارتِها يوميًّا.



$GF = 6\text{ km}, FT = \frac{1}{2} BC$

$BC = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$

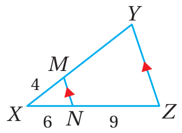
$GF + FT = 6 + \frac{1}{2}(5) = 8.5$

إذن، المسافة التي تقطعها غدير هي: 8.5 km

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

1. في ΔXYZ، إذا كانَ $\overline{NM} \parallel \overline{YZ}$، $XM = 4, XN = 6, NZ = 9$، فأجدُ XY.

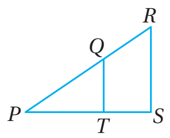
10



2. في ΔPRS، إذا كانَ $PR = 30, QR = 9, PT = 12, PS = 18$، فأُحدِّدُ إذا كانَ $\overline{QT} \parallel \overline{RS}$، مُبرِّرًا إجابتي.

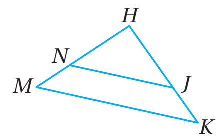
$\frac{ST}{PT} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{QR}{PQ} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ $\quad \frac{ST}{PT} \neq \frac{QR}{PQ}$

إذن، $\overline{QT} \nparallel \overline{RS}$؛ لعدم تحقّق عكس نظرية التناسب في المثلث.

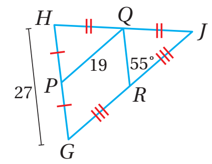


3 فــي ΔHKM، إذا كانَ $HM = 15, HN = 10, HJ = 2JK$، فأُحــدِّدُ إذا كانَ $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$، مُبرِّرًا إجابتي.

$\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$ ؛ لتحقّق عكس نظرية التناسب في المثلث؛ لأن $\frac{1}{2} = \frac{MN}{HN} = \frac{JK}{HJ}$



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



4 GJ 38

5 RQ 13.5

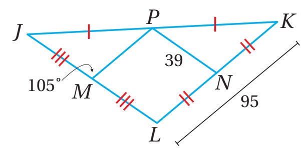
6 RJ 19

7 $m\angle PQR$ 55°

8 $m\angle HGJ$ 55°

9 $m\angle GPQ$ 125°

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



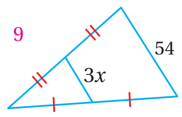
10 JL 78

11 PM 47.5

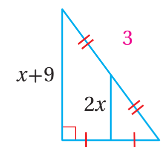
12 $m\angle MPN$ 105°

أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

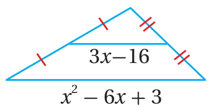
13 9



14 3



15

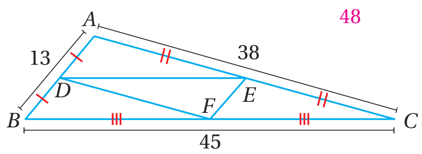


$x = 7$ or $x = 5$

لكــن عند تعويض 5 في طــول القطعة المنصفة يكون الناتج 1–، والطول لا يكون ســالبًا، فيُرفَض الحل $x = 5$، ويكون الحل المقبول هو: $x = 7$

16 أجدُ محيطَ ΔDEF المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي.

48



16

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسـط صعوبة في حل أسـئلة بنـد (**أتدرّب وأحـل المسـائل**)، فإنّني أضـع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المسـتوى المتوسـط أو مـع أحـد الطلبـة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 – 21).
- أرصد أيّة أفكار غيـر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السـؤال 22 (**تبرير**)، أسأل الطلبة عن نوع المثلث ABC، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

الواجب المنزلي:

أسـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

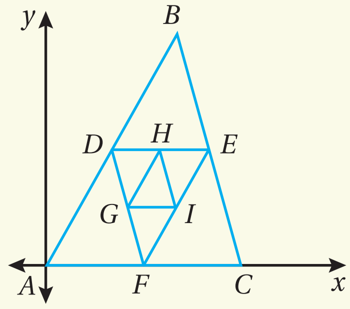
المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 13, 14, 16, 20 كتاب التمارين: (4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 15, 17, 19, 21 كتاب التمارين: (7 – 4)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 18, (24 – 21) كتاب التمارين: (10 – 7)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» في الشكل الآتي، إذا كانت $A(0,0)$, $G(5,4)$, $I(8,4)$، وكانت النقاط D,E,F هي منتصفات أضلاع المثلث ABC، والنقاط H, I, G هي منتصفات أضلاع المثلث DEF، فأجد إحداثيات كلّ من B,C,D,E,F,H.

(إرشاد: أكتب الإحداثيات المعلومة على الرسم، وأبحث فيها عن قطعة منصّفة، وأربطها بطول الضلع الذي يقابلها، وأكمل بتحديد الإحداثيات المطلوبة بالتتابع).



أنظر ملحق الإجابات.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 1، 2 من خطوات تنفيذ المشروع.

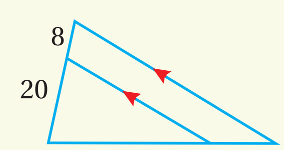
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:

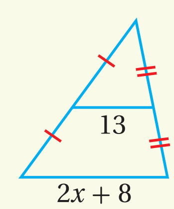
» إذا كان محيط المثلث ABC يساوي 34 cm، وكان طول إحدى القطع المنصّفة فيه 5 cm، فماذا يمكن أن تكون أطوال أضلاع هذا المثلث؟

10, 9, 15؛ أو 4 ,20 ,10؛ (وغير ذلك كثير؛ بشرط أن يكون طول أحد الأضلاع 10 ومجموع طولي الضلعين الآخرين 24).

» أجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

1 

$x = 45$

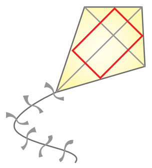
2 

$x = 9$

أُثبِتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودينِ:

17 إذا قطعَ مستقيمٌ ضلعينِ في مُثلَّثٍ، وقسَّمَهُما إلى قطعٍ مستقيمةٍ مُتناظِرةٍ أطوالُها مُتناسِبةٌ، فإنَّ المستقيمَ يوازي الضلعَ الثالثَ للمُثلَّثِ. (أنظر ملحق الإجابات)

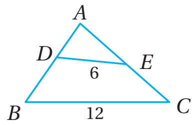
18 القطعةُ المُنصِّفةُ في المُثلَّثِ توازي أحدَ أضلاعِهِ، وطولُها يساوي نصفَ طولِ ذلكَ الضلعِ. (أنظر ملحق الإجابات)



19 **طائرةٌ ورقيةٌ:** صنعَتْ هديلُ طائرةً ورقيةً، طولُ قُطْرَيْها 80 cm و 60 cm، ثمَّ استعملَتْ شريطًا لربطِ نقاطِ منتصفِ أضلاعِ الطائرةِ. أجدُ طولَ الشريطِ. 140 cm

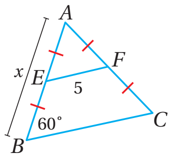
20 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 1320 m

مهاراتُ التفكيرِ العليا



21 **أكتشفُ الخطأَ:** قالَ خالدٌ: "بما أنَّ $DE = \frac{1}{2}BC$ في الشكلِ المُجاوِرِ، فإنَّ $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ بحسبِ نظريةِ القطعةِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ". هلْ ما قالَهُ خالدٌ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

غير صحيح، يجب أن تكون E منتصف $\overline{AC}$ وَ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ لتطبيق النظرية.

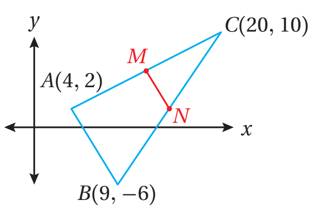


22 **تبريرٌ:** أجدُ قيمةَ x في الشكلِ المُجاوِرِ، مُبرِّرًا إجابتي.

الإجابة $x = 10$؛ لأن المثلث متطابق الأضلاع، طول قاعدته $\overline{BC}$ يساوي $2 \times 5 = 10$

23 **تحدٍّ:** إذا كانَتْ مساحةُ ΔABC هيَ $48\ cm^2$، وكانَتِ النقطةُ D والنقطةُ E هما نقطتيْ منتصفِ $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على الترتيبِ، فأجدُ مساحةَ ΔADE، مُبرِّرًا إجابتي.

(أنظر الهامش)

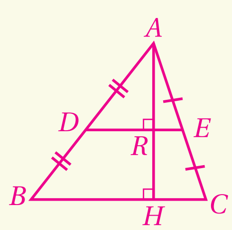


24 **تبريرٌ:** في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَتِ $\overline{MN}$ قطعةً مُنصِّفةً في ΔABC، فأجدُ ميلَ $\overline{MN}$ بطريقتينِ مختلفتينِ، مُبرِّرًا إجابتي.

(أنظر الهامش)

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

23) نُنزل عمودًا من A على كل من $\overline{ED}$ وَ $\overline{BC}$ كما في الشكل المجاور.



$\overline{ED} = \frac{1}{2}\ \overline{BC}$ (حسب نظرية القطعة المنصّفة في المثلث).

$\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ (بحسب نظرية الأجزاء المتناسبة في المثلث ABH)

$$\text{Area}(\Delta AED) = \frac{1}{2}\ ED \times AR = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\ BC \times \frac{1}{2}\ AH$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ BC \times AH\right) = \frac{1}{4}\ (48) = 12\ cm^2$$

24) 1) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (نظرية القطعة المنصّفة)

$$\text{slope } \overline{AB} = \frac{2+6}{4-9} = -\frac{8}{5}\ ,\ \text{slope } \overline{MN} = \text{slope } \overline{AB} = -\frac{8}{5}$$

2) $M\,(12, 6)$, $N(14.5, 2)$, $\text{slope } \overline{MN} = \frac{2-6}{14.5-12} = -\frac{4}{2.5} = -\frac{8}{5}$

معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط

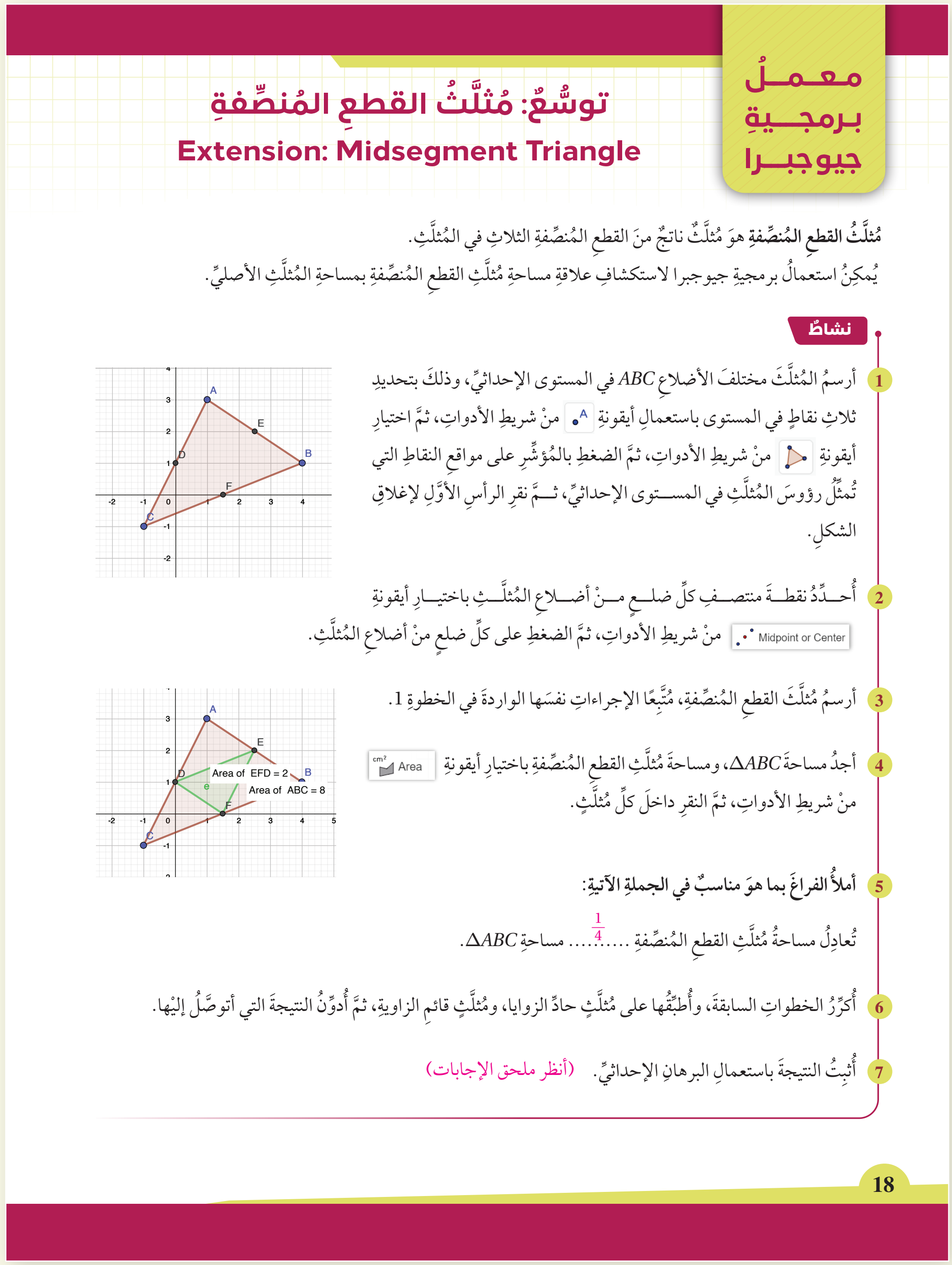
- استكشاف العلاقة بين مساحة مثلث القطع المنصّفة ومساحة المثلث الأصلي باستعمال برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أرافق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيوجبرا من الرابط الآتي:

https://www.geogebra.org/classic

- توفيرًا للوقت، يمكنني تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجانية على الحواسيب قبل بدء الحصة.
- أطلب إلى الطلبة اتباع التعليمات الواردة في الكتاب لتنفيذ الخطوات (1 – 5) من النشاط بالترتيب، والدقة اللازمة.
- أتابع عمل المجموعات وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أبيّن لهم كيف يمكنهم حفظ التمثيل البياني في ملف خاص بهم على الحاسوب بالنقر على أمر (print screen) في لوحة المفاتيح، ومن ثم لصق الصورة في المكان الذي يريدون حفظها فيه.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (1 – 5) على مثلث حادّ الزوايا وآخر قائم الزاوية، وتدوين النتيجة التي يتوصلون إليها، ثم أطلب إليهم كتابة برهان إحداثي للنتيجة التي يتوصلون إليها.
- أناقش النتيجة التي تتوصل إليها المجموعات والبرهان الإحداثي لها مع الصف كاملًا.



معمل برمجيةِ جيوجبرا

توسُّعٌ: مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ

Extension: Midsegment Triangle

مُثلَّثُ القطعِ المُنصِّفةِ هوَ مُثلَّثٌ ناتجٌ منَ القطعِ المُنصِّفةِ الثلاثِ في المُثلَّثِ.

يُمكِنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لاستكشافِ علاقةِ مساحةِ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ بمساحةِ المُثلَّثِ الأصليِّ.

نشاطٌ

1 أرسمُ المُثلَّثَ مختلفَ الأضلاعِ ABC في المستوى الإحداثيِّ، وذلكَ بتحديدِ ثلاثِ نقاطٍ في المستوى باستعمالِ أيقونةِ من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ اختيارِ أيقونةِ من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ بالمُؤشِّرِ على مواقعِ النقاطِ التي تُمثِّلُ رؤوسَ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ نقرِ الرأسِ الأوَّلِ لإغلاقِ الشكلِ.

2 أُحدِّدُ نقطةَ منتصفِ كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

3 أرسمُ مُثلَّثَ القطعِ المُنصِّفةِ، مُتَّبِعًا الإجراءاتِ نفسَها الواردةَ في الخطوةِ 1.

Area of EFD = 2

Area of ABC = 8

4 أجدُ مساحةَ ΔABC، ومساحةَ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ باختيارِ أيقونةِ Area منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ داخلَ كلِّ مُثلَّثٍ.

5 **أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجملةِ الآتيةِ:**

تُعادِلُ مساحةُ مُثلَّثِ القطعِ المُنصِّفةِ ...$\frac{1}{4}$... مساحةِ ΔABC.

6 أُكرِّرُ الخطواتِ السابقةَ، وأُطبِّقُها على مُثلَّثٍ حادِّ الزوايا، ومُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، ثمَّ أُدوِّنُ النتيجةَ التي أتوصَّلُ إليْها.

7 أُثبِتُ النتيجةَ باستعمالِ البرهانِ الإحداثيِّ. (أنظر ملحق الإجابات)

18

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعرُّف المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة.
- تعرُّف نظرية المنصّف العمودي وعكسها، واستعمالهما لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها.
- تعرُّف نظرية المنصّفات العمودية للمثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف الدائرة الخارجية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث.
- تعرُّف نظرية منصّف الزاوية وعكسها، واستعمالهما في إيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف نظرية منصّفات زوايا المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- تعرُّف الدائرة الداخلية للمثلث وأنّ مركزها هو نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها.
- إيجاد معادلة مستقيم باستعمال صيغة الميل والمقطع أو صيغة الميل ونقطة.
- حل معادلات خطية بمتغيّر واحد.
- إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة باستعمال المسطرة والفرجار.
- إنشاء منصّف الزاوية باستعمال المسطرة والفرجار.
- استخدام نظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية إذا عُلِم فيه طولا ضلعين.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 2

مُنصِّفاتٌ في المُثلَّثِ
Bisectors in Triangle

فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ نظريةِ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- تعرُّفُ نظريةِ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

المصطلحاتُ المُنصِّفُ العموديُّ، مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ، مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.

مسألةُ اليومِ يظهرُ في الصورةِ المُجاوِرةِ جزءٌ منْ جسرِ كمالِ الشاعرِ في العاصمةِ عمّانَ. إذا كانَتْ حافةُ الجسرِ عموديةً على الدعامةِ $\overline{BD}$، وكانَ $AD = CD$، فما العلاقةُ بينَ $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$؟

المُنصِّفُ العموديُّ

المُنصِّفُ العموديُّ (perpendicular bisector) لقطعةٍ مستقيمةٍ هوَ مستقيمٌ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ عندَ نقطةِ منتصفِها.

للمُنصِّفِ العموديِّ بعضُ الخصائصِ التي تُمثِّلُها النظريتانِ الآتيتانِ.

نظريتانِ — **المُنصِّفُ العموديُّ**

- **نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيِ القطعةِ المستقيمةِ.
مثالٌ: إذا كانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ $AX = BX$، لأيِّ نقطةٍ X على l.

- **عكسُ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:**
كلُّ نقطةٍ على بُعْدينِ متساويينِ منْ طرفيْ قطعةٍ مستقيمةٍ تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لتلكَ القطعةِ.
مثالٌ: إذا كانَ $AX = BX$، وكانَ l مُنصِّفًا عموديًّا لـ $\overline{AB}$، فإنَّ X تقعُ على l.

أتذكَّرُ
يشيرُ الرمزُ AB إلى طولِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$.

19

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إليهم حل الأسئلة الآتية:
  - » أجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث $A(0, -6), B(4, 8)$. $M(2, 1)$
  - » أجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة $C(2, 4)$ وميله يساوي 3 $y = 3x - 2$
  - » أجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $F(1, 5), G(-2, -1)$. $y = 2x + 3$
  - » أحل كلًّا من المعادلات الآتية:

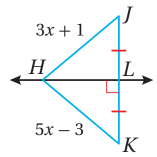
a. $x - 5 = 3x - 13$ $x = 4$ **b.** $2x + 1 = 4(x - 3)$ $x = 6.5$

c. $\frac{5x-7}{3} = x - 3$ $x = -1$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

مثال 1

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



1) طولَ $\overline{HJ}$.

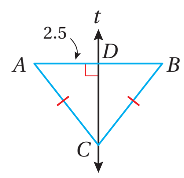
الخطوة 1: أجدُ قيمةَ x.

$HJ = HK$	نظريةُ المُنصِّفِ العموديِّ
$3x+1 = 5x-3$	بالتعويضِ
$x = 2$	بحَلِّ المعادلةِ لـِ x

الخطوة 2: أجدُ طولَ $\overline{HJ}$.

$HJ = 3(2)+1$	بتعويضِ $x = 2$
$= 7$	بالتبسيطِ

2) طولَ $\overline{AB}$.



بما أنَّ $AC = BC$، و t عموديٌّ على $\overline{AB}$، فإنَّ t مُنصِّفٌ عموديٌّ لـِ $\overline{AB}$ بحسبِ عكسِ نظريةِ المُنصِّفِ العموديِّ:

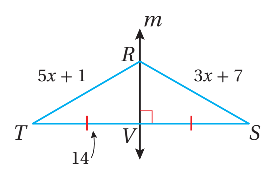
$AB = 2AD$	تعريفُ المُنصِّفِ العموديِّ
$= 2(2.5)$	بالتعويضِ
$= 5$	بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أنْ يكونَ $AC = BC$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ على أنَّ t هوَ مُنصِّفٌ عموديٌّ لـِ $\overline{AB}$.

أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



a) طولَ $\overline{TS}$. 28

b) طولَ $\overline{RS}$. 16

20

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما المضلّع الذي يظهر في واجهة الجسر؟ مثلث.
  - » ماذا تمثّل النقطة D بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $\overline{AC}$؟ ولماذا؟ نقطة منتصفها؛ لأن $AD = CD$.
  - » ماذا تمثّل الدعامة $\overline{BD}$ بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $\overline{AC}$؟ المنصّف العمودي لها.
  - » هل تتذكّرون طريقة إنشاء المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » ما العلاقة بين $\overline{AB}$، و $\overline{CB}$؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
  - » أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة مفهوم المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة، وأذكّرهم بطريقة إنشائه باستعمال المسطرة والفرجار، وأقدّم لهم خصائص المنصّف العمودي المتمثّلة بنظرية المنصّف العمودي وعكسها، بالاستعانة بصندوق (**نظريتان**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأحاورهم في مضمون صندوق (**أتعلّم**) الموجود في هامش الفرع 2 من المثال، وأبيّن لهم أنه لا بد من تحقّق شرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا عموديًّا للقطعة المستقيمة، هما: أن يكون عموديًّا عليها (يصنع معها زاوية قائمة)، وأن ينصّفها (يقسمها إلى قطعتين متطابقتين لهما الطول نفسه).
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

أخطاء شائعة:

قد يظنّ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط خطأً أنّ مستقيمًا ما هو المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة معطاة دون التحقق من وجود ما يؤكد ذلك من معطيات، فلا بد أن يمر ذلك المستقيم من نقطة منتصف القطعة (يمكن أن يدل على ذلك أطوال متساوية معطاة على الرسم أو إشارات متماثلة على القسمين اللذين انقسمت إليهما القطعة المستقيمة، أو نص صريح في متن السؤال)، وأن يكون متعامدًا مع تلك القطعة المستقيمة (يدل على ذلك وجود إشارة الزاوية القائمة عند نقطة التقاطع)، لذلك أوجّه الطلبة إلى ضرورة التحقق من الشرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا عموديًّا لقطعة مستقيمة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ أيِّ مستقيمٍ إذا عُلِمَ ميلُهُ ونقطةٌ يمرُّ بها. ومنْ ثَمَّ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ كما في المثالِ الآتي.

مثال 2

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, 4)$، و $Q(1, 2)$.

الخطوةُ 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ

$M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$

$M(0, 3)$ بالتبسيطِ

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ M الواقعةِ في منتصفِ $\overline{PQ}$، هما: $(0, 3)$.

الخطوةُ 2: أجدُ ميلَ المُنصِّفِ العموديِّ.

ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ القطعةِ المستقيمةِ نفسِها؛ لذا أجدُ أوَّلًا ميلَ القطعةِ المستقيمةِ:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{2-4}{1-(-1)}$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-1, 4), (x_2, y_2) = (1, 2)$

$= \frac{-2}{2} = -1$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ المُنصِّفِ العموديِّ هوَ سالبُ مقلوبِ ميلِ $\overline{PQ}$، ويساوي 1.

الخطوةُ 3: أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغةُ الميلِ ونقطةٍ

$y - 3 = 1(x - 0)$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 3), m = 1$

$y = x + 3$ بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ

إذنْ، معادلةُ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ هيَ: $y = x + 3$.

أتذكَّرُ

إذا تعامدَ مستقيمانِ كلٌّ منْهُما ليسَ رأسيًّا، فإنَّ حاصلَ ضربِ ميليهِما هوَ -1؛ أيْ إنَّ ميلَ أحدِهِما يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ الآخرِ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ كتابةُ معادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ إذا عُلِمَ ميلُ المستقيمِ وإحداثياتُ نقطةٍ يمرُّ بها.

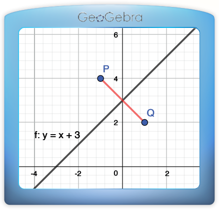
الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ معادلةِ المُنصِّفِ العموديِّ لقطعةٍ مستقيمةٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

1) أُحدِّدُ نقطتيْ نهايتي القطعةِ المستقيمةِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ A من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على موقعي النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.

2) أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ النقطتينِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Segment منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على النقطتينِ.

3) أختارُ أيقونةَ Perpendicular Bisector لإظهارِ المُنصِّفِ العموديِّ في المستوى الإحداثيِّ، وإظهارِ معادلتِهِ في شريطِ المعادلةِ.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$، حيثُ: $P(-1, -5)$، و $Q(3, -1)$.

$y = -x - 2$

المُنصِّفاتُ العموديةُ للمُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الخارجيةِ

إذا تلاقَتْ ثلاثةُ مستقيماتٍ أوْ أكثرُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ، فإنَّ هذهِ المستقيماتِ تُسمّى **مستقيماتٍ مُتلاقِيةً**، وتُسمّى النقطةُ التي تلتقي فيها المستقيماتُ **نقطةَ التلاقي**.

بما أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثةَ أضلاعٍ، فإنَّ لهُ ثلاثةَ مُنصِّفاتٍ عموديةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

مثال 2

- أناقش الطلبة في إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة عُلمت إحداثيات طرفيها بطرح الأسئلة الآتية:

» ماذا يلزم لكتابة معادلة مستقيم؟ ستتعدّد إجابات الطلبة وتتنوّع، ومنها: ميله ونقطة يمرّ بها؛ المقطع y ونقطة يمرّ بها؛ إحداثيات نقطتين يمرّ بهما.

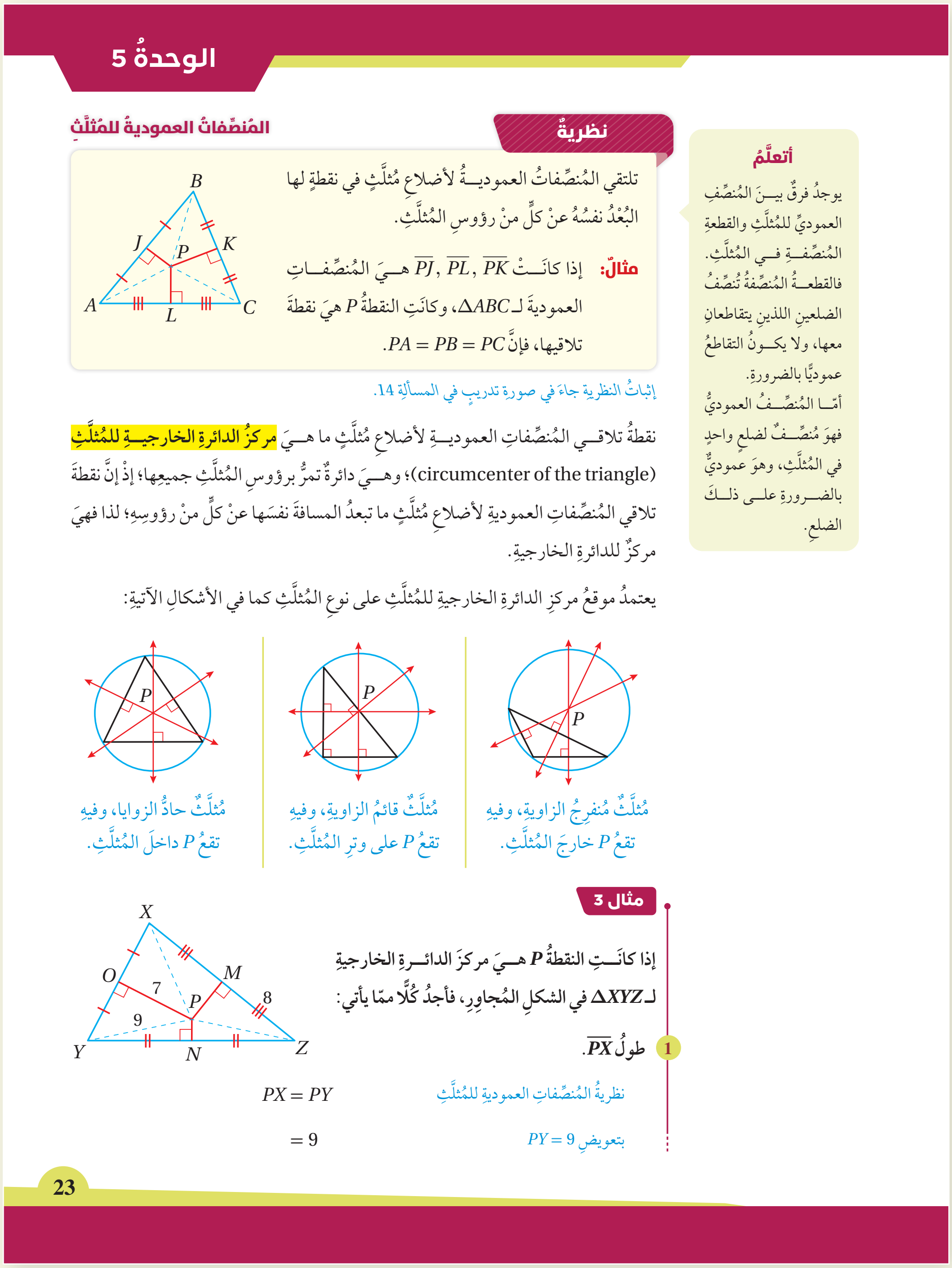
» إذا كانت $A(-2, 1), B(4, 9)$، فما إحداثيّا إحدى النقاط التي يمرّ بها المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ أسهل إجابة هي: نقطة منتصف القطعة؛ أي: النقطة $(1, 5)$.

» ما ميل $\overline{AB}$؟ $\frac{4}{3}$

» ما ميل المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ $-\frac{3}{4}$

» هل يمكن الآن كتابة معادلة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ ما معادلته؟ نعم؛ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$

- أناقش الطلبة في خطوات حل المثال 2 على اللوح، وأطلب إليهم تبرير كل خطوة.


الوحدةُ 5

نظريةٌ

المُنصِّفاتُ العموديةُ للمُثلَّثِ

تلتقي المُنصِّفاتُ العموديـةُ لأضلاعِ مُثلَّثٍ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِ المُثلَّثِ.

مثالٌ: إذا كانَـتْ $\overline{PJ}, \overline{PL}, \overline{PK}$ هــيَ المُنصِّفــاتِ العموديةَ لـ ΔABC، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PA = PB = PC$.

إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 14.

أتعلَّمُ

يوجدُ فرقٌ بيـنَ المُنصِّفِ العموديِّ للمُثلَّثِ والقطعةِ المُنصِّفـةِ فـي المُثلَّثِ. فالقطعـةُ المُنصِّفةُ تُنصِّفُ الضلعينِ اللذينِ يتقاطعانِ معها، ولا يكـونُ التقاطعُ عموديًّا بالضرورةِ. أمّـا المُنصِّـفُ العموديُّ فهوَ مُنصِّـفٌ لضلعٍ واحدٍ في المُثلَّثِ، وهوَ عموديٌّ بالضـرورةِ علـى ذلـكَ الضلعِ.

نقطةُ تلاقــي المُنصِّفاتِ العموديــةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما هــيَ **مركزُ الدائرةِ الخارجيــةِ للمُثلَّثِ** (circumcenter of the triangle)؛ وهــيَ دائرةٌ تمرُّ برؤوسِ المُثلَّثِ جميعِها؛ إذْ إنَّ نقطةَ تلاقي المُنصِّفاتِ العموديةِ لأضلاعِ مُثلَّثٍ ما تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ؛ لذا فهيَ مركزٌ للدائرةِ الخارجيةِ.

يعتمدُ موقعُ مركزِ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:

مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P على وترِ المُثلَّثِ.

مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

مثال 3

إذا كانَـتِ النقطةُ P هــيَ مركزَ الدائـرةِ الخارجيةِ لـ ΔXYZ في الشكلِ المُجاوِرِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 طولُ $\overline{PX}$.

$PX = PY$ نظريةُ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ

$= 9$ بتعويضِ $PY = 9$

23

إرشاد:

إنّ تعيين النقطتين في المستوى الإحداثي ورسم القطعة المستقيمة، وتحديد نقطة منتصفها، ورسم المنصّف العمودي لها على المستوى الإحداثي، يساعد الطلبة ويسهّل عليهم عملية إيجاد معادلة المنصّف العمودي.

نشاط التكنولوجيا

- أوضّح للطلبة طريقة إيجاد معادلة المنصّف العمودي لقطعة مستقيمة باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات الواردة في صندوق **(الدعم البياني)** الوارد في كتاب الطالب صفحة 22، ثم أطلب إليهم حل المثال 2 باستعمال البرمجية، ومقارنة الإجابة التي يحصلون عليها مع الإجابة بالحل اليدوي الجبري.

مثال إضافي

أجد معادلة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة التي أُعطيَ طرفاها في كلّ ممّا يأتي:

1 $F(2, 6), G(4, 6)$ $\quad x = 3$

2 $A(3, -5), B(3, 7)$ $\quad y = 1$

3 $R(8, 0), S(4, -2)$ $\quad y = -2x + 11$

2 طولُ $\overline{PM}$.

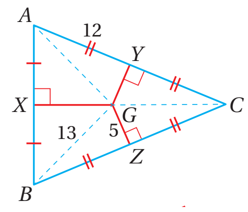
نظريةُ فيثاغورس	$(PX)^2 = (MX)^2 + (PM)^2$
بتعويضِ $PX = 9, MX = 8$	$(9)^2 = (8)^2 + (PM)^2$
بإيجادِ القوى	$81 = 64 + (PM)^2$
بطرحِ 64 منْ طرفيِ المعادلةِ	$(PM)^2 = 17$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفيِ المعادلةِ	$PM = \pm\sqrt{17}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $PM = \sqrt{17}$.

أتذكَّرُ

بالرجوعِ إلى تعريفِ المُنصِّفِ العموديِّ، فإنَّ: $MX = ZM = 8$

أتحقَّقُ منْ فهمي



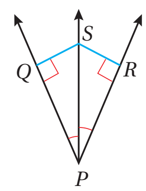
إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـΔABC في الشكلِ المُجاوِرِ، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) طولُ $\overline{AG}$. 13 **b)** طولُ $\overline{GY}$. 5

c) طولُ $\overline{CZ}$. 12

مُنصِّفُ الزاويةِ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مُنصِّفَ الزاويةِ شعاعٌ يُقسِّمُ الزاويةَ إلى زاويتينِ مُتطابِقتينِ، وتعلَّمْتُ أيضًا أنَّ البُعْدَ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليْهِ هوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديةِ على المستقيمِ منْ تلكَ النقطةِ. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $\overrightarrow{PS}$ في الشكلِ المُجاوِرِ مُنصِّفٌ لـ$\angle QPR$، وإنَّ البُعْدَ بينَ النقطةِ S و $\overrightarrow{PQ}$ هوَ SQ.



رموزٌ رياضيةٌ

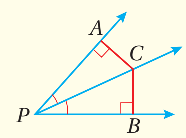
يُستعمَلُ الرمزُ $\overrightarrow{PS}$ للدلالةِ على الشعاعِ الذي يبدأُ بالنقطةِ P، ويمرُّ بالنقطةِ S.

نظريتانِ

مُنصِّفُ الزاويةِ

- **نظريةُ مُنصِّفِ الزاويةِ:**

كلُّ نقطةٍ على مُنصِّفِ الزاويةِ تكونُ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها.

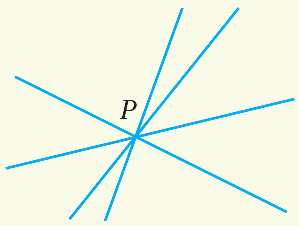


مثالٌ: إذا كانَ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفًا لـ$\angle APB$، وكانَ $\overline{CA} \perp \overrightarrow{PA}, \overline{CB} \perp \overrightarrow{PB}$، فإنَّ $CA = CB$.

24

مثال 3

- أوضّح للطلبة مفهوم المستقيمات المتلاقية ونقطة التلاقي، فالشكل الآتي يبيّن أربعة مستقيمات متلاقية، ونقطة تلاقيها هي P.



- أبيّن للطلبة أن للمثلث ثلاثة منصّفات عمودية لأضلاعه تلتقي في نقطة واحدة، وأوضّح لهم خاصية هذه النقطة كما وردت في نظرية المنصّفات العمودية للمثلث، ثم أبيّن لهم أن هذه النقطة تمثّل مركز الدائرة الخارجية التي تمرّ بروؤس المثلث، وأستعرض الحالات الثلاث لموقع هذا المركز تبعًا لنوع المثلث (حادّ الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية) بالاستعانة **بورقة المصادر 4: مركز الدائرة الخارجية للمثلث.**
- أوضّح للطلبة كيفية استعمال نظرية المنصّفات العمودية للمثلث لحساب قياسات مجهولة عن طريق مناقشتهم في حل فرعي المثال 3، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد:

إذا توفّر جهاز عرض (Data Show) فيمكن عرض الأشكال التي توضّح موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث تبعًا لنوع المثلث من كتاب الطالب صفحة 23.

مثال 4

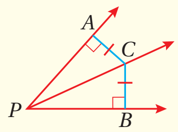
- أذكّر الطلبة بمفهوم منصّف الزاوية الذي تعلّموه سابقًا في الصف السادس، وأذكّرهم أيضًا بطريقة إنشائه باستعمال المسطرة والفرجار فقط.
- أقدّم للطلبة نظرية منصّف الزاوية وعكس نظرية منصّف الزاوية الواردتين في صندوق **(نظريتان)** الوارد في كتاب الطالب، واللتين تبيّنان خصائص منصّف الزاوية.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4، وأحاورهم في محتويات صندوق **(أتعلّم)** الوارد في هامش المثال 4، وأبيّن لهم أنه لا بد من تحقّق شرطين حتى يُعَدّ المستقيم منصّفًا للزاوية، هما: أن تكون القطعتان المستقيمتان المرسومتان من أي نقطة عليه إلى ضلعي الزاوية متطابقتين، وأن تعامد كل منهما ضلع الزاوية المرسومة إليه (تصنع معه زاوية قائمة).
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- في المثال 4، ألفت انتباه الطلبة إلى عدم وضع رمز الدرجة على قيمة x؛ لأنّها لا تمثّل قياس الزاوية.
- في سؤال **(أتحقّق من فهمي)** الذي يلي المثال 4، يُستدَل على أن الشعاع EQ مُنصِّف للزاوية AER من الإشارات الموضوعة على كل من الزاويتين AEQ و REQ.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة في أثناء حل أسئلة شبيهة بالمثال 4 بالتوقف عند إيجاد قيمة x، وينسون أن المطلوب في السؤال هو إيجاد قياس الزاوية؛ ولتجنُّب مثل هذا الخطأ ألفت نظر الطلبة إلى الانتباه جيدًا للمطلوب في كل سؤال يحلّونه؛ للتأكد من إجابتهم عن المطلوب فيه.

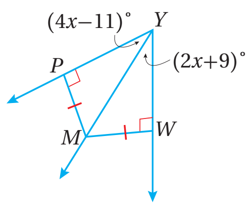


- **عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ:**

إذا وقعَتْ نقطةٌ داخلَ زاويةٍ، وكانَتْ على بُعْدينِ متساويينِ منْ ضلعيْها، فإنَّها تقعُ على مُنصِّفِ الزاويةِ.

مثالٌ: إذا كانَ $\overrightarrow{PB} \perp \overline{CB}$, $\overrightarrow{PA} \perp \overline{CA}$, $CA = CB$، فإنَّ $\overrightarrow{PC}$ مُنصِّفٌ لـ $\angle APB$.

مثال 4



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ $m\angle PYM$.

الخطوة 1: أجدُ قيمةَ x.

$\angle PYM \cong \angle WYM$	عكسُ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ
$m\angle PYM = m\angle WYM$	تعريفُ تطابقِ الزوايا
$4x - 11 = 2x + 9$	بالتعويضِ
$x = 10$	بحَلِّ المعادلةِ لـ x

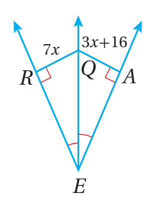
الخطوة 2: أجدُ $m\angle PYM$.

$m\angle PYM = (4x - 11)^\circ$	معطى
$= (4(10) - 11)^\circ$	بتعويضِ $x = 10$
$= 29^\circ$	بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أنْ يكونَ $MP = MW$ لا يُعَدُّ شرطًا كافيًا للحكمِ على أنَّ $\overrightarrow{YM}$ هوَ مُنصِّفٌ لـ $\angle PYW$، وإنَّما يُشترَطُ أنْ يكونَ $\overline{YW} \perp \overline{MW}$، و $\overline{YP} \perp \overline{MP}$.

أتحقَّقُ من فهمي



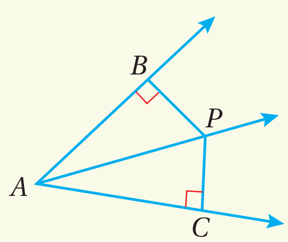
أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ QA. 28

مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ، ومركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ

بمـا أنَّ للمُثلَّثِ ثلاثَ زوايا، فإنَّ لهُ ثلاثـةَ مُنصِّفاتٍ للزوايا تلتقي في نقطـةٍ واحدةٍ كما تُبيِّنُ النظريةُ الآتيةُ.

مثال إضافي

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور للإجابة عن السؤالين الآتيين:

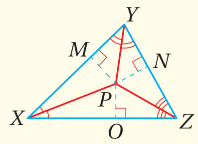


1. إذا كان: $PB = PC = 8$، وكان: $m\angle BAP = 39^\circ$، فما قياس $\angle BAC$؟ 78°
2. إذا كان $\overrightarrow{AP}$ منصّفًا للزاوية $\angle BAC$، وكان: $PB = 2x + 7, PC = 5x - 20$ ، فما طول $\overline{PC}$؟ 25

نظريةٌ: مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ

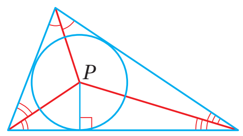
تلتقي مُنصِّفاتُ زوايا المُثلَّثِ في نقطةٍ لها البُعْدُ نفسُهُ عنْ كلٍّ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

مثالٌ: إذا كانَتْ $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ هيَ مُنصِّفاتِ زوايا ΔXYZ، وكانَتِ النقطةُ P هيَ نقطةَ تلاقيها، فإنَّ $PM = PN = PO$.



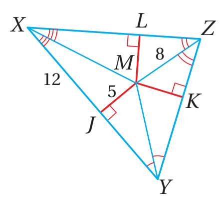
إثباتُ النظريةِ جاءَ في صورةِ تدريبٍ في المسألةِ 15.

نقطةُ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ هيَ **مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ** (incenter of the triangle)؛ وهيَ دائرةٌ تمسُّ أضلاعَ المُثلَّثِ جميعَها؛ ذلكَ أنَّ نقطةَ تلاقي مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ تبعدُ المسافةَ نفسَها عنْ كلٍّ منْ أضلاعِهِ؛ ما يعني أنَّها مركزُ الدائرةِ الداخليةِ.



مثال 5

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ LZ.



نظريةُ فيثاغورس	$(MZ)^2 = (LM)^2 + (LZ)^2$
بتعويضِ $MZ = 8, LM = MJ = 5$	$(8)^2 = (5)^2 + (LZ)^2$
بإيجادِ القوى	$64 = 25 + (LZ)^2$
بطرحِ 25 منْ طرفيِ المعادلةِ	$(LZ)^2 = 39$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفيِ المعادلةِ	$LZ = \pm\sqrt{39}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $LZ = \sqrt{39}$.

أتذكَّرُ

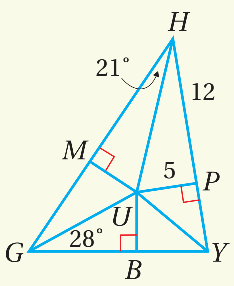
$LM = MJ$ بحسبِ نظريةِ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ.

مثال 5

- أوضّح للطلبة أنه توجد للمثلث ثلاثة منصّفات لزواياه تلتقي في نقطة واحدة تبعد البُعد نفسه عن كل من أضلاعه الثلاثة، وهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث التي تمسّ أضلاعه الثلاثة.
- أناقش الطلبة في الشكل المجاور في المثال 5 بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يظهر في هذا الشكل؟ مثلث وثلاثة منصّفات زواياه، وثلاثة أعمدة من نقطة تلاقي المنصّفات إلى كل من أضلاع المثلث.
  - » كيف عرفت أن $\overline{XM}, \overline{ZM}, \overline{YM}$ هي منصّفات لزوايا المثلث؟ من الإشارات المتماثلة على قسمي كل من زوايا المثلث.
  - » ماذا نستنتج من ذلك؟ أن النقطة M تبعد البُعد نفسه عن كل من أضلاع المثلث، وهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وأن $ML = MK = MJ$
- أناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأؤكّد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي

إذا كانت U مركز الدائرة الداخلية للمثلث HGY، فأستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لإيجاد كل ممّا يأتي:



1. $m\angle UGM$ 28°
2. $m\angle UYB$ 41°
3. HU 13
4. HM 12

إرشاد: أوجّه الطلبة إلى ضرورة التحقّق من منصّفات المثلث دائمًا، ووجود ما يدل على أن مستقيمًا ما هو منصّف عمودي لأحد أضلاع المثلث، أو منصّف لإحدى زواياه، قبل البدء في الحل.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

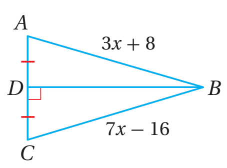
أتحقّقُ من فهمي

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الواردِ في المثالِ 5 لإيجادِ XL. 12

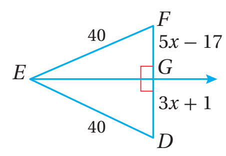
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

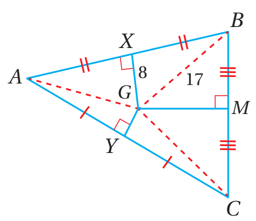
1) AB 26



2) FG 28



أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



3) GA 17

4) AX 15

5) AB 30

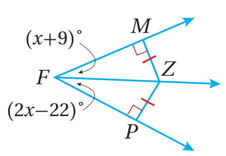
أجدُ معادلةَ المُنصِّفِ العموديِّ للقطعةِ المستقيمةِ $\overline{PQ}$ المعطى نهايتاها في كلٍّ ممّا يأتي:

6) $P(-2, 0), Q(6, 12)$ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}$

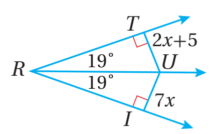
7) $P(-7, 5), Q(1, -1)$ $y = \frac{4}{3}x + 6$

أجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:

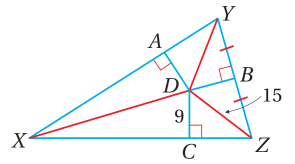
8) $m\angle MFZ$ 31°



9) TU 7



إذا كانَــتِ النقطةُ D هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔXYZ، فأجدُ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



10) DB 9

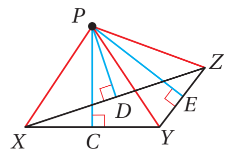
11) CZ 12

12) YZ 24

13) إذا كانَــتِ النقطةُ P هيَ مركــزَ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔXYZ، فأســتعملُ المعلومةَ المعطاةَ تاليًا لإيجادِ PY. 31

$PX = 4x + 3$

$PZ = 6x - 11$



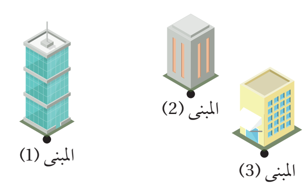
أُثبِتُ كُلًّا منَ النظريتينِ الآتيتينِ:

14) نظريةُ المُنصِّفاتِ العموديةِ للمُثلَّثِ. أنظر الهامش.

15) نظريةُ مُنصِّفاتِ زوايا المُثلَّثِ. أنظر ملحق الإجابات.

16) **اتصالاتٌ:** ترغبُ شــركةُ اتصالاتٍ في بناءِ بُرْجٍ للبثِّ على أبعادٍ متســاويةٍ منْ ثلاثةِ مبانٍ كبيرةٍ. أُوضِّحُ كيفَ يُمكِنُ استعمالُ الشكلِ الآتي لتحديدِ موقعِ البُرْجِ.

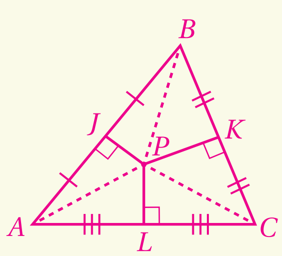
أرســم مثلثًا يقع كل رأس من رؤوســه عند مبنى من المباني ثم أنشــئ أعمــدة منصّفة لأضــلاع المثلث فتلتقــي الأعمدة في نقطة واحدة تكــون مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلــث، فيوضــع البرج عنــد نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.



17) أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.
$\overline{CB} \cong \overline{AB}$ ؛ لأن B تقع على المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AC}$ فهي تبعد البُعد نفسه عن طرفيها.

28

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):



14) المعطيــات: $\overline{PK}, \overline{PJ}, \overline{PL}$ هــي المنصّفات العمودية لأضلاع المثلث ABC.

المطلوب: إثبات أنّ: $PA = PB = PC$

البرهان: بمــا أن النقطــة P واقعة علــى المنصّف العمــودي للضلع $\overline{AB}$، فإنهــا تبعد البُعد نفسه عن A، و B أي أنّ $PA = PB$.

وبما أن P تقع على المنصّف العمودي للضلع $\overline{AC}$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن A، و C أي أنّ $PA = PC$ إذن، $PA = PB = PC$.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 – 19).
- أرصد أيّة أفكار غيــر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشــاد: في الســؤال 19 (**أكتشف الخطــأ**)، أذكّر الطلبــة بنظرية منصّف الزاوية وما يترتّب عليها؛ لمساعدتهم على تحديد الخطأ في ما قالته أحلام.

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17, 19 كتاب التمارين: (1 – 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 14, 18, 21 كتاب التمارين: (4 – 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 15, (21 – 23) كتاب التمارين: (7 – 9)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

أجد إحداثيّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث ABC حيث: $A(0, 0), B(8, 0), C(2, 4)$. $(4, 0.5)$

أنظر ملحق الإجابات.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (6 – 3) من خطوات تنفيذ المشروع.

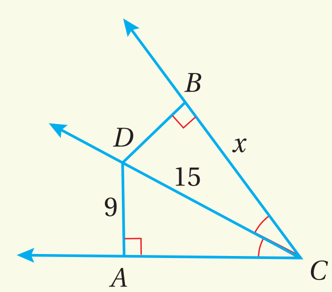
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤالين الآتيين إليهم:

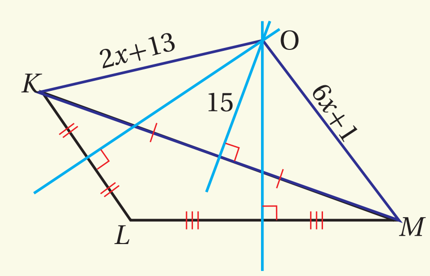
» ماذا تُسمّى الدائرة التي تمرّ بـرؤوس المثلث ABC؟ وما هو مركزها؟ الدائرة الخارجية للمثلث ABC، ومركزها هو نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

» أجد الطول المطلوب في كل من الشكلين الآتيين:

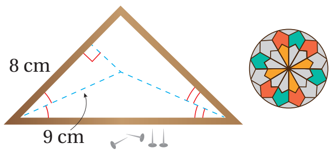
1 BC 12



2 OM 19



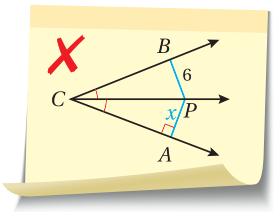
18 يريدُ فنّانٌ أنْ يضعَ قطعةً دائريةً منَ الزجاجِ المُلوَّنِ داخلَ إطارٍ على شكلِ مُثلَّثٍ أبعادُهُ مُبيَّنةٌ في الشكلِ المُجاوِرِ، وأنْ يجعلَ الزجاجَ يُلامِسُ كُلًّا منْ جوانبِ الإطارِ. أجدُ طولَ قُطْرِ قطعةِ الزجاجِ الدائريةِ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



أنظر ملحق الإجابات.

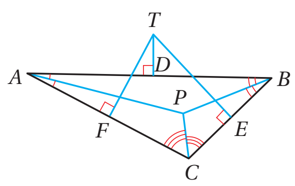
مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** قالَتْ أحلامُ: "قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ 6 بحسبِ نظريةِ مُنصِّفِ الزاويةِ". أكتشفُ الخطأَ في قولِ أحلامَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



الخطأ أنّ $\overline{PB}$ لا يعامد $\overline{CB}$، وبالرغم من أنّ $\overline{CP}$ منصّف للزاوية $\angle BCA$، فلا يصح تطبيق نظرية منصّف الزاوية؛ لأن $\overline{PB}$ لا يعامد $\overline{CB}$.

تبريرٌ: إذا كانَتِ النقاطُ: D، وE، و F هيَ مُنصِّفاتِ أضلاعِ ΔABC في الشكلِ المُجاوِرِ، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:



20 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ الدائرةِ المارَّةِ بالنقاطِ: A، وB، وC؟

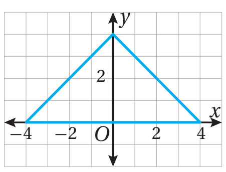
T ؛ لأنّها ملتقى الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

21 أيُّ نقاطِ الشكلِ هيَ مركزُ دائرةٍ تمسُّ كلَّ ضلعٍ منْ أضلاعِ ΔABC؟

P ؛ لأنّها ملتقى منصّفات زوايا المثلث.

22 إذا كانَ $TA = 8.2$، فما طولُ $\overline{TC}$؟

8.2؛ لأن $\overline{TA}$، $\overline{TC}$ نصفا قطرين في الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث ABC.



23 **تحدٍّ:** أجدُ مركزَ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ. أنظر الهامش.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

23) المحور y هو المنصّف العمودي لقاعدة هذا المثلث، ويقسمه إلى مثلثين قائمي الزاوية متطابقين، وكل منهما متطابق الضلعين، إذن، قياس الزاوية الحادة في كل منهما يساوي $45°$

إذن، قياس زاوية الرأس الواقع على المحور y في المثلث الكبير هو:

$$45° + 45° = 90°$$

أي أن المثلث الكبير قائم الزاوية، ومن ثم فمركز دائرته الخارجية الذي يمثّل نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاعه هو نقطة منتصف وتره، وهي هنا نقطة الأصل: $(0, 0)$.

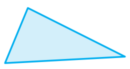
نشـــاط مفاهيمي

القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ
Medians of Triangle

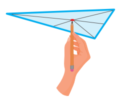
الهدفُ: استكشــافُ العلاقةِ بينَ طولِ القطعةِ المســتقيمةِ الواصلةِ بيــنَ رأسِ المُثلَّثِ ونقطةِ تــوازنِ المُثلَّثِ، وطولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطةِ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لها.

نشاط 1

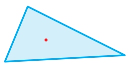
الخطوةُ 1: أرسمُ مُثلَّثًا على قطعةٍ منَ الورقِ المُقــوّى، ثــمَّ أقصُّهُ.



الخطوةُ 2: أضعُ المُثلَّثَ على قلمِ الرصاصِ، ثمَّ أعدِّلُ موقعَهُ حتّى يتوازنَ.

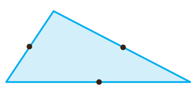


الخطوةُ 3: أحـدِّدُ نقطةَ توازنِ المُثلَّثِ، ثمَّ أضعُ علامةً عندَها.

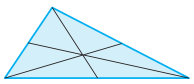


نشاط 2

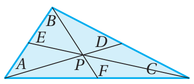
الخطوةُ 1: أســتعملُ المســطرةَ لتحديــدِ نقطةِ المنتصفِ لكلٍّ مــنْ أضلاعِ المُثلَّثِ الذي رسمْتُهُ في النشاطِ 1.



الخطوةُ 2: أرســمُ قطعةً مســتقيمةً تصــلُ بينَ كلِّ منتصــفِ ضلــعٍ ورأسِ المُثلَّثِ المُقابِلِ لهُ.



الخطوةُ 3: أُسمّي المُثلَّثَ كما في الشكلِ الآتي.



أحلّلُ النتائجَ:

1 مــا العلاقةُ بينَ النقطــةِ P في النشــاطِ 2 ونقطةِ توازنِ المُثلَّثِ في النشاطِ 1؟ هي نفسها.

2 أستعملُ المسطرةَ لأملأَ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

$AD =$ ___	$BF =$ ___	$CE =$ ___
$AP =$ ___	$BP =$ ___	$CP =$ ___
$PD =$ ___	$PF =$ ___	$PE =$ ___

أنظر قياسات الطلبة.

3 ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المســتقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والنقطةِ P؟ النسبة $2:1$

4 ما النسبةُ بينَ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ المُثلَّثِ والنقطةِ P، وطولِ القطعةِ المســتقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفِ ضلعِ المُثلَّثِ والرأسِ المُقابِلِ لهُ؟ النسبة $2:3$

30

هدف النشاط

استكشــاف العلاقة بين طول القطعة المســتقيمة الواصلة بين رأس المثلــث ونقطة توازن المثلــث، وطول القطعة المســتقيمة الواصلــة بين نقطــة منتصف ضلــع المثلث والرأس المقابل لها.

خطوات العمل:

- أقسّـم الطلبـة إلـى مجموعـات رباعيـة، وأزوّد كل مجموعة بالمواد والأدوات اللازمة لتنفيذ النشاط.
- أطلـب إلـى المجموعات تنفيـذ خطوات النشـاط 1، وتحديد نقطة توازن المثلث.
- أطلـب إلـى المجموعات تنفيـذ خطوات النشـاط 2، وأسألهم عمّا يلاحظونه عند تنفيذ هذا النشاط.
- أتابع المجموعات أثناء تنفيذ النشاط؛ للتأكد من أنهم يقومون بالعمل بطريقة صحيحة ودقيقة، وأساعد من يحتاج إلى مساعدة.
- أطلـب إلـى المجموعات الإجابة عن الأسـئلة في بند **(أحلّـل النتائج)**، ثـم أناقش إجابات هذه الأسـئلة مع الصف كاملًا.
- أطلب إلى أحد الطلبة كتابة النتيجة النهائية للنشاط في مكان بارز على اللوح.

إرشادات:

- يمكـن تحضير مجموعة من مثلثات متنوّعة من الورق المقوّى قبل النشاط، يقصّها الطلبة في منازلهم.
- يمكن تخصيص 20 دقيقة من وقت الحصة لهذا النشاط، وبعد الانتهـاء منه أتابع السـير في مهـام الدرس 3 (القطـع المنصّفة والارتفاعات في المثلث).

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف القطعة المتوسطة في المثلث، ومركز المثلث.
- تعرُّف نظرية مركز المثلّث، واستعمالها لإيجاد قياسات مجهولة.
- إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.
- تعرُّف ارتفاع المثلث وملتقى ارتفاعاته.
- إيجاد ملتقى ارتفاعات المثلث في المستوى الإحداثيّ.

نتاجات التعلّم القبلي:

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- كتابة معادلة المستقيم المارّ بنقطتين معلومتين.
- حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيّرين بالحذف أو التعويض.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

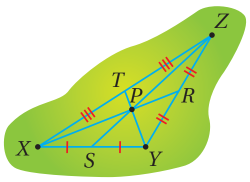
الدرس 3

القطعُ المُتوسِّطةُ والارتفاعاتُ في المُثلَّثِ
Medians and Altitudes in Triangle

فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ نظريةِ مركزِ المُثلَّثِ، واستعمالُها لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.
- إيجادُ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ في المستوى الإحداثيِّ.

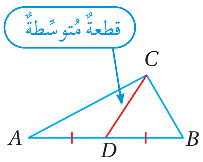
المصطلحاتُ القطعةُ المُتوسِّطةُ للمثلثِ، مركزُ المُثلَّثِ، ارتفاعُ المُثلَّثِ، ملتقى الارتفاعاتِ.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ النقطةُ P في الشكلِ المُجاوِرِ موقعَ مستشفى حكوميٍّ في إحدى المحافظاتِ الأردنيةِ، وتُمثِّلُ النقاطُ الأُخرى في الشكلِ عددًا منَ المناطقِ السكنيةِ القريبةِ منْهُ. إذا كانَ بُعْدُ المنطقةِ S عنِ المنطقةِ Z هوَ 8 km، فما بُعْدُ المستشفى عنِ المنطقةِ Z؟



القطعُ المُتوسِّطةُ في المُثلَّثِ

القطعةُ المُتوسِّطةُ للمُثلَّثِ (median of triangle) هيَ القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ بينَ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.

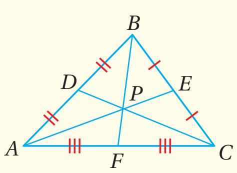


لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثُ قطعٍ مُتوسِّطةٍ تلتقي في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى **مركزَ المُثلَّثِ** (centroid)، وكنْتُ قدْ توصَّلْتُ في النشاطِ المفاهيميِّ الذي يسبقُ هذا الدرسَ إلى أنَّها نقطةُ اتِّزانِ المُثلَّثِ.

أتعلَّمُ يقعُ مركزُ المُثلَّثِ دائمًا داخلَ المُثلَّثِ.

نظريةٌ **مركزُ المُثلَّثِ**

يبعدُ مركزُ المُثلَّثِ عنْ كلٍّ منْ رؤوسِهِ ثلثيْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.



مثالٌ: إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ ΔABC، فإنَّ:

$$AP = \frac{2}{3}AE,\ BP = \frac{2}{3}BF,\ CP = \frac{2}{3}CD$$

أتعلَّمُ نسبةُ بُعْدِ مركزِ المُثلَّثِ عنِ الرأسِ إلى بُعْدِهِ عنْ منتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ هيَ 2:1

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

» **أجد المسافة بين كل نقطتين ممّا يأتي:**

a. $F(2, 7)$, $G(2,10)$ 3 **b.** $R(3, 11)$, $S(-5, 5)$ 10

» **أجـد إحداثيّي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ التي أُعطيت إحداثيات طرفيها في كل ممّا يأتي:**

a. $A(0, -3)$, $B(6, -7)$ $(3, -5)$ **b.** $A(5, 8)$, $B(3, -10)$ $(4, -1)$

» أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $P(-2, 3)$, $Q(0, 11)$ $y = 4x + 11$

» **أحل نظام المعادلات في كل ممّا يأتي:**

a. $2x - y = 7$, $-x + y = -3$
$x = 4$, $y = 1$

b. $y = 2x + 3$, $5x - 2y = -8$
$x = -2$, $y = -1$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ماذا تمثّل النقطة S بالنسبة إلى $\overline{XY}$ في الشكل؟ نقطة منتصفها.

» ما القطع المستقيمة في الشكل التي تصل بين أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل له؟ ZS, YT, XR

» ماذا يُلاحَظ على هذه القطع المستقيمة؟ أنها تتلاقى في نقطة واحدة هي النقطة P.

» ماذا تمثّل النقطة P بالنسبة إلى المثلث XYZ تبعًا لما وجدناه في النشاط المفاهيمي الذي سبق هذا الدرس؟ نقطة التوازن.

» ما بُعد المستشفى عن المنطقة Z؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

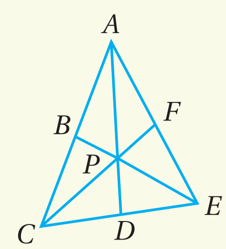
» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة أن القطعة المستقيمة التي تصل بين رأس مثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل له تُسمّى القطعة المتوسطة، وأنه يوجد لكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة واحدة تُسمّى "مركز المثلث" والتي سبق أن أُطلِق عليها في النشاط المفاهيمي الذي يسبق هذا الدرس اسم "نقطة توازن المثلث".
- أذكّر الطلبة بنتيجة النشاط المفاهيمي الذي سبق هذا الدرس، ثم أقدّم لهم نظرية مركز المثلث بالاستعانة بصندوق (**نظرية**) الوارد في كتاب الطالب، وأوجّه بعض الأمثلة البسيطة لإيجاد طولي جزأي القطعة المتوسطة.
- أقدّم للطلبة المثال الآتي:

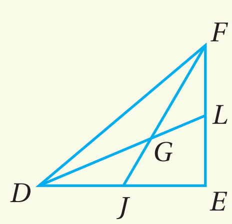


إذا كانت النقطة P مركز المثلث المجاور، وكان $CF = 12$ cm، فأجد CP, PF.

$PF = 4$ cm , $CP = 8$ cm

- أُعطي أطوال قطع أخرى في هذا المثلث، وأطلب إيجاد أطوال قطع مُرتبطة بها.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأحاورهم في ما تتضمّنه الصناديق الهامشية؛ لما لها من أهمية في مساعدتهم على حلّ أفرع السؤال وأسئلة أخرى.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

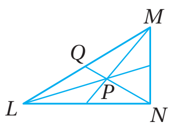
مثال إضافي



إذا كان G مركز المثلث FDE المجاور، وكان: $FJ = \frac{13x+1}{4}$، و $GJ = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$، فأجد FJ. 6.75

مثال 1

إذا كانت النقطة P هيَ مركز ΔLMN، وكانَ $NQ = 30$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



1) طولُ $\overline{NP}$.

$NP = \frac{2}{3} NQ$ نظريةُ مركزِ المُثلَّثِ

$= \frac{2}{3}(30)$ بتعويضِ $NQ = 30$

$= 20$ بالتبسيطِ

2) طولُ $\overline{PQ}$.

$NP + PQ = NQ$ مسلّمةُ جمعِ القطعِ المستقيمةِ

$20 + PQ = 30$ بتعويضِ $NQ = 30, NP = 20$

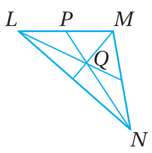
$PQ = 10$ بطرحِ 20 منْ طرفَي المعادلةِ

أتعلَّمُ

$PQ = \frac{1}{3} NQ$

أتحقَّقُ من فهمي

إذا كانتِ النقطةُ Q هيَ مركزَ ΔLMN، وكانَ $NP = 20$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



a) طولُ $\overline{NQ}$. $NQ = \frac{2}{3}$ $NP = \frac{40}{3}$

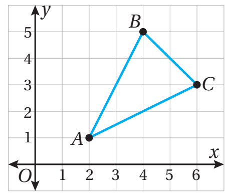
b) طولُ $\overline{QP}$. $\frac{20}{3}$

يُمكِنُ إيجادُ مركزِ أيِّ مُثلَّثٍ في المستوى الإحداثيِّ إذا عُلِمَتْ إحداثياتُ رؤوسِهِ.

مثال 2

يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.

أجدُ إحداثيَيْ مركزِ هذا المُثلَّثِ.

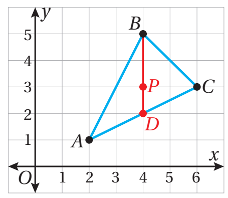


الخطوةُ 1: أجدُ نقطةَ منتصفِ أحدِ أضلاعِ المُثلَّثِ.

أستعملُ صيغةَ نقطةِ المنتصفِ لإيجادِ منتصفِ $\overline{AC}$، ولتكنْ D:

صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ	$D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
بتعويضِ $(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (6, 3)$	$D\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$
بالتبسيطِ	$D(4, 2)$

الخطوةُ 2: أجدُ مركزَ المُثلَّثِ.



- أُعيِّنُ النقطةَ D في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ $\overline{DB}$.
- أُلاحِظُ أنَّ $\overline{DB}$ رأسيةٌ، وأنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِها على النحوِ الآتي:

صيغةُ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ رأسيةٍ	$DB = \lvert y_2 - y_1 \rvert$
بالتعويضِ $y_1 = 2, y_2 = 5$	$= \lvert 5 - 2 \rvert$
بالتبسيطِ، وإيجادِ القيمةِ المُطلَقةِ	$= 3$

إذنْ، طولُ $\overline{DB}$ هوَ 3 وحداتٍ.

- أفترضُ أنَّ النقطةَ P هيَ مركزُ ΔABC. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ $BP = \frac{2}{3} DB$؛ لذا يقعُ المركزُ على بُعْدِ $\frac{2}{3}(3) = 2$ وحدةٍ أسفلَ الرأسِ B.

إذنْ، إحداثيّا مركزِ هذا المُثلَّثِ (إحداثيّا النقطةِ P) هما: $(4, 3)$.

أتعلَّمُ

يُمكِنُ إيجادُ طولِ القطعةِ المُتوسِّطةِ $\overline{DB}$ بسهولةٍ؛ لأنَّها رأسيةٌ، ولأنَّ الضلعَ $\overline{AC}$ هوَ الذي اختيرَ في بادئِ الأمرِ؛ ما يعني أنَّ اختيارَ الضلعِ المناسبِ للمُثلَّثِ يُسهِّلُ أحيانًا إجراءاتِ الحَلِّ.

أتعلَّمُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ باستعمالِ قطعةٍ مُتوسِّطةٍ أُخرى لإيجادِ مركزِ المُثلَّثِ.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

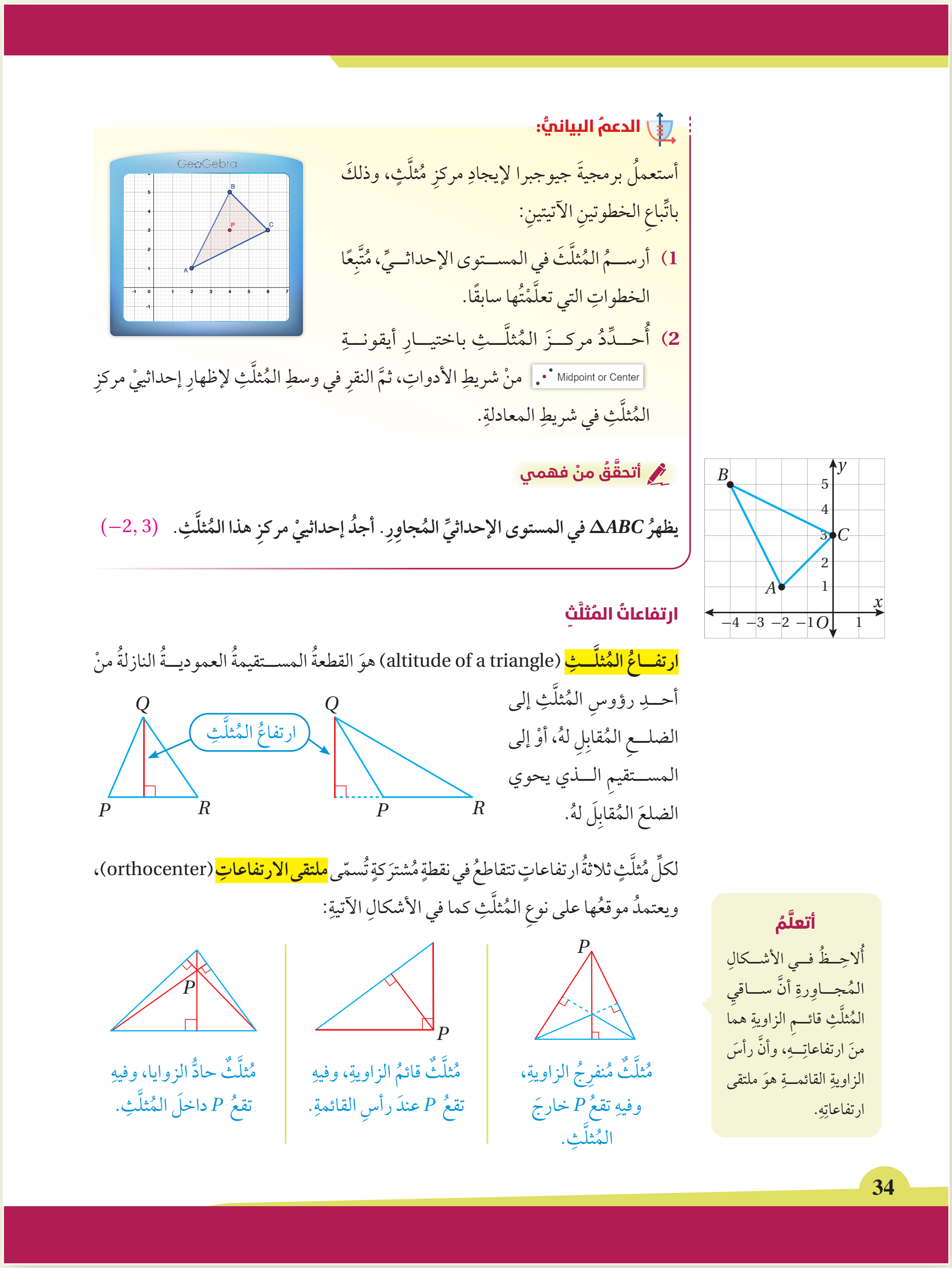
مثال 2

- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه برسم المثلث، وتعيين نقطة منتصف أحد الأضلاع ورسم القطعة المتوسطة التي تصل نقطة المنتصف مع الرأس المقابل لها، وحساب طولها ثم تحديد المركز بحيث يبعد عن الرأس ثُلُثي طول تلك القطعة المتوسطة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2، بالخطوات المذكورة في الكتاب، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

إرشاد: أناقش الطلبة فيما تتضمّنه الصناديق الهامشية مقابل المثال 2؛ لما لها من أهمية في حل الأسئلة المشابهة.

مثال إضافي

أجد إحداثيي مركز المثلث الذي رؤوسه هي: $A(5, 7), B(9, -3), C(13, 2)$. $(9, 2)$



الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ مركزِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

2) أُحدِّدُ مركزَ المُثلَّثِ باختيارِ أيقونةِ Midpoint or Center منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ النقرِ في وسطِ المُثلَّثِ لإظهارِ إحداثيْ مركزِ المُثلَّثِ في شريطِ المعادلةِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ. أجدُ إحداثيْ مركزِ هذا المُثلَّثِ. $(-2, 3)$

ارتفاعاتُ المُثلَّثِ

ارتفاعُ المُثلَّثِ (altitude of a triangle) هوَ القطعةُ المستقيمةُ العموديةُ النازلةُ منْ أحدِ رؤوسِ المُثلَّثِ إلى الضلعِ المُقابِلِ لهُ، أوْ إلى المستقيمِ الذي يحوي الضلعَ المُقابِلَ لهُ.

لكلِّ مُثلَّثٍ ثلاثةُ ارتفاعاتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ مُشترَكةٍ تُسمّى **ملتقى الارتفاعاتِ** (orthocenter)، ويعتمدُ موقعُها على نوعِ المُثلَّثِ كما في الأشكالِ الآتيةِ:

مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.

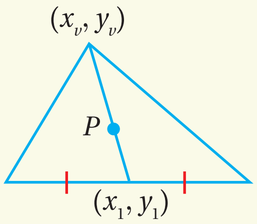
مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ في الأشكالِ المُجاوِرةِ أنَّ ساقيِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ هما منَ ارتفاعاتِهِ، وأنَّ رأسَ الزاويةِ القائمةِ هوَ ملتقى ارتفاعاتِهِ.

34

توسعة:



أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد مركز المثلث إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه بإيجاد نقطة منتصف أحد الأضلاع، ثم إيجاد النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة التي تصل نقطة المنتصف مع الرأس المقابل لها بنسبة 1 : 2، باستعمال الصيغة الآتية:

$$P\left(\frac{2x_1 + x_v}{3}, \frac{2y_1 + y_v}{3}\right)$$

حيث (x_v, y_v) هما إحداثيّا الرأس، و (x_1, y_1) هما إحداثيّا نقطة المنتصف.

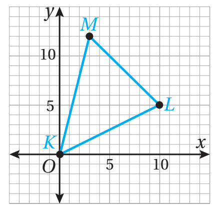
ويمكن تطبيق هذه الصيغة على المثال 2، فإذا أخذنا الرأس $A(2, 1)$، ونقطة منتصف الضلع $\overline{BC}$، وهي $(5, 4)$، فإن إحداثيي مركز المثلث هما:

$$P\left(\frac{2(5)+2}{3}, \frac{2(4)+1}{3}\right) = P\left(\frac{12}{3}, \frac{9}{3}\right)$$
$$= P(4, 3)$$

نشاط التكنولوجيا

أوضّح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد مركز أي مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات المُبيّنة في صندوق (**الدعم البياني**) الوارد في كتاب الطالب صفحة 34، وأطلب إليهم اتباع تلك الخطوات لإعادة حل المثال 2 باستعمال البرمجية.

مثال 3



إذا كانَتْ: $K(0, 0), M(3, 12), L(10, 5)$، فأجدُ إحداثيْ ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ ΔKLM بيانيًّا.

الخطوةُ 2: أجدُ ميليْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ.

ميلُ $\overline{KL}$ $\quad m_{\overline{KL}} = \frac{5-0}{10-0} = \frac{1}{2}$

ميلُ $\overline{LM}$ $\quad m_{\overline{LM}} = \frac{12-5}{3-10} = -1$

الخطوةُ 3: أجدُ معادلةَ الارتفاعِ العموديِّ على كلٍّ منَ الضلعينِ اللذينِ اخترْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ.

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (3, 12), m = -2$	$y - 12 = -2(x - 3)$
بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ	$y = -2x + 18$

- معادلةُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$:

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (0, 0), m = 1$	$y - 0 = 1(x - 0)$
بالتبسيطِ، وإعادةِ ترتيبِ المعادلةِ	$y = x$

الخطوةُ 4: أحُلُّ نظامَ المعادلتينِ الناتجَ لإيجادِ إحداثيْ ملتقى الارتفاعاتِ.

بما أنَّ المعادلةَ الثانيةَ مكتوبةٌ بالنسبةِ إلى y، فإنَّني أُعوِّضُ x بدلًا منْ y في المعادلةِ الأولى:

المعادلةُ الأولى	$y = -2x + 18$
بالتعويضِ عنْ y بـ x	$x = -2x + 18$
بجمعِ $2x$ لطرفيِ المعادلةِ	$3x = 18$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 3	$x = 6$

بما أنَّ $x = 6$، فإنَّ $y = 6$، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ x في أيٍّ منَ المعادلتينِ.

إذنْ، إحداثيّا ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔKLM هما: $(6, 6)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يشيرُ الرمزُ $m_{\overline{KL}}$ إلى ميلِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{KL}$.

أتعلَّمُ

- الرأسُ M هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{KL}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{KL}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{KL}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي -2.

أتعلَّمُ

- الرأسُ K هوَ الرأسُ المُقابِلُ لـ $\overline{ML}$؛ لذا يقعُ على الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$.
- ميلُ الارتفاعِ العموديِّ على $\overline{ML}$ يساوي سالبَ مقلوبِ ميلِ $\overline{ML}$؛ أيْ إنَّهُ يساوي 1.

مثال 3

- أوضّح للطلبة مفهوم ارتفاع المثلث، وأبيّن الأوضاع المختلفة للارتفاعات تبعًا لنوع المثلث (قائم الزاوية، منفرج الزاوية، حاد الزوايا) وموقع نقطة تلاقي الارتفاعات الثلاثة للمثلث التي تُسمّى (**ملتقى الارتفاعات**) بالاستعانة **بورقة المصادر 5: ملتقى الارتفاعات**.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 الذي يبيّن خطوات إيجاد إحداثيات ملتقى الارتفاعات لمثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه الثلاثة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم عما أوجّهه إليهم من أسئلة حول حل المثال.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

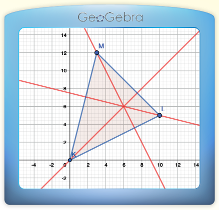
إرشادات:

- أحاور الطلبة في مضامين الصناديق الهامشية المقابلة للمثال 3، وأطلب إليهم الإجابة عن سؤال (**أفكر**) في هامش صفحة 36
- إذا توفّر جهاز عرض (Data Show) فيمكن عرض الأشكال التي توضح موقع ملتقى الارتفاعات تبعًا لنوع المثلث من كتاب الطالب صفحة 34
- بعد الانتهاء من مناقشة الأمثلة كافّة، أستعرض مع الطلبة جدول ملخص المفهوم الذي يلخّص ما تمّت دراسته في الدرس السابق (الدرس 2)، والدرس الحالي (الدرس 3) بخصوص المنصّفات العمودية، ومنصّفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات. وأطلب إلى الطلبة التفكير بطريقة لإيجاد إحداثيّي ملتقى الأعمدة المنصّفة في مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه، مع تقديم مثال على ذلك.

أفكّرُ

لماذا يُعَدُّ إيجادُ إحداثيي نقطةِ التقاءِ ارتفاعينِ منَ الارتفاعاتِ الثلاثةِ كافيًا لتحديدِ ملتقى الارتفاعاتِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الدعمُ البيانيُّ:



أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ ملتقى ارتفاعاتِ مُثلَّثٍ، وذلكَ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

1) أرسمُ المُثلَّثَ في المستوى الإحداثيِّ، مُتَّبِعًا الخطواتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

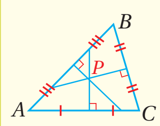
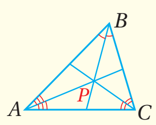
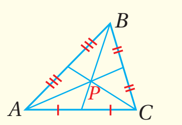
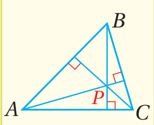
2) أرسمُ جميعَ الارتفاعاتِ في المُثلَّثِ، وذلكَ باختيارِ أيقونةِ Perpendicular Line منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ الضغطِ على رأسِ كلِّ زاويةٍ والضلعِ المُقابِلِ لها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَتْ: $A(-5,-1), B(-2,4), C(3,-1)$، فأجدُ إحداثيي ملتقى ارتفاعاتِ رؤوسِ ΔABC. $(-2, 2)$

مُلخَّصُ المفهومِ

قطعٌ مستقيمةٌ ونقاطٌ خاصةٌ في المُثلَّثِ

	المُنصِّفاتُ العموديةُ	مُنصِّفاتُ الزوايا	القطعُ المُتوسِّطةُ	الارتفاعاتُ
نقطةُ التلاقي	مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ الدائرةِ الداخليةِ للمُثلَّثِ.	مركزُ المُثلَّثِ.	ملتقى الارتفاعاتِ.
الخاصيةُ	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الخارجيةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ رؤوسِهِ.	النقطةُ P مركزُ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، وهيَ تقعُ على أبعادٍ متساويةٍ منْ أضلاعِهِ.	النقطةُ P مركزُ ΔABC، وهيَ تبعدُ عنْ كلِّ رأسٍ ثلثيْ طولِ القطعةِ الواصلةِ بينَ ذلكَ الرأسِ ومنتصفِ الضلعِ المُقابِلِ لهُ.	النقطةُ P هيَ ملتقى ارتفاعاتِ ΔABC.
مثالٌ				

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد معادلة الارتفاع بعدم أخذ سالب مقلوب ميل الضلع الذي يُؤخَذ الارتفاع عنه، أو لا يعوّضون إحداثيات الرأس المقابل للضلع في صيغة الميل ونقطة لمعادلة الارتفاع؛ لذا أنبّه إلى حساب ميل الضلع ثم إيجاد سالب مقلوب الميل الذي هو ميل الارتفاع، وتعويض إحداثيات الرأس المقابل لذلك الضلع في الصيغة $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ حيث m هو ميل الضلع (المستقيم الذي يحوي الضلع) المقابل للرأس (x_1, y_1).

مثال إضافي

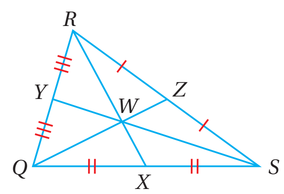
أجد إحداثيّي ملتقى ارتفاعات رؤوس المثلث PQR، حيث: $P(-3, 5), Q(0, 2), R(3, 8)$. $S(-1, 4)$

نشاط التكنولوجيا

أوضّح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد ملتقى ارتفاعات رؤوس أي مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه باستعمال برمجية جيوجبرا باتباع الخطوات المُبيَّنة في صندوق (**الدعم البياني**) الوارد في كتاب الطالب صفحة 36. وأطلب إليهم اتباع تلك الخطوات لإعادة حل المثال 3 باستعمال البرمجية، والتحقّق من أنها تعطي النتيجة نفسها التي تم التوصل إليها بالحل اليدوي الجبري.

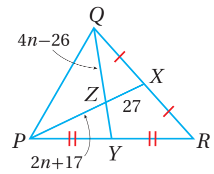
أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

إذا كانَتِ النقطةُ W هيَ مركزَ ΔQRS، وكانَ $RX = 48, QW = 30$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

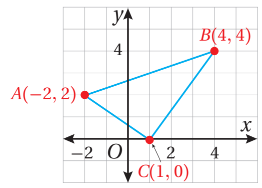


1 RW 32
2 WX 16
3 QZ 45
4 WZ 15

أجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



5 PZ 54
6 PX 81
7 QZ 48
8 YZ 24



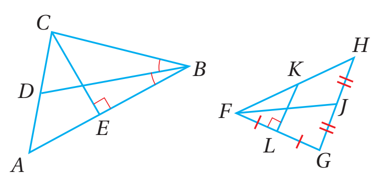
9 يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ.
أجدُ إحداثيَّي مركزِ هذا المُثلَّثِ.
نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي: $(1, 3)$. نقطة مركز المثلث هي: $(1, 2)$.

أجدُ إحداثيَّي مركزِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

10 $F(1, 5), G(-2, 7), H(-6, 3)$ $\left(-\frac{7}{3}, 5\right)$

11 $A(5, 5), B(11, -3), C(-1, 1)$ $(5, 1)$

يظهرُ ΔABC و ΔGFH في الشكلِ المُجاوِرِ. أُحدِّدُ إذا كانَتْ كلُّ قطعةٍ مستقيمةٍ في ما يأتي تُمثِّلُ ارتفاعًا، أوْ عمودًا مُنصِّفًا، أوْ قطعةً مُتوسِّطةً، أوْ مُنصِّفَ زاويةٍ:



12 BD منصّف زاوية.
13 FJ قطعة متوسطة.
14 CE ارتفاع.
15 KL عمود منصّف.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 18 ,(15 –12) كتاب التمارين: (5 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 16) كتاب التمارين: (10 – 6)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 17) كتاب التمارين: (13 – 9)

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 – 19).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

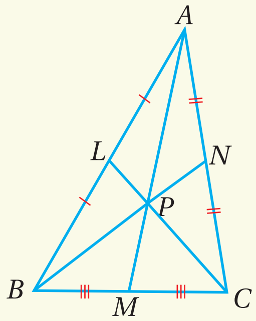
إرشاد:

في السؤالين (21) و(22) (**تحد**)، أذكّر الطلبة بصيغة حساب مساحة المثلث، وأطلب إليهم كتابة استنتاجهم على صورة قاعدة عامة بخصوص القطعة المتوسطة في مثلث. (القطعة المتوسطة في أي مثلث تقسمه إلى مثلثين لهما المساحة نفسها).

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:
  » إذا كان P مركز المثلث ABC المجاور، وكان $\overline{BN} \perp \overline{CL}$ فأُثبت أنّ $AM = 1.5\ BC$

  إرشاد: أُثبت أنّ: $m\angle BPC = 90°$



أنظر ملحق الإجابات.

  » أجـد إحداثيّـي مركـز المثلـث ABC حيث: $A(3, 4), B(-5, 6), C(-4, -1)$، بطريقـة أخرى غير الّتي تعلّمتها في هذا الدرس.

  $P(-2, 3)$؛ أنظر طريقة حـل الطلبة. يمكن أن تقوم إحدى الطرائق على إيجاد معادلتي قطعتين متوسـطتين، ثم إيجاد إحداثيّـي نقطة تقاطعهما بحل المعادلتين بالحذف أو التعويض.

تعليمات المشروع:

- أطلـب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتيـن 7 و8 من خطوات تنفيذ المشروع.

أجدُ إحداثيَّ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

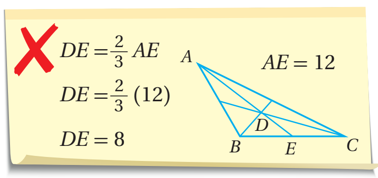
17 $A(4, -3), B(8, 5), C(8, -8)$ $(-2, -3)$

16 $X(-2, -2), Y(6, 10), Z(6, 6)$ $(18, -2)$

18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $\frac{16}{3}$ km

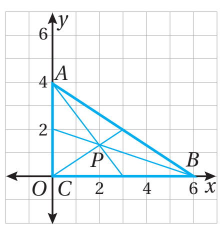
مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **أكتشـفُ الخطأَ:** يُمثِّلُ الشـكلُ المُجاوِرُ حَلَّ خالدٍ لإيجـادِ طـولِ $\overline{DE}$ فـي ΔABC، حيـثُ D مركزُ المُثلَّثِ. أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ خالدٍ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



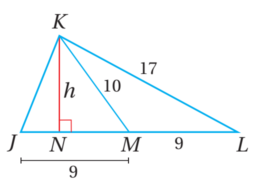
DE يساوي $\frac{1}{3} AE = 4$ وليس $\frac{2}{3} AE$

20 **تبريرٌ:** يظهرُ في المسـتوى الإحداثيِّ المُجاورِ ΔABC الذي مركزُهُ النقطةُ P. إذا حُرِّكَـتِ النقطةُ B إلى اليمينِ على المحورِ x، وظلَّتْ كلٌّ منَ النقطةِ A والنقطـةِ C في موقعِها، فما تأثيرُ ذلكَ في موقـعِ كلٍّ منْ مركزِ ΔABC وملتقى ارتفاعاتِهِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



ملتقـى الارتفاعات لا يتأثر؛ لأنه فـي النقطة O (رأس القائمـة). مركز المثلث سيتحرّك إلى اليمين؛ لأن منتصف كل من $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ سيتحرك إلى اليمين.

تحدٍّ: يُبيِّنُ الشـكلُ المُجاوِرُ ΔJKL. أسـتعملُ المعلومـاتِ المعطاةَ في الشكلِ للإجابةِ عنِ السؤالينِ الآتيينِ:



21 أجـدُ مسـاحةَ كلٍّ مـنَ ΔJKM، و ΔKML بدلالـةِ h، مُقارِنًا بينَ مساحتَيِ المُثلَّثينِ. المساحتان متساويتان، ومساحة كل منهما: $\frac{1}{2} \times 9 \times h$

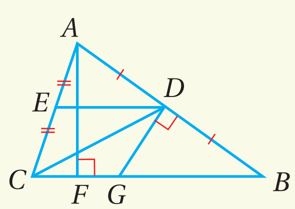
22 في السؤالِ السابقِ، هلْ تختلفُ العلاقةُ بينَ مساحتَيِ المُثلَّثينِ الناتجينِ منَ القطعةِ المُتوسِّطةِ للمُثلَّثِ تبعًا لاختلافِ نوعِ المُثلَّثِ، مُبرِّرًا إجابتي؟ لا تختلـف؛ لأن طول القاعـدة والارتفاع هما أنفسـهما لكلا المثلثين بصرف النظر عن نوع المثلث.

---

6 الختام

- أتحقّـق مـن فهـم الطلبـة موضـوع الـدرس، بتوجيـه الأسئلة الآتية إليهم:
  » أين يقع ملتقى ارتفاعات مثلث قائم الزاوية؟ عند رأس الزاوية القائمة.
  » أين يقع ملتقـى ارتفاعات مثلث منفرج الزاوية؟ في نقطة خارج المثلث.

» **أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لأصنّف كل قطعة مما يأتي إلى: قطعـة منصّفة، قطعة متوسـطة، ارتفاع، منصّـف عمـودي، منصّـف زاوية في المثلث ABC.**



1 $\overline{DG}$ مُنصِّف عمودي

2 $\overline{AF}$ ارتفاع المثلث

3 $\overline{CD}$ قطعة متوسطة

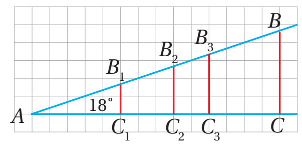
4 $\overline{DE}$ قطعة مُنصِّفة

نشاطٌ مفاهيميٌّ

النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

الهدفُ: استقصاءُ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المُثلَّثاتِ ذاتِ الزوايا القائمةِ.

نشاطٌ



الخطوةُ 1: أرسمُ الشكلَ المُجاوِرَ على ورقةِ مُربَّعاتٍ.

الخطوةُ 2: في كلٍّ مِنْ مُثلَّثاتِ الشكلِ، أجدُ طولَ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ، وطولَ الضلعِ المُجاوِرِ لها، وطولَ الوترِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ (إنْ لَزِمَ)، ثمَّ أُدوِّنُ ما أتوصَّلُ إليْهِ في الجدولِ التالي.

الخطوةُ 3: أجدُ النسبَ المطلوبةَ في الجدولِ الآتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ.

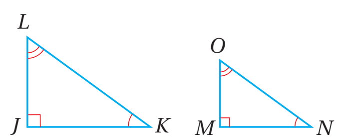
النسبُ: $\frac{\text{(المُقابِلُ)}}{\text{(المُجاوِرُ)}}$	النسبُ: $\frac{\text{(المُجاوِرُ)}}{\text{(الوترُ)}}$	النسبُ: $\frac{\text{(المُقابِلُ)}}{\text{(الوترُ)}}$	طولُ الوترِ	طولُ الضلعِ المُجاوِرِ للزاويةِ A	طولُ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A	المُثلَّثُ
						ΔAB_1C_1
						ΔAB_2C_2
						ΔAB_3C_3
						ΔABC

أُحلِّلُ النتائجَ:

1. ما قياسُ الزاويةِ A لكلِّ مُثلَّثٍ في الشكلِ؟ 18°
2. ما العلاقةُ بينَ المُثلَّثاتِ جميعِها في الشكلِ؟ أُبرِّرُ إجابتي. أنظر الهامش.
3. أدرسُ النسبَ بينَ أطوالِ الأضلاعِ في الجدولِ، ثمَّ أكتبُ ثلاثَ جملٍ لوصفِ النمطِ الذي يظهرُ. أنظر الهامش.

أُفكِّرُ:

أكتبُ ثلاثةَ تناسباتٍ باستعمالِ أطوالِ ساقَي المُثلَّثينِ المُجاوِرينِ.



إجابة ممكنة: $\frac{JK}{MN} = \frac{JL}{OM}$ ، $\frac{MN}{OM} = \frac{JK}{JL}$ ، $\frac{OM}{MN} = \frac{JL}{JK}$

39

إجابة التدريب في بند (أحلل النتائج):

2) متشـــابهة؛ لأن زوايا كل مثلث تطابق الزوايا المناظرة لها في أي مثلث آخر.

3) النسبة: $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

النسبة: $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

النسبة: $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ هي نفسها لجميع المثلثات.

نشاط مفاهيمي

هدف النشاط

- استقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات ذات الزاوية القائمة.

الأدوات اللازمة

ورقة المصادر 3: شبكة مربعات.

خطوات العمل:

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأزوّد كل مجموعة بالمواد والأدوات اللازمة لتنفيذ النشاط.
- أوضّح للطلبة المطلوب إليهم تنفيذه في هذا النشاط بعرض لوحة تحمل الشكل المرسوم في الكتاب، ومناقشة الخطوات (3 – 1).
- أطلب إلى المجموعات تنفيذ الخطوات (3 – 1) على دفاترهم.
- أتابع المجموعات أثناء تنفيذ النشاط؛ للتأكّد من أنهم يقومون بالعمل بطريقة صحيحة ودقيقة، وأساعد من يحتاج إلى مساعدة.
- بعد الانتهاء من تعبئة الجدول، أطلب إلى الطلبة الإجابة عن أسئلة بند (**أحلّل النتائج**)، ثم أناقش إجابات هذه الأسئلة مع الصف كاملًا.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن سؤال بند (**أفكّر**).

إرشادات:

- يمكن تخصيص 20 دقيقة من وقت الحصة لتنفيذ هذا النشاط، وبعد الانتهاء منه أتابع السير في مهام الدرس 4 (**النسب المثلثية**).
- أطلب إلى الطلبة أن يُحضر كل منهم آلة حاسبة علمية في الحصص التالية من هذه الوحدة.

الدرس 4

نتاجات الدرس

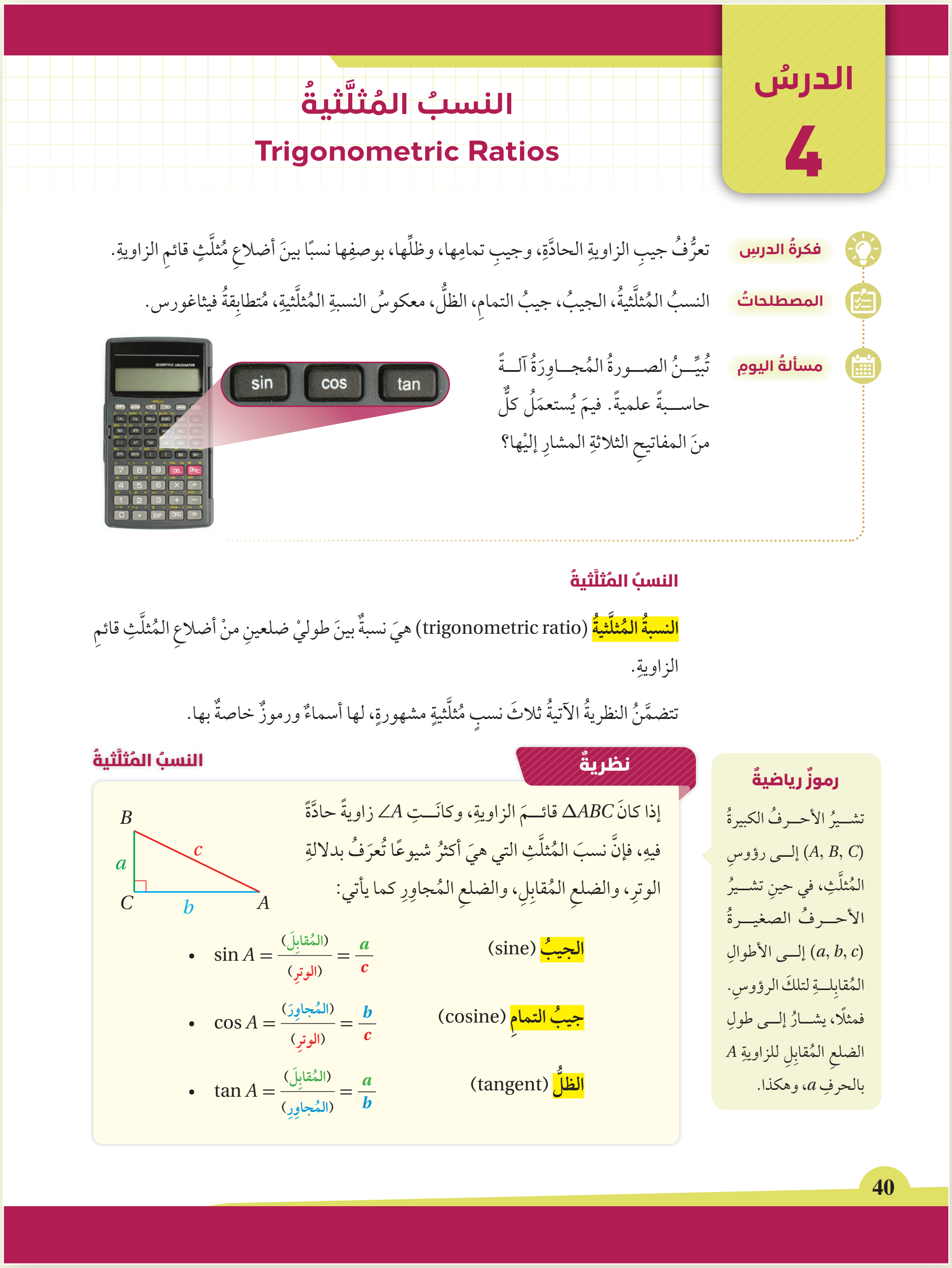
- تعرُّف جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلّها، بوصفها نسبًا بين أضلاع مثلث قائم الزاوية.
- تعرُّف أسماء النسب المثلثية ورموزها.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة المرسومة في مثلث قائم الزاوية عُلم قياسا اثنين على الأقل من أضلاعه.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزوايا حادة عُلم قياسها.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية عُلمت إحدى نسبها باستعمال معكوس تلك النسبة.
- استعمال متطابقة فيثاغورس لإيجاد جيب الزاوية أو جيب تمامها إذا عُلمت إحداهما.
- استعمال العلاقة بين النسب المثلثية للزوايا المتتامّة لإيجاد نسب مجهولة.

نتاجات التعلّم القبلي:

- حل المعادلة التربيعية باستعمال الجذر التربيعي.
- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.



الدرسُ 4

النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبِ تمامِها، وظلِّها، بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحاتُ النسبُ المُثلَّثيةُ، الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ، معكوسُ النسبةِ المُثلَّثيةِ، مُتطابِقةُ فيثاغورس.

مسألةُ اليومِ تُبيِّنُ الصورةُ المُجاوِرَةُ آلةً حاسبةً علميةً. فيمَ يُستعمَلُ كلٌّ منَ المفاتيحِ الثلاثةِ المشارِ إليْها؟

النسبُ المُثلَّثيةُ

النسبةُ المُثلَّثيةُ (trigonometric ratio) هيَ نسبةٌ بينَ طوليْ ضلعينِ منْ أضلاعِ المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

تتضمَّنُ النظريةُ الآتيةُ ثلاثَ نسبٍ مُثلَّثيةٍ مشهورةٍ، لها أسماءٌ ورموزٌ خاصةٌ بها.

رموزٌ رياضيةٌ

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ (A, B, C) إلى رؤوسِ المُثلَّثِ، في حينِ تشيرُ الأحرفُ الصغيرةُ (a, b, c) إلى الأطوالِ المُقابِلةِ لتلكَ الرؤوسِ. فمثلًا، يشارُ إلى طولِ الضلعِ المُقابِلِ للزاويةِ A بالحرفِ a، وهكذا.

نظريةٌ — **النسبُ المُثلَّثيةُ**

إذا كانَ ΔABC قائمَ الزاويةِ، وكانَتِ $\angle A$ زاويةً حادَّةً فيهِ، فإنَّ نسبَ المُثلَّثِ التي هيَ أكثرُ شيوعًا تُعرَفُ بدلالةِ الوترِ، والضلعِ المُقابِلِ، والضلعِ المُجاوِرِ كما يأتي:

- **الجيبُ** (sine): $\sin A = \frac{(\text{المُقابِلَ})}{(\text{الوترِ})} = \frac{a}{c}$
- **جيبُ التمامِ** (cosine): $\cos A = \frac{(\text{المُجاوِرَ})}{(\text{الوترِ})} = \frac{b}{c}$
- **الظلُّ** (tangent): $\tan A = \frac{(\text{المُقابِلَ})}{(\text{المُجاوِرِ})} = \frac{a}{b}$

40

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الفقرات الآتية:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية:**

a. $x^2 = 81$ ± 9

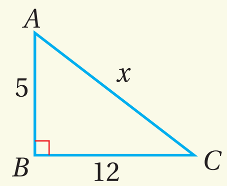
b. $3x^2 = 48$ ± 4

c. $x^2 = \frac{36}{49}$ $\pm \frac{6}{7}$

d. $(x-2)^2 = 169$ -11 or 15

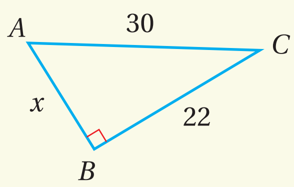
» **أجد طول الضلع المجهول في كلّ مما يأتي:**

a.



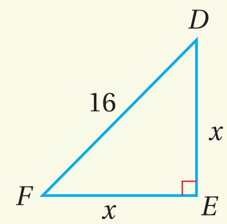
$x = 13$

b.



$x = \sqrt{416}$

c.



$x = 8\sqrt{2}$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ماذا تشاهدون في الصورة؟ آلة حاسبة علمية، أُبرزت منها صورة ثلاثة مفاتيح (أزرار).

» بماذا تختلف الآلة الحاسبة العلمية عن الآلة الحاسبة البسيطة؟ لها وظائف أكثر، ويمكن إجراء حسابات مُعقَّدة بواسطتها.

» فيم تُستعمَل المفاتيح الثلاثة الظاهرة في الصورة؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

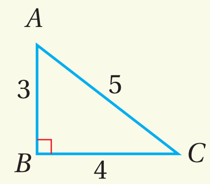
» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أعرّف الطلبة مفهوم النسبة المثلثية، وأقدّم تعريفات النسب المثلثية الأكثر شيوعًا، وهي: الجيب، وجيب التمام، والظلّ.
- أرسم على اللوح المثلث قائم الزاوية المجاور، ثم أسأل الطلبة:



  » ما قيمة $\sin A$؟ $\frac{4}{5}$
  » ما قيمة $\cos A$؟ $\frac{3}{5}$
  » ما قيمة $\tan A$؟ $\frac{4}{3}$
- أسأل كذلك عن قيمة النسب المثلثية الثلاث للزاوية C.
- أناقش الطلبة في المثال 1، وأسألهم عن الاختلاف بين المثال 1 والمثال الذي عُرِض عليهم قبل لحظات.
- أناقش الطلبة في طريقة إيجاد الطول المجهول باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحاورهم في مضمون صندوق (**أفكّر**) مقابل المثال 1، وأسألهم عن سبب عدم إمكانية استعمال وصف النسب المثلثية لإيجاد النسب المثلثية للزاوية القائمة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

تعزيز اللغة ودعمها:

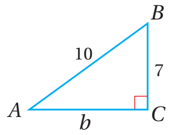
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 1

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في المُثلَّثِ المُجاورِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



الخطوةُ 1: أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظريةُ فيثاغورس
$7^2 + b^2 = 10^2$	بتعويضِ $a = 7, c = 10$
$49 + b^2 = 100$	بالتبسيطِ
$b^2 = 51$	بطرحِ 49 منْ طرفَيِ المعادلةِ
$b = \pm\sqrt{51}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَيِ المعادلةِ

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

الخطوةُ 2: أجدُ النسبَ المُثلَّثيةَ الثلاثَ.

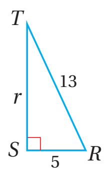
$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$ | $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ | $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10}$

أفكّر

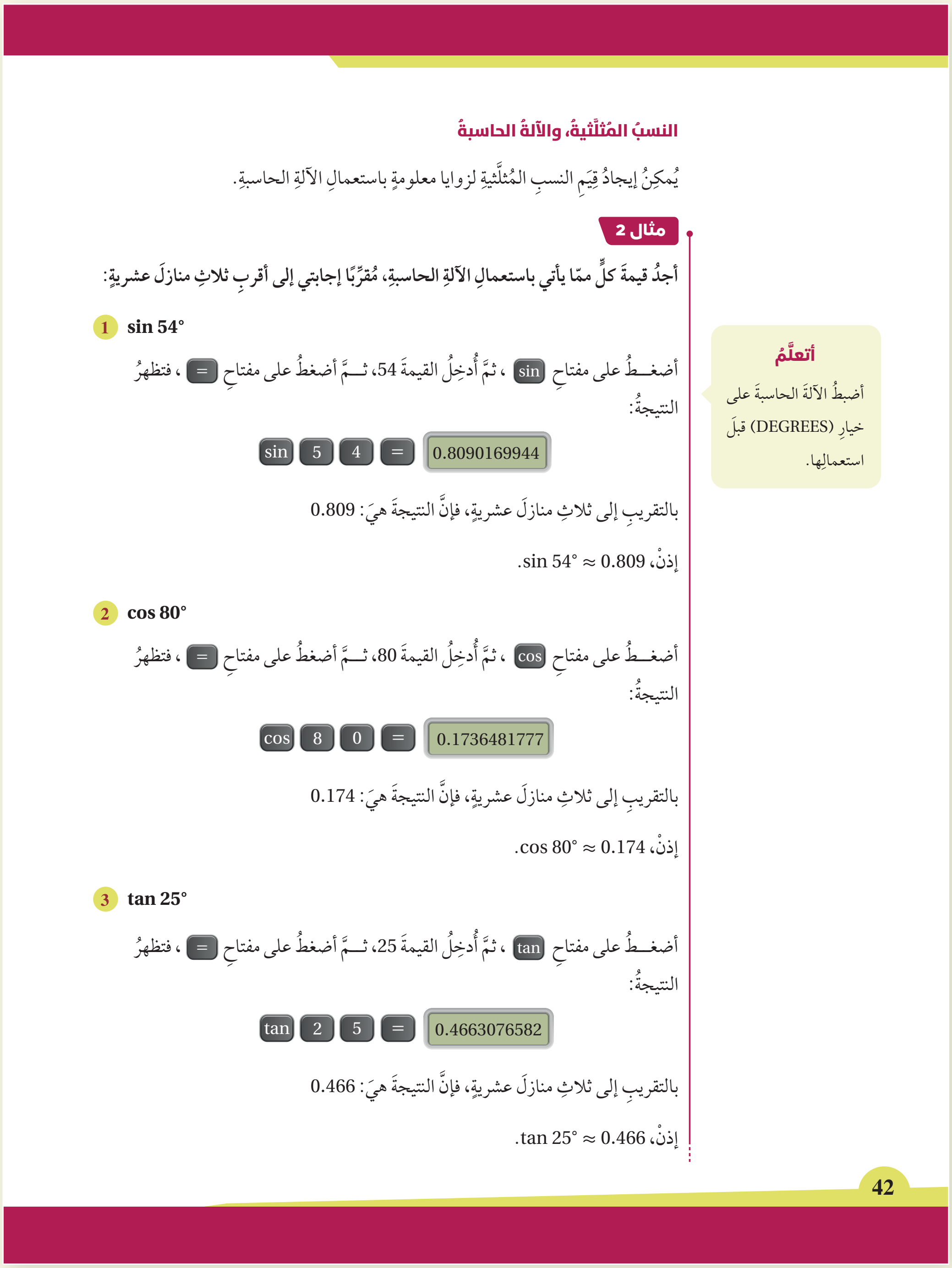
هلْ يُمكِنُ استعمالُ وصفِ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ النسبِ المُثلَّثيةِ للزاويةِ القائمةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ؟ أبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ T في المُثلَّثِ المُجاورِ، وأتركُ إجابتي في صورةِ كسرٍ.



$\sin T = \frac{5}{13}$, $\cos T = \frac{12}{13}$, $\tan T = \frac{5}{12}$



النسبُ المُثلَّثيةُ والآلةُ الحاسبةُ

يُمكِنُ إيجادُ قِيَمِ النسبِ المُثلَّثيةِ لزوايا معلومةٍ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

1 $\sin 54°$

أضغطُ على مفتاحِ sin ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 54، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 5 4 = 0.8090169944

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.809

إذنْ، $\sin 54° \approx 0.809$.

2 $\cos 80°$

أضغطُ على مفتاحِ cos ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 80، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

cos 8 0 = 0.1736481777

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.174

إذنْ، $\cos 80° \approx 0.174$.

3 $\tan 25°$

أضغطُ على مفتاحِ tan ، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 25، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ = ، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 2 5 = 0.4663076582

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 0.466

إذنْ، $\tan 25° \approx 0.466$.

أتعلَّمُ

أضبطُ الآلةَ الحاسبةَ على خيارِ (DEGREES) قبلَ استعمالِها.

42

مثال 2

- أوضّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد النسب المثلثية لزاوية عُلم قياسها، وأبيّن لهم ضرورة ضبط الآلة الحاسبة على خيار (DEGREES) قبل البدء باستعمالها لإيجاد النسب المثلثية.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 2، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن التدريب في بند (**أتحقّق من فهمي**)، وأتابع أعمالهم، وأساعد من يحتاج إلى مزيد من التدريب على استعمال الآلة الحاسبة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أبيّن للطلبة أنه في بعض الآلات الحاسبة تُدخَل الزاوية أولًا، ثم يُضغَط على مفتاح النسبة المثلثية (tan, cos, sin).

مثال 3

- أوضّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الزاوية إذا عُلمت إحدى نسبها المثلثية، باستعمال معكوس النسبة، ومفتاح (shift) أو (second) أو (INV) تبعًا لنوع الآلة الحاسبة.
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- أطلب إلى الطلبة الإجابة عن التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**)، وأتابع أعمالهم، وأساعد من يحتاج إلى مزيد من التدريب على استعمال الآلة الحاسبة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أبيّن للطلبة أنه في بعض الآلات الحاسبة تُدخل قيمة النسبة المثلثية أولًا، ثم يُضغط على مفتاح SHIFT ثم معكوس النسبة المثلثية ($\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$).

أخطاء شائعة: قد ينسى بعض الطلبة ضبط آلاتهم الحاسبة على خيار (DEGREES) فيحصلون على إجابات غير صحيحة؛ لذا أتأكّد من ضبط الآلات، ومن أنّهم كلّهم يمكنهم التحقّق من الخيار المضبوط عليه آلاتهم الحاسبة، وأن بإمكانهم ضبطها على الخيار الصحيح.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

a) $\sin 36°$ 0.588 b) $\cos 70°$ 0.342 c) $\tan 82°$ 7.115

يُمكِنُ استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ إذا عُلِمَتْ إحدى نسبِها، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المُثلَّثيةِ** (inverse trigonometric ratio). فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الجيبِ ($\sin^{-1}$)، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامِ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ جيبِ التمامِ ($\cos^{-1}$)، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ معكوسَ الظلِّ ($\tan^{-1}$).

لغةُ الرياضياتِ
- يُقرَأُ معكوسُ الجيبِ: sine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\sin^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ جيبِ التمامِ: cosine inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\cos^{-1}$.
- يُقرَأُ معكوسُ الظلِّ: tan inverse، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $\tan^{-1}$.

مثال 3

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1 $\sin A = \frac{3}{8}$

$\sin A = \frac{3}{8}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ معكوسُ الجيبِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 8) = 22.024312837

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 22.0°

إذنْ، $m\angle A \approx 22.0°$.

أتعلَّمُ
تحتوي بعضُ الآلاتِ الحاسبةِ على مفاتيحَ خاصةٍ بمعكوسِ كلٍّ منَ النسبِ المُثلَّثيةِ، ويُمكِنُ استعمالُ هذهِ المفاتيحِ مباشرةً منْ دونِ استعمالِ مفتاحِ SHIFT .

2 $\cos A = \frac{10}{13}$

$\cos A = \frac{10}{13}$ النسبةُ المعطاةُ

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ معكوسُ جيبِ التمامِ

مثال إضافي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي مع تقريب النسبة المثلثية إلى ثلاث منازل عشـــرية، وتقريب الزوايا إلى أقرب عُشر درجة (إن لزم):

1. $\sin 72°$ 0.951
2. $\cos 48°$ 0.669
3. $\tan 30°$ 0.577
4. $\dfrac{16}{\cos 25°}$ 17.654
5. $3 \sin 73° + 2 \cos 60°$ 3.869
6. $\sin^{-1}(0.754)$ 48.9°
7. $\tan^{-1}(3.567)$ 74.3°
8. $\cos^{-1}(0)$ 90°

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{10}{13}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (10 ÷ 13) = 39.7151372318

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 39.7°

إذنْ، $m\angle A \approx 39.7°$.

3 $\tan A = \frac{12}{5}$

النسبةُ المعطاةُ $\tan A = \frac{12}{5}$

معكوسُ الجيبِ $m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ كما يأتي:

SHIFT tan (12 ÷ 5) = 67.380135052

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: 67.4°

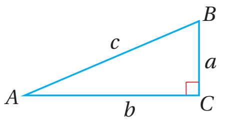
إذنْ، $m\angle A \approx 67.4°$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ قياسَ $\angle A$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

a) $\sin A = \frac{4}{9}$ 26.4° b) $\cos A = 0.64$ 50.2° c) $\tan A = 0.707$ 35.3°

العلاقةُ بينَ الجيبِ وجيبِ التمامِ



في المُثلَّـــثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{a}{c}$ ، $\cos A = \frac{b}{c}$، فما قيمةُ $\sin^2 A + \cos^2 A$؟

يُمكِنُ إيجادُ قيمةِ $\sin^2 A + \cos^2 A$ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

بالتعويضِ $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

بالتبسيطِ $= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$

أتعلَّمُ

$\sin^2 A$ تعني $(\sin A)^2$، و $\cos^2 A$ تعني $(\cos A)^2$.

مثال 4

- أناقش الطلبة في العلاقة بين الجيب وجيب التمام باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأتوصّل معهم إلى أن مربع جيب أي زاوية مضافًا إليه مربع جيب تمامها يساوي 1 دائمًا، ثم أبيّن لهم أن هذه العلاقة تُسمّى (**متطابقة فيثاغورس**).
- أبيّن للطلبة أنه يمكن استعمال هذه العلاقة لإيجاد قيمة إحدى النسبتين إذا عُلمت الأخرى.
- أطرح على الطلبة المثال الآتي: إذا كانت B زاوية حادة، وكان $\sin B = \frac{3}{5}$، فما قيمة $\cos B$؟ (أستمع لإجابات الطلبة دون تعليق).
- أوضّح للطلبة أنه يمكن الإجابة عن السؤال السابق باتباع الخطوتين الآتيتين:
  - « **الخطوة 1**: كتابة متطابقة فيثاغورس للزاوية B.
  - « **الخطوة 2**: تعويض قيمة $\sin B$ أي $\frac{3}{5}$ في المتطابقة، وإكمال الحل لإيجاد قيمة $\cos B$.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4، وأبيّن لهم أنّ الجيب وجيب التمام والظلّ للزوايا الحادة قيم موجبة، وأطلب إليهم تبرير ذلك.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

$= \frac{a^2+b^2}{c^2}$ بجمعِ الكسورِ

$= \frac{c^2}{c^2}$ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس

$= 1$ بالتبسيطِ

إذنْ، $\sin^2 A+\cos^2 A=1$، وتُسمّى هذهِ العلاقةُ **مُتطابِقةَ فيثاغورس** (Pythagorean identity).

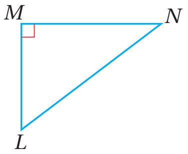
نظريةٌ — **مُتطابِقةُ فيثاغورس**

في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، حيثُ A زاويةٌ حادَّةٌ فيهِ، فإنَّ:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثال 4

في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin N = \frac{2}{3}$، فأجدُ $\cos N$.



$\sin^2 N + \cos^2 N = 1$ مُتطابِقةُ فيثاغورس

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$ بتعويضِ $\sin N = \frac{2}{3}$

$\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$ بالتربيعِ

$\cos^2 N = \frac{5}{9}$ بطرحِ $\frac{4}{9}$ منْ طرفيِ المعادلةِ

$\cos N = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ N في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ LMN هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاوِرِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ $\cos N$ قيمةٌ موجبةٌ؛ أيْ إنَّ $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

أتعلَّمُ

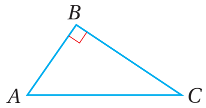
قيمةُ كلٍّ منَ الجيبِ، وجيبِ التمامِ، والظلِّ موجبةٌ لأيِّ زاويةٍ حادَّةٍ.

مثال إضافي

إذا كانت X زاوية حادة، وكان $\cos X = \frac{8}{17}$، فما قيمة $\sin X$؟ $\frac{15}{17}$

أتحقَّقُ منْ فهمي

في المُثلَّثِ المُجاورِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{4}{5}$، فأجدُ $\sin A$.



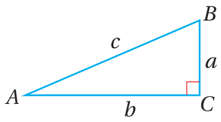
$\frac{3}{5}$

أتذكَّرُ

الزاويتانِ المُتتامَّتانِ هما زاويتانِ مجموعُ قياسيْهما 90°.

تُعَدُّ الزاويتانِ الحادَّتانِ في أيِّ مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ مُتتامَّتينِ. ولكنْ، ما العلاقةُ بينَ نسبِهِما المُثلَّثيةِ؟

في المُثلَّثِ المُجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ:



$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \sin B = \frac{b}{c}, \cos B = \frac{a}{c}$$

ومنْ ثَمَّ، يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ جيبَ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ تمامِ مُتمِّمتِها، وأنَّ جيبَ تمامِ الزاويةِ الحادَّةِ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ يساوي جيبَ مُتمِّمتِها.

مفهومٌ أساسيٌّ: الجيبُ وجيبُ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ

إذا كانَ A و B زاويتينِ مُتتامَّتينِ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ، فإنَّ:

$\sin B = \cos (90°-B) = \cos A$ $\quad$ $\sin A = \cos (90°-A) = \cos B$

$\cos B = \sin (90°-B) = \sin A$ $\quad$ $\cos A = \sin (90°-A) = \sin B$

مثال 5

إذا كانَ $\cos 34° = 0.829$، فأجدُ $\sin 56°$.

$\cos A = \sin (90°-A)$	تعريفُ الجيبِ وجيبِ التمامِ للزوايا المُتتامَّةِ
$\cos 34° = \sin (90°-34°)$	بتعويضِ $A = 34°$
$\cos 34° = \sin 56°$	بالتبسيطِ
$\sin 56° = 0.829$	بتعويضِ $\cos 34° = 0.829$

أتحقَّقُ منْ فهمي

إذا كانَ $\sin 70° = 0.9397$، فأجدُ $\cos 20°$. 0.9397

مثال 5

- أوجّه الأسئلة الآتية إلى الطلبة:
  - » ما العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم الزاوية؟ مجموعهما يساوي 90°
  - » ماذا تُسمّى الزاويتان اللتان يكون مجموعهما 90°؟ زاويتين متتامّتين.
  - » أعطي أمثلة على قياس زاويتين متتامّتين. إجابات ممكنة: (15°, 75°), (20°, 70°), (30°, 60°), (38°, 52°)
- أطلب إلى كل طالب/ طالبة رسم مثلث قائم الزاوية وتسجيل قياسات مناسبة لضلعين اثنين من أضلاعه، ثم حساب طول الضلع الثالث، وكتابة نسبتَي الجيب، وجيب التمام لكل من الزاويتين الحادتين، وكتابة استنتاج عمّا يلاحظونه على النسب التي كتبوها.
- قد يصل معظم الطلبة إلى العلاقة الصحيحة بين نسب الزاويتين المتتامّتين كما هي معروضة في صندوق (مفهوم أساسي) الوارد في الصفحة 46 من كتاب الطالب.
- أسأل الطلبة: ماذا يمكن أن نستنتج من كل مما يأتي؟

1. $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos (90°-30°) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$

2. $\sin 65° \approx 0.906$

$\cos (90°-65°) \approx 0.906 \Longrightarrow \cos 25° \approx 0.906$

3. $\cos 15° \approx 0.966$

$\sin (90°-15°) \approx 0.966 \Longrightarrow \sin 75° \approx 0.966$

4. $\cos 73° \approx 0.292$

$\sin (90°-73°) \approx 0.292 \Longrightarrow \sin 17° \approx 0.292$

- أناقش الطلبة في حل المثال 5، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

إذا كان $\cos 68° \approx 0.375$، فما قيمة $\sin 22°$؟

0.375 تقريبًا.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 27) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

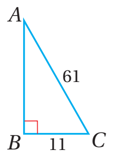
- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

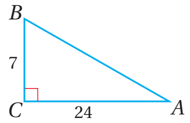
مهارات التفكير العليا

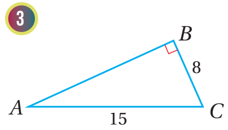
- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (31 – 36).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1) 
$\sin A = \frac{11}{61}$, $\cos A = \frac{60}{61}$, $\tan A = \frac{11}{60}$

2) 
$\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$, $\tan A = \frac{7}{24}$

3) 
$\sin A = \frac{8}{15}$, $\cos A = \frac{\sqrt{161}}{15}$, $\tan A = \frac{8}{\sqrt{161}}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4) $\sin 43°$ 0.682
5) $\sin 67.2°$ 0.922
6) $\sin 90°$ 1
7) $\cos 80°$ 0.174
8) $\cos 22°$ 0.927
9) $\cos 90°$ 0
10) $\tan 20°$ 0.364
11) $\tan 45°$ 1
12) $\tan 30°$ 0.577
13) $4 \sin 63°$ 3.564
14) $7 \tan 52°$ 8.960
15) $9 \cos 8°$ 8.912
16) $\frac{5}{\sin 31°}$ 9.708
17) $\frac{3}{\tan 64°}$ 1.463
18) $\frac{7}{\cos 60°}$ 14

أجدُ قياسَ $\angle B$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

19) $\sin B = 0.5$ 30°
20) $\sin B = 0.999$ 87.4°
21) $\sin B = 0.877$ 61.3°

أجدُ قياسَ $\angle N$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

22) $\cos N = 0.2$ 78.5°
23) $\cos N = 0.5$ 60°
24) $\cos N = 0.999$ 2.6°

أجدُ قياسَ $\angle M$ الحادَّةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

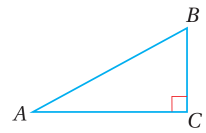
25) $\tan M = 0.6$ 31.0°
26) $\tan M = 2.67$ 69.5°
27) $\tan M = 4.38$ 77.1°

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (28 – 30) كتاب التمارين: (1 – 18) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (31 – 33) كتاب التمارين: (1 – 18) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (33 – 36) كتاب التمارين: (13 – 20)

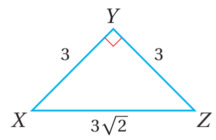
28 في المُثلَّثِ المُجاوِرِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{8}{17}$، فأجدُ $\cos A$. $\frac{15}{17}$



29 إذا كانَ $\cos 55° = 0.57358$، فأجدُ $\sin 35°$. 0.57358

30 إذا كانَ $\sin 78° = 0.9781$، فأجدُ $\cos 12°$، و $\sin 12°$.
$\cos 12° = 0.9781; \sin 12° = \sqrt{1-(0.9781)^2} \approx 0.2081$

مهارات التفكير العليا



تبريرٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

31 أُحدِّدُ النسبَ المُثلَّثيّةَ المتساويةَ في الشكلِ. أنظر ملحق الإجابات.

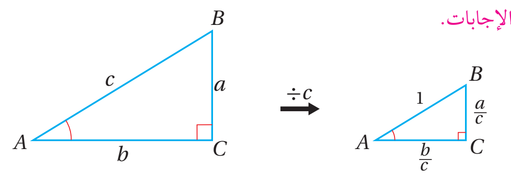
32 ما قياسُ كلٍّ منَ الزاويةِ X، والزاويةِ Z؟ 45°

33 أكتبُ استنتاجًا بناءً على إجابتي عنِ السؤالينِ السابقينِ.
$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45° = 1$

تبريرٌ: إذا كانَ ΔLMN قائمَ الزاويةِ في M، فأُثبِتُ صحَّةَ كلِّ متباينةٍ ممّا يأتي: (34, 35) أنظر ملحق الإجابات.

35 $\cos L < 1$ 34 $\sin L < 1$

36 **تحدٍّ:** مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، أُثبِتُ أنَّ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.
أنظر ملحق الإجابات.



48

» أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد كلّ مما يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية (إن لزم):

1 $\sin 35°$ 0.574   2 $\cos 15°$ 0.966

3 $\sin 90°$ 1   4 $\cos 0°$ 1

5 $4 \tan 45°$ 4   6 $\frac{8}{\sin 40°}$ 12.446

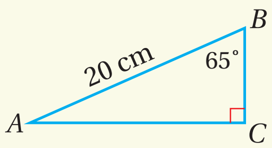
» أجد قياس الزاوية A، وأقرّب إجابتي إلى أقرب عُشر درجة إذا كان $m\angle A = \cos^{-1}(0.67)$ 47.9°

» أجد قيمة $(\sin^{-1}(0.65) + \cos^{-1}(0.65))$. 90°

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:

» في المثلث ABC المجاور، $m\angle B = 65°$، و $AB = 20$ cm.



أجد كلًّا من BC، و AC، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

$BC \approx 8.45$ cm, $AC \approx 18.13$ cm

» كيف يمكن إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها 50° من دون استعمال الآلة الحاسبة؟ أشرح طريقتي مع تقريب إجابتي إلى ثلاث منازل عشرية.

(**إرشاد:** أرسم بالمنقلة زاوية قياسها 50°، وأقيم عمودًا من نقطة على أحد ضلعيها، وأمدّه حتى يقطع ضلعها الآخر فأحصل على مثلث قائم الزاوية، ثم أتابع إيجاد النسب المثلثية من المثلث الذي رسمته).

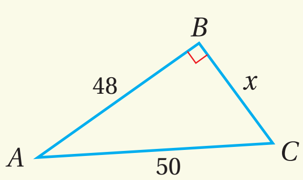
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (9) من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

» أستعمل المثلث المجاور لأجد كلًّا ممّا يأتي:



1 قيمة x. 14

2 $\sin A$ $\frac{7}{25}$ 3 $\cos A$ $\frac{24}{25}$

4 $\tan A$ $\frac{7}{24}$

الدرس
5

نتاجات الدرس

- استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية.
- إيجاد قياسات زوايا مجهولة في المثلث قائم الزاوية باستعمال النسب المثلثية ومعكوسها.
- استعمال النسب المثلثية للزوايا الخاصة 30°, 45°, 60° لإيجاد أطوال أضلاع مجهولة في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض لإيجاد قياسات مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.
- استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية الحادة إذا عُلمت قيمة إحدى نسبها المثلثية.
- حل التناسب.
- حل معادلات خطية بمتغيّر واحد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ 5

تطبيقاتُ النسبِ المُثلَّثيةِ

Applications of Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرس: استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

المصطلحات: زاويةُ الارتفاعِ، زاويةُ الانخفاضِ.

مسألةُ اليوم: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ رافعةً، في نهايةِ ذراعِها حبلٌ متينٌ يرفعُ حاويةً كبيرةً. إذا كانَتِ الزاويةُ بينَ الحبلِ والذراعِ 54°، وكانَ بُعْدُ الحاويةِ عنْ بدايةِ الذراعِ 3.5 m، فأجدُ طولَ ذراعِ الرافعةِ.

استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ أطوالِ أضلاعٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ في كثيرٍ منَ السياقاتِ الحياتيةِ والعلميةِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

بناءٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ الممرَّ المُنحدِرَ الخاصَّ بذوي الإعاقةِ الحركيةِ في أحدِ الأبنيةِ. إذا كانَ ارتفاعُ نهايةِ هذا الممرِّ عنْ سطحِ الأرضِ هوَ 45 cm، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها الممرُّ معَ الأرضِ هيَ 4.8°، فأجدُ طولَهُ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.

ألاحِظُ منَ الشكلِ أنَّ الزاويةَ المَقيسةَ هيَ 4.8°، ولتكنْ A، وأنَّ طولَ الضلعِ المُقابلِ لها هوَ 45 cm، وأنَّ الضلعَ المجهولَ هوَ الوترُ، وليكنْ d؛ لذا أستعملُ نسبةَ الجيبِ لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ.

49

1 التهيئة

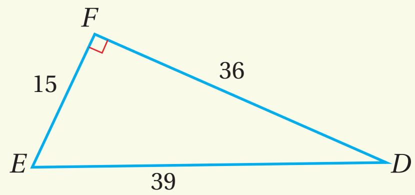
ملاحظاتي

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الفقرات الآتية:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية:**

a. $4x + 5 = 61$ $\quad x = 14$ **b.** $\frac{3x}{7} = \frac{12}{5}$ $\quad x = 5.6$ **c.** $\frac{x-4}{2x+1} = \frac{4}{5}$ $\quad x = -8$

» **أجد النسب المثلثية الثلاث لكل من الزاويتين الحادتين في المثلث *DEF* المجاور.**



$\sin E = \frac{36}{36}$, $\cos E = \frac{15}{39}$, $\tan E = \frac{36}{15}$

$\sin D = \frac{15}{39}$, $\cos D = \frac{36}{39}$, $\tan D = \frac{15}{36}$

» **أجد قياس الزاوية الحادة في كل ممّا يأتي:**

a. $\sin A = 0.4357$ **b.** $\cos G = 0.6483$ **c.** $\tan Y = \frac{12}{7}$

$A = 25.8°$ $\quad G = 49.6°$ $\quad Y = 59.7°$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:

» ما نوع المثلث المُكوَّن من ذراع الرافعة والحبل والبُعد الأفقي للحاوية عن بداية الذراع؟ مثلث قائم الزاوية.

» ماذا تمثّل ذراع الرافعة في هذا المثلث؟ الوتر.

» كيف يمكن إيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية؟ باستعمال نظرية فيثاغورس.

» ما المعلومات الضرورية الواجب توفرها لتطبيق نظرية فيثاغورس؟ طولا ضلعين اثنين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

» كم ضلعًا عُلم طوله في الشكل؟ واحد.

» كيف يمكن الاستفادة من الزاوية المُعطى قياسها في المثلث؟ يمكن ربط نسبها بأطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية الظاهر في الشكل.

» ما النسب المثلثية للزاوية المُعطى قياسها بدلالة أطوال أضلاع المثلث؟

$\sin 54° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3.5}{x}$, $\cos 54° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{x}$, $\tan 54° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3.5}{y}$

» هل يمكن استعمال الزاوية الحادة الثانية؟ نعم.

» كيف يمكن إيجاد طول ذراع الرافعة؟

- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:

» ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟

» مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال النسب المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية لإيجاد طول ضلع مجهول فيه، بكتابة النسب المثلثية للزاوية المعلومة بدلالة أطوال الأضلاع، ثم اختيار النسبة التي تؤدّي إلى المطلوب بأيسر الطرق وأقصرها، ثم إيجاد النسبة باستعمال الآلة الحاسبة، وحل المعادلة البسيطة الناتجة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المسألة في المثال 1، وأطلب إلى آخر كتابة المعطيات، والمطلوب.
- أطلب إلى الطلبة تسمية رؤوس المثلث، وإعطاء رموز لأطوال الأضلاع المجهولة.
- أسأل الطلبة عن النسبة التي تقود إلى معرفة طول المنحدر بأيسر الطرق وأقصرها. نسبة جيب الزاوية $4.8°$ $(\sin 4.8°)$
- أناقش الطلبة في الخطوات المُتبقيّة من الحل.
- أسأل الطلبة: هل يمكن استعمال نسبة جيب التمام (cos) لإيجاد طول المنحدر؟ نعم؛ باستعمال جيب تمام متممة $4.8°$
- أكلّف الطلبة إيجاد طول المنحدر باستعمال نسبة جيب التمام، والتأكّد من حصولهم على الإجابة نفسها.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أناقش الطلبة في إجابة السؤال الوارد في صندوق (**أفكّر**) الموجود في هامش المثال 1، وأطلب إليهم تجريب نسبة مثلثية أخرى.

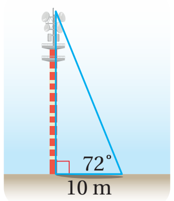
أفكّرُ

هلْ يُمكِنُ استعمالُ نسبةٍ مُثلَّثيةٍ أُخرى لإيجادِ طولِ الممرِّ المُنحدِرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نسبةُ الجيبِ	$\sin A = \frac{(\text{المُقابِلَ})}{(\text{الوترِ})}$
بالتعويضِ	$\sin 4.8° = \frac{45}{d}$
بضربِ طرفيِ المعادلةِ في d	$d(\sin 4.8°) = 45$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على $\sin 4.8°$	$d = \frac{45}{\sin 4.8°}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$d \approx 538$

إذنْ، طولُ الممرِّ المُنحدِرِ هوَ 538 cm تقريبًا.

أتحقَّقُ منْ فهمي



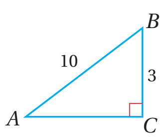
يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ برجَ اتصالاتٍ، طولُ ظلِّهِ 10 m. إذا كانَتِ الزاويةُ التي تصنعُها أشعةُ الشمسِ معَ نهايةِ الظلِّ على سطحِ الأرضِ هيَ 72°، فأجدُ ارتفاعَ البرجِ. 30.8 m تقريبًا.

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ استعمالَ النسبِ المُثلَّثيةِ لإيجادِ أطوالٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ باستعمالِ النسبِ المُثلَّثيةِ ومعكوسِ النسبِ المُثلَّثيةِ.

مثال 2

أجدُ قياسَ $\angle A$ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

1



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُقابِلِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنَّني أستعملُ الجيبَ:

تعريفُ الجيبِ	$\sin A = \frac{3}{10}$
معكوسُ الجيبِ	$m\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$

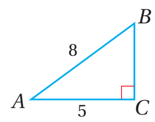
والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$ كما يأتي:

SHIFT sin (3 ÷ 10) = 17.4576031237

بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $17.5°$

إذنْ، $m\angle A \approx 17.5°$.

2



بما أنَّ طولَ الضلعِ المُجاوِرِ لـ $\angle A$ وطولَ الوترِ معلومانِ، فإنَّني أستعملُ جيبَ التمامِ:

$\cos A = \frac{5}{8}$ تعريفُ جيبِ التمامِ

$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ معكوسُ جيبِ التمامِ

والآنَ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)$ كما يأتي:

SHIFT cos (5 ÷ 8) = 51.3178125465

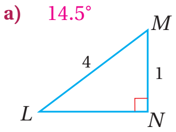
بالتقريبِ إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ، فإنَّ النتيجةَ هيَ: $51.3°$

إذنْ، $m\angle A \approx 51.3°$.

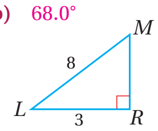
أتحقَّقُ من فهمي

أجدُ قياسَ $\angle L$ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

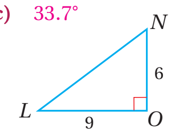
a) 14.5°



b) 68.0°



c) 33.7°



51

تعزيز اللغة ودعمها:

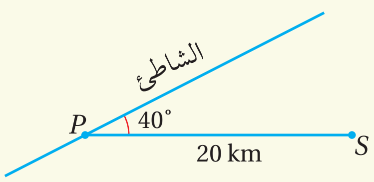
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلــب إلى الطلبة حل التدريب الــوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال إضافي

أبحرت سفينة من الميناء P، وكان خط سيرها يصنع زاوية قياســها $40°$ مع شــاطئ مســتقيم. أجد أقصر مسافة بين السفينة والشاطئ عندما يكون بُعدها عن الميناء 20 km

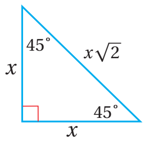


12.9 km تقريبًا.

مثال 2

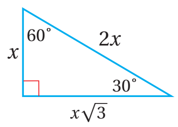
- أوضّــح للطلبة أنــه في بعض المســائل يكــون معلومًا طــولا ضلعيــن علــى الأقــل مــن عناصــر مثلــث قائم الزاويــة، ففي هــذه الحالــة يمكن اســتعمال معكوس النســبة المثلثية لإيجاد قياس إحدى الزوايا الحادة في المثلــث. وأســألهم: كيف يمكن إيجاد قيــاس الزاوية الحادة الثانية؟
- أناقــش الطلبة فــي حل فرعي المثــال 2، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- إن لــزم الأمــر، أناقــش الطلبــة فــي مزيد مــن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

استعمالُ النسبِ المُثلَّثيةِ في المُثلَّثاتِ القائمةِ الزاويةِ الخاصة



يُبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ المُثلَّثَ 90° – 45° – 45°؛ وهوَ مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، ومُتطابِقُ الضلعَينِ.

يمتازُ هذا المُثلَّثُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي $\sqrt{2}$ مَرَّةً طولَ كلِّ ساقٍ منْ ساقيْهِ.



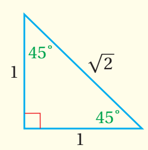
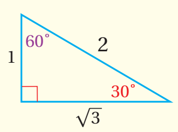
أمّا الشكلُ المُجاورُ فيُبيِّنُ المُثلَّثَ 90° – 60° – 30° الذي يمتازُ بأنَّ طولَ وترِهِ يساوي مثليْ طولِ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ 30°، وبأنَّ طولَ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ 60° يساوي $\sqrt{3}$ مَرَّةً طولَ الساقِ المُقابلةِ للزاويةِ 30°.

أتعلَّم

بكلماتٍ أُخرى، فإنَّ طولَ الضلعِ المُقابلِ للزاويةِ 30° في المُثلَّثِ 90° – 60° – 30° يساوي نصفَ طولِ الوترِ.

تُستعمَلُ النسبُ المُثلَّثيةُ للزوايا الخاصةِ: 45°, 60°, 30° لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ. وفي ما يأتي تلخيصٌ لهذهِ النسبِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **النسبُ المُثلَّثيةُ للزوايا الخاصة**

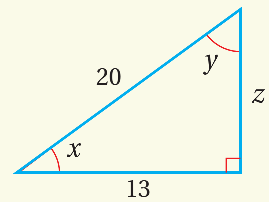
الظلُّ	جيبُ التمامِ	الجيبُ	المُثلَّثُ
$\tan 45° = 1$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	

أخطاء شائعة:

قد يجد بعض الطلبة صعوبة في اختيار النسبة المثلثية المناسبة لحل المسألة؛ لذا أنبّه إلى تحديد ما يمثّله الضلعان المعلومان بالنسبة إلى الزاوية ثم اختيار النسبة التي ترتبط بهذين الضلعين، وأذكّرهم بالتعريف الصحيح لكل من: جيب الزاوية، وجيب تمامها، وظلّها.

مثال إضافي

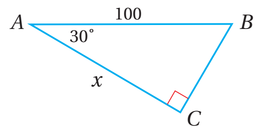
أجد قيمة كل من x، و y، و z في المثلث المجاور.



$x \approx 49.5°, \quad y \approx 40.5°, \quad z \approx 15.2$

مثال 3

أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



$\cos A = \frac{\text{(المُجاوِرُ)}}{\text{(الوترُ)}}$ نسبةُ جيبِ التمامِ

$\cos 30° = \frac{x}{100}$ بالتعويضِ

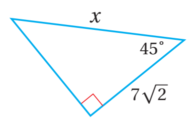
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{100\sqrt{3}}{2} = x$ بضربِ طرفيِ المعادلةِ في 100

$x = 50\sqrt{3}$ بالتبسيطِ

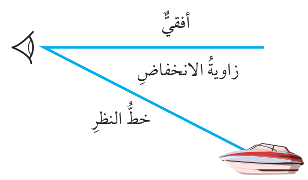
أتحقَّقُ من فهمي

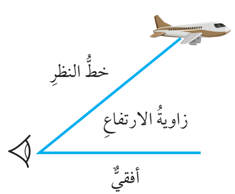
أجدُ قيمةَ x في المُثلَّثِ المُجاوِرِ. 14



زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ

يُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأعلى والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الارتفاعِ** (angle of elevation)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ مِنْ سطحِ الأرضِ إلى طائرةٍ في السماءِ والخطِّ الأفقيِّ. ويُطلَقُ على الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ إلى الأسفلِ والخطِّ الأفقيِّ اسمُ **زاويةِ الانخفاضِ** (angle of depression)، مثلِ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ مِنْ منارةٍ إلى سفينةٍ في البحرِ والخطِّ الأفقيِّ.





مثال 3

- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد النسب المثلثية لزوايا محددة من دون استعمال الآلة الحاسبة، وذلك برسم مثلث قائم الزاوية تكون تلك الزاوية إحدى زواياه الحادة، ثم إيجاد أطوال الأضلاع، ومن ثم إيجاد النسب المثلثية. وقياسات هذه الزوايا الخاصة هي: $30°, 45°, 60°$
- أناقش الطلبة في خصائص المثلث الذي قياسات زواياه $90°, 45°, 45°$، وأسألهم عن النسب المثلثية للزاوية $45°$
- أناقش الطلبة في خصائص المثلث الذي قياسات زواياه $90°, 60°, 30°$، وأسأل عن النسب المثلثية للزاويتين $30°$، و$60°$، وأوجّه الطلبة إلى تأمّل صندوق (**مفهوم أساسي**) الموجود في صفحة 52 من كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3، وهو لا يختلف في فكرته عن المثال 1 سوى أن الزاوية المعلومة هي من الزوايا الخاصة التي لا تحتاج إلى الآلة الحاسبة لإيجاد نسبها، ويمكن للطلبة تذكّرها عن ظهر قلب أو بربطها بالمثلثات الخاصة التي عُرِضت عليهم آنفًا.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال 4: من الحياة

- أوضّح للطلبة مفهوم زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض، وأقدّم أمثلة عليهما (يمكنني الاستعانة **بورقة المصادر 6: زوايا الارتفاع والانخفاض**).
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المسألة في المثال 4، وأطلب إلى آخر كتابة المعطيات والمطلوب.
- أسأل الطلبة:
  » ما النسبة المثلثية التي يمكن استعمالها هنا لإيجاد بُعد القارب عن قاعدة الجرف؟ نسبة ظل الزاوية A.
  » ما النسبة المثلثية التي تُستعمَل لإيجاد بُعد القارب عن قمّة الجرف؟ نسبة جيب الزاوية A، أو جيب تمام متممة A وهي $48°$.
- أناقش الطلبة في خطوات حل المثال 4، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أعرض على الطلبة مزيدًا من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أناقش الطلبة في مضمون صندوق (**أتعلّم**) مقابل المثال 4، وأذكّرهم بالمستقيمات المتوازية وقاطعها وأنواع الزوايا الناتجة بينهما.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في كتابة المعادلة المناسبة لحل المسألة اللفظية؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

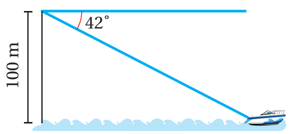
مثال إضافي:

يقف رجل على بعد 50 m عن قاعدة برج إرسال تلفزيوني، وينظر إلى قمة البرج بزاوية ارتفاع مقدارها $49°$، أجد ارتفاع البرج. 57.5 m تقريبًا.

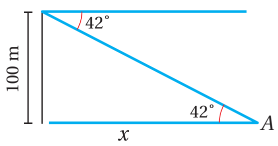
يُمكِنُ استعمالُ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ.

مثال 4 : من الحياة

قاربٌ: ينظرُ عليٌّ منْ أعلى جُرْفٍ إلى قاربٍ في البحرِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها $42°$. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرْفِ عنْ سطحِ البحرِ هوَ 100 m، فأجدُ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ.



بما أنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ (زاويةُ الانخفاضِ) هوَ $42°$، فإنَّ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ هوَ $42°$؛ لأنَّهما زاويتانِ مُتبادلتانِ داخليًّا.



أتعلَّمُ
الخطُّ الأفقيُّ ومستوى سطحِ البحرِ مُتوازيانِ؛ لذا فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ والخطِّ الأفقيِّ والزاويةَ المحصورةَ بينَ خطِّ النظرِ وسطحِ البحرِ مُتبادلتانِ داخليًّا، إذنْ، فَهُما متطابقتانِ.

أفترضُ أنَّ زاويةَ الانخفاضِ هيَ A، وأنَّ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ x:

$\tan A = \frac{(\text{المُقابِلُ})}{(\text{المُجاوِرُ})}$ نسبةُ الظلِّ

$\tan 42° = \frac{100}{x}$ بالتعويضِ

$x \tan 42° = 100$ بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في x

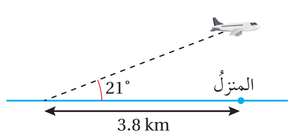
$x = \frac{100}{\tan 42°}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على $\tan 42°$

$x \approx 111$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، بُعْدُ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرْفِ هوَ 111 m تقريبًا.

أتحقَّقُ من فهمي

طائرةٌ: رصدَتْ ليلى طائرةً في السماءِ بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها $21°$ لحظةَ مرورِها فوقَ سطحِ أحدِ المنازلِ. إذا كانَ بُعْدُ ليلى عنِ المنزلِ هوَ 3.8 km، فأجدُ ارتفاعَ الطائرةِ عنِ المنزلِ. 1.5 km تقريبًا.



54

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

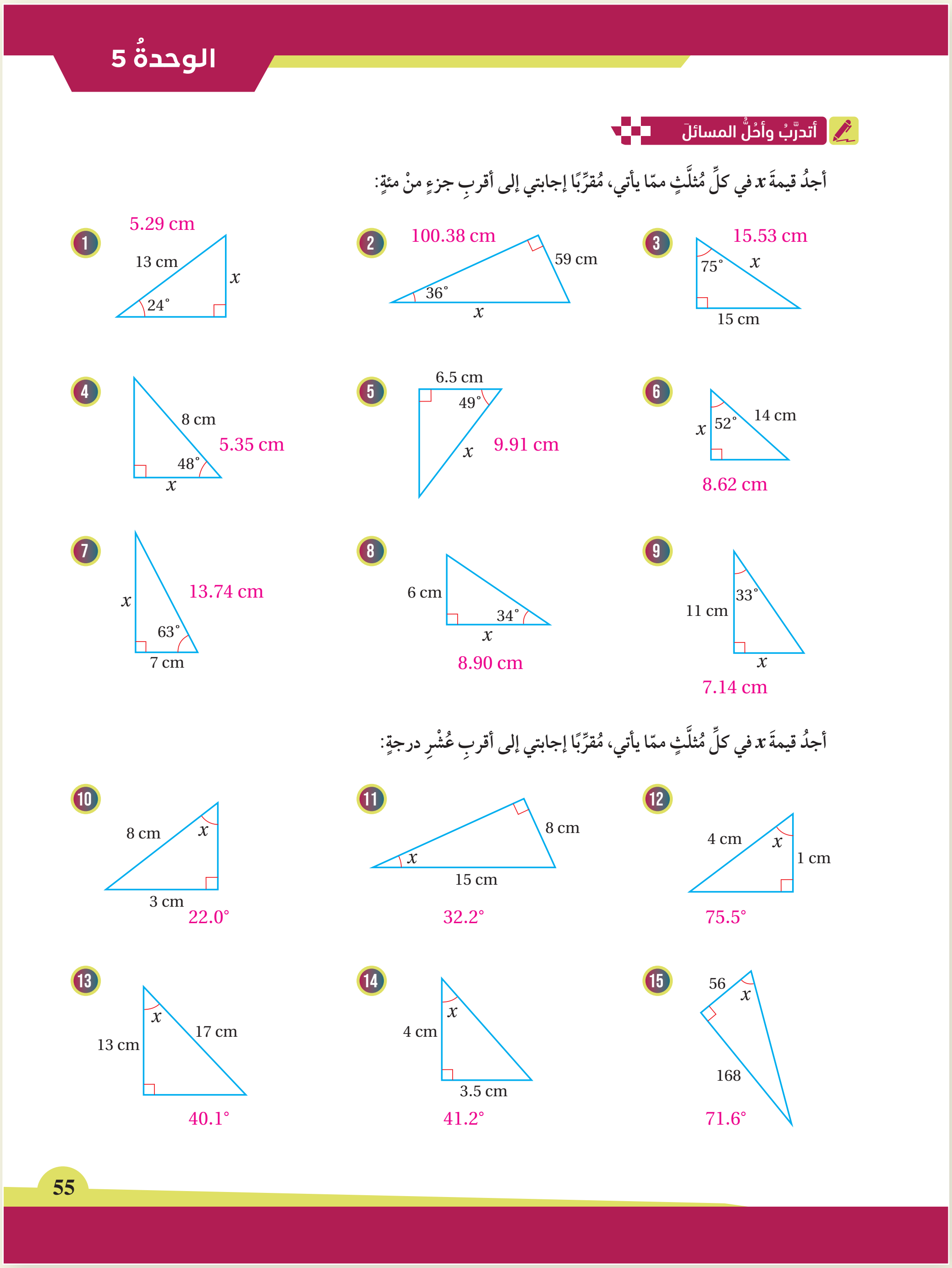
- أوجِّه الطلبة إلى بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّنْ تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألتين (25 و 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.


الوحدةُ 5

أتدرّبُ وأحلُّ المسائلَ

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ:

1) 13 cm, 24°, x — 5.29 cm
2) 59 cm, 36°, x — 100.38 cm
3) 75°, 15 cm, x — 15.53 cm
4) 8 cm, 48°, x — 5.35 cm
5) 6.5 cm, 49°, x — 9.91 cm
6) 14 cm, 52°, x — 8.62 cm
7) 63°, 7 cm, x — 13.74 cm
8) 6 cm, 34°, x — 8.90 cm
9) 11 cm, 33°, x — 7.14 cm

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

10) 8 cm, 3 cm, x — 22.0°
11) 8 cm, 15 cm, x — 32.2°
12) 4 cm, 1 cm, x — 75.5°
13) 13 cm, 17 cm, x — 40.1°
14) 4 cm, 3.5 cm, x — 41.2°
15) 56, 168, x — 71.6°

55

الواجب المنزلي:

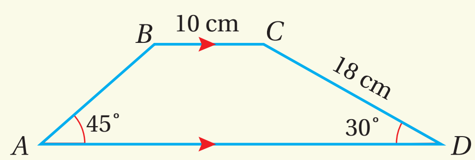
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,22 ,17 ,16 كتاب التمارين: (9 – 1) (فردي)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (21 – 18) كتاب التمارين: (10 – 1) (زوجي)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (26 – 23) كتاب التمارين: (11 – 7)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتيين:

» أجد محيط شبه المنحرف $ABCD$ في الشكل المجاور، مع تقريب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.



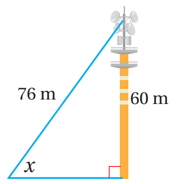
$(47 + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) \approx 75.32 \text{ cm}$

» رصد سالم قمة عمارة فكانت زاوية ارتفاعها °42، ثم تقدم نحوها بمقدار 30 m، ورصد قمتها ثانية فوجدها °65، أجد ارتفاع العمارة مع تقريب إجابتي إلى أقرب متر. 47 m

تعليمات المشروع:

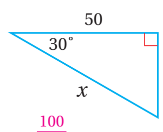
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين (10) و(11) من خطوات تنفيذ المشروع.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

16 وُضِعَ هوائيٌّ بثٍّ فوقَ بُرْجِ محطَّةٍ إذاعيةٍ، واستُعمِلَ سلكٌ داعمٌ طولُهُ 76 m لتثبيتِ طرفِ الهوائيِّ بسطحِ الأرضِ كما في الشكلِ المُجاورِ. إذا كانَ ارتفاعُ البُرْجِ والهوائيِّ هوَ 60 m، فأجدُ قياسَ الزاويةِ بينَ السلكِ وسطحِ الأرضِ مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ. 52.1°



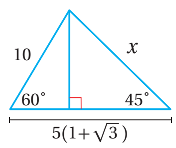
أستعملُ النسبَ المُثلَّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

17



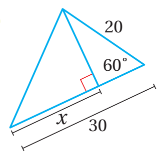
$\frac{100}{\sqrt{3}}$

18



$5\sqrt{6}$

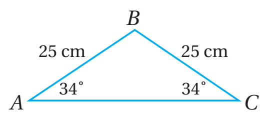
19



20

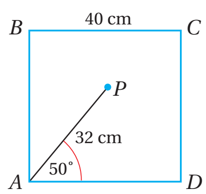
20 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي ΔABC. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ أقصرِ مسافةٍ بينَ النقطةِ B و $\overline{AC}$.

$13.98 \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}$



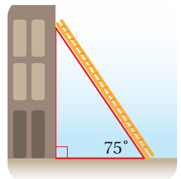
21 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي المُربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 40 cm. إذا كانَتِ النقطةُ P تقعُ داخلَ المُربَّعِ كما في الشكلِ، فأجدُ بُعْدَ هذهِ النقطةِ عنْ كلٍّ منْ $\overline{AD}$، و $\overline{AB}$، و $\overline{CD}$.

بُعد P عن $\overline{AD}$ يساوي 24.5 cm، بُعد P عن $\overline{AB}$ يساوي 20.6 cm، بُعد P عن $\overline{DC}$ يساوي 19.4 cm



22 وُضِعَ سُلَّمٌ على أحدِ أطرافِ مبنًى كما في الشكلِ المُجاوِرِ، وكانَتِ الزاويةُ التي يصنعُها السُّلَّمُ معَ الأرضِ هيَ °75؛ لتجنُّبِ السقوطِ عنْهُ. أجِدُ ارتفاعَ طرفِ السُّلَّمِ عنْ سطحِ الأرضِ في هذهِ الحالةِ إذا كانَ طولُهُ 6 m.

5.8 m تقريبًا.



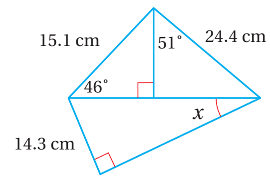
23 وقفَ عصفورٌ على شجرةٍ ارتفاعُها 12 m، مُراقِبًا دودةً على سطحِ الأرضِ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها °34. أجِدُ المسافةَ بينَ الدودةِ والعصفورِ. 21.5 m تقريبًا.

24 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 4.3 m تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

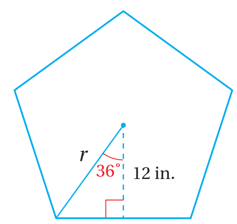
25 **تبريرٌ:** أجِدُ قيمةَ x في الشكلِ الآتي، مُبرِّرًا إجابتي.

أنظر الهامش.



26 **تحدٍّ:** يُبيِّنُ الشكلُ الآتي خماسيًّا مُنتظَمًا، طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ التي تمرُّ برؤوسِهِ r. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ مساحةِ الخماسيِّ.

أنظر الهامش.

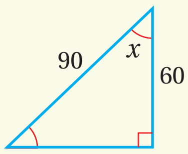


6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

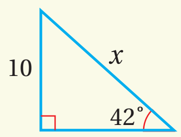
» **أجد قيمة x في كل مثلث مما يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:**

1



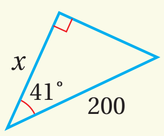
$x \approx 48.2°$

2



$x \approx 14.9$

3

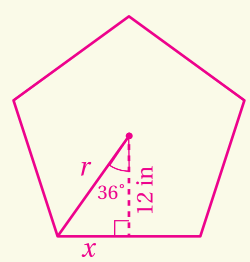


$x \approx 150.9$

» إذا نظرت فوز إلى قمّة مئذنة مسجد عندما كانت تقف على بعد 20 m من قاعدتها، فكانت زاوية ارتفاعها °55، فما ارتفاع المئذنة؟ 28.6 m تقريبًا.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

26)



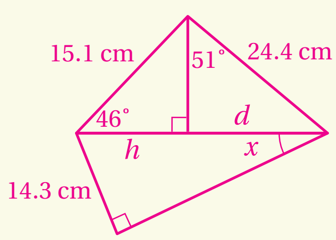
$\tan 36° = \frac{x}{12} \Longrightarrow x \approx 8.7$ in

مساحة المثلث الذي في الشكل: $\frac{1}{2} \times 12 \times 8.7 = 52.2$ in^2

ينقسم الخماسي المنتظم إلى عشرة مثلثات صغيرة لها المساحة نفسها 52.2 in^2

إذن، مساحة هذا الخماسي تساوي: $10 \times 52.2 = 522$ in^2

25)



$\sin 51° = \frac{d}{24.4}$, $d \approx 19$ cm

$\cos 46° = \frac{h}{15.1}$, $h \approx 10.5$ cm

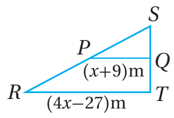
$d + h = 29.5$ cm

$\sin x = \frac{14.3}{29.5}$, $x \approx 29°$

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

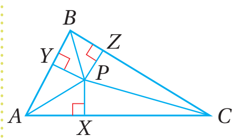
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلِّ ممّا يأتي:

1 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَتِ $\overline{PQ}$ قطعةً مُنصِّفةً في المُثلَّثِ RST، فإنَّ طولَ $\overline{RT}$ بالأمتارِ هوَ:



a) 9 b) 21 c) 45 d) 63

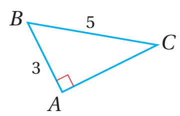
2 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَتِ النقطةُ P هيَ مركزَ الدائرةِ الداخليةِ لـ ΔABC، فإنَّ الجملةَ الصحيحةَ ممّا يأتي هيَ:



a) $PA = PB$ b) $YA = YB$

c) $PX = PY$ d) $AX = BZ$

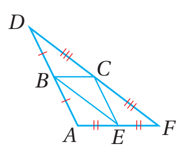
3 جيبُ تمامِ الزاويةِ C في الشكلِ المُجاوِرِ يساوي:



a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

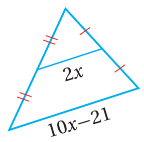
4 في الشكلِ المُجاوِرِ، إذا كانَ: $DF = 24$, $BC = 6$, $DB = 8$، فأجدُ محيطَ المُثلَّثِ ADF.



52

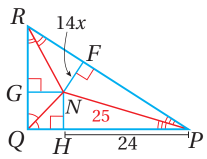
أجدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

5



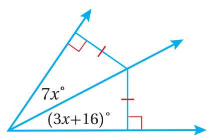
3.5

6



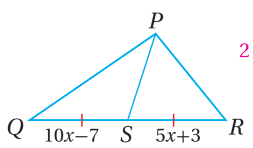
$\frac{1}{2}$

7



4

8



2

أجدُ إحداثيَّيْ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

9 $L(0, 5), M(3, 1), N(8, 1)$ $(0, -5)$

10 $A(-4, 0), B(1, 0), C(-1, 3)$ $(-1, 2)$

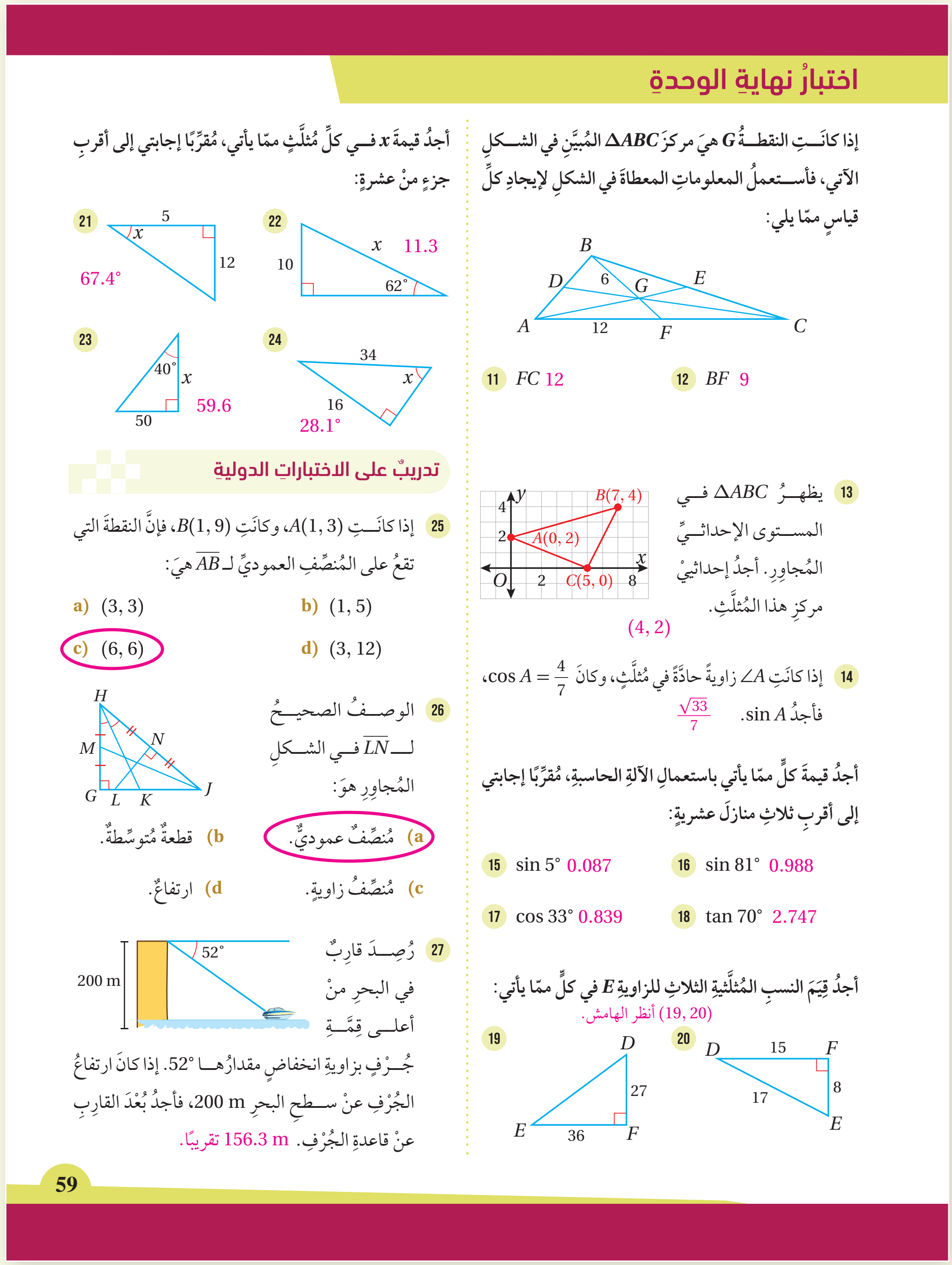
58

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (1 – 14) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (15 –24)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.



اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَتِ النقطةُ G هيَ مركزَ ΔABC المُبيَّنِ في الشكلِ الآتي، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ كلِّ قياسٍ ممّا يلي:

11) FC 12

12) BF 9

13) يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاورِ. أجدُ إحداثيَّ مركزِ هذا المُثلَّثِ. $(4, 2)$

14) إذا كانَتِ $\angle A$ زاويةً حادّةً في مُثلَّثٍ، وكانَ $\cos A = \frac{4}{7}$، فأجدُ $\sin A$. $\frac{\sqrt{33}}{7}$

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

15) $\sin 5°$ 0.087

16) $\sin 81°$ 0.988

17) $\cos 33°$ 0.839

18) $\tan 70°$ 2.747

أجدُ قيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي:
(19, 20) أنظر الهامش.

19)

20)

أجدُ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

21) 67.4°

22) 11.3

23) 59.6

24) 28.1°

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

25) إذا كانَتِ $A(1, 3)$، وكانَتِ $B(1, 9)$، فإنَّ النقطةَ التي تقعُ على المُنصِّفِ العموديِّ لـ $\overline{AB}$ هيَ:

a) $(3, 3)$ b) $(1, 5)$ c) $(6, 6)$ d) $(3, 12)$

26) الوصفُ الصحيحُ لـ $\overline{LN}$ في الشكلِ المُجاورِ هوَ:

a) مُنصِّفٌ عموديٌّ. b) قطعةٌ مُتوسِّطةٌ. c) مُنصِّفُ زاويةٍ. d) ارتفاعٌ.

27) رُصِدَ قاربٌ في البحرِ منْ أعلى قِمَّةِ جُرُفٍ بزاويةِ انخفاضٍ مقدارُها 52°. إذا كانَ ارتفاعُ الجُرُفِ عنْ سطحِ البحرِ 200 m، فأجدُ بُعْدَ القاربِ عنْ قاعدةِ الجُرُفِ. 156.3 m تقريبًا.

59

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

19) $\sin E = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$, $\cos E = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$,
$\tan E = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

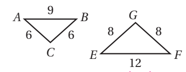
20) $\sin E = \frac{15}{17}$, $\cos E = \frac{8}{17}$, $\tan E = \frac{15}{8}$

كتاب التمارين

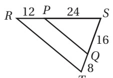
أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ أوَّلًا. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

تحديدُ المُثلَّثاتِ المُتشابِهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابهِ: SAS ، و SSS ، و AA (الدرسُ 1)

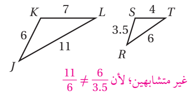
أُحدِّدُ إذا كانَ كلُّ مُثلَّثينِ ممّا يأتي مُتشابِهينِ أمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، مُبرِّرًا إجابتي:

1 

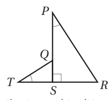
المثلثان متشابهان؛ لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{AB}{EF}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ ، $\frac{AC}{GF}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $\frac{CB}{EG}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ،
$\Delta ABC \sim \Delta EFG$ (حالة التشابه SSS)

2 

الزاويــة S مشــتركة، $\frac{SP}{SR}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ ، $\frac{SQ}{ST}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$ ،
فالمثلثان متشابهان بحالة التشابه SAS
$\Delta PSQ \sim \Delta RST$

3 

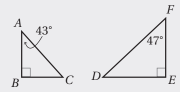
غير متشابهين؛ لأن $\frac{11}{6} \neq \frac{6}{3.5}$

4 

المثلثان متشابهان؛ لأن الزوايا المتناظرة فيهما متطابقة، حالة التشابه AA
$\Delta TQS \sim \Delta PRS$

مثالٌ: أُحدِّدُ إذا كانَ كلُّ مُثلَّثينِ ممّا يأتي مُتشابِهينِ أمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، مُبرِّرًا إجابتي:

a)



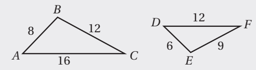
$\angle B \cong \angle E$؛ لأنَّهُما زاويتانِ قائمتانِ.

باستعمالِ مجموعِ قياساتِ زوايا المُثلَّثِ، فإنَّ:

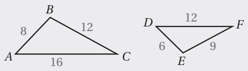
$$m\angle C = 180° - (90° + 43°) = 47°$$

بما أنَّ $m\angle F = 47°$، فإنَّ $\angle C \cong \angle F$، إذنْ: $\Delta ABC \sim \Delta DFE$ وَفقَ مُسلَّمةِ التشابهِ (AA).

b)



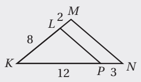
أستعملُ أطوالَ الأضلاعِ لتمييزِ الأضلاعِ المُتقابِلةِ، ثمَّ أجدُ النسبةَ بينَ طولِ كلِّ زوجٍ منْ أزواجِ الأضلاعِ المُتقابِلةِ في المُثلَّثينِ.



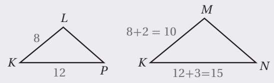
الضلعانِ المُتبقِّيانِ	أطولُ ضلعينِ	أقصرُ ضلعينِ
$\frac{BC}{EF}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$	$\frac{CA}{FD}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$	$\frac{AB}{DE}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

بما أنَّ النسبَ جميعَها متساويةٌ، فإنَّ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وَفقَ نظريةِ التشابهِ (SSS).

c)



بما أنَّ $\angle K$ مشتركةٌ بينَ المُثلَّثينِ، فإنَّني أجدُ النسبةَ بينَ طولَيْ زوجيِ الأضلاعِ المُتقابِلةِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في المُثلَّثينِ.



أطولُ ضلعينِ	أقصرُ ضلعينِ
$\frac{KP}{KN}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$\frac{KL}{KM}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

بما أنَّ طولَيِ الضلعينِ اللذينِ يحصرانِ $\angle K$ في ΔKLP مُتناسِبانِ معَ طولَيِ الضلعينِ المُناظِرينِ لهُما في ΔKMN، فإنَّ $\Delta KLP \sim \Delta KMN$ وَفقَ نظريةِ التشابهِ (SAS).

حَلُّ التناسباتِ (الدرسُ 1)

أحُلُّ كُلًّا منَ التناسباتِ الآتيةِ:

7 $\frac{2}{12}=\frac{y}{y+8}$ $y=1.6$

6 $\frac{7}{x}=\frac{14}{8}$ $x=4$

5 $\frac{x}{2}=\frac{15}{10}$ $x=3$

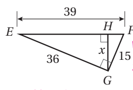
مثالٌ: أحُلُّ التناسبَ: $\frac{4}{3}=\frac{20}{x}$

بالضربِ التبادليِّ	$4 \times x = 20 \times 3$
بالضربِ	$4x = 60$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 4	$\frac{4x}{4}=\frac{60}{4}$
بالتبسيطِ	$x = 15$

استعمالُ تشابهِ المُثلَّثاتِ لإيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ (الدرسُ 1)

أُثبِتُ أنَّ كلَّ مُثلَّثينِ ممّا يأتي مُتشابِهانِ، ثمَّ أجدُ الطولَ المطلوبَ:

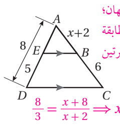
9 HG



المثلثان EFG, FGH متشابهان؛ لأن زواياهما المتناظرة متطابقة (حالة التشابه AA)

$\frac{39}{36}=\frac{15}{x} \Longrightarrow x \approx 13.8$
$HG \approx 13.8$

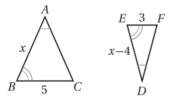
8 AB



المثلثان ADC, AEB متشــابهان؛ لأن زواياهما المتناظــرة متطابقة وفقًا لمسلّمة الزاويتين المتناظرتين (حالة التشابه AA)

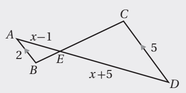
$\frac{8}{3}=\frac{x+8}{x+2} \Longrightarrow x = 1.6$
$AB = x+2 = 1.6+2 = 3.6$

10 إذا كانَ المُثلَّثانِ في الشكلِ المُجاوِرِ مُتشابِهينِ، فأجدُ قيمةَ x.



$\frac{3}{5}=\frac{x-4}{x} \Longrightarrow x = 10$

مثالٌ: إذا كانَ المُثلَّثانِ في الشكلِ المُجاوِرِ مُتشابِهينِ، فأجدُ قيمةَ x.

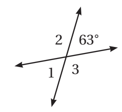


بكتابةِ التناسبِ	$\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{DE}$
بالتعويضِ	$\frac{2}{5}=\frac{x-1}{x+5}$
بالضربِ التبادليِّ	$2(x+5)=5(x-1)$
خاصيةُ التوزيعِ	$2x+10=5x-5$
بطرحِ 10 منْ طرفيِ المعادلةِ	$2x=5x-15$
بطرحِ $5x$ منْ طرفيِ المعادلةِ	$-3x=-15$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على -3	$x=5$

كتاب التمارين

• إيجادُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا (الدرسُ 1)

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



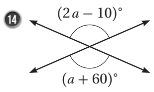
11) $m\angle 1$ 63°

12) $m\angle 2$ 117°

13) $m\angle 3$ 117°

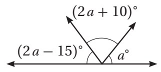
أجدُ قيمةَ a في كلٍّ ممّا يأتي:

14)



$a =$ 70

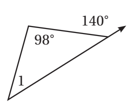
15)



$a =$ 37

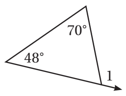
أجدُ $m\angle 1$ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ:

16)



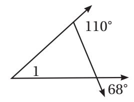
$m\angle 1 =$ 42°

17)



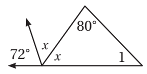
$m\angle 1 =$ 118°

18)



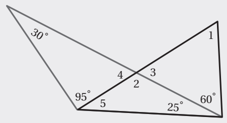
$m\angle 1 =$ 42°

19)



$m\angle 1 =$ 46°

مثالٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



a) $m\angle 4$

$30° + 95° + m\angle 4 = 180°$ زوايا داخليةٌ في مُثلَّثٍ

$125° + m\angle 4 = 180°$ بالجمعِ

$m\angle 4 = 55°$ بطرحِ 125°

b) $m\angle 2$

$m\angle 2 + m\angle 4 = 180°$ زاويتانِ مُتجاوِرتانِ على مستقيمٍ

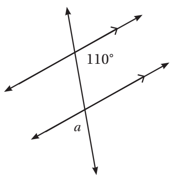
$m\angle 2 + 55° = 180°$ بتعويضِ $m\angle 4 = 55°$

$m\angle 2 = 125°$ بطرحِ 55° منْ طرفَيِ المعادلةِ

• إيجادُ قياساتِ زوايا مجهولةٍ باستعمالِ المستقيماتِ المتوازيةِ والقاطعِ (الدرسُ 1)

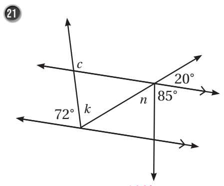
أجدُ قياساتِ الزوايا المجهولةَ في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

20)



$m\angle a =$ 70°

21)

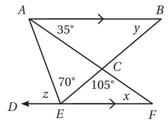


$m\angle c =$ 108°

$m\angle n =$ 75°

$m\angle k =$ 88°

22) أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

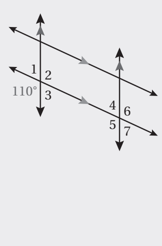


$x =$ 35° التبريرُ: متبادلة داخليًّا مع الزاوية $\angle BAF$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا)

$y =$ 40° التبريرُ: $m\angle CEF = 180° - (105° + 35°) = 40°$ و $\angle CEF$ متبادلة داخليًّا مع $\angle ABE$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا)، إذن، $m\angle ABE = 40°$

$z =$ 70° التبريرُ: قياس الزاوية الخارجية $\angle CED$ يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين. $m\angle CED = z + 70° = 105° + 35°$ إذن، $z = 70°$

مثالٌ: أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:



a) $m\angle 2$

$m\angle 2 = 110°$ تُقابِلُ بالرأسِ الزاويةَ التي قياسُها 110°

b) $m\angle 5$

$m\angle 5 = 110°$ تُناظِرُ الزاويةَ التي قياسُها 110°

c) $m\angle 3$

$m\angle 3 + m\angle 5 = 180°$ زاويتانِ مُتحالِفتانِ

$m\angle 3 + 110° = 180°$ بتعويضِ $m\angle 5 = 110°$

$m\angle 3 = 70°$ بطرحِ 110° منْ طرفَيِ المعادلةِ

• إيجادُ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ (الدرسُ 2)

أجدُ إحداثيْ نقطةِ منتصفِ $\overline{HK}$ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

23) $H(7, 3), K(-4, -1)$ — $(1.5, 1)$

24) $H(-4, -5), K(2, 9)$ — $(-1, 2)$

25) $H(-6, 10), K(8, -2)$ — $(1, 4)$

أجدُ إحداثيْ نقطةِ نهايةِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{CD}$ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ M نقطةُ منتصفِ $\overline{CD}$:

26) $C(-5, 4), M(-2, 5)$ — $(1, 6)$

27) $D(1, 7), M(-3, 1)$ — $(-7, -5)$

28) $D(-4, 2), M(6, -1)$ — $(16, -4)$

مثالٌ: أجدُ إحداثيي النقطةِ M التي تُمثِّلُ منتصفَ $\overline{KL}$، حيثُ: $L(8, -1)$، و $K(-4, 1)$.

$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ صيغةُ نقطةِ المنتصفِ في المستوى الإحداثيِّ

$M\left(\frac{-4 + 8}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}\right)$ بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (-4, 1), (x_2, y_2) = (8, -1)$

$M(2, 0)$ بالتبسيطِ

• معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ (الدرسُ 2)

أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممّا يأتي بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ:

29) $(3, 7), (-3, 5)$ — $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 6$

30) $(-1, 8), (9, -6)$ — $y - 8 = -1.4(x + 1) \Rightarrow y = -1.4x + 6.6$

31) $(-1, 6), (-3, 10)$ — $y - 6 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 4$

32) $(-3, 2), (1, 6)$ — $y - 2 = 1(x + 3) \Rightarrow y = x + 5$

33) $(-2, 5), (8, 6)$ — $y - 5 = 0.1(x + 2) \Rightarrow y = 0.1x + 5.2$

34) $(0, 3), (-1, -4)$ — $y - 3 = 7(x - 0) \Rightarrow y = 7x + 3$

مثالٌ: أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ.

الخطوةُ 1 أستعملُ النقطتينِ لإيجادِ الميلِ.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)}$ بالتعويضِ عنْ (x_1, y_1) بـ $(-3, 5)$ والتعويضِ عنْ (x_2, y_2) بـ $(9, 21)$

$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ بالتبسيطِ

إذنْ، الميلُ هوَ: $\frac{4}{3}$

كتاب التمارين

الخطوةُ 2 أُعوِّضُ الميلَ وإحداثياتِ إحدى النقطتينِ في صيغةِ الميلِ ونقطة.

صيغةُ الميلِ ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويضِ $m = \frac{4}{3}$ ، $(x_1, y_1) = (9, 21)$	$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$
بالتبسيطِ	$y = \frac{4}{3}x + 9$

إذنْ، معادلةُ المستقيمِ $y = \frac{4}{3}x + 9$

إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ (الدرسُ 3)

أجدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتينِ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لزمَ):

36) $P(2, 3), Q(-1, 4)$ $\sqrt{10}$

35) $P(-5, 2), Q(1, 8)$ $6\sqrt{2}$

مثالٌ: أجدُ المسافةَ بينَ النقطةِ $P(-1, 7)$ والنقطةِ $Q(5, -1)$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لزمَ):

صيغةُ المسافةِ في المستوى الإحداثيِّ	$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
بتعويضِ $(x_1, y_1) = (5, -1)$ ، $(x_2, y_2) = (-1, 7)$	$= \sqrt{(5-(-1))^2 + ((-1)-7)^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$
بإيجادِ مُربَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ	$= \sqrt{100}$
بإيجادِ الجذرِ التربيعيِّ	$= 10$

حلُّ المعادلاتِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ (الدرسُ 4)

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

38) $x^2 = \frac{9}{36}$ $x = \pm\frac{1}{2}$

37) $324 = b^2$ $b = \pm 18$

40) $0.0169 = d^2$ $d = \pm 0.13$

39) $y^2 = 1.96$ $y = \pm 1.3$

42) $y^2 = 0.0144$ $y = \pm 0.12$

41) $t^2 = \frac{64}{100}$ $t = \pm 0.8$

مثالٌ: أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

a) $x^2 = 144$

المعادلةُ الأصليةُ	$x^2 = 144$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{144}$
بإيجادِ قيمةِ الجذرِ	$= \pm 12$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

عندما $x = 12$	عندما $x = -12$
$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$	$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$
$144 = 144$ ✓	$144 = 144$ ✓

b) $t^2 = \frac{1}{36}$

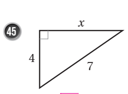
المعادلةُ الأصليةُ	$t^2 = \frac{1}{36}$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$
بإيجادِ قيمةِ الجذرِ	$= \pm\frac{1}{6}$

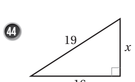
أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

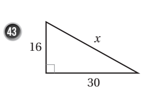
عندما $x = \frac{1}{6}$	عندما $x = -\frac{1}{6}$
$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$	$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$
$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓	$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$ ✓

إيجادُ طولِ ضلعٍ مجهولٍ في مُثلَّثٍ قائمِ الزاويةِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس (الدرسُ 4)

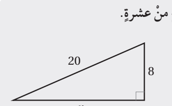
أجدُ طولَ الضلعِ المجهولِ في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ (إنْ لزمَ):

45) 
$x = \sqrt{33} \approx 5.7$

44) 
$x = \sqrt{105} \approx 10.2$

43) 
$x = 34$

مثالٌ: أجدُ طولَ الضلعِ المجهولِ في المُثلَّثِ المُجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



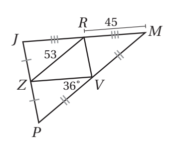
نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويضِ $a = x, b = 8, c = 20$	$x^2 + 8^2 = 20^2$
بإيجادِ القوى	$x^2 + 64 = 400$
بطرحِ 64 منْ طرفَيِ المعادلةِ	$x^2 = 336$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$x = \pm\sqrt{336}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx \pm 18.3$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $x = 18.3$

الدرسُ 1

الأجزاءُ المُتناسِبةُ في المُثلَّثاتِ
Proportional Parts in Triangles

أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

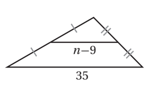


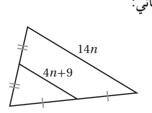
1) ZV 45

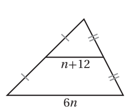
2) PM 106

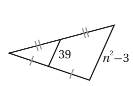
3) $m\angle RZV$ 36°

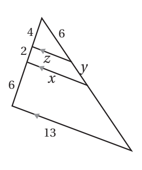
أجدُ قيمةَ n في كلٍّ ممّا يأتي:

4) 
26.5

5) 
3

6) 
6

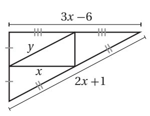
7) 
±9



8) أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاورِ لإيجادِ قيمةِ كلٍّ منْ x، وy، وz.

$y = 3, z = \frac{13}{3}, x = 6.5$

9) أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لإيجادِ قيمةِ كلٍّ منْ x، وy.



$x = 6, y = 6.5$

10) إذا كانَتْ إحداثياتُ رؤوسِ المُثلَّثِ ABC هيَ: $A(-5, 6), B(3, 8), C(1, 4)$ فأجدُ أطوالَ جميعِ القطعِ المُنصِّفةِ في المُثلَّثِ ABC.

طولُ منصِّفةِ $\overline{AB}$ و$\overline{AC}$ يساوي $\sqrt{5}$

طولُ منصِّفةِ $\overline{CB}$ و$\overline{AB}$ يساوي $\sqrt{10}$

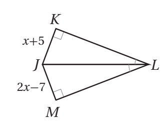
طولُ منصِّفةِ $\overline{AC}$ و$\overline{BC}$ يساوي $\sqrt{17}$

كتاب التمارين

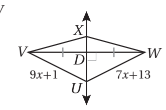
الدرس 2
مُنصِّفاتٌ في المُثلَّثِ
Bisectors in Triangle

أجِدْ كُلًّا ممّا يأتي:

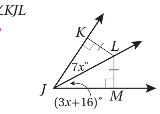
1 JK 17



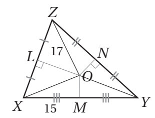
2 UW 55



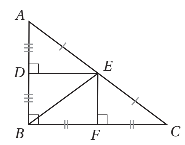
3 $m\angle KJL$ 28°



4 OM 8



أستعملُ الشكلَ المُجاوِرَ لملءِ الفراغِ في كلٍّ منَ العباراتِ الآتيةِ:



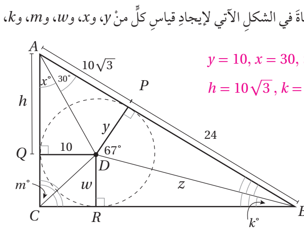
5 $\overline{DA} \cong \underline{\overline{DB}} \cong \underline{\overline{EF}}$

6 $\overline{BF} \cong \underline{\overline{CF}} \cong \underline{\overline{DE}}$

7 $\angle AED \cong \underline{\angle C}$

8 $\overline{FE} \cong \underline{\overline{BD}} \cong \underline{\overline{DA}}$

9 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لإيجادِ قياسِ كلٍّ منْ y، وx، وw، وm، وk، وh، وz.

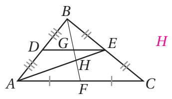


$y = 10, x = 30, w = 10, z = 26,$
$h = 10\sqrt{3}, k = 23, m = 37$

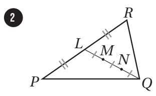
الدرس 3
القطعُ المُتوسِّطةُ والارتفاعاتُ في المُثلَّثِ
Medians and Altitudes in Triangle

أُحدِّدُ مركزَ كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

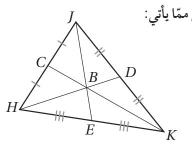
1 H



2 M

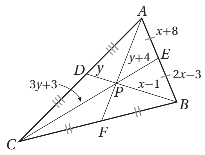


إذا كانَتِ النقطةُ B هيَ مركزَ ΔHJK، وكانَ: $HD = 21, BK = 18$، فأجِدْ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



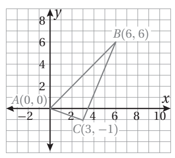
3 HB 14
4 BD 7
5 CK 27
6 CB 9

أجِدْ كلَّ قياسٍ ممّا يأتي:



7 BP $x = 11, BP = 10$
8 BD 15
9 CP $y = 5, CP = 18$
10 PE 9

11 يظهرُ ΔABC في المستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ. أجِدْ إحداثيَّي مركزِ هذا المُثلَّثِ. $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$



أجِدْ إحداثيَّيْ ملتقى ارتفاعاتِ المُثلَّثِ المعطاةِ إحداثياتُ رؤوسِهِ في كلٍّ ممّا يأتي:

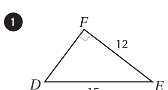
12 $X(2, -2), Y(4, 6), Z(8, -2)$ $(4, -1)$

13 $A(-5, 8), B(4, 5), C(-2, 5)$ $(-5, -4)$

الدرس 4
النسبُ المُثلَّثيةُ
Trigonometric Ratios

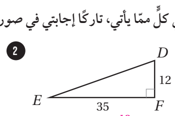
أجِدْ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

1



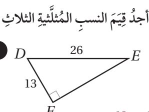
$DF = 9, \sin E = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \cos E = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \tan E = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

2



$ED = 37, \sin E = \frac{12}{37}, \cos E = \frac{35}{37}, \tan E = \frac{12}{35}$

3



$FE = 13\sqrt{3}, \sin E = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}, \cos E = \frac{13\sqrt{3}}{26} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan E = \frac{13}{13\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

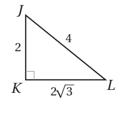
أجِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ:

4 $\sin 10°$ 0.174
5 $\sin 17°$ 0.292
6 $\sin 72°$ 0.951
7 $\cos 7°$ 0.993
8 $\cos 82°$ 0.139
9 $\cos 29°$ 0.875
10 $\tan 15°$ 0.268
11 $\tan 59°$ 1.664
12 $\tan 78°$ 4.705
13 $5 \tan 80°$ 28.356
14 $\frac{7}{\cos 32°}$ 8.254
15 $7 \cos 52°$ 4.310

أجِدْ قياسَ الزاويةِ الحادةِ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ:

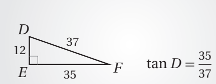
16 $\sin B = 0.7245$ 46.4°
17 $\cos C = 0.2493$ 75.6°
18 $\tan E = 9.4618$ 84.0°

19 مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ، أُحدِّدُ النسبَ المُثلَّثيةَ التي تساوي $\frac{1}{2}$ ممّا يأتي (أُحدِّدُ جميعَ الخياراتِ المُمكِنةِ): $\sin L, \cos J$



$\boxed{\sin L}$ $\cos L$ $\sin J$ $\boxed{\cos J}$

20 أكتشِفُ الخطأَ: أكتشِفُ الخطأَ في الحلِّ المُجاوِرِ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.



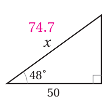
$\tan D = \frac{35}{37}$

الخطأُ هو عدُّ ظلِّ الزاويةِ يساوي المقابلَ مقسومًا على الوترِ. والصحيحُ أنَّ ظلَّ الزاويةِ يساوي المقابلَ مقسومًا على المجاورِ، أيْ أنَّ: $\tan D = \frac{35}{12}$

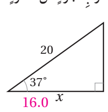
الدرس 5
تطبيقاتُ النسبِ المُثلَّثيةِ
Applications of Trigonometric Ratios

أجِدْ قيمةَ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ:

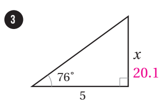
1 74.7



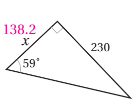
2 16.0



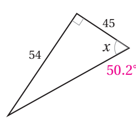
3 20.1



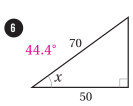
4 138.2



5 50.2°

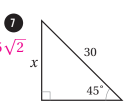


6 44.4°

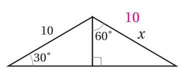


أستعملُ النسبَ المُثلَّثيةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلِّ مُثلَّثٍ ممّا يأتي:

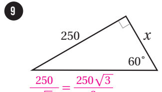
7 $15\sqrt{2}$



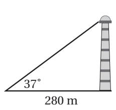
8 10



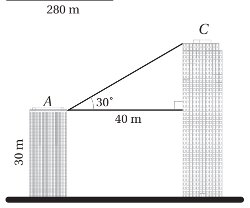
9 $\frac{250}{\sqrt{3}} = \frac{250\sqrt{3}}{3}$



10 رصدَ أحمدُ قِمَّةَ منارةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها 37°. إذا كانَ بُعْدُ أحمدَ عنْ قاعدةِ المنارةِ هوَ 280 m، فأجِدْ ارتفاعَ المنارةِ. $h \approx 211$ m

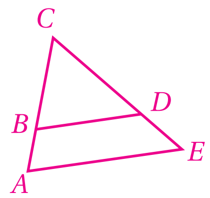


11 يظهرُ في الشكلِ المُجاوِرِ المبنى A والمبنى C. إذا كانَ ارتفاعُ المبنى A هوَ 30 m، وكانَتِ المسافةُ بينَ المبنيينِ هيَ 40 m، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ ارتفاعِ المبنى C. 53.1 m



إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

17) **المعطيات:** قطع المستقيم $\overline{BD}$ ضلعين في المثلث ACE بحيث كان:



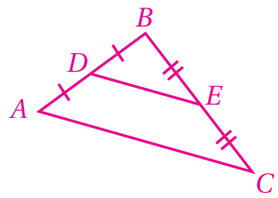
$$\frac{BA}{CB}=\frac{DE}{CD}$$

المطلوب: إثبات أنّ: $\overline{BD}\parallel\overline{AE}$

البرهان:

التبرير	العبارة
1) معطى	1) $\frac{BA}{CB}=\frac{DE}{CD}$
2) بإضافة 1 إلى الطرفين.	2) $\frac{BA}{CB}+\frac{CB}{CB}=\frac{DE}{CD}+\frac{CD}{CD}$
3) بجمع النسبتين.	3) $\frac{BA+CB}{CB}=\frac{DE+CD}{CD}$
4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة.	4) $\frac{AC}{CB}=\frac{CE}{CD}$
5) زاوية مشتركة.	5) $\angle C\cong\angle C$
6) حالة التشابه SAS	6) $\Delta ACE\sim\Delta BCD$
7) زاويتان متناظرتان في مثلثين متشابهين.	7) $\angle CBD\cong\angle CAE$
8) عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.	8) $\overline{BD}\parallel\overline{AE}$

18) **المعطيـات:** النقطتان D,E هما نقطتا منتصف الضلعين $\overline{BA},\overline{BC}$ على الترتيب في المثلث ABC.



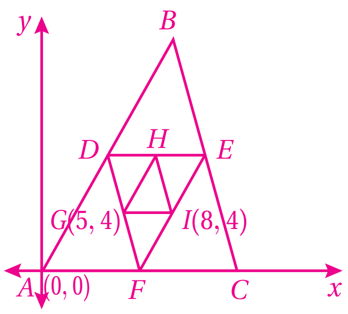
المطلوب: إثبات أنّ: $\overline{DE}\parallel\overline{AC}$،
و $DE=\frac{1}{2}AC$

البرهان:

التبرير	العبارة
1) D هي منتصف $\overline{BA}$	1) $BD=AD$
2) بالقسمة على AD	2) $\frac{BD}{AD}=1$
3) E هي منتصف $\overline{BC}$	3) $BE=EC$
4) بالقسمة على EC	4) $\frac{BE}{EC}=1$
5) كل منهما يساوي 1	5) $\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$
6) عكس نظرية التناسب في المثلث.	6) $\overline{DE}\parallel\overline{AC}$
(وهذا هو المطلوب الأول)	

1) زاوية مشتركة.	7) $\angle B\cong\angle B$
2) زاويتان متناظرتان بين متوازيين وقاطع.	8) $\angle BDE\cong\angle BAC$
3) حالة التشابه AA	9) $\Delta BDE\sim\Delta BAC$
4) أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين متناسبة.	10) $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$
5) D نقطة منتصف $\overline{AB}$	11) $DB=\frac{1}{2}AB$
6) بالقسمة على AB	12) $\frac{DB}{AB}=\frac{1}{2}$
7) من (4)، و(6).	13) $\frac{DE}{AC}=\frac{1}{2}$
8) بالضرب في AC.	14) $DE=\frac{1}{2}AC$
(وهذا هو المطلوب الثاني)	

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 1:



$$GI=8-5=3\implies DE=6$$

لكن $\overline{DE}$ قطعة مُنصَّفة في المثلث ABC؛ أي أن طولها يساوي نصف طول $\overline{AC}$، إذن، $AC=12$، وهذا يعني أن إحداثيي C هما $(12, 0)$.

إذن، إحداثيا F هما: $(6, 0)$؛ لأنها نقطة منتصف $\overline{AC}$.

وبما أن G منتصف $\overline{FD}$، فإن:

$$(5, 4) = \left(\frac{6 + x_D}{2}, \frac{0 + y_D}{2}\right) \Longrightarrow x_D = 4, y_D = 8$$

إذن، إحداثيا D هما: $(4, 8)$.

وبما أن D منتصف $\overline{AB}$، فإن:

$$(4, 8) = \left(\frac{0 + x_B}{2}, \frac{0 + y_B}{2}\right) \Longrightarrow x_B = 8, y_B = 16$$

إذن، إحداثيا B هما: $(8, 16)$.

وبما أن E منتصف $\overline{BC}$، فإن إحداثيي E هما:

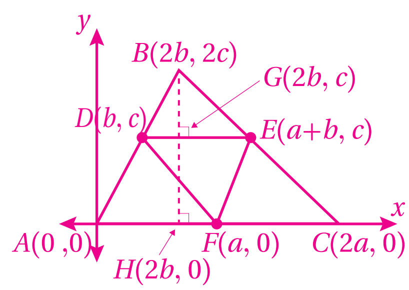
$$\left(\frac{8 + 12}{2}, \frac{0 + 16}{2}\right) = (10, 8)$$

ولأن H منتصف $\overline{DE}$، فإن إحداثيي H هما:

$$\left(\frac{4 + 10}{2}, \frac{8 + 8}{2}\right) = (7, 8)$$

إجابة الأسئلة في بند (توسّع: مثلث القطع المنصفة):

7) أرسم المثلث ABC في المستوى الإحداثي وأعيّن رؤوسه، وأعيّن منتصفات الأضلاع وأحدّد إحداثياتها، وأرسم ارتفاع المثلث، وأحدّد إحداثيات مسقطه على المحور x كما تظهر على الرسم.



أجد مساحة المثلث ABC.

$$\text{Area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times BH$$

$$= \frac{1}{2} \times 2a \times 2c$$

$$= 2ac$$

أجد مساحة المثلث DEF.

$$\text{Area}(\Delta DEF) = \frac{1}{2} \times DE \times GH$$

$$= \frac{1}{2} \times (a+b-b) \times c$$

$$= \frac{1}{2} ac$$

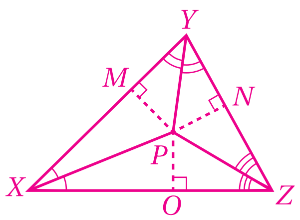
$$\frac{\text{Area}(\Delta DEF)}{\text{Area}(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2}ac}{2ac} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Area}(\Delta DEF) = \frac{1}{4}\text{Area}(\Delta ABC)$$

إذن، مساحة مثلث القطع المنصّفة تساوي رُبع مساحة المثلث الأصلي.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 2:

15)



المعطيات: $\overline{PX}, \overline{PY}, \overline{PZ}$ هي منصفات زوايا المثلث XYZ،

$$\overline{PM} \perp \overline{XY}, \overline{PN} \perp \overline{YZ}, \overline{PO} \perp \overline{XZ}$$

المطلوب: إثبات أنّ: $PM = PN = PO$

البرهان: بما أن P تقع على منصف الزاوية $\angle XYZ$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن $\overline{XY}$، و $\overline{YZ}$ أي $PM = PN$

وبما أنّ P تقع على منصف الزاوية $\angle YXZ$، فإنها تبعد البُعد نفسه عن $\overline{XY}$، و $\overline{XZ}$ أي $PM = PO$

إذن، $PM = PN = PO$

18) ليكن طول نصف قطر الدائرة الداخلية r، فإنّ:

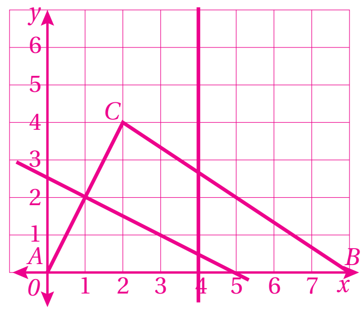
$$r^2 = 9^2 - 8^2 = 17$$

$$r = \pm\sqrt{17}$$

$r = \sqrt{17}$؛ لأن الطول لا يكون سالبًا.

طول قطر الزجاج يساوي: $2\sqrt{17} \approx 8.2$

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 2:



$A(0, 0), B(8, 0), C(2, 4)$

أولًا: أجد معادلة المنصّف العمودي للضلع $\overline{AB}$.

نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(4, 0)$، وميل $\overline{AB}$ يساوي صفرًا، إذن، منصّفه العمودي هو المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $(4, 0)$ ومعادلته هي: $x = 4$

ثانيًا: أجد معادلة المنصّف العمودي للضلع $\overline{AC}$.

نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي $(1, 2)$، وميل $\overline{AC}$ يساوي 2، إذن، ميل منصّفه العمودي -0.5

ومعادلة هذا المنصف العمودي هي:

$$y-2 = -0.5(x - 1) \Longrightarrow y = -0.5x + 2.5$$

ثالثًا: أجد إحداثيي نقطة تقاطع المنصّفين العموديين، فتكون هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث ABC.

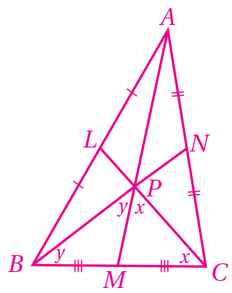
أحل المعادلتين: $y = -0.5x + 2.5, x = 4$ بتعويض $x = 4$ في المعادلة الثانية، ومنه:

$$y = -0.5(4) + 2.5$$

$$y = -2 + 2.5 = 0.5$$

إذن، مركز الدائرة الخارجية للمثلث ABC هو: $(4, 0.5)$

إجابة سؤال الإثراء، الدرس 3:



$AM = 1.5BC$ (معطى)

$PM = \frac{1}{3}AM \Longrightarrow PM = 0.5BC$

(AM قطعة متوسطة في المثلث ABC).

$PM = BM = MC$ (كل منها يساوي نصف طول $\overline{BC}$).

إذن، المثلثان MCP، وMPB متطابقا الضلعين، وزوايا القاعدة فيهما متطابقة.

فإذا كان $m\angle MCP = x$، فإن $m\angle MPC = x$ (زاويتا قاعدة في مثلث متطابق الضلعين).

وإذا كان $m\angle MBP = y$، فإن $m\angle MPB = y$ (زاويتا قاعدة في مثلث متطابق الضلعين).

إذن $m\angle BPC = x + y$

إذن، مجموع قياسات زوايا المثلثين MCP، و MPB يساوي $360°$

أي أنّ: $x + x + y + y + m\angle BMC = 360°$

لكن $m\angle BMC = 180°$

إذن، $x+x+y+y+180° = 360°$

$2x + 2y = 180°$

$x + y = 90°$

إذن، $m\angle BPC = 90°$

أي أن: $BN \perp CL$

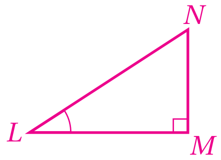
إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

31)

1) $\sin X = \cos X = \sin Z = \cos Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

لأن الضلع المقابل يطابق الضلع المجاور لكلا الزاويتين X و Z

2) $\tan X = \tan Z = 1$؛ لأن الضلع المقابل يطابق الضلع المجاور لكلا الزاويتين X و Z.



34) $\sin L = \frac{NM}{NL}$

نعلم أنّ: $NM < NL$

وبالقسمة على NL ينتج أنّ: $\frac{NM}{NL} < 1$

وبتعويض $\sin L$ بدل $\frac{NM}{NL}$ ينتج أنّ: $\sin L < 1$

35) $\cos L = \frac{ML}{NL}$

نعلم أنّ: $ML < NL$

وبالقسمة على NL ينتج أنّ: $\frac{ML}{NL} < 1$

وبتعويض $\cos L$ بدل $\frac{ML}{NL}$ ينتج أنّ: $\cos L < 1$

36) نلاحظ من المثلث الأيمن أنّ: $\tan A = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

كما نلاحظ من المثلث الأيسر أنّ: $\sin A = \frac{a}{c}$، وأنّ: $\cos A = \frac{b}{c}$

وبالتعويض نجد أنّ: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

الوحدة
6

المقاديرُ الأُسِّيَّةُ والمقاديرُ الجذريةُ
Exponential and Radical Expressions

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: تبسيط المقادير الأُسّيّة	• تعرّف الشروط التي ينبغي توافرها في المقدار الأسّي لكي يُعدّ في أبسط صورة. • كتابة المقادير الأسّية في أبسط صورة باستعمال خصائص ضرب القوى. • كتابة المقادير الأسّية في أبسط صورة باستعمال خصائص قسمة القوى. • كتابة المقادير الأسّية في أبسط صورة باستعمال خاصيتي: الأسّ الصفري، والأسّ السالب.		• أقلام لوح ملوّنة. • ورقة المصادر 7	4
الدرس 2: العمليات على المقادير الجذرية	• تعرّف الشروط التي ينبغي توافرها في المقدار الجذري لكي يُعدّ في أبسط صورة. • كتابة المقادير الجذرية في أبسط صورة باستعمال خاصية ضرب الجذور. • كتابة المقادير الجذرية في أبسط صورة باستعمال خاصية قسمة الجذور. • كتابة المقادير الجذرية في أبسط صورة بإجراء عمليتي الجمع والطرح للمقادير الجذرية المتشابهة. • كتابة المقادير الجذرية في أبسط صورة باستعمال خصائص الضرب والقسمة. • كتابة المقادير الجذرية في أبسط صورة باستعمال إنطاق المقام (الضرب في المرافق).	المقادير الجذرية. إنطاق المقام. المرافق.	• أقلام لوح ملوّنة.	5
الدرس 3: حل المعادلات الجذرية	• حلّ المعادلات الجذرية. • التحقق من صحة حل المعادلات الجذرية جبريًّا وبيانيًّا باستعمال أدوات التكنولوجيا. • تمييز الحل الدخيل للمعادلة الجذرية.	المعادلات الجذرية. الحلول الدخيلة.	• ورقة المصادر 1 • أقلام لوح ملوّنة. • جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا.	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				15 حصة

الوحدة 6


الوحدةُ 6

المقاديرُ الأُسِّيَّةُ والمقاديرُ الجذريةُ
Exponential and Radical Expressions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ المقاديرُ الأُسِّيَّةُ والمقاديرُ الجذريةُ لنمذجةِ كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيةِ والعلميةِ، ويُمكِنُ توظيفُ المعادلاتِ الجذريةِ في تحديدِ قِيَمٍ علميةٍ دقيقةٍ، مثلِ: سرعةِ الصوتِ، والزمنِ الذي يستغرقُهُ البندولُ في أثناءِ حركتِهِ التذبذبيةِ ذهابًا وإيابًا.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تبسيطَ مقاديرَ جبريةٍ تحوي جذورًا صمّاءَ.
- ✓ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ✓ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ النسبيةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ✓ حَلَّ المعادلاتِ الخطيةِ والمعادلاتِ التربيعيةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ استعمالَ قوانينِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.
- ◄ تبسيطَ المقاديرِ الجذريةِ.
- ◄ إجراءَ العملياتِ على المقاديرِ الجذريةِ.
- ◄ حَلَّ معادلاتٍ تحوي جذورًا.

60

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة الشروط الأساسية الواجب توافرها في المقادير الأسّية والمقادير الجذرية لكي تُعدّ هذه المقادير في أبسط صورة، وسيستعملون خصائص العمليات على الأسس الصحيحة وخصائص العمليات على الجذور لكتابة تلك المقادير في أبسط صورة.

إضافةً إلى ما سبق، سيتعرّف الطلبة المعادلات الجذرية، ويحلّونها، ويتحقّقون من صحة حلها جبريًّا وبيانيًّا باستعمال الأدوات التكنولوجية مثل برمجية جيوجبرا، ويميّزون الحلول الدخيلة التي تنتج بسبب استعمال بعض التقنيات الجبرية أثناء الحل (مثل تربيع طرفي المعادلة).

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف الثامن 

- إيجاد قيمة الجذر التربيعي لعدد، واستخدامه في حل مسائل حياتية.
- تقدير قيمة الجذر التربيعي لعدد، وتعرّف الجذور الصمّاء.
- الربط بين الأسس النسبية والجذور، والتحويل بينهما.
- استعمال قوانين الأسس الصحيحة لكتابة العبارة الأسّية في أبسط صورة.
- استعمال ضرب الأسس النسبية وقسمتها في إيجاد قيم مقادير تحوي أسسًا نسبية وتبسيطها.
- كتابة الأعداد الكلية والعشرية بالصيغة العلمية، وإجراء عمليتي الضرب والقسمة عليها.

الصف التاسع 

- استعمال خصائص الأسس الصحيحة لتبسيط المقادير الأسّية.
- تبسيط المقادير الجذرية.
- تعرّف مفهوم المرافق، واستعماله لإنطاق مقامات الكسور التي تتضمن جذورًا.
- إجراء العمليات على المقادير الجذرية.
- حل معادلات تحوي مقادير جذرية، وتمييز الحل الدخيل.

الصف العاشر 

- التحويل بين الصيغة الأسّية والصيغة الجذرية.
- تطبيق خصائص ضرب القوى وقسمتها لكتابة مقادير أسّية نسبية في أبسط صورة.
- حل معادلات أسّية.
- حل أنظمة معادلات أسّية.

مشروعُ الوحدةِ

المُجسَّماتُ والمقاديرُ الأُسِّيَّةُ والجذريةُ

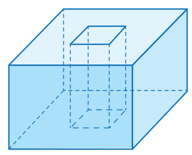
فكرةُ المشروعِ تصميمُ مُجسَّماتٍ، وتوظيفُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ والمقاديرِ الجذريةِ في التعبيرِ عنْ أبعادِها.

الموادُّ والأدواتُ قطعٌ منَ البولسترينِ، أدواتٌ هندسيةٌ، مِقَصٌّ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

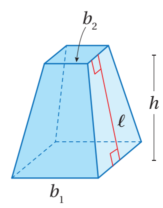
المهمةُ 1:

1. أصنعُ منْ قطعِ البولسترينِ مُكعَّبًا، وأُعبِّرُ عنْ طولِهِ بمقدارٍ أُسِّيٍّ يحوي مُتغيِّرينِ على الأقلِّ.
2. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ ومساحةَ سطحِهِ في أبسطِ صورةٍ بدلالةِ مُتغيِّراتِ المقدارِ الأُسِّيِّ.
3. أُنشِئُ في وسطِ المُكعَّبِ متوازيَ مستطيلاتٍ قاعدتُهُ مُربَّعةٌ، وطولُ ضلعِها يقلُّ بمقدارِ 5 cm عنْ طولِ ضلعِ المُكعَّبِ.
4. أجدُ حجمَ متوازي المستطيلاتِ الذي أنشأْتُهُ في الخطوةِ السابقةِ.
5. أجدُ مساحةَ سطحِ المُكعَّبِ بعدَ إنشاءِ متوازي المستطيلاتِ داخلَهُ في أبسطِ صورةٍ.
6. أُعبِّرُ عنْ طولِ ضلعِ المُكعَّبِ بمقدارٍ جبريٍّ آخرَ، وليكنْ مقدارًا جذريًّا.
7. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ ومساحةَ سطحِهِ بدلالةِ المقدارِ الجذريِّ في أبسطِ صورةٍ.



المهمةُ 2:

1. أصنعُ منْ قطعِ البولسترينِ هرمًا قاعدتُهُ مُربَّعةٌ.
2. أقصُّ الهرمَ منَ الأعلى بموازاةِ القاعدةِ كما في الشكلِ المُجاورِ.
3. أجدُ علاقةً يُمكِنُ بها إيجادُ الارتفاعِ الجانبيِّ للمُجسَّمِ، مُفترِضًا أنَّ طولَ قاعدتِهِ الكبيرةِ هوَ b_1، وطولَ قاعدتِهِ الصغيرةِ هوَ b_2، وارتفاعَهُ هوَ h، وارتفاعَهُ الجانبيَّ هوَ ℓ.
4. أقيسُ طولَ القاعدةِ الكبيرةِ، وطولَ القاعدةِ الصغيرةِ، والارتفاعَ الجانبيَّ للمُجسَّمِ إلى أقربِ سنتيمترٍ، ثمَّ أستعملُ العلاقةَ التي توصَّلْتُ إليْها في الفرعِ السابقِ لإيجادِ ارتفاعِ المُجسَّمِ.



عرضُ النتائجِ:

- أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمَّنُ صورًا تُوضِّحُ خطواتِ العملِ في المشروعِ.
- أعرضُ المُجسَّماتِ التي صمَّمْتُها أمامَ طلبةِ الصفِّ، مُوضِّحًا كيفَ وظَّفْتُ ما تعلَّمْتُهُ في الوحدةِ في تنفيذِ هذا المشروعِ.

61

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	تصميم المجسّمات المطلوبة بدقّة.			
2	استعمال مقادير أسّية مناسبة لتمثيل الأبعاد في المجسّمات.			
3	حساب الحجوم ومساحات الأسطح للمجســـمات بدلالة المقادير الأسّية بشكل صحيح.			
4	التعاون والعمل بروح الفريق.			
5	إعداد المشروع في الوقت المحدّد.			
6	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
7	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:

هدف المشـــروع: يهدف مشـــروع الوحدة إلى استعمال الطلبة المقادير الأسّية والمقادير الجذرية في التعبير عن أبعاد مجسّمات يصمّمونها، وتوظيف ما يتعلمونه لتبسيط المقادير الأسّـية والمقادير الجذرية باســتعمال خصائص الأسس والعمليات عليها وخصائص الجذور والعمليات عليها.

ويهدف مشـــروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعـــي وتعزيزهما، وتطويـــر مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهـم، وأؤكّد أهمية توثيـق خطـوات تنفيـذ المشـروع أوّلًا بـأوّل، وتعزيزها بالصور والنشرات واللوحات وغيرها.
- أذكّـر الطلبة بالعودة إلى المشـروع في نهاية كل درس مـن دروس الوحدة؛ لاسـتكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيـار كل مجموعـة واحدًا منها؛ للوقـوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعـرض البيانات التي جمعها مـع أفـراد مجموعتـه (تتمثّل أهميـة هـذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفـراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

الدرس

1

نتاجات الدرس

- تعرّف الشـروط التي ينبغي توافرها في المقدار الأسّي لكي يُعدّ في أبسط صورة.
- كتابـة المقاديـر الأسّـية في أبسـط صـورة باسـتعمال خصائص ضرب القوى.
- كتابـة المقاديـر الأسّـية في أبسـط صـورة باسـتعمال خصائص قسمة القوى.
- كتابـة المقاديـر الأسّـية في أبسـط صـورة باسـتعمال خاصيتي الأسّ الصفري والأسّ السالب.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- اسـتعمال قواعد ضـرب القوى الصحيحة وقسـمتها لتبسيط عبارات أسّية.

مراجعـة التعلّـم القبلـي ومعالجـة الفاقـد التعليمـي:

- أوجّـه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطـة بمـا سـيقدَّم مـن موضوعـات الـدرس فـي الحصـة (إنْ وجدت) في صفحات (**أسـتعد لدراسـة الوحـدة**) فـي كتـاب التمارين، ثـم أطلـب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجـوّل بين الطلبـة؛ لمتابعتهـم أثناء الحـل، وتحـديد نقـاط ضعفهـم، وأوجّههم إلى مراجعـة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

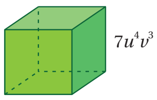
الدرسُ

1

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرسِ استعمالُ خصائصِ الأُسسِ الصحيحةِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُكعَّبًا طولُ ضلعِهِ $7u^4v^3$ وحدةً. أجدُ حجمَ المُكعَّبِ بدلالةِ u و v في أبسطِ صورةٍ.



تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ خصائصِ ضربِ القُوى

تعلَّمْتُ سابقًا كيفَ أستعملُ الأُسسَ للتعبيرِ عنِ الضربِ المُتكرِّرِ لعددٍ في نفسِهِ. وتعلَّمْتُ أيضًا أنَّ عددَ مَرّاتِ تكرارِ الضربِ يُسمّى **الأُسَّ**، وأنَّ العددَ نفسَهُ يُسمّى الأساسَ، وأنَّ كُلًّا منَ الأساسِ والأُسِّ معًا يُسمّى **القوَّةَ**.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

الأُسُّ: 5
الأساسُ: 3

مراجعةُ المفهومِ — **الصيغةُ الأُسِّيَّةُ**

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا، وكانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مَرَّةً}}$$

حيثُ:

a: الأساسُ.

n: الأُسُّ.

أتذكَّرُ

الصيغةُ الأُسِّيَّةُ هيَ صيغةٌ يُكتَبُ فيها الضربُ المُتكرِّرُ باستعمالِ الأُسسِ.

تعلَّمْتُ أيضًا كيفَ أستعملُ خاصيةَ ضربِ القوى، وقوَّةِ القوَّةِ، وقوَّةِ ناتجِ الضربِ إذا كانَ الأساسُ عددًا حقيقيًّا. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ خصائصَ ضربِ القُوى هذهِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

1 التهيئة

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية أو رباعية، وأطلب إليهم الإجابة عن السؤال الوارد في **ورقة المصادر 7: الصيغة الأسّية**.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أختار بعض الطلبة ممن أجابوا بشكل صحيح، وأطلب إليهم إكمال الجدول على اللوح.
- أطلب إلى باقي الطلبة إبداء آرائهم في الإجابة التي تُدوَّن على اللوح، وتصحيح حلولهم.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا، وأسألهم: لماذا نستعمل الصيغة الأسّية؟ وما الفائدة منها؟
- أتقبّل إجابات الطلبة بصرف النظر عن دقّتها، وأعزّزها بتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما حجم المكعّب الذي طول ضلعه 5 cm؟ $125\ cm^3$
  - » ما حجم المكعّب الذي طول ضلعه x cm؟ $x^3\ cm^3$
  - » كيف نجد حجم المكعب الذي طول ضلعه معطى في المسألة؟ إجابة محتملة: نكعّب المقدار $7u^4v^3$
  - » ما أبسط صورة للمقدار $(7u^4v^3)^3$؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأوّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

ملاحظاتي

3 التدريس

مثال 1

- أذكّر الطلبة بالصيغة الأسّية، وأستعمل الأقلام المُلوّنة لتمييز الأساس والأسّ.
- أؤكّد للطلبة أن الصيغة الأسّية توفّر لنا طريقة سهلة ومُختصَرة للتعبير عن الأعداد عندما تكون كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا.
- أذكّر الطلبة بخصائص ضرب القوى ذات الأسس الصحيحة بالاستعانة بصندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب.
- أدوّن في زاوية اللوح الشروط الواجب توافرها في المقدار الأسّي لكي يُعدّ مكتوبًا في أبسط صورة، وأحتفظ بهذه الشروط مُدوَّنةً على اللوح أثناء مناقشة الأمثلة.
- أناقش مع الطلبة حل الفرعين 1 و 2 من المثال 1 على اللوح، وأوجّههم إلى التأكد من توفر الشروط في الناتج النهائي.
- أختار طالبين/ طالبتين لمناقشة الفرعين: 3 و 4 من المثال 1 على اللوح أمام بقية طلبة الصف، وأقدّم التغذية الراجعة اللازمة لحلّهما.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلّم**) المجاور لصندوق (مفهوم أساسي، أبسط صورة للمقدار الأسّي)، وأؤكّد أن أبسط صورة للمقدار الأسّي هي صورة مكافئة للمقدار الأصلي.
- أناقش مع الطلبة مضمون صندوق (**أتعلّم**) المجاور للمثال 1؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بعدم الحاجة إلى كتابة الأسّ عندما يكون العدد 1.
- يمكن تكليف بعض الطلبة بعمل لوحة من الكرتون المقوّى توضّح شروط أبسط صورة للمقدار الأسّي، تُعلَّق داخل الغرفة الصفية؛ بهدف تسهيل الوصول إلى الشروط عند الحاجة إلى التذكير بها.

مفهومٌ أساسيٌّ — **خصائصُ ضربِ القُوى**

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ:

مثالٌ		الخاصيةُ
$x^3 \times x^7 = x^{3+7} = x^{10}$	ضربُ القوى	1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(y^4)^5 = y^{4\times5} = y^{20}$	قوّةُ القوّةِ	2) $(a^m)^n = a^{mn}$
$(6g)^3 = 6^3\, g^3 = 216\, g^3$	قوّةُ ناتجِ الضربِ	3) $(ab)^m = a^m\, b^m$

يكونُ المقدارُ الأُسّيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ شروطٌ مُعيَّنةٌ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **أبسطُ صورةٍ للمقدارِ الأسّيِّ**

يكونُ المقدارُ الأُسّيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ:

- أنْ يظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً فقطْ، وأنْ تكونَ الأُسسُ جميعُها موجبةً، وصحيحةً في المقامِ.
- ألّا يتضمَّنَ المقدارُ قوَّةَ القوَّةِ.
- أنْ تكونَ الكسورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

أتعلَّمُ

كتابةُ المقدارِ الأُسّيِّ في أبسطِ صورةٍ تتطلَّبُ كتابةَ مقدارٍ مُكافِئٍ للمقدارِ الأُسّيِّ، تتوافرُ فيهِ الشروطُ الواردةُ في الصندوقِ المُجاوِرِ.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $(3ry^5)(6r^2y^3)$

$(3ry^5)(6r^2y^3) = (3\times6)(r \times r^2)(y^5 \times y^3)$ بإعادةِ تجميعِ الثوابتِ والمُتغيّراتِ

$= (3 \times 6)(r^{1+2})(y^{5+3})$ ضربُ القوى

$= 18r^3y^8$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

إذا لمْ يظهرْ أُسٌّ فوقَ المُتغيّرِ، فإنَّ أُسَّهُ يكونُ 1؛ أيْ إنَّ: $r = r^1$

2 $((x^2)^5)^8$

$$((x^2)^5)^8 = (x^{2\times5})^8 \quad \text{قوّةُ القوّةِ}$$
$$= (x^{10})^8 \quad \text{بالتبسيطِ}$$
$$= x^{10\times8} \quad \text{قوّةُ القوّةِ}$$
$$= x^{80} \quad \text{بالتبسيطِ}$$

3 $(-2a^2 b)^3$

$$(-2a^2 b)^3 = (-2)^3 (a^2)^3 b^3 \quad \text{قوّةُ ناتجِ الضربِ}$$
$$= -8a^6 b^3 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

4 $(4x^5 y^3)(-3xy^5)^2$

$$(4x^5 y^3)(-3xy^5)^2 = (4x^5 y^3)((-3)^2 (x)^2 (y^5)^2) \quad \text{قوّةُ ناتجِ الضربِ}$$
$$= (4x^5 y^3)(9x^2 y^{10}) \quad \text{قوّةُ القوّةِ}$$
$$= (4 \times 9)(x^5 \times x^2)(y^3 \times y^{10}) \quad \text{بإعادةِ تجميعِ الثوابتِ والمُتغيِّراتِ}$$
$$= 36x^7 y^{13} \quad \text{ضربُ القوى}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $(2m^5 n^{11})(m^2 n^4)$ $2m^7 n^{15}$

b) $((v^2)^6)^9$ v^{108}

c) $(5x^3 y^7)^4$ $625x^{12} y^{28}$

d) $(5a^3 b^4)(ab^2)^7$ $5a^{10} b^{18}$

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ خصائصِ قسمةِ القُوى

تعلَّمْتُ سابقًا كيفَ أستعملُ خاصيةَ قسمةِ القوى، وخاصيةَ قوَّةِ ناتجِ القسمةِ إذا كانَ الأساسُ عددًا حقيقيًّا. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هاتينِ الخاصيتينِ اللتينِ هما منْ خصائصِ قسمةِ القُوى لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام المُلوَّنة عند كتابة المقادير الأسّية لتمييز القوى؛ لما لذلك من أثر في إكساب الطلبة مهارة التبسيط، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة فيستعملون الضرب للأسس عند تطبيق خاصية ضرب القوى، أو يستعملون جمع الأسس عند تطبيق خاصية قوة القوة، ويمكن الاستعانة بالأمثلة العددية والأقلام الملوّنة لتوضيح هاتين الخاصيتين ومعالجة مثل هذه الأخطاء، كما في المثال الآتي:

$$2^3\times2^4 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^7 = 2^{3+4}$$

$$(2^3)^2=2^3\times2^3= 2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6=2^{3\times2}$$

مثال إضافي:

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

1 $(3x^2 y)(-2xy^2)^3$ $-24x^5 y^7$

2 $((-a^3 b^2)^4)^3$ $a^{36} b^{24}$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أذكّر الطلبة بخصائص قسمة القوى ذات الأسس الصحيحة كما وردت في صندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2 باتباع الإجراءات الآتية:
  - » أوزّع الطلبة إلى أربع مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة مناقشة أحد فرعي المثال.
  - » أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
  - » أناقش حل المثال مع الصف كاملًا.
- أوجه الطلبة إلى صندوق **(أفكّر)** المجاور للمثال 2، وأطلب إليهم حل الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى، وتبرير الحل عند مقارنة الناتج من طريقتي الحل.

إرشاد: يمكن توزيع الطلبة إلى ست مجموعات أو ثماني مجموعات أو مجموعات ثنائية إذا كان عدد طلبة الصف كبيرًا، بحيث تحل نصف المجموعات الفرع 1، وتحل باقي المجموعات الفرع 2.

مفهومٌ أساسيٌّ

خصائصُ قسمةِ القُوى

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، حيثُ: $a \neq 0$ و $b \neq 0$، وكانَ m و n عددينِ صحيحينِ، فإنَّ:

الخاصيةُ		مثالٌ
1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	قسمةُ القوى	$\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$
2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	قوَّةُ ناتجِ القسمةِ	$\left(\frac{6}{g}\right)^3 = \frac{6^3}{g^3} = \frac{216}{g^3}$

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\frac{u^2 v^6}{uv^2}$

$$\frac{u^2 v^6}{uv^2} = \left(\frac{u^2}{u}\right)\left(\frac{v^6}{v^2}\right)$$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$$= (u^{2-1})(v^{6-2})$$ قسمةُ القوى

$$= uv^4$$ بالتبسيطِ

2 $\left(\frac{-2x^3}{x^2y^5}\right)^4$

$$\left(\frac{-2x^3}{x^2y^5}\right)^4 = \left(\frac{-2x^{3-2}}{y^5}\right)^4$$ قسمةُ القوى

$$= \left(\frac{-2x}{y^5}\right)^4$$ بالتبسيطِ

$$= \frac{(-2)^4 x^4}{(y^5)^4}$$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$$= \frac{16x^4}{y^{20}}$$ قوَّةُ القوَّةِ

أفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَلُّ الفرعِ 2 منَ المثالِ بطريقةٍ أخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{m^4 n^5}{m^2 n^3}$ $m^2 n^2$

b) $\left(\frac{a^8 b^6}{a^4}\right)^5$ $a^{20} b^{30}$

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ باستعمالِ الأُسِّ الصفريِّ والأُسِّ السالبِ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ غيرَ الصفرِ مرفوعًا إلى الأُسِّ صفرٍ يساوي 1، وأنَّ القوَّةَ ذاتَ الأساسِ غيرِ الصفريِّ والأُسِّ السالبِ هيَ مقلوبُ القوَّةِ ذاتِ الأساسِ غيرِ الصفريِّ والأُسِّ الموجبِ، والعكسُ صحيحٌ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هاتينِ الخاصيتينِ لتبسيطِ مقاديرَ أُسِّيَّةٍ تحوي مُتغيِّراتٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **الأُسُّ الصفريُّ والأُسُّ السالبُ**

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا أوْ مقدارًا جبريًّا، حيثُ: $a \neq 0$، وكانَ n عددًا صحيحًا، فإنَّ:

مثالٌ		الخاصيةُ
$(2x^2)^0 = 1, x \neq 0$	الأُسُّ الصفريُّ	1) $a^0 = 1$
$h^{-4} = \frac{1}{h^4}, h \neq 0$	الأُسُّ السالبُ	2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مثال 3

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2}$

$\frac{4x^5 y^{-4}}{2x^3 y^2} = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{x^5}{x^3}\right)\left(\frac{y^{-4}}{y^2}\right)$ بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ

$= \left(\frac{4}{2}\right)(x^{5-3})(y^{-4-2})$ قسمةُ القوى

$= 2(x^2)(y^{-6})$ بالتبسيطِ

$= 2(x^2)\left(\frac{1}{y^6}\right)$ تعريفُ الأُسِّ السالبِ

$= \frac{2x^2}{y^6}$ بالضربِ

مثال 3

- أذكّر الطلبة بخاصّيتي الأسّ الصفري والأسّ السالب، وأؤكد في الخاصيتين أن الأساس لا يمكن أن يساوي صفرًا.
- أناقش مع الطلبة حل فرعي المثال 3 على اللوح.
- أوجّه الطلبة إلى الانتباه إلى صندوق (**أتذكّر**) عند تكليفهم حل أسئلة بند (**أتحقّق من فهمي**)، إذ يمكنهم قلب الكسر بجعل بسطه مقامًا ومقامه بسطًا عندما يكون الكسر مرفوعًا لأسّ سالب مع تغيير إشارة الأسّ إلى موجب.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد:

- يمكن توضيح الخاصّية في صندوق (**أتذكّر**) استنادًا إلى خاصّية الأسّ السالب على النحو الآتي:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

مثال إضافي:

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة، علمًا بأن أيًّا من المتغيّرات لا يساوي صفرًا:

1) $\frac{6x^2 y^{-3} z^4}{3x^{-1} z}$ $\qquad \frac{2x^3 z^3}{y^3}$

2) $\left(\frac{a^3 b^2}{a^0 bc}\right)^{-2}$ $\qquad \frac{c^2}{a^6 b^2}$

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام المُلوّنة عند كتابة المتغيّرات المتشابهة في البسط والمقام باللون نفسه؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 – 19).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

2 $\dfrac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0}$

$$\frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2y^0} = \frac{3x^4y^{-1}z^{-2}}{x^2} \qquad y^0 = 1$$

$$= 3\left(\frac{x^4}{x^2}\right)(y^{-1})(z^{-2}) \qquad \text{بإعادةِ تجميعِ المُتغيِّراتِ}$$

$$= 3(x^{4-2})(y^{-1})(z^{-2}) \qquad \text{قسمةُ القوى}$$

$$= 3(x^2)\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad \text{تعريفُ الأُسِّ السالبِ}$$

$$= \frac{3x^2}{yz^2} \qquad \text{بالضربِ}$$

أتذكَّرُ

إذا كانَ a و b عددينِ حقيقيينِ أوْ مقدارينِ جبريينِ، حيثُ: $a \neq 0$ و $b \neq 0$، وكانَ m عددًا صحيحًا، فإنَّهُ يُمكِنُ كتابةُ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$ بالصورةِ الآتيةِ: $\left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\dfrac{2h^3j^{-3}k^4}{3jk}$ $\dfrac{2h^3k^3}{3j^4}$

b) $\left(\dfrac{x^{-2}y^4}{x^0y^5}\right)^{-3}$ x^6y^3

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1) $(3a^3b^2)(4a^2b)$ $12a^5b^3$

2) $(7a^4b^5)(4ab^3)$ $28a^5b^8$

3) $(5x^2b^4)(2ab^{-3})$ $10x^2ab$

4) $(x^5y^3)^3(xy^5)^2$ $x^{17}y^{19}$

5) $(x^4)^5(x^3y^2)^5$ $x^{35}y^{10}$

6) $(5a^3b^5)^4$ $625a^{12}b^{20}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

7) $(6a^2b^3)(5a^{-4}b^{-5})$ $\dfrac{30}{a^2b^2}$

8) $((-3x^2)^4)^{-7}$ $\dfrac{1}{(-3)^{28}x^{56}}$

9) $(m^{-3}n^4)^{-5}$ $\dfrac{m^{15}}{n^{20}}$

10) $\dfrac{12a^2b^3}{6ab}$ $2ab^2$

11) $\dfrac{12a^{-3}b^4}{3a^2b^{-3}}$ $\dfrac{4b^7}{a^5}$

12) $\dfrac{(2a^2bc^2)(6abc^3)}{4ab^0c}$ $3a^2b^2c^4$

13) $\left(\dfrac{v}{w^{-2}}\right)^3$ v^3w^6

14) $\left(\dfrac{6x^2y^4}{3x^4y^3}\right)^{-2}$ $\dfrac{x^4}{4y^2}$

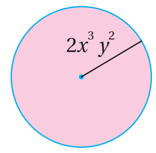
15) $\dfrac{30a^{-2}b^{-6}}{60a^{-6}b^{-8}}$ $\dfrac{a^4b^2}{2}$

الواجب المنزلي:

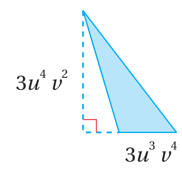
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (16 – 18) كتاب التمارين: (1 – 9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 20) كتاب التمارين: (10 – 17)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 23) كتاب التمارين: (10 – 20)

أجدُ مساحةَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

17 

$4\pi x^6 y^4$

16 

$\frac{9}{2}u^7v^6$

18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $343u^{12}v^9$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{2a^2b}{(-2ab^3)^{-2}} = \frac{2a^2b}{(-2)^{-2}a(b^3)^{-2}}$$
$$= \frac{2a^2b}{4ab^{-6}}$$
$$= \frac{2a^2bb^6}{4a}$$
$$= \frac{ab^7}{2}$$

✗

الخطأ الأول: لم يرفع a إلى -2،
والصحيح أن $(a)^{-2} = \frac{1}{a^2}$
الخطأ الثاني: $(-2)^{-2} = 4$،
والصحيح أن $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$.
الإجابة النهائية الصحيحة: $8a^4b^7$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ مقدارينِ أُسِّيَّينِ ناتجُ ضربِهِما هوَ $18x^3y^4$ (أحُلُّ المسألةَ بطريقتينِ مختلفتينِ).

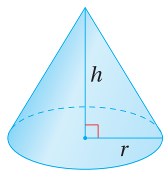
إجابات ممكنة:
1) $(2xy^2)(3xy)^2$
2) $(36y^4)\left(\frac{1}{2x^{-3}}\right)$

تحدٍّ: إذا كانَ $y = x^n$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:

21 أُثبِتُ أنَّ $x^{2n+1} = xy^2$. $x^{2n+1} = x(x)^{2n} = x(x^n)^2 = xy^2$

22 أجدُ مقدارًا بدلالةِ x و y يُكافِئُ المقدارَ x^{2n-1}. $x^{2n-1} = \frac{x^{2n}}{x} = \frac{y^2}{x}$

23 **تبريرٌ:** يُعبِّرُ المقدارُ $27\pi x^3$ عنْ حجمِ المخروطِ المُجاوِرِ بالوحداتِ المُكعَّبةِ.
أكتبُ مقدارًا جبريًّا أُسِّيًّا بدلالةِ x يُعبِّرُ عنْ كلٍّ منْ r و h، مُبرِّرًا إجابتي.
إجابة محتملة: $r = 9x^{-2}, h = x^7$
أو: $r = 3x, h = 9x$



إرشادات:

- في السؤال 21 (**تحدٍّ**)، أوجّه الطلبة إلى أنه يمكنهم البدء بالطرف الأيسر، ثم إعادة كتابة المقدار الأسي للحصول على x^n واستبدالها بـ y، أو البدء بالطرف الأيمن وتبسيطه للوصول إلى الطرف الأيسر.
- في السؤال 23 (**تبرير**)، أذكّر الطلبة بأن حجم المخروط الذي طول نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h، هو: $\frac{\pi}{3}r^2h$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» أجد حجم الأسطوانة التي طول نصف قطر قاعدتها $2x^2y$، وارتفاعها $\frac{1}{2}x^3y^2$ في أبسط صورة. $V = 2\pi x^7y^4$

تعليمات المشروع:

- أعرّف الطلبة بمادة البولسترين بإحضار عيّنة منها، وأوضّح لهم المطلوب في المهمة 1 من المشروع.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ المهمة 1، والاحتفاظ بأعمالهم لتقييمها عند انتهاء هذه الوحدة الدراسية.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح التدريب الآتي عليهم:

» **أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة، علمًا بأن أيًّا من المتغيّرات لا يساوي صفرًا:**

1 $(-6a^{-3}b^{-2})\left(-\frac{1}{3}a^3b^4\right)$ $2b^2$

2 $\left(\frac{n^5m^{-1}}{(n^{-5}m)^3}\right)^{-2}$ $\frac{m^8}{n^{40}}$

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعـرّف الشـروط التـي ينبغـي توافرهـا فـي المقـدار الجذري لكي يُعدّ في أبسط صورة.
- كتابـة المقاديـر الجذرية في أبسـط صورة باسـتعمال خاصية ضرب الجذور.
- كتابـة المقاديـر الجذرية في أبسـط صورة باسـتعمال خاصية قسمة الجذور.
- كتابـة المقادير الجذرية في أبسط صورة بإجراء عمليتي الجمع والطرح للمقادير الجذرية المتشابهة.
- كتابـة المقاديـر الجذرية في أبسـط صورة باسـتعمال خصائص الضرب والقسمة.
- كتابـة المقاديـر الجذرية في أبسـط صورة باسـتعمال إنطاق المقام (الضرب في المرافق).

نتاجات التعلّم القبلي:

- تبسيط مقادير عددية تحوي جذورًا صمّاء.

مراجعـة التعلّـم القبلـي ومعالجـة الفاقـد التعليمـي:

- أوجّـه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطـة بمـا سـيقدَّم مـن موضوعـات الـدرس فـي الحصـة (إنْ وجدت) في صفحات (**أسـتعد لدراسـة الوحـدة**) فـي كتـاب التمارين، ثـم أطلـب إليهـم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجـوّل بين الطلبـة؛ لمتابعتهـم أثناء الحـل، وتحديد نقـاط ضعفهـم، وأوجّههم إلى مراجعـة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

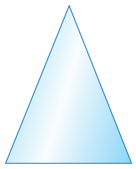
الدرسُ 2

العملياتُ على المقاديرِ الجذريةِ
Operations with Radical Expressions

فكرةُ الدرسِ
- تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ.
- إجراءُ العملياتِ على المقاديرِ الجذريةِ.

المصطلحاتُ المقاديرُ الجذريةُ، إنطاقُ المقامِ، المُرافِقُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُثلَّثًا مساحتُهُ $20\ cm^2$. أجدُ ارتفاعَ المُثلَّثِ في أبسطِ صورةٍ.



$5-\sqrt{10}$ cm

تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ الضربِ

أتذكَّرُ
رمزُ الجذرِ
دليلُ الجذرِ
$\sqrt[n]{a}$
المجذورُ

يُطلَقُ على المقاديرِ العدديةِ أوِ المقاديرِ الجبريةِ التي تحوي جذورًا اسمُ **المقاديرِ الجذريةِ** (radical expressions)، ويكونُ كلٌّ منها في أبسطِ صورةٍ إذا توافرَتْ فيهِ الشروطُ الآتيةُ:

- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ عواملَ (ما عدا العددَ 1) يُمكِنُ كتابتُها في صورةِ قوى دليلِ الجذرِ.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ مجذورٍ كسورًا.
- ألّا يتضمَّنَ أيُّ كسرٍ مقامًا يحوي جذورًا.

تعلَّمْتُ في الصفِّ الثامنِ خاصيةَ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هذهِ الخاصيةَ لتبسيطِ المقاديرِ الجذريةِ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ ضربُ أيِّ جذرينِ لهُما الدليلُ نفسُهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **خاصيةُ ضربِ الجذورِ**

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ a وb، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n، حيثُ: $n > 1$:

1) إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، وكانَ $a \geq 0, b \geq 0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

2) إذا كانَ n عددًا فرديًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

مثالانِ: $\sqrt[3]{27 \times 4} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

1 التهيئة

- أذكّر الطلبة بـ: رمز الجذر، والمجذور، ودليل الجذر، عن طريق الشكل الآتي:

رمزُ الجذرِ

دليلُ الجذرِ

$$\sqrt[n]{a}$$

المجذورُ

- أدوّن على اللوح قيمًا جذرية مثل الآتية:

$$\sqrt[3]{8} \quad , \quad \sqrt[4]{81} \quad , \quad \sqrt{100} \quad , \quad \sqrt{8}$$

- أطلب إلى بعض الطلبة تحديد كل من: المجذور، ودليل الجذر، لكل قيمة جذرية دوّنتها على اللوح.
- أطلب إلى الطلبة حساب قيمة كل جذر دوّنته على اللوح.
- أسأل الطلبة: أي من القيم الجذرية يُسمّى جذرًا أصمَّ؟ لماذا؟ $\sqrt{8}$؛ لأن ناتجه ليس عددًا نسبيًّا، ويساوي 2.83 تقريبيًا.
- أطلب إلى الطلبة كتابة $\sqrt{8}$ بصورة مكافئة بإعادة كتابة العدد 8 بوصفه عوامل لها قوة دليل الجذر. $\sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$
- أُخبر الطلبة أن الصورة $2\sqrt{2}$ هي صورة أبسط من $\sqrt{8}$؛ لأن المجذور أصبح عددًا لا يتضمن عوامل أولية يمكن كتابتها في صورة قوى دليل الجذر.
- أكلّف الطلبة في مجموعات ثنائية تبسيط كل من $\sqrt{50}$ و $\sqrt[3]{81}$ بالطريقة نفسها. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن جمع أو طرح الجذور المتشابهة بالطريقة نفسها التي تُجمَع أو تُطرَح بها الحدود الجبرية المتشابهة، مثل:

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3}$$

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما القاعدة التي تعطي مساحة المثلث؟ نصف × طول القاعدة × الارتفاع.
  - » ما المعطيات وما المطلوب في المسألة؟ المعطيات: مساحة المثلث، وطول قاعدته. والمطلوب: ارتفاع المثلث.
  - » كيف نجد ارتفاع المثلث في هذه المسألة؟ إجابة محتملة: نقسم مِثْلَي المساحة على طول القاعدة فيكون الناتج $\frac{40}{5 - \sqrt{10}}$
  - » هل هذا الناتج في أبسط صورة؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال الأخير في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

ملاحظاتي

إذا أُريدَ تبسيطُ جذرٍ زوجيٍّ لمقدارٍ جبريٍّ أُسُّهُ زوجيٌّ، وكانَ أُسُّ المقدارِ الجبريِّ الناتجُ منَ التبسيطِ فرديًّا، فإنَّهُ يتعيَّنُ أخذُ القيمةِ المُطلَقةِ للناتجِ، وبذلكَ لا يكونُ الجوابُ عددًا سالبًا؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ لا تكونُ سالبةً، مثلَ:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad \sqrt{x^4} = x^2 \quad , \quad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3| \quad , \quad \sqrt[6]{(x-5)^6} = |x-5|$$

أتعلَّمُ

- إذا كانَ n عددًا فرديًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\sqrt{40x^4 y^3}, y > 0$

$\sqrt{40x^4 y^3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5 \times x^4 \times y^2 \times y}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{x^4} \times \sqrt{y^2} \times \sqrt{y}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times x^2 \times |y| \times \sqrt{y}$ بالتبسيطِ

$= 2x^2 y\sqrt{10y}$ $\quad y > 0$

أتعلَّمُ

إنَّ تحليلَ ما يُمكِنُ تحليلُهُ في المقدارِ الجبريِّ إلى عواملَ مُربَّعةٍ يُسهِّلُ عمليةَ تبسيطِ المقدارِ الجذريِّ التربيعيِّ.

أتعلَّمُ

وردَ في السؤالِ أنَّ $y > 0$؛ لذا لا توجدُ ضرورةٌ لكتابةِ رمزِ القيمةِ المُطلَقةِ.

2 $\sqrt[4]{81(x+1)^{12}}$

$\sqrt[4]{81(x+1)^{12}} = \sqrt[4]{3^4 \times ((x+1)^3)^4}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 4

$= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{((x+1)^3)^4}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 3|(x+1)^3|$ بالتبسيطِ

3 $\sqrt[5]{m^{10} n^7}$

$\sqrt[5]{m^{10} n^7} = \sqrt[5]{(m^2)^5 \times n^5 \times n^2}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 5

$= \sqrt[5]{(m^2)^5} \times \sqrt[5]{n^5} \times \sqrt[5]{n^2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= m^2 n\sqrt[5]{n^2}$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

لا أستعملُ القيمةَ المُطلَقةَ في هذهِ المسألةِ؛ لأنَّ دليلَ الجذرِ فرديٌّ.

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة مفهوم المقدار الجذري، والشروط التي ينبغي توفّرها فيه لكي يُعدّ في أبسط صورة، ثم أدوّن على جانب من اللوح تلك الشروط؛ لكي يسهل الرجوع إليها أثناء الدرس.
- أوضّح للطلبة خاصية ضرب الجذور بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**)، مع تأكيد أهمية كون المجذور أكبر من أو يساوي صفرًا عندما يكون دليل الجذر عددًا زوجيًّا.
- أؤكّد ضرورة كتابة القيمة المُطلَقة عند تبسيط الجذور التي دليلها عدد زوجي والمجذور له أسّ زوجي من مضاعفات دليل الجذر والناتج له أسّ فردي، ما لم يرد ما يشير إلى أن المتغيّر كمية موجبة، مثل: $\sqrt{x^2} = |x|$ و $\sqrt[4]{x^{20}} = |x^5|$، أما إذا كان الناتج له أسّ زوجي فلا حاجة إلى القيمة المُطلَقة، مثل: $\sqrt{x^4} = x^2$ و $\sqrt[4]{x^{16}} = x^4$
- أؤكّد أنه لا حاجة إلى القيمة المُطلَقة عند تبسيط الجذور التي دليلها عدد فردي مهما كان أسّ الناتج، ومهما كانت إشارة المتغيّر، مثل: $\sqrt[3]{-x^3} = -x$ و $\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$
- أناقش مع الطلبة حل المثال 1 على اللوح.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي:

أكتب المقدار الجذري: $\sqrt{32x^8 y^{11}}, y > 0$ في أبسط صورة.

$$4x^4 y^5\sqrt{2y}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\sqrt{12x^3y^2}\,, x > 0$ $2\sqrt{3x}\ x\,|y|$

b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^6}$ $2|x^2-3|$

c) $\sqrt[7]{98\,r^8\,q^9}$ $rq\sqrt[7]{98rq^2}$

تبسيطُ المقاديرِ الجذريةِ باستعمالِ خاصيةِ القسمةِ

تعلَّمْتُ في الصفِّ الثامنِ خاصيةَ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أستعملُ هذهِ الخاصيةَ لتبسيطِ المقاديرِ الجذريةِ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ قسمةُ أيِّ جذرينِ لهُما الدليلُ نفسُهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ — خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

لأيِّ عددينِ حقيقيينِ a وb، ولأيِّ عددٍ صحيحٍ n، حيثُ: $n > 1$:

1) إذا كانَ n عددًا زوجيًّا، وكانَ $a \geq 0, b > 0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

2) إذا كانَ n عددًا فرديًّا، وكانَ $b \neq 0$، فإنَّ: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

مثالانِ: $\sqrt[3]{\frac{8}{-27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{-27}} = \frac{2}{-3}$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المقدارَ الجذريَّ لا يكونُ في أبسطِ صورةٍ إذا احتوى أيُّ مقامٍ فيهِ على جذورٍ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ يُمكِنُ التخلُّصُ منَ الجذرِ الذي في المقامِ عنْ طريقِ عمليةٍ تُسمّى **إنطاقَ المقامِ** (rationalizing the denominator)، وتتضمَّنُ ضربَ البسطِ والمقامِ في مقدارٍ جذريٍّ، بحيثُ لا يحوي ناتجُ الضربِ جذورًا في المقامِ كما في الجدولِ الآتي:

مثالٌ	ضربُ البسطِ والمقامِ في	المقامُ
$\frac{7}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$\frac{7}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{7\sqrt[3]{5^2}}{5}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\sqrt[n]{a^m}$

إرشادات:

- في فقرة (**مسألة اليوم**) أذكّر الطلبة بأن مساحة المثلث تساوي نصف طول قاعدة المثلث مضروبًا في ارتفاعه.
- أناقش مع الطلبة مضامين صناديق (**أتعلّم**) الواردة في هامش صفحة المثال 1 في كتاب الطالب؛ لما لها من أهمية في فهم تبسيط المقادير الجذرية.
- أتأكّد من تدوين الشروط جميعها التي ترد في المفاهيم الأساسية عند مناقشتها، مثل: دليل الجذر n عدد صحيح و $n > 0$

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضّح للطلبة خاصية قسمة الجذور بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**)، وأذكّرهم بعملية إنطاق المقام، وأُخبرهم أنه يمكن استعمال خاصية قسمة الجذور وعملية إنطاق المقام لتبسيط المقادير الجذرية، وأستعين بأمثلة عددية مناسبة، مثل:

$$\sqrt{\frac{16}{9}}\ ,\ \sqrt[3]{\frac{-8}{125}}\ ,\ \frac{3}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$$

- أوضّح للطلبة أنه في حال كان الكسر مكتوبًا بالصورة $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$، فإنه يمكن إنطاق المقام بضرب كل من البسط والمقام في $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

فمثلًا: لإنطاق المقام للكسر $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$، نضرب كلًّا من البسط والمقام في $\sqrt[3]{4^2}$؛ ليصبح الكسر الناتج في أبسط صورة، أي: $\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$

- أناقش الطلبة في حل الفرع 1 من المثال 2 على اللوح، مع مراعاة تدوين التبرير أمام كل خطوة في الحل.
- أكلّف أحد الطلبة حل الفرع 2 من المثال 2 على اللوح، وأطلب إليه تبرير كل خطوة من خطوات حله.
- أناقش الطلبة في حل الفرع 3 من المثال 2 على اللوح مع ذكر التبرير لكل خطوة شفويًّا.

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}}$

$\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{2 \times 2^2}}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}}$ بالتبسيطِ

$= \frac{\sqrt{7x}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ بإنطاقِ المقامِ

$= \frac{\sqrt{14x}}{4}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

2 $\sqrt{\frac{x}{y^5}}$

$\sqrt{\frac{x}{y^5}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^5}}$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2 \times y}}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2} \times \sqrt{y}}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}}$ بالتبسيطِ

$= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بإنطاقِ المقامِ

$= \frac{\sqrt{xy}}{y^3}$ $\sqrt{y} \times \sqrt{y} = y$

أتذكَّرُ

إذا كانَ a عددًا حقيقيًّا، حيثُ: $a \geq 0$، فإنَّ: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$، وهذا مِنْ خصائصِ الجذورِ التربيعيةِ.

تنويع التعليم

توسعة:

أطلب إلى الطلبة المتميزين حل الفرع 3 من المثال 2 بطريقة أخرى.

طريقة أخرى للحل:

$$\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}} = \sqrt[3]{\frac{2n}{9m} \times \frac{3m^2}{3m^2}} = \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{\sqrt[3]{27m^3}} = \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m}$$

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) الوارد في هامش المثال 2؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بالخاصّية: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$

أخطاء شائعة:

- قد يخطئ بعض الطلبة فيكتبون: $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$ قياسًا على خاصّية الجذور التربيعية: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$، ولعلاج ذلك أوضّح لهم الفرق بين الحالتين بتذكيرهم بصورة الأسس النسبية المكافئة وقوانين الأسس.
- قد يخطئ بعض الطلبة فيكتبون: $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\ )^2 = x + y$، ولعلاج ذلك أذكّرهم بمربع مجموع حدّين حيث:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

3) $\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}}$

$$\sqrt[3]{\frac{2n}{9m}} = \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}}$$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$$= \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{9m}} \times \frac{\sqrt[3]{3m^2}}{\sqrt[3]{3m^2}}$$ بإنطاقِ المقامِ

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{\sqrt[3]{27m^3}}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$$= \frac{\sqrt[3]{6nm^2}}{3m}$$ $\sqrt[3]{27m^3} = 3m$

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{18}}$ $\frac{\sqrt{10}\,x}{6}$

b) $\sqrt{\frac{12x^4}{y^3}}$ $\frac{2x^2\sqrt{3y}}{y^2}$

c) $\sqrt[5]{\frac{7}{16x^3}}$ $\frac{\sqrt[5]{14x^2}}{2x}$

العملياتُ على المقاديرِ الجذريةِ

يُطلَقُ على الجذورِ التي لها الدليلُ نفسُهُ والمجذورُ نفسُهُ اسمُ الجذورِ المُتشابِهةِ، ويُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجذريةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ جمعِ المقاديرِ الجبريةِ وطرحِها.

$\sqrt[3]{2c}$, $\sqrt{2c}$
جذرانِ غيرُ مُتشابِهينِ.

$5\sqrt[3]{2c}$, $-4\sqrt[3]{2c}$
جذرانِ مُتشابِهانِ.

أتذكَّرُ

المجذورُ هوَ المقدارُ العدديُّ أوِ المقدارُ الجبريُّ الذي يوجدُ أسفلَ رمزِ الجذرِ.

مثال 3

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1) $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2}$

$$\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} + \sqrt[4]{2}$$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 4

$$= \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

مثال 3

- أبيّن للطلبة أنه يمكن جمع الجذور المتشابهة وطرحها بالطريقـة نفسـها التـي تُجمَع بهـا الحـدود الجبريـة المتشـابهة وتُطرَح، وأؤكّد أن الجذور تُعدّ متشابهة إذا كان لها الدليل نفسه والمجذور نفسـه، وأوضّح ذلك بأمثلة ولاأمثلة عددية مناسبة، مثل:

جذور متشابهة: $3\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,\ -4\sqrt{2}$

جذور غير متشابهة: $\sqrt{2}\,,\sqrt[3]{2}\,,2\sqrt[3]{3}$

- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 3 على اللوح.

إرشادات:

- ألفـت انتبـاه الطلبة إلـى صندوق (**أتذكّـر**) الذي يسبق المثال 3؛ لتذكيرهم بالمجذور.
- أذكّـر الطلبة بأهمية الانتباه إلـى دليل الجذر عند التفكيـر بتحليـل المجـذور إلى عوامـل لها أسّ مماثل لدليل الجذر أو من مضاعفاته.

$= 3\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}$ بالتبسيطِ

$= 4\sqrt[4]{2}$ بجمعِ الجذورِ المُتشابِهةِ

2 $\sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x}$

$\sqrt[3]{24x} - \sqrt[3]{81x} = \sqrt[3]{2^3 \times 3x} - \sqrt[3]{3^3 \times 3x}$ بتحليلِ مـا يُمكِـنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مرفوعةٍ إلى الأُسِّ 3

$= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3x}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2\sqrt[3]{3x} - 3\sqrt[3]{3x}$ بالتبسيطِ

$= -\sqrt[3]{3x}$ بطرحِ الجذورِ المُتشابِهةِ

أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375}$ $8\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{160\,xy} - \sqrt{40\,xy}$ $2\sqrt{10xy}$

يُمكِنُ ضربُ المقاديرِ الجذريةِ وقسمتُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ وقسمتِها.

مثال 4

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

1 $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24}$

$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{9 \times 24}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= \sqrt[3]{3^2 \times 2^3 \times 3}$ بالتحليلِ إلى العواملِ الأوّليةِ

$= \sqrt[3]{3^3 \times 2^3}$ بتجميعِ العواملِ في صورةِ أُسسٍ تكعيبيةٍ

$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2^3}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 3 \times 2 = 6$ بالتبسيطِ

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَلُّ الفرعِ 1 منَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

2 $\sqrt{40} \div \sqrt{5}$

$\sqrt{40} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{40}{5}}$ خاصيةُ قسمةِ الجذورِ

$= \sqrt{8}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt{2^2 \times 2}$ بتحليلِ ما يُمكِنُ تحليلُهُ إلى عواملَ مُربَّعةٍ

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 2\sqrt{2}$ بالتبسيطِ

3 $(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2 + 4\sqrt{3})$

باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$(3\sqrt{5} - \sqrt{3})(2+4\sqrt{3}) = 3\sqrt{5} \times 2 + 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5\times3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3^2}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{15} - 2\sqrt{3} - 12$ بالتبسيطِ

4 $2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y}$

$2\sqrt[3]{2x^2y^2} \times 5\sqrt[3]{4x^5y} = 2 \times 5 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 4x^5y}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 10 \times \sqrt[3]{2x^2y^2 \times 2^2 \times x^5y}$ بتحليلِ الثوابتِ

$= 10 \times \sqrt[3]{2^3 \times x^6 \times x \times y^3}$ بتجميعِ العواملِ في صورةِ أُسسٍ تكعيبيةٍ

$= 10 \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{x^6} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y^3}$ خاصيةُ ضربِ الجذورِ

$= 10 \times 2 \times x^2 \times \sqrt[3]{x} \times y$ بالتبسيطِ

$= 20x^2y\sqrt[3]{x}$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$ $4\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt{50} \div \sqrt{8}$ $\frac{5}{2}$

c) $(5\sqrt{3} - 6)(5\sqrt{3} + 6)$ 39

d) $4\sqrt[3]{50x^2y^5} \times 2\sqrt[3]{15x^3y^2}$ $40xy^2\sqrt[3]{6x^2y}$

أفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَلُّ الفرعِ 2 منَ المثالِ بطريقةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

مثال 4

- أُخبِر الطلبة أنه يمكن ضرب المقادير الجذرية وقسمتها بطريقة مشابهة لطريقة ضرب المقادير الجبرية وقسمتها.
- أناقش مع الطلبة حل الفروع 1 و 2 و 3 من المثال 4 على اللوح، وأحرص على تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أذكّر الطلبة بخاصّية التوزيع وكيفية تطبيقها أفقيًّا وعموديًّا عند مناقشة حل الفرع 3 من المثال 4
- أطلب إلى أحد الطلبة حل الفرع 4 من المثال 4 على اللوح، وأحثّه على تبرير كل خطوة من خطوات حله.

إرشادات:

- أناقش مع الطلبة السؤالين الواردين في صندوقي **(أفكّر)** المجاورين للفرع 1 وللفرع 2 من المثال 4، وأحثّ الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- أؤكّد للطلبة أهمية التفكير في حل الأسئلة بأكثر من طريقة؛ بهدف تنمية مهارة التحقق من صحة الحل التي تُعدّ من الخطوات الأساسية لحل المسائل (أفهم- أخطط- أنفذ- أتحقّق).

مثال 5

- أوضّح للطلبة تحليل الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$، وأن كلًّا من المقدارين $(a-b)$ و $(a+b)$ يُسمّى مرافقًا للمقدار الآخر، وفي حالة المقادير الجذرية، فإن $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ يُسمّى كل منهما مرافقًا للآخر، ويكون حاصل ضربهما هو $a^2 b - c^2 d$، ويلاحظ أن حاصل الضرب هذا يخلو من الجذور، فمثلًا: المقدار $3\sqrt{2} - \sqrt{3}$ مرافقه هو $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$، وحاصل ضربهما هو:

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$
$$(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 18 - 3 = 15$$

- أُخبر الطلبة أن الضرب في المرافق يمكن استعماله لإنطاق المقامات في الكسور التي تحوي مقاماتها مقادير جذرية.
- أناقش مع الطلبة حل الفرع 1 من المثال 5 على اللوح، وأؤكّد في الخطوة الأولى ضرورة ضرب كل من البسط والمقام في مرافق المقام، وأحرص على تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أكلّف أحد الطلبة حل الفرع 2 من المثال 5 على اللوح، وأحثّه على تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

أكتب المقدار: $\dfrac{-6}{2 - 3\sqrt{2}}$ في أبسط صورة. $\dfrac{6+9\sqrt{2}}{7}$

أتعلَّم

يُسمّى المقدارُ $a^2 - b^2$ فرقًا بينَ مُربَّعينِ.

يُسمّى كلٌّ منْ $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ **مُرافِقًا** (conjugate) للآخرِ؛ لأنَّ ناتجَ ضربِهِما لا يحوي جذورًا. فمثلاً، كلٌّ منْ $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ هوَ مُرافِقٌ للآخرِ؛ لأنَّ:

$$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = (3)^2 - (\sqrt{2})^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$= 9 - 2 \qquad (3)^2 = 9, (\sqrt{2})^2 = 2$$
$$= 7 \qquad \text{بالتبسيطِ}$$

يُستعمَلُ المُرافِقُ لإنطاقِ بعضِ المقاماتِ في المقاديرِ الجذريةِ، وذلكَ بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ، ثمَّ تبسيطِ الناتجِ.

مثال 5

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

أتذكَّر

إذا كانَ المقدارُ الجذريُّ في أبسطِ صورةٍ، فإنَّهُ لا يتضمَّنُ مقامًا يحوي جذورًا.

1) $\dfrac{2}{6+\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{6+\sqrt{3}} = \frac{2}{6+\sqrt{3}} \times \frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \qquad \text{بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ}$$
$$= \frac{2(6-\sqrt{3})}{6^2 - (\sqrt{3})^2} \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$= \frac{2(6-\sqrt{3})}{36-3} \qquad 6^2 = 36, (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$= \frac{12-2\sqrt{3}}{33} \qquad \text{باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ، والتبسيطِ}$$

2) $\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$

$$\frac{x}{1-\sqrt{x}} = \frac{x}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \qquad \text{بضربِ البسطِ والمقامِ في مُرافِقِ المقامِ}$$
$$= \frac{x(1+\sqrt{x})}{1^2 - (\sqrt{x})^2} \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$= \frac{x(1+\sqrt{x})}{1-x} \qquad 1^2 = 1, (\sqrt{x})^2 = x$$
$$= \frac{x+x\sqrt{x}}{1-x} \qquad \text{باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ، والتبسيطِ}$$

76

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

a) $\dfrac{7}{4-\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{28+7\sqrt{5}}{11}$

b) $\dfrac{8}{3+\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{24-8\sqrt{x}}{9-x}$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\sqrt{4x^6}$ $\quad 2|x^3|$

2) $\sqrt[3]{a^3 b^6}$ $\quad ab^2$

3) $\sqrt{144x^3 y^4 z^5}, x>0, z>0$ $\quad 12\,x\,y^2 z^2\sqrt{xz}$

4) $\sqrt[3]{-24x^{13} y^6}$ $\quad -2x^4 y^2\sqrt[3]{3x}$

5) $\sqrt[4]{625u^5 v^8}, u>0$ $\quad 5u\,v^2\sqrt[4]{u}$

6) $\sqrt[6]{25r^6 q^8}$ $\quad \sqrt[6]{25q^2}\ |r|\ |q|$

7) $\sqrt[5]{160x^8 z^4}$ $\quad 2\,x\sqrt[5]{5\,x^3 z^4}$

8) $\sqrt{121(z-2)^{14}}$ $\quad 11\times\left|(z-2)^7\right|$

9) $\sqrt[3]{37(2x-5)^{15}}$ $\quad \sqrt[3]{37}\,(2x-5)^5$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

10) $\dfrac{\sqrt[3]{192\,x^8}}{\sqrt[3]{3x}}$ $\quad 4\,x^2\sqrt[3]{x}$

11) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9a^2}}$ $\quad \dfrac{5\sqrt[3]{3a}}{3a}$

12) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{9z}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6z}}{3z}$

13) $\sqrt{\dfrac{5x^4}{2x^2 y^3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{10y}\,x}{2y^2}$

14) $\sqrt[4]{\dfrac{16t^4}{y^4}}$ $\quad \dfrac{2t}{y}$

15) $\sqrt[5]{\dfrac{3}{y}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[5]{3y^4}}{y}$

أكتبُ كُلًّا منَ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

16) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

17) $5\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$ $\quad 10\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=13\sqrt[3]{2}$

18) $\sqrt[3]{54xy^3}-y\sqrt[3]{128x}$ $\quad -y\sqrt[3]{2x}$

19) $\sqrt[4]{5w^{10}}-6\sqrt[4]{405w^6}$ $\quad w^2\sqrt[4]{5w^2}-18\,w\sqrt[4]{5w^2}$

20) $5\sqrt{2xy^6}\times 2\sqrt{2x^3 y}$ $\quad 20\,x^2 y^3\sqrt{y}$

21) $(3+\sqrt{7})(2+\sqrt{6})$ $\quad 6+3\sqrt{6}+2\sqrt{7}+\sqrt{42}$

22) $\sqrt[5]{8xy^7}\times\sqrt[5]{6x^6}$ $\quad xy\sqrt[5]{48\,x^2 y^2}$

23) $\dfrac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x^3}}{\sqrt{9x^{10}}}$ $\quad \dfrac{2}{3x^3}$

24) $\dfrac{\sqrt[3]{y^6}}{\sqrt[3]{27y}\times\sqrt[3]{y^{11}}}$ $\quad \dfrac{1}{3y^2}$

25) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ $\quad \sqrt{2}-1$

26) $\dfrac{4}{3-\sqrt{3}}$ $\quad 2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

27) $\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ $\quad \dfrac{2x-\sqrt{x}-3}{x-1}$

77

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 22, 25, 29 كتاب التمارين: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 20, 23, 26, 28 كتاب التمارين: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 22
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 21, 24, 27, (30–33) كتاب التمارين: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 22

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 18) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (30 – 33).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد:

في السؤال 30 (**أكتشف المختلف**)، أوجّه الطلبة إلى التفكير في أبسط صورة للمقادير الجذرية المعطاة.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الإثرائية الآتية:
  - » أجد ناتج:

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\times\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

في أبسط صورة. 10

  - » أُثبت (من دون استعمال الآلة الحاسبة) أنّ:

$$\sqrt{18+\sqrt{180}}=\sqrt{3}+\sqrt{15}$$

$$\sqrt{18+\sqrt{180}}=\sqrt{3+15+\sqrt{4\times3\times15}}$$
$$=\sqrt{3+15+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{15}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{15})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{15}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{15}$$

تعليمات المشروع:

- أوجّه الطلبة إلى العمل ضمن مجموعاتهم التي نفّذت المهمة 1.
- أذكّر الطلبة بمجسّم الهرم الرباعي وقاعدته وارتفاعه، وأوضّح لهم معنى قصّ الهرم بموازاة قاعدته.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ المهمة 2، والاحتفاظ بأعمالهم؛ لتقييمها عند انتهاء هذه الوحدة الدراسية.

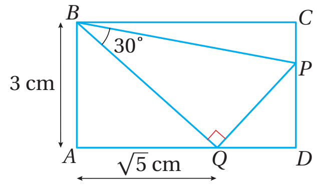
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:
  - » **أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:**

1. $\sqrt[4]{\frac{16}{10000}x^{12}y^8}$ $\quad \frac{1}{5}|x^3|y^2$
2. $\frac{3a}{\sqrt[3]{9a^2}}$ $\quad \sqrt[3]{3a}$
3. $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ $\quad 4-2\sqrt{2}$

---

28 يظهرُ المستطيلُ $ABCD$ في الشكلِ المُجاورِ. أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ لإيجادِ طولِ $\overline{PQ}$ في أبسطِ صورةٍ. $\frac{\sqrt{42}}{3}$



29 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $\frac{40+8\sqrt{10}}{3}$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

30 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المقاديرِ الجذريةِ الآتيةِ مختلفٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sqrt[5]{7yx^8}$ $\quad \frac{\sqrt{xy}}{y^3}$ $\quad \sqrt{5yx}$ $\quad \sqrt[4]{xy^3}$

$\sqrt[5]{7yx^8}$ غير مكتوب في أبسط صورة، والباقي في أبسط صورة.

31 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\sqrt[6]{64h^{12}g^6}=\sqrt[6]{2^6\times(h^2)^6\times g^6}$$
$$=\sqrt[6]{2^6}\times\sqrt[6]{(h^2)^6}\times\sqrt[6]{g^6}$$
$$=2h^2g$$

يجب أن يظهر في الناتج $|g|$ بدل g في الإجابة النهائية؛ لأن $\sqrt[6]{g^6}=|g|$

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مقدارًا جذريًّا مُكافِئًا للمقدارِ $8|x|y^2$ إجابة ممكنة: $\sqrt{64x^2y^4}$

33 **تحدٍّ:** أجدُ قيمةَ: $\frac{3}{2\sqrt{7}-1}-\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ في أبسطِ صورةٍ. $\frac{23\sqrt{7}-65}{18}$

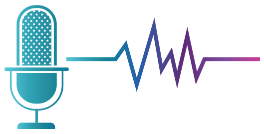
الدرس 3

حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ
Solving Radical Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تحوي مقاديرَ جذريةً.

المصطلحاتُ المعادلاتُ الجذريةُ، الحلولُ الدخيلةُ.

مسألةُ اليومِ تعطى سرعةُ الصوتِ بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ قربَ سطحِ الأرضِ بالمعادلةِ الآتيةِ: $V = 20\sqrt{t+273}$، حيثُ t درجةُ الحرارةِ بالسلسيوس. إذا كانَتْ سرعةُ الصوتِ هيَ 340 m/s، فما درجةُ الحرارةِ عندئذٍ؟



المعادلاتُ الجذريةُ

يُطلَقُ على المعادلاتِ التي تحوي مُتغيِّرًا تحتَ الجذرِ اسمُ **المعادلاتِ الجذريةِ** (radical equations)، ومنْ أمثلتِها:

$$5\sqrt{x+1}=3 \quad , \quad 2x+3=\sqrt{1-7x} \quad , \quad \sqrt[3]{x+4}=-8$$

توجدُ أربعُ خطواتٍ يتعيَّنُ اتِّباعُها لحَلِّ المعادلاتِ الجذريةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **خطواتُ حَلِّ المعادلاتِ الجذريةِ**

يُمكِنُ حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

الخطوةُ 1: جعلُ الجذرِ وحدَهُ أحدَ طرفيِ المعادلةِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

الخطوةُ 2: رفعُ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ؛ تخلُّصًا منَ الجذرِ.

الخطوةُ 3: حَلُّ المعادلةِ الناتجةِ.

الخطوةُ 4: التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحَلِّ.

أتعلَّمُ

تنتجُ معادلةٌ أُخرى (خطيةٌ، أوْ تربيعيةٌ مثلًا) منْ رفعِ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ مساوٍ لدليلِ الجذرِ، ويُمكِنُ حَلُّ هذهِ المعادلةِ باستعمالِ طرائقِ حَلِّ المعادلاتِ التي تعلَّمْتُها سابقًا.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- حلّ المعادلات الجذرية.
- التحقّق من صحة حل المعادلات الجذرية جبريًّا وبيانيًّا باستعمال أدوات التكنولوجيا.
- تمييز الحل الدخيل للمعادلة الجذرية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأوزّع على كل مجموعة ورقة المصادر 1: **مسابقة المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية.**
- أوجّه الطلبة إلى أن لديهم 5 دقائق للتوصّل إلى حلول أكبر عدد ممكن من المعادلات المعطاة في العمود الأيمن من الجدول.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أطلب كتابة اسمَي الطالبين/ الطالبتين عند نهاية الدقائق الخمس في نهاية الورقة، وتبادل الأوراق بين المجموعات.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا، وأطلب إلى المجموعات تصحيح الحلول في الأوراق التي بين أيديهم.
- أجمع الأوراق من المجموعات، ثم أُعلن فوز ثلاث من المجموعات حصلت على أكبر عدد من الإجابات الصحيحة.
- أعزّز الطلبة في المجموعات الفائزة، وأُثني على جهود الطلبة جميعهم.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » ما وحدة قياس سرعة الصوت في المسألة؟ متر لكل ثانية.
  » ما الذي يمثله المتغيّر t في المعادلة المعطاة؟ درجة الحرارة بالسلسيوس.
  » كيف تؤثّر قيمة درجة الحرارة t في قيمة سرعة الصوت V؟ كلما زادت قيمة t ازدادت قيمة V.
  » كيف نجد قيمة V عندما تُعطى قيمة t؟ بتعويض قيمة t في المعادلة.
  » كيف نجد قيمة t عندما تكون قيمة V معطاة وتساوي $340\ m/s$؟ نحل المعادلة $20\sqrt{t+273} = 340$
  » ماذا تُسمّى المعادلة: $20\sqrt{t+273} = 340$؟ وكيف نحلّها؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة، وأتقبّل إجابات الطلبة كافّة.

مثال 1

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1 $\sqrt{x}+4=12$

$\sqrt{x}+4=12$	المعادلةُ الأصليةُ
$\sqrt{x}=8$	بطرحِ 4 منْ طرفيِ المعادلةِ
$x=64$	بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ

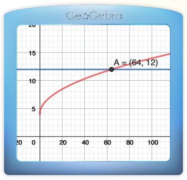
أتحقّق: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

$\sqrt{x}+4=12$	المعادلةُ الأصليةُ
$\sqrt{64}+4 \overset{?}{=} 12$	بتعويضِ $x=64$
$12=12$ ✓	بالتبسيطِ

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=64$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كُلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\sqrt{x}+4$، والمعادلةِ: $y=12$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=64$.



2 $2\sqrt{3x+4}=8$

$2\sqrt{3x+4}=8$	المعادلةُ الأصليةُ
$\sqrt{3x+4}=4$	بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2
$3x+4=16$	بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ
$3x=12$	بطرحِ 4 منْ طرفيِ المعادلةِ
$x=4$	بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 3

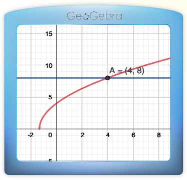
أتحقّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$2\sqrt{3x+4}=8$
بتعويضِ $x=4$	$2\sqrt{3(4)+4}\stackrel{?}{=}8$
بالتبسيطِ	$8=8$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=4$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ مِنَ المعادلةِ: $y=2\sqrt{3x+4}$، والمعادلةِ: $y=8$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=4$.



3) $\sqrt[3]{2x-9}-6=-3$

المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt[3]{2x-9}-6=-3$
بجمعِ 6 إلى طرفيِ المعادلةِ	$\sqrt[3]{2x-9}=3$
بتكعيبِ طرفيِ المعادلةِ	$2x-9=27$
بجمعِ 9 إلى طرفيِ المعادلةِ	$2x=36$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2	$x=18$

أتحقّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt[3]{2x-9}-6=-3$
بتعويضِ $x=18$	$\sqrt[3]{2(18)-9}-6\stackrel{?}{=}-3$
بالتبسيطِ	$-3=-3$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=18$.

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة المقصود بالمعادلات الجذرية مع تدوين أمثلة عليها على اللوح، مثل: $3\sqrt{x-5}=12$، ثم أختار واحدة منها لأوضّح خطوات حلها بالاستعانة بالخطوات الواردة في صندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب، مع تأكيد أهمية الخطوة الأخيرة المُتمثِّلة بالتحقق من صحة الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.
- أناقش الطلبة في حل الفرع 1 من المثال 1 على اللوح، وأؤكّد لهم أهمية التحقّق من صحة الحل.
- أستعين ببرمجية جيوجبرا لتأكيد صحة الحل بيانيًّا، وأذكّر الطلبة أن الإحداثي x لنقطة التقاطع يمثّل حل المعادلة.
- أكلّف أحد الطلبة حل الفرع 2 من المثال 1 على اللوح.
- أناقش الطلبة في حل الفرع 3 من المثال 1 على اللوح.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي:

أحل المعادلة: $\frac{1}{2}\sqrt[5]{2x+4}=-1$

$x=-18$

إرشادات:

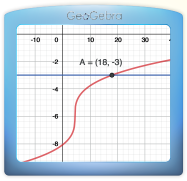
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلّم**) المجاور لصندوق (مفهوم أساسي، خطوات حل المعادلات الجذرية) في كتاب الطالب، وأؤكّد أهمية المعلومات التي يتضمّنها في توضيح أفكار الدرس.
- إذا توفر في المدرسة جهاز العرض (Data Show)، فأستعمله لعرض التمثيلات عند تقديم الدعم البياني للتحقّق من صحة حل المعادلات الجذرية، مما يساعد على توفير الوقت والجهد في رسمها ولو بشكل تقريبي على اللوح.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند التحقّق من صحة الحل فيعوّضون في المعادلة الناتجة من رفع طرفي المعادلة الجذرية إلى أسّ مساوٍ لدليل الجذر؛ لذا أؤكّد أن التعويض يكون في المعادلة الجذرية الأصلية.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \sqrt[3]{2x-9} - 6$، والمعادلةِ: $y = -3$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيِي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = 18$.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

a) $2 + \sqrt{x} = 8$ أنظر تحقق الطلبة، $x = 36$

b) $4\sqrt{7x+1} - 2 = 14$ أنظر تحقق الطلبة، $x = \frac{15}{7}$

c) $2\sqrt[4]{x-3} = 4$ أنظر تحقق الطلبة، $x = 19$

الحَلُّ الدخيلُ

ينتجُ أحيانًا منْ رفعِ طرفيِ المعادلةِ إلى أُسٍّ ما حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ، ويُسمّى **الحَلَّ الدخيلَ** (extraneous solution)؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الجذريةِ الأصليةِ.

يظهرُ الحَلُّ الدخيلُ غالبًا عندَ حَلِّ معادلةٍ تحوي مُتغيِّرًا في كلا طرفيها.

مثال 2

أحُلُّ المعادلةَ: $x - 4 = \sqrt{3x - 2}$.

المعادلةُ الأصليةُ	$x - 4 = \sqrt{3x - 2}$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$(x - 4)^2 = 3x - 2$
مُربَّعُ الفرقِ بينَ حدَّيْنِ	$x^2 - 8x + 16 = 3x - 2$
بطرحِ $3x$ منْ طرفيِ المعادلةِ، وجمعِ 2 إلى طرفيْها	$x^2 - 11x + 18 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x - 9)(x - 2) = 0$

أتذكَّرُ

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضّح للطلبة مفهوم الحل الدخيل، وأؤكد لهم أنه يظهر غالبًا عند حل المعادلات الجذرية التي تحوي المتغيّر في طرفيها.
- أنتقل إلى مناقشة خطوات الحل للمثال 2، وأتّبع التسلسل الوارد في كتاب الطالب، مع ذكر التبرير في كل خطوة.
- أوضّح للطلبة أنه عند تعويض الحل الدخيل في المعادلة الجذرية الأصلية ينتج من ذلك التعويض تناقض مع حقيقة عددية، مثل: $-2 = 2$ أو $5 = -4$
- أستعين ببرمجية جيوجبرا لتأكيد صحة الحل بيانيًّا، وألفت انتباههم إلى وجود نقطة تقاطع واحدة، وهذا يدل على وجود حل وحيد وهو قيمة x لنقطة التقاطع.

خاصيةُ الضربِ الصفريّ $\quad x-9=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$

بحَلِّ كلِّ معادلةٍ $\quad x=9 \quad\quad x=2$

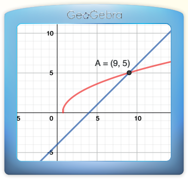
أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 9$	عندما $x = 2$
$x-4=\sqrt{3x-2}$	$x-4=\sqrt{3x-2}$
$(9)-4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(9)-2}$	$(2)-4 \stackrel{?}{=} \sqrt{3(2)-2}$
$5=5$ ✓	$-2=2$ ✗

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 9$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ مـنَ المعادلـةِ: $y = x - 4$، والمعادلةِ: $y=\sqrt{3x-2}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ عندما $x = 9$.



أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ المعادلةَ: $x=\sqrt{x+6}$. $x = 3$ ($x = -2$ حل دخيل)، أنظر تحقّق الطلبة.

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يظهرُ غالبًا عندَ حَلِّ معادلاتٍ تحوي مُتغيِّرًا في طرفيْ كلٍّ منها. والآنَ سأتعلَّمُ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يُمكِنُ أنْ يظهرَ أيضًا عندَ حَلِّ معادلةٍ تحوي جذرًا في كلا طرفيْها.

أتعلَّمُ

منْ أسبابِ وجودِ حَلٍّ دخيلٍ في أثناءِ حَلِّ المعادلةِ الجذريةِ رفعُ الطرفينِ إلى أُسٍّ زوجيٍّ؛ لأنَّ القِيَمَ السالبةَ تلغى إشارتُها عندئذٍ، ما يُؤثِّرُ في الحَلِّ الأصليِّ.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) المجاور لخطوات حل المثال 2، وأذكّرهم بكيفية تربيع قوس ذي حدّين.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلّم**) المجاور لخطوة التحقّق من صحة حل المثال 2، وأوضّح للطلبة أن سبب ظهور الحل الدخيل في أثناء الحل هو رفع طرفي المعادلة إلى أسّ زوجي، والذي تسبب بظهور الأسّ الزوجي على المتغيّر x فنتج من ذلك معادلة لها حلّان، أحدهما حل دخيل لا يحقّق المعادلة الجذرية الأصلية.

مثال 3

- أُخبـر الطلبة أنّ الحل الدخيـل يمكن أن ينتج عند حل معادلة جذرية يظهر الجذر في طرفيها.
- أنتقـل إلـى مناقشـة خطـوات حـل المثـال 3، وأتّبـع التسلسـل الوارد في كتاب الطالب، مع ذكر التبرير في كل خطوة.
- أذكّر الطلبة أنه عند تعويض الحل الدخيل في المعادلة الجذريـة الأصلية ينتج من ذلـك التعويض تناقض مع حقيقة عددية.
- أسـتعين ببرمجية جيوجبـرا لتأكيد صحة الحـل بيانيًّا، وألفـت انتبـاه الطلبة إلى وجـود نقطة تقاطـع واحدة، وهـذا يـدل على وجود حـل وحيد وهو قيمـة x لنقطة التقاطع.

مثال 3

أحُلُّ المعادلةَ: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$.

المعادلةُ الأصليةُ	$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$3x+1 = 5x - 2\sqrt{5x} + 1$
بالتبسيطِ	$2\sqrt{5x} = 2x$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2	$\sqrt{5x} = x$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$5x = x^2$
بطرحِ $5x$ منْ طرفيِ المعادلةِ	$x^2 - 5x = 0$
بإخراجِ العاملِ المشتركِ	$x(x-5) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x = 0$ or $x - 5 = 0$
بحَلِّ المعادلةِ	$x = 5$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 5$	عندما $x = 0$
$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$	$\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x} - 1$
$\sqrt{3(5)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(5)} - 1$	$\sqrt{3(0)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{5(0)} - 1$
$4 = 4$ ✓	$1 = -1$ ✗

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 5$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \sqrt{3x+1}$، والمعادلةِ: $y = \sqrt{5x} - 1$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ عندما $x = 5$.

✓ إرشادات:

- عند استعمال برمجية جيوجبرا لتقديم التحقّق من صحة الحـل بيانيًّا، أذكّر الطلبـة بمجال الاقتران الجذري عندما يكون دليل الجذر زوجيًّا.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن المعادلة الجذرية يمكن أن يكـون حلها هو المجموعـة الخالية $\varnothing$ عندما يكون دليـل الجذر عـددًا زوجيًّا والناتج سـالبًا، مثل: $\sqrt{x} = -1$، حيث x من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 4: من الحياة

- أنتقل إلى مناقشة خطوات الحل في المثال 4 الذي يوضّح أحد التطبيقات الفيزيائية للمعادلة الجذرية، وأوضّح أن المتغيّر في مثل هذه الحالة هو طول البندول L، وأن تغيّر قيمته يغيّر قيمة الزمن T الذي يستغرقه البندول في أثناء حركته التذبذبية.
- أذكّر الطلبة بأن القيمة التقريبيّة للعدد غير النسبي π هي 3.14، وأوضّح لهم أن خطوة التحقّق تعطي قيمًا تقريبيّة بسبب التعويض عن π بقيمتها التقريبيّة.

تنويع التعليم:

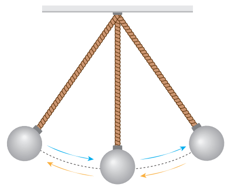
في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في فهم المسألة اللفظية؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ لتحديد معطيات المسألة والمطلوب فيها، ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة، وفي مثل هذا النوع من المسائل يمكن استعمال استراتيجية رسم شكل تقريبي لنمذجة المسألة بطريقة بصرية، أو الاستعانة بنموذج حقيقي للبندول في حال توفّره.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أحُلُّ المعادلةَ: $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$. $x=-1$ ($x=2$ حل دخيل)، أنظر تحقّق الطلبة.

مثال 4 : منَ الحياةِ

فيزياءُ: تُمثِّلُ المعادلـةُ: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ الزمنَ (بالثواني) الذي يستغرقُهُ بندولٌ طولُهُ L قدمًا حتّى يتحرَّكَ حركةً تذبذبيةً مَرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا. أجدُ طولَ البندولِ إذا تحرَّكَ حركةً تذبذبيةً مَرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا في 4 ثوانٍ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ.



المعادلةُ الأصليةُ	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$
بتعويضِ $T=4$	$4=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2π	$\frac{4}{2\pi}=\sqrt{\frac{L}{32}}$
بالتبسيطِ	$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{L}{32}}$
بتربيعِ طرفيِ المعادلةِ	$\frac{4}{\pi^2}=\frac{L}{32}$
بضربِ طرفيِ المعادلةِ في 32	$\frac{128}{\pi^2}=L$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$L\approx 13$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ L الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$
بتعويضِ $T=4, L\approx 13$	$4\overset{?}{\approx}2\pi\sqrt{\frac{13}{32}}$
بالتبسيطِ	$4\approx 4$ ✓

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 18) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 – 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 24 (**أكتشف المختلف**)، أذكّر الطلبة أنه لا يمكن أن يكون ناتج الجذر التربيعي سالبًا.
- في السؤال 26 (**مسألة مفتوحة**)، ألفت انتباه الطلبة إلى وجود عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة.

أتحقّقُ منْ فهمي

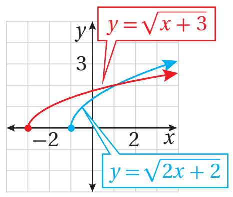
مُعتمِدًا المعادلةَ في المثالِ **4**، أجدُ طولَ البندولِ إذا تحرَّكَ حركةً تذبذبيةً مَرَّةً واحدةً ذهابًا وإيابًا في **8** ثوانٍ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ. $L \approx 52$، أنظر تحقّق الطلبة.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

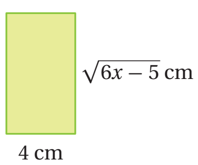
أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1. $\sqrt{3x}-5=7$ $x=48$
2. $\sqrt[3]{1-2x}=-3$ $x=14$
3. $\sqrt[4]{4x+1}=2$ $x=\frac{15}{4}$
4. $6-\sqrt{y-5}=3$ $y=14$
5. $\sqrt{2-x}+3=x+7$ $x=-2$
6. $\sqrt{5x+4}=3\sqrt{x}$ $x=1$
7. $\sqrt{2p+3}=\sqrt{5p-3}$ $p=2$
8. $\sqrt{4x-1}-4\sqrt{2-5x}=0$ $x=\frac{11}{28}$
9. $\sqrt[3]{1-3x}+5=3$ $x=3$
10. $12-\sqrt{2v-1}=4$ $v=32.5$
11. $\sqrt{45-6n}=n-3$ $n=6$
12. $\sqrt{4k-4}=k-1$ $k=1, k=5$
13. $\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x}$ $x=\frac{9}{16}$
14. $r+6=\sqrt{-4r-19}$ $r=-5$
15. $\sqrt[3]{7y-2}=\sqrt[3]{y+4}$ $y=1$
16. $\sqrt{5m-16}=m-2$ $m=4, m=5$
17. $\sqrt{9x^2+4x-4}=3x$ $x=1$
18. $\sqrt{x^2+5x}=\sqrt{6}$ $x=1, x=-6$

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\sqrt{x+3}$، والمعادلةِ: $y=\sqrt{2x+2}$:



19. أكتبُ معادلةً حَلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيِي المعادلتينِ. $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+2}$
20. أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في السؤالِ السابقِ جبريًّا. $x=1$
21. إذا كانَ محيطُ المستطيلِ المُجاوِرِ هوَ 22 cm، فأجدُ قيمةَ x. $x=9$



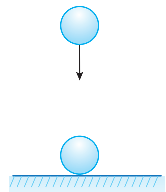
86

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20, 23 كتاب التمارين: (1 – 9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 22), 25 كتاب التمارين: (10 – 16)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (22 – 26) كتاب التمارين: (13 – 19)

22 **فيزياءُ:** تعطى سرعةُ الجسمِ الساقطِ سقوطًا حُرًّا منَ ارتفاعٍ قدرُهُ d قدمًا عندَ وصولِهِ سطحَ الأرضِ بالمعادلةِ الآتيةِ: $v = \sqrt{64\,d}$، حيثُ v سرعةُ الجسمِ بالقدمِ لكلِّ ثانيةٍ. أجدُ الارتفاعَ الذي سقطَ منْهُ الجسمُ إذا كانَتْ سرعتُهُ عندَ وصولِهَ سطحَ الأرضِ هيَ 150 ft/s. 351.6 قدمًا تقريبًا.



23 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 16°C

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ مختلفةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\sqrt{x-1}+8=10$ | $\sqrt{x-1}+3=5$ | $\sqrt{x+1}+7=10$ | $\sqrt{x+1}+5=2$

$\sqrt{x+1}+5=2$ مجموعة حلّها $\varnothing$، وما تبقى من المعادلات لها حلول حقيقية.

25 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّتْ بيانُ المعادلةَ: $x=\sqrt{12-4x}$ على النحوِ الآتي، قائلةً إنَّ للمعادلةِ حَلَّينِ اثنينِ، هما: $x=2$، و $x=-6$:

$$x=\sqrt{12-4x}$$
$$x^2=12-4x$$
$$x^2+4x-12=0$$
$$(x-2)(x+6)=0$$
$$x=2 \quad \text{or} \quad x=-6$$

أكتشفُ الخطأَ في قولِ بيانَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

الخطأ أن $x=-6$ حل دخيل لا يحقّق المعادلة.

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ معادلةً جذريةً حَلُّها هوَ $x=6$.

إجابة ممكنة: $\sqrt{5x-14}=4$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية، وأحدّد الحل الدخيل (إن وجد):**

1. $x+\sqrt{x^2+20x+100}=5$ $\quad x=\frac{-5}{2}$

2. $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}=x-1$

$x=0, x=1$ (حل دخيل $x=8$)

تعليمات المشروع:

- أوجّه الطلبة إلى العمل ضمن مجموعاتهم التي نفّذت المهمّتين 1 و 2 إلى إنهاء أعمالهم في مشروع الوحدة؛ استعدادًا لتقييمها.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد من أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» **أحل كلًّا من المعادلات الآتية:**

1. $15=12+\sqrt[3]{x-1}$ $\quad x=28$

2. $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-1$ $\quad x=4$

الوحدة 6

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ هيَ:

a) $\frac{2x^2}{3}$ b) $\frac{2x}{3}$

c) $\frac{1}{2x^2}$ d) $\frac{x}{2}$

2 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt[3]{-24a^5}$ هيَ:

a) $2a\sqrt[3]{3a^2}$ b) $2a^2\sqrt[3]{3a}$

c) $-2a\sqrt[3]{3a^2}$ d) $-2a^2\sqrt[3]{3a}$

3 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt[4]{\frac{16t^4}{y^8}}$ هيَ:

a) $\frac{2t}{y}$ b) $\frac{2|t|}{y}$

c) $\frac{2t}{y^2}$ d) $\frac{2|t|}{y^2}$

4 أبسطُ قيمةٍ للمقدارِ $\sqrt{20x^3} + \sqrt{45x^3}$ هيَ:

a) $5x\sqrt{5x^3}$ b) $5|x|\sqrt{5x}$

c) $5\sqrt{5x^3}$ d) $5\sqrt{5x}$

5 حَلُّ المعادلةِ: $\sqrt{3x-11} + 2 = 9$ هوَ:

a) 44   b) 6

c) 20   d) 22

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

6 $\frac{p^{-3}}{P^{-2}q^{-9}}$ $\frac{q^9}{p}$

7 $(2x^{-2}y^3)^4$ $\frac{16y^{12}}{x^8}$

8 $\left(\frac{4s^5t^{-7}}{-2s^{-2}t^4}\right)^3$ $\frac{-8s^{21}}{t^{33}}$

9 $(-2r^3s^2)^4(3rs^5)^{-2}$ $\frac{16r^{10}}{9s^2}$

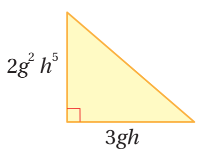
10 $\frac{x^4y^{-8}z^{-2}}{x^{-1}y^6z^{-10}}$ $\frac{x^5z^8}{y^{14}}$

11 $\left(\frac{x^{-3}y}{xz^{-4}}\right)^{-2}$ $\frac{x^8}{z^8y^2}$

12 $\left(\frac{m^4n^{-1}}{n^{-2}}\right)^0$ 1

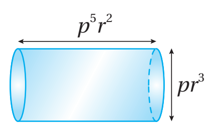
13 $\left(\frac{2a^3b^{-2}}{c^3}\right)^5$ $\frac{32a^{15}}{c^{15}b^{10}}$

14 أجدُ مساحةَ المُثلَّثِ المُجاوِرِ في أبسطِ صورةٍ. $3g^3h^6$

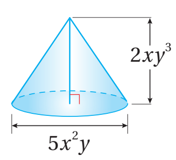


أجدُ حجمَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

15 $\frac{\pi p^7 r^8}{4}$



16 $\frac{25\pi x^5 y^5}{6}$



88

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (5 – 1) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ مسائل منتقاة من المسائل (43 – 6)، وأحرص على انتقاء مسائل تتضمن أفكارًا متنوعة تغطي النتاجات الخاصة للوحدة، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

17 $\sqrt[3]{64y^6}$ $4y^2$

18 $\sqrt[5]{4a^8 b^{14} c^5}$ $ab^2 c\sqrt[5]{4a^3 b^4}$

19 $\frac{x}{\sqrt[3]{y^8}}$ $\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^3}$

20 $\sqrt[3]{\frac{3a}{4b^4 c}}$ $\frac{\sqrt[3]{6ab^2c^2}}{2b^2c}$

21 $\sqrt[4]{1024x^9 y^{12}}$ $4x^2 y^3 \sqrt[4]{4x}$

22 $\sqrt{45x^2 y^5 z^8}$ $3xy^2 z^4 \sqrt{5y}$

23 $\sqrt[4]{16(y+x)^4}$ $2(y+x)$

24 $3\sqrt[4]{x^4 y^8}$ $3xy^2$

25 $\sqrt[3]{125r^4 s^9 t^7}$ $5rs^3 t^2 \sqrt[3]{rt}$

26 $\sqrt[3]{\frac{250f^7 g^3}{2f^2 g}}$ $5f\sqrt[3]{f^2 g^2}$

27 $\frac{\sqrt[5]{64x^6}}{\sqrt[5]{2x}}$ $2x$

28 $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{4}$ $2\sqrt[3]{6}$

29 $\sqrt{x^5 y^5} \times 3\sqrt{2x^7 y^6}$ $3x^6 y^5 \sqrt{2y}$

30 $4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{24}$ $10\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{9}$

31 $(3\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + 5\sqrt{5})$ $3x + 14\sqrt{5x} - 25$

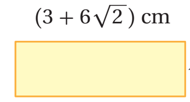
32 $\sqrt[4]{3x^3 y^2} \times \sqrt[4]{27xy^2}$ $3xy$

33 $\frac{4-\sqrt{8}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$ $\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$

34 $\frac{4-\sqrt{x^3}}{2+2\sqrt{x}}$ $\frac{4 - 4\sqrt{x} - x\sqrt{x} + x^2}{2 - 2x}$

35 أجدُ محيطَ المستطيلِ الآتي في أبسطِ صورةٍ.

$(3 + 6\sqrt{2})$ cm



$\sqrt{8}$ cm

$6 + 16\sqrt{2}$

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

36 $\sqrt{b-5} = 2$ $b = 9$

37 $17 = 7 + \sqrt{5x}$ $x = 20$

38 $\sqrt{3n+25} = \sqrt{-7-n}$ $n = -8$

39 $\sqrt{21} - \sqrt{5x-4} = 0$ $x = 5$

40 $4\sqrt[3]{2x+11} - 2 = 10$ $x = 8$

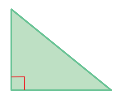
41 $\sqrt[4]{3-x} = 3$ $x = -78$

42 $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-2} = 1$ $x=2$ ($x=22$ حل دخيل)

43 $\sqrt{2x-7} = \sqrt{3x-12}$ $x = 5$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

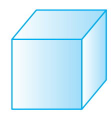
44 إذا كانَتْ مساحةُ المُثلَّثِ المُجاوِرِ هيَ $(4+\sqrt{2})\ \text{cm}^2$، فأجدُ ارتفاعَهُ في أبسطِ صورةٍ.



$\sqrt{8}$ cm

$2\sqrt{2} + 1$

45 إذا كانَتِ المساحةُ الكليةُ لسطحِ المُكعَّبِ المُجاوِرِ هيَ $6a^2$، فأجدُ حجمَهُ. a^3



46 يُطلَقُ على الزمنِ الذي يظلُّ فيهِ الجسمُ في الهواءِ بعدَ القفزِ اسمُ زمنِ التحليقِ، وهوَ يعطى بالمعادلةِ الآتيةِ: $t = 0.5\sqrt{h}$، حيثُ t الزمنُ بالثواني، وh ارتفاعُ القفزةِ بالأقدامِ. إذا قفزَ لاعبُ كرةِ يدٍ، وكانَ زمنُ تحليقِهِ هوَ 0.72 منَ الثانيةِ تقريبًا، فأجدُ ارتفاعَ قفزةِ اللاعبِ. $x \approx 2.1$

89

تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند (**تدريب على الاختبارات الدولية**) فرديًا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

كتاب التمارين

أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ أوَّلًا. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

• استعمالُ قواعدِ ضربِ القوى الصحيحةِ وقسمتِها لتبسيطِ عباراتٍ أسِّيَّةٍ (الدرسُ 1)

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1. $5^2 \times 5^3$ $\quad 5^5 = 3125$
2. $(8^0 \times 8^2)^{-1}$ $\quad \frac{1}{64}$
3. $(85 - 2^2) \div (3^2 - 2 \times 3)$ $\quad 27$
4. $(12 - 3^2) \times (2^2 - 4 \times 5)$ $\quad -48$
5. $\frac{2 + 1 \times 3^2}{4 - 3}$ $\quad 11$
6. $\left(\frac{20}{6-2}\right)^3 - 2^3$ $\quad 117$

مثالٌ: أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\mathbf{3^2 \times 3^3}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{(2+3)}$ — قاعدةُ ضربِ القوى

$= 3^5$ — بجمعِ الأُسسِ

$= 243$ — بالتبسيطِ

b) $\mathbf{\frac{9^7}{9^5}}$

$\frac{9^7}{9^5} = 9^{(7-5)}$ — قاعدةُ قسمةِ القوى

$= 9^2$ — بطرحِ الأُسسِ

$= 81$ — بالتبسيطِ

c) $\mathbf{(4^2)^{-3}}$

$(4^2)^{-3} = 4^{2 \times -3}$ — قاعدةُ قوَّةِ القوَّةِ

$= 4^{-6}$ — بضربِ الأُسسِ

$= \frac{1}{4^6}$ — تعريفُ الأُسسِ السالبةِ

$= \frac{1}{4096}$ — بالتبسيطِ

• تبسيطُ مقاديرَ عدديةٍ تحوي جذورًا صمّاءَ (الدرسُ 2)

أُبسِّطُ كُلًّا ممّا يأتي:

7. $\sqrt{24}$ $\quad 2\sqrt{6}$
8. $\sqrt{\frac{45}{100}}$ $\quad \frac{3\sqrt{5}}{10}$
9. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{3\sqrt{5}}{5}$
10. $\sqrt{18} + \sqrt{32} - 5\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{2}$
11. $\sqrt{3}(4 - \sqrt{3})$ $\quad 4\sqrt{3} - 3$
12. $(2 + \sqrt{5})^2$ $\quad 9 + 4\sqrt{5}$

مثالٌ: أُبسِّطُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\mathbf{\sqrt{90}}$

$\sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10}$ — بتحليلِ العددِ 90 إلى عاملينِ، أحدُهُما مُربَّعٌ كاملٌ

$= \sqrt{9} \times \sqrt{10}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

$= 3\sqrt{10}$ — بالتبسيطِ

b) $\mathbf{\sqrt{\frac{28}{3}}}$

$\sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$ — خاصيةُ قسمةِ الجذورِ التربيعيةِ

$= \frac{\sqrt{4 \times 7}}{\sqrt{3}}$ — بتحليلِ العددِ 28 إلى عاملينِ، أحدُهُما مُربَّعٌ كاملٌ

$= \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

$= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ — بالتبسيطِ

$= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ — بإنطاقِ المقامِ

$= \frac{2\sqrt{21}}{3}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

c) $\mathbf{\sqrt{3}(2 - \sqrt{5})}$

$\sqrt{3}(2 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{5}$ — خاصيةُ التوزيعِ

$= 2\sqrt{3} - \sqrt{15}$ — خاصيةُ ضربِ الجذورِ التربيعيةِ

• حَلُّ المعادلاتِ الخطيةِ والمعادلاتِ التربيعيةِ (الدرسُ 3)

أَحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

13. $x + 4 = 60$ $\quad x = 56$
14. $5 + 4y = 15$ $\quad y = \frac{5}{2}$
15. $\frac{t-5}{2} = 3$ $\quad t = 11$
16. $2(x + 5) = 16$ $\quad x = 3$
17. $2(3x + 11) = 10$ $\quad x = -2$
18. $4a - 3 = 3a + 4$ $\quad a = 7$
19. $4(3b - 1) + 6 = 5(2b + 4)$ $\quad b = 9$
20. $x^2 - 18 = -32$ $\quad$ ليس لها حل حقيقي.
21. $3x^2 + 8x - 3 = 0$ $\quad \frac{1}{3}, -3$

مثالٌ: أَحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

a) $\mathbf{5x + 4 = 3x + 10}$

$5x + 4 = 3x + 10$ — المعادلةُ المعطاةُ

$2x + 4 = 10$ — بطرحِ $3x$ منْ طرفي المعادلةِ

$2x = 6$ — بطرحِ 4 منْ طرفي المعادلةِ

$x = 3$ — بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 2

b) $\mathbf{3(2x + 5) + x = 2(2 - x) + 2}$

$3(2x + 5) + x = 2(2 - x) + 2$ — المعادلةُ المعطاةُ

$6x + 15 + x = 4 - 2x + 2$ — باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$7x + 15 = 6 - 2x$ — بالتبسيطِ

$9x + 15 = 6$ — بجمعِ $2x$ لطرفي المعادلةِ

$9x = -9$ — بطرحِ 15 منْ طرفي المعادلةِ

$x = -1$ — بقسمةِ طرفي المعادلةِ على 9

c) $\mathbf{x^2 + 6x + 5 = 0}$

$x^2 + 6x + 5 = 0$ — المعادلةُ المعطاةُ

$(x + 5)(x + 1) = 0$ — بالتحليلِ إلى العواملِ

$x + 5 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$ — خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

$x = -5 \qquad x = -1$ — بحَلِّ كلِّ معادلةٍ

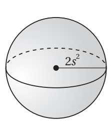
الدرسُ 1

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ
Simplifying Exponential Expressions

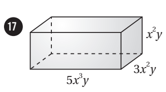
أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1. $(7a^3b^5)(2ab^3)$ $\quad 14a^4b^8$
2. $(4a^3b^5)(5a^4b^{-1})$ $\quad 20a^7b^4$
3. $\frac{12a^3b^{-7}}{4ab}$ $\quad \frac{3a^2}{b^8}$
4. $\left(\frac{5x^3}{b^8}\right)^{-2}$ $\quad \frac{b^{16}}{25x^6}$
5. $\frac{(yx^{-3})^0}{y^4 \times 2y^{-2}}$ $\quad \frac{1}{2y^2}$
6. $\frac{45x^3y^4z^5}{150x^5y^4z^3}$ $\quad \frac{3z^2}{10x^2}$
7. $\left(\frac{15x^{-2}y^9}{18x^2y^3}\right)^{-1}$ $\quad \frac{6x^4}{5y^6}$
8. $\frac{-p^{-1}q^{-1}}{-3pq^{-3}}$ $\quad \frac{q^2}{3p^2}$
9. $\frac{p^{-3}q^{-2}}{q^{-3}r^5}$ $\quad \frac{q}{p^3r^5}$
10. $(a^3b^4)^{-2}(a^{-3}b^{-5})^{-4}$ $\quad a^6b^{12}$
11. $\left(\frac{5a^0b^4}{c^{-3}}\right)^2$ $\quad 25c^6b^8$
12. $3a(5a^2b)(6ab^3)$ $\quad 90a^4b^4$
13. $(8y^3)(-3x^2y^2)\left(\frac{3}{8}xy^3\right)$ $\quad -9y^8x^3$
14. $\left((4r^2t)^3\right)^2$ $\quad 4096r^{12}t^6$
15. $\frac{g^0h^7j^{-2}}{g^{-5}h^0j^{-2}}$ $\quad g^5h^7$

أجدُ حجمَ كلِّ شكلٍ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

16. 

$\frac{32}{3}\pi s^6$

17. 

$15x^7y^3$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أَحُلُّ كُلًّا منَ المسألتينِ الآتيتينِ بطريقتينِ مختلفتينِ:

18. أجدُ مقدارينِ أُسِّيَّينِ ناتجُ ضربِهِما هوَ $12x^2y^5$. $\quad$ **1)** $(4xy^2)(3xy^3)$ $\quad$ **2)** $(12x^2)\left(\frac{y^2}{y^{-3}}\right)$

19. أجدُ مقدارينِ أُسِّيَّينِ ناتجُ قسمةِ أحدِهِما على الآخرِ هوَ $12x^2y^5$. $\quad$ **1)** $(12x^2) \div (y^{-5})$ $\quad$ **2)** $(6xy)^2 \div (3y^{-3})$

20. **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{y^5 \times y^3}{y^4} = \frac{y^8}{y^4} = y^2 \quad ✗$$

الخطأ: قسمة الأس 8 على الأسّ 4، والصحيح طرح أحدهما من الآخر.
الإجابة الصحيحة: $y^{8-4} = y^4$

كتاب التمارين

الدرسُ 2
العملياتُ على المقاديرِ الجذريةِ
Operations with Radical Expressions

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\sqrt[5]{224p^5q^{10}}$ $2\sqrt[5]{7}\,pq^2$
2) $\sqrt[3]{-135x^5y^3}$ $-3xy\sqrt[3]{5x^2}$
3) $\sqrt[4]{648x^5y^7z^2}$ $3|x|\,|y|\sqrt[4]{8xy^3z^2}$
4) $\sqrt{512a^4b^2}$ $16a^2|b|\sqrt{2}$
5) $\sqrt{180u^3v},\ u>0$ $6u\sqrt{5uv}$
6) $2\sqrt[3]{375u^2v^8}$ $10v^2\sqrt[3]{3u^2v^2}$
7) $\sqrt[8]{v^8g^{40}}$ $|v|\,|g^5|$
8) $\sqrt[6]{729a^{24}b^{18}}$ $3a^4|b^3|$
9) $\sqrt[5]{-32(y-6)^{20}}$ $-2(y-6)^4$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

10) $\sqrt[5]{\dfrac{160m^6}{n^7}}$ $\dfrac{2m\sqrt[5]{5mn^3}}{n^2}$
11) $\dfrac{\sqrt[4]{v^6}}{\sqrt[7]{u^5}}$ $\dfrac{v\sqrt[4]{v^2}\times\sqrt[7]{u^2}}{u}$
12) $\sqrt{\dfrac{48x^3}{3x}}$ $4x$
13) $\sqrt{\dfrac{162}{6a^3}}$ $\dfrac{3\sqrt{3a}}{a^2}$
14) $\dfrac{3\sqrt[4]{2a^2}}{\sqrt[4]{6a^3}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{27a^3}}{a}$
15) $\sqrt[4]{\dfrac{7x^3}{4b^2}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{28x^3b^2}}{2b}$

أُبسِّطُ كُلًّا منَ العباراتِ الجذريةِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ جميعَ المُتغيِّراتِ أعدادٌ حقيقيةٌ موجبةٌ:

16) $2\sqrt[4]{176}+5\sqrt[4]{11}$ $9\sqrt[4]{11}$
17) $2\sqrt{32a^3b^5}\times\sqrt{8a^7b^2}$ $32a^5b^3\sqrt{b}$
18) $6\sqrt{45y^2}-4\sqrt{420y^2}$ $18y\sqrt{5}-8y\sqrt{105}$
19) $\dfrac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{5}}$ $\dfrac{3\sqrt{7}-\sqrt{35}}{4}$
20) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{-2}$
21) $\dfrac{1-2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ $\dfrac{2x-7\sqrt{x}+3}{9-x}$

22) **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{1}{5+\sqrt{2}}=\frac{1}{5+\sqrt{2}}\times\frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5-\sqrt{2}}{25+2}$$
$$=\frac{5-\sqrt{2}}{27}$$
✗

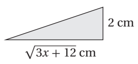
حاصل الضرب
$(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$
يساوي 2 – 25 وليس 2 + 25
الجواب الصحيح: $\dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$

الدرسُ 3
حَلُّ المعادلاتِ الجذريةِ
Solving Radical Equations

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

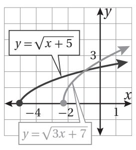
1) $\sqrt{3r+2}=2\sqrt{3}$ $r=\frac{10}{3}$
2) $\sqrt{3b-2}+19=24$ $b=9$
3) $\sqrt{26-n}=7$ $n=-23$
4) $\sqrt{2x}=\sqrt{x+7}-1$ $x=2$ ($x=18$ حل دخيل)
5) $2x=\sqrt{4x^2+6x-12}$ $x=2$
6) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-13}=11$ $x=38$
7) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}+2=0$ $x=2$
8) $\sqrt[4]{2x-9}=3$ $x=45$
9) $\sqrt[3]{x^2+4}-2=0$ $x=\pm2$
10) $3\sqrt{x-2}+2=x$ $x=11, 2$
11) $-10\sqrt{v-10}=-60$ $v=46$
12) $\sqrt{2n-88}=\sqrt{\frac{n}{6}}$ $n=48$
13) $2x=\sqrt{17x-15}$ $x=3, \frac{5}{4}$
14) $r+4=\sqrt{-4r-11}$ $r=-3$ ($x=-9$ حل دخيل)
15) $-3g=\sqrt{-18-27g}$ $g=-1, -2$

16) إذا كانَتْ مساحةُ المُثلَّثِ المُجاورِ هيَ $\sqrt{5x-4}\ \text{cm}^2$، فأجدُ قيمةَ x.



$x=8$

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\sqrt{3x+7}$، والمعادلةِ: $y=\sqrt{x+5}$:



17) أكتبُ معادلةً حلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيِي المعادلتينِ. $\sqrt{x+5}=\sqrt{3x+7}$

18) أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في الفرعِ السابقِ جبريًّا. $x=-1$

19) **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ المُجاوِرِ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$2+5\sqrt{x}=12$$
$$5\sqrt{x}=10$$
$$5x=100$$
$$x=20$$
✗

الخطأ: عند تربيع الطرفين لم يربّع 5، وعند تربيع 5 تصبح الإجابة: $x=4$

ملاحظاتي

....

الوحدة
7

المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ
Rational Algebraic Expressions

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها	• تعرُّف المقدار الجبري النسبي. • تبسيط مقادير جبرية نسبية بالتحليل إلى العوامل. • ضرب مقدارين جبريّين نسبيّين. • قسمة مقدارين جبريّين نسبيّين. • تعرُّف الكسر الجبري المُركَّب. • تبسيط كسر جبري مُركَّب.	المقدار الجبري النسبي. الكسر الجبري المُركَّب.	• أقلام لوح مُلوّنة.	4
الدرس 2: جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها	• إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية. • جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها. • تبسيط كسر جبري مُركَّب يحتوي بسطه أو مقامه أو كلاهما على عملية جمع أو طرح.		• أقلام لوح مُلوّنة.	3
الدرس 3: حل المعادلات النسبية	• تعرُّف المعادلة النسبية. • حل معادلات تحتوي مقادير جبرية نسبية باستعمال الضرب التبادلي. • حل معادلات تحتوي مقادير جبرية نسبية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر. • حل مسائل حياتية يمكن نمذجتها باستعمال المعادلات النسبية.	المعادلة النسبية.	• أقلام لوح مُلوّنة. • أجهزة حاسوب. • برمجية جيوجبرا.	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				13 حصة

الوحدة 7

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة مفهوم المقادير الجبرية النسبية، وكيفية كتابتها بأبسط صورة باستعمال التحليل إلى العوامل، وسيتعلّمون إجراء العمليات الحسابية على المقادير الجبرية النسبية.

وسيتعرّف الطلبة أيضًا الكسر الجبري المُركَّب وكيفية كتابته بأبسط صورة، إضافة إلى حل المعادلات النسبية باستعمال الضرب التبادلي وباستعمال المضاعف المشترك الأصغر.

الوحدة 7

المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ
Rational Algebraic Expressions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

إنَّ تبسيطَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ، وتطبيقَ بعضِ العملياتِ الحسابيةِ عليْها، يساعدُ على حَلِّ معادلاتٍ أكثرَ تعقيدًا مِنْ تلكَ التي تعلَّمْتُها سابقًا، علمًا بأنَّ لهذهِ المقاديرِ استعمالاتٍ حياتيةً وعلميةً في كثيرٍ مِنَ المناحي، لا سيَّما الحساباتِ التي تحوي نسبًا وتناسباتٍ، مثلَ: مزجِ الألوانِ، والصناعاتِ الكيميائيةِ الدقيقةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمييزَ الحدودِ والمقاديرِ الجبريةِ.
- ✓ تحليلَ المقاديرِ الجبريةِ إلى العواملِ.
- ✓ تبسيطَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ✓ حَلَّ التناسباتِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تبسيطَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ◄ ضربَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتَها.
- ◄ جمعَ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحَها.
- ◄ حَلَّ المعادلاتِ النسبيةِ.

90

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف السابع

- جمع الحدود الجبرية وطرحها.
- ضرب المقادير الجبرية.
- تبسيط المقادير الجبرية بمتغيّر واحد باستخدام خصائص العمليات الحسابية.
- حل التناسبات.

الصف الثامن

- تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل.
- تبسيط المقادير الجبرية النسبية.

الصف التاسع

- تعرُّف المقدار الجبري النسبي.
- تبسيط مقادير جبرية نسبية بالتحليل إلى العوامل.
- ضرب مقدارين جبريّين نسبيّين، وقسمتها.
- تعرُّف الكسر الجبري المُركَّب، وتبسيطه.
- إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها.
- تعرُّف المعادلة النسبية.
- حل معادلات تحتوي مقادير جبرية نسبية باستعمال الضرب التبادلي، وباستعمال المضاعف المشترك الأصغر.
- حل مسائل حياتية يمكن نمذجتها باستعمال المعادلات النسبية.

الصف العاشر

- تعرُّف الاقترانات النسبية، وتحديد مجالها.
- إيجاد خطوط التقارب لاقترانات نسبية، وتمثيلها بيانيًّا.
- تركيب اقترانات نسبية.
- إيجاد الاقتران العكسي لاقترانات نسبية.

الصف الثاني عشر

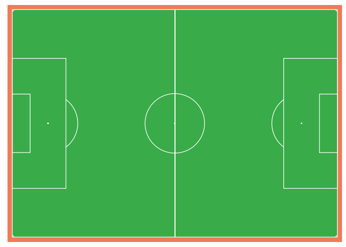
- تجزئة مقادير جبرية نسبية عوامل المقام فيها كثيرات حدود خطية مختلفة.
- تجزئة مقادير جبرية نسبية عوامل المقام فيها كثيرات حدود أحدها مُكرَّر.
- تجزئة مقادير جبرية نسبية عوامل المقام فيها كثيرات حدود أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مُميِّزه سالب).

مشروعُ الوحدةِ
ملعبُ كرةِ القدمِ

فكرةُ المشروعِ توظيفُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ في تصميمِ ملعبِ كرةِ قدمٍ.

الموادُّ والأدواتُ قطعةٌ كبيرةٌ منَ الكرتونِ، أدواتٌ هندسيةٌ، ألوانٌ، مِقَصٌّ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أُصمِّمُ على قطعةِ الكرتونِ نموذجًا لملعبِ كرةِ قدمٍ يحيطُ بِهِ مِضْمارٌ كما في الشكلِ المُجاوِرِ.
2. أُعبِّرُ عنْ طولِ الملعبِ معَ المِضْمارِ بمقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ يحوي مُتغيِّرًا واحدًا فقطْ، ثمَّ أُعبِّرُ عنْ عرضِ الملعبِ والمِضْمارِ بمقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ آخرَ يحوي المُتغيِّرَ نفسَهُ.
3. أجدُ مساحةَ الملعبِ معَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ التي تحويها المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
4. أجدُ مساحةَ الملعبِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
5. أجدُ مساحةَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
6. أجدُ محيطَ الملعبِ معَ المِضْمارِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
7. أجدُ محيطَ الملعبِ بدلالةِ المُتغيِّراتِ، ثمَّ أكتبُ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.
8. أجدُ الفرقَ بينَ محيطِ الملعبِ معَ المضمارِ ومحيطِ الملعبِ.
9. أفترضُ مساحةً للملعبِ الذي أنشأْتُهُ، ثمَّ أجدُ قيمةَ المُتغيِّرِ بحَلِّ المعادلةِ النسبيةِ الناتجةِ.
10. أُعِدُّ مطويةً أُدرِجُ فيها الأبعادَ الأولمبيةَ لملعبِ كرةِ القدمِ، وتاريخَ اللعبةِ، وأهميتَها في تقاربِ ثقافاتِ الشعوبِ.

عرضُ النتائجِ:

- أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمَّنُ صورًا تُوضِّحُ خطواتِ العملِ في المشروعِ، وعلاقتَهُ بما تعلَّمْتُهُ في الوحدةِ.
- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ الصفِّ، مُوضِّحًا العملياتِ الحسابيةَ التي اعتمدْتُها في تصميمِ ملعبِ كرةِ القدمِ.

91

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	تصميم نموذج لملعب كرة قدم يحيط به مضمار.			
2	إيجاد مساحة الملعب مع المضمار بدلالة المتغيّرات.			
3	إيجاد محيط الملعب مع المضمار.			
4	حل المعادلة النسبية الناتجة من المساحة المُفترَضة للملعب.			
5	التعاون والعمل بروح الفريق.			
6	إعداد المشروع في الوقت المحدّد.			
7	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
8	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:

هدف المشـروع: يهدف مشـروع الوحدة إلى تصميم نموذج ملعب كرة قدم يحيط به مضمار والتعبير عن أطواله بمقادير جبرية نسبية، وإجراء العمليات الحسابية عليها وحل المعادلات.

يهدف مشـروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

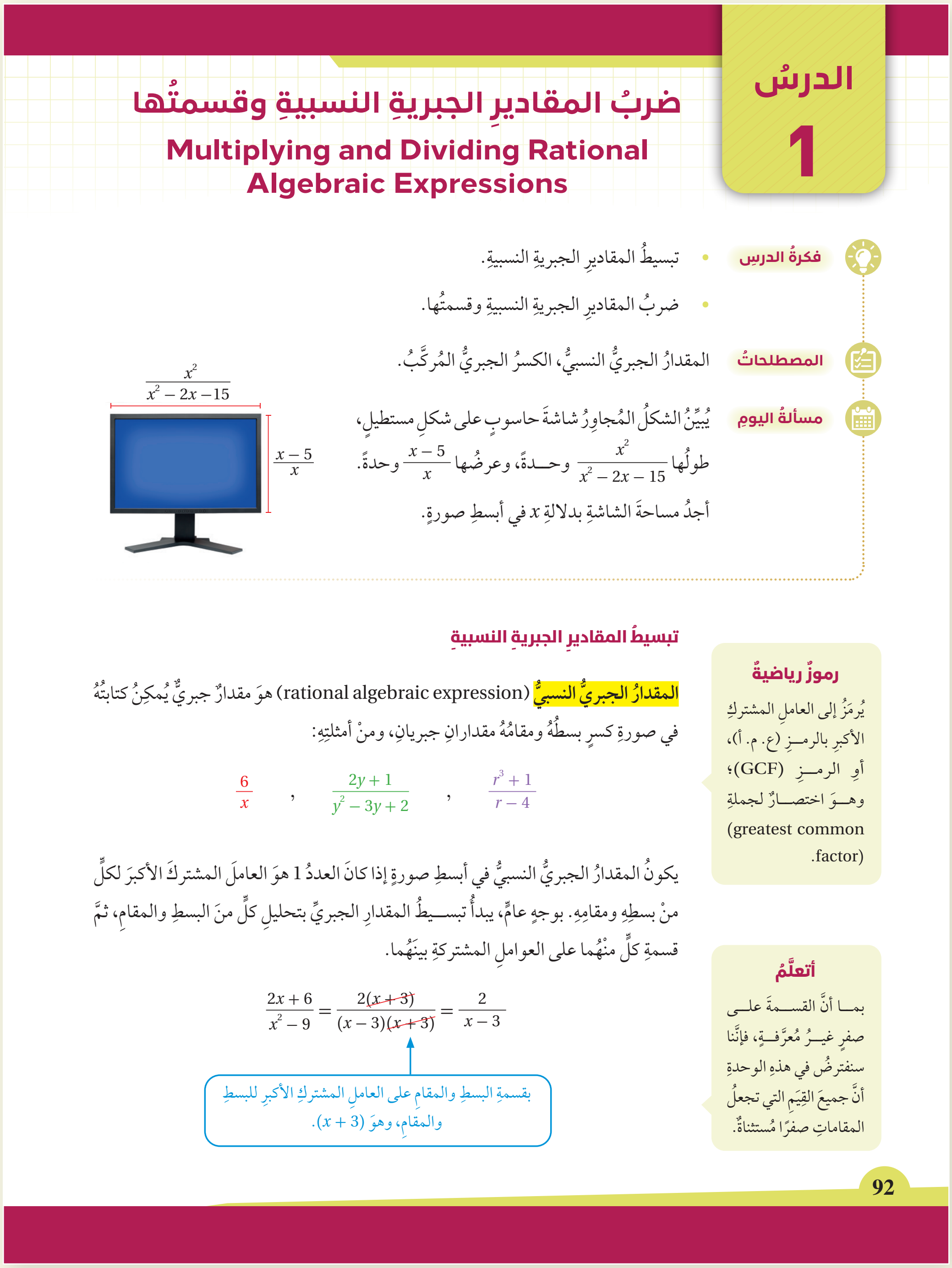
خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشـروع، وعناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، وأؤكّد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشـروع أوّلًا بأوّل، وتعزيزها بالصور.
- أذكّر الطلبة بالعودة إلى المشـروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحدًا منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض البيانات التي جمعها مع أفراد مجموعته (تتمثّل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.



الدرس 1

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتُها
Multiplying and Dividing Rational Algebraic Expressions

فكرةُ الدرس
- تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.
- ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتُها.

المصطلحات المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ، الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ.

مسألةُ اليوم يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ شاشةَ حاسوبٍ على شكلِ مستطيلٍ، طولُها $\frac{x^2}{x^2-2x-15}$ وحـدةً، وعرضُها $\frac{x-5}{x}$ وحدةً. أجدُ مساحةَ الشاشةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ (rational algebraic expression) هوَ مقدارٌ جبريٌّ يُمكِنُ كتابتُهُ في صورةِ كسرٍ بسطُهُ ومقامُهُ مقدارانِ جبريانِ، ومِنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{r^3+1}{r-4} \quad , \quad \frac{2y+1}{y^2-3y+2} \quad , \quad \frac{6}{x}$$

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العددُ 1 هوَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لكلٍّ منْ بسطِهِ ومقامِهِ. بوجهٍ عامٍّ، يبدأُ تبسيـطُ المقدارِ الجبريِّ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ، ثمَّ قسمةِ كلٍّ منْهُما على العواملِ المشتركةِ بينَهُما.

$$\frac{2x+6}{x^2-9} = \frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \frac{2}{x-3}$$

بقسمةِ البسطِ والمقامِ على العاملِ المشتركِ الأكبرِ للبسطِ والمقامِ، وهوَ $(x+3)$.

رموزٌ رياضيةٌ
يُرمَزُ إلى العاملِ المشتركِ الأكبرِ بالرمـزِ (ع. م. أ)، أوِ الرمـزِ (GCF)؛ وهـوَ اختصـارٌ لجملةِ (greatest common factor).

أتعلَّمُ
بمـا أنَّ القسـمةَ علـى صفرٍ غيـرُ مُعرَّفـةٍ، فإنَّنا سنفترضُ في هذهِ الوحدةِ أنَّ جميعَ القِيَمِ التي تجعلُ المقاماتِ صفرًا مُستثناةٌ.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف المقدار الجبري النسبي.
- تبسيط مقادير جبرية نسبية بالتحليل إلى العوامل.
- ضرب مقدارين جبريّين نسبيّين.
- قسمة مقدارين جبريّين نسبيّين.
- تعرُّف الكسر الجبري المُركَّب.
- تبسيط كسر جبري مُركَّب.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل.
- تبسيط المقادير الجبرية النسبية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أكتب على اللوح المقادير الجبرية الآتية:

$8r + 2t$	$x^3 + 8$
$4a - 12ab$	$16\,ab + 12\,b$
$7acd - 5abc$	$t^2 + 6t + 8$
$x^2 - x - 2$	$8x^3 - 27$

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة تحليل المقادير الجبرية المكتوبة على اللوح.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما شكل شاشة الحاسوب؟ مستطيلة.
  - » ما طول شاشة الحاسوب؟ $\frac{x^2}{x^2 - 2x - 15}$ وحدة.
  - » ما عرض شاشة الحاسوب؟ $\frac{x - 5}{x}$ وحدة.
  - » كيف يمكن إيجاد مساحة الشاشة؟ لماذا؟ بضرب طول الشاشة في عرضها؛ لأن الشاشة مستطيلة الشكل.
  - » هل ستكون المساحة الناتجة عددًا حقيقيًّا؟ لماذا؟ لا؛ لأن طول الشاشة وعرضها بدلالة x؛ لذا ستكون المساحة الناتجة بدلالة x.
  - » ما مساحة الشاشة بدلالة x في أبسط صورة؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأوّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أذكّـر الطلبة بمفهـوم المقدار الجبـري، وأطلب إليهم إعطاء أمثلة على مقادير جبرية.
- أوضّح للطلبة مفهوم المقدار الجبري النسبي، وأعطي لهم أمثلة على ذلك.
- أوضّـح للطلبة أن المقـدار الجبري النسـبي يكون في أبسـط صـورة إذا كان العامـل المشـترك الأكبـر بيـن بسطه ومقامه هو 1، ثم أدوّن على اللوح بعض الأمثلة للمقاديـر الجبريـة النسـبية في أبسـط صـورة، وبعض اللاأمثلة، نحو:

مقادير جبرية نسبية في أبسط صورة	مقادير جبرية نسبية ليست في أبسط صورة
$\frac{x}{2x+4}$	$\frac{2x}{4x+8}$
$\frac{x^2}{x^3-y}$	$\frac{x^2}{x^3-xy}$
$\frac{5ab}{23hc}$	$\frac{5ab}{23bc}$

- أطلـب إلـى الطلبـة ذكـر أمثلـة ولاأمثلة مشـابهة، مع إعطـاء التبريـر، وأعالـج الأخطـاء التـي يمكن أن تظهر في إجاباتهم.
- أناقـش الطلبـة في حـل المثـال 1 علـى اللـوح، باتباع الخطـوات الواردة في كتاب الطالـب، وأؤكّد ضرورة تبرير خطوات الحل.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة في مزيـد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال 1

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}$

$$\frac{2x-10}{2x^2-11x+5}=\frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-5)$

$$=\frac{2}{2x-1}$$ بالتبسيطِ

2) $\frac{x^3-2x^2+9x-18}{6x^3-24x^2+24x}$

$$\frac{x^3-2x^2+9x-18}{6x^3-24x^2+24x}=\frac{(x^3-2x^2)+(9x-18)}{6x(x^2-4x+4)}$$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ في البسطِ، وإخراجِ العاملِ المشتركِ في المقامِ

$$=\frac{x^2(x-2)+9(x-2)}{6x(x^2-4x+4)}$$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ منْ كلِّ تجميعٍ في البسطِ

$$=\frac{(x^2+9)(x-2)}{6x(x-2)(x-2)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{(x^2+9)\cancel{(x-2)}}{6x(x-2)\cancel{(x-2)}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-2)$

$$=\frac{x^2+9}{6x(x-2)}$$ بالتبسيطِ

3) $\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}$

$$\frac{1-u^2}{u^2+4u-5}=\frac{(1-u)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{-(u-1)(1+u)}{(u-1)(u+5)}$$ $1-u=-(u-1)$

$$=\frac{-\cancel{(u-1)}(1+u)}{\cancel{(u-1)}(u+5)}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(u-1)$

$$=\frac{-(u+1)}{u+5}$$ بالتبسيطِ

أتذكَّرُ

يُمكِنُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريةِ التي تحوي أربعةَ حدودٍ أوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميعِ.

أتذكَّرُ

يُمكِنُ إخراجُ (-1) عاملًا مشتركًا منَ البسطِ أوِ المقامِ لتسهيلِ اختصارِ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق **(رموز رياضية)** الوارد في الصفحة 92 مـن كتاب الطالب؛ لمـا له من أهمية في تعريف الطلبة بالرمز الخاص بالعامل المشترك الأكبر.
- ألفـت انتباه الطلبة إلـى صندوق **(أتعلّم)** الـوارد في الصفحة 92 مـن كتـاب الطالب؛ لمـا له من أهمية فـي تأكيد أن القسـمة على صفر تعطي قيمة غير مُعرَّفة؛ لذا اسـتُثنِيَت من هذه الوحدة جميع القيم التي تجعل من المقامات صفرًا.
- في الفرع 2 من المثال 1، أذكّر الطلبة أنه يمكن استعمال التجميع لتحليل المقادير الجبرية التي تحوي أربعة حدود أو أكثر.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{6x-18}{x^4-81}$ $\quad \frac{6}{(x+3)(x^2+9)}$

b) $\frac{x^3+8}{x^2+6x+8}$ $\quad \frac{x^2-2x+4}{x+4}$

c) $\frac{3x-3x^2}{x^2+4x-5}$ $\quad \frac{-3x}{x+5}$

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ ضربِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ البسطِ في البسطِ وضربِ المقامِ في المقامِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ**

بالكلماتِ: لضربِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ، يُضرَبُ البسطُ في البسطِ، ثمَّ يُضرَبُ المقامُ في المقامِ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

مثالٌ: $\frac{3x}{y} \times \frac{2x}{(y+2)} = \frac{6x^2}{y^2+2y}$

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{12\,ac}{15\,b} \times \frac{5\,ab^2}{6\,c^2}$

$\frac{12\,ac}{15b} \times \frac{5\,ab^2}{6c^2} = \frac{2\times6\times a\times c}{3\times5\times b} \times \frac{5\times a\times b\times b}{6\times c\times c}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \frac{2\times\cancel{6}\times a\times\cancel{c}}{3\times\cancel{5}\times\cancel{b}} \times \frac{\cancel{5}\times a\times\cancel{b}\times b}{\cancel{6}\times\cancel{c}\times c}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$= \frac{2a^2\,b}{3c}$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أتحقَّقُ منَ اختصارِ جميعِ العواملِ المشتركةِ بينَ البسطِ والمقامِ قبلَ إجراءِ عمليةِ الضربِ؛ تسهيلًا للحساباتِ.

إرشاد: عند مناقشة حل المثال 2 مع الطلبة، أوضّح لهم أهمية اختصار جميع العوامل المشتركة بين البسط والمقام في كلا الكسرين قبل إجراء عملية الضرب؛ لما لذلك من أهمية في تسهيل الحسابات، وضمان أن يكون الناتج في أبسط صورة؛ لذا أوجّههم إلى تحليل كل من البسط والمقام إلى العوامل أولًا.

تنويع التعليم

يساعد استعمال قلم مُلوَّن عند اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام الطلبة على تمييز العوامل المشتركة التي تم اختصارها، وضمان إيجاد الناتج بصورة صحيحة، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند اختصار المقدار الجبري النسبي $\frac{1-u}{u-1}$ بجعل نتيجة الاختصار (1) بدلًا من (−1)، ولعلاج ذلك أوجه الطلبة إلى إمكانية إخراج (−1) عاملًا مشتركًا من البسط أو المقام؛ لتسهيل عملية الاختصار وإجرائها بشكل صحيح.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أكتب مجموعة من المسائل على ضرب الكسور على اللوح، مثل الآتي:
  - » $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8}$
  - » $\frac{8}{11} \times \frac{9}{14}$
  - » $\frac{15}{20} \times \frac{7}{12}$
- أطلب إلى الطلبة إيجاد ناتج ضرب الكسور في المسائل المكتوبة على اللوح في مجموعات ثنائية، ثم أناقش الحل مع الصف كاملًا.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن ضرب المقادير الجبرية النسبية بطريقة مشابهة لطريقة ضرب الكسور، ثم أقدّم لهم الطريقة بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش مع الطلبة حل المثال 2 على اللوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأؤكّد أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي:

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

1) $\dfrac{x^2+5x+6}{4} \times \dfrac{2}{x+2}$ $\dfrac{x+3}{2}$

2) $\dfrac{4a^2bc^3}{a} \times \dfrac{6b^3}{21a^3c}$ $\dfrac{8b^4c^2}{7a^2}$

3) $\dfrac{5x^2}{x^2-2x} \times \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$ 5

مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال ضرب المقادير الجبرية النسبية في حل مسائل عملية وحياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أسأل:
  - » ما شكل المخطط؟ مستطيل.
  - » ما طول المخطط؟ $\dfrac{2x^2+2x}{x^2+5x+6}$
  - » ما عرض المخطط؟ $\dfrac{x^2-x-6}{4x^3}$
  - » كيف يمكن إيجاد مساحة المخطط؟ لماذا؟ بضرب طول المخطط في عرضه؛ لأن المخطط مستطيل الشكل.
  - » هل ستكون المساحة الناتجة عددًا حقيقيًّا؟ لماذا؟ لا؛ لأن طول المخطط وعرضه بدلالة x؛ لذا ستكون المساحة الناتجة بدلالة x.
- أناقش الطلبة في حل المثال على اللوح، وأؤكّد ضرورة تبرير خطوات الحل.

2) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+9} \times \dfrac{x+3}{x^2-6x+8}$

$\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+9} \times \dfrac{x+3}{x^2-6x+8} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+3)} \times \dfrac{x+3}{(x-2)(x-4)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$= \dfrac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+3)}} \times \dfrac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$= \dfrac{1}{x-4}$ بالتبسيطِ

أتحقّق من فهمي

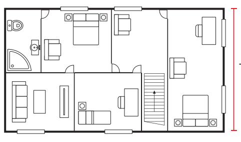
أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\dfrac{8x}{5y^2} \times \dfrac{20xy}{6b}$ $\dfrac{16x^2}{3yb}$

b) $\dfrac{d^2-36}{d^2+5d-6} \times \dfrac{d-1}{d^2-7d+6}$ $\dfrac{1}{d-1}$

مثال 3 : منَ الحياةِ

هندسةٌ معماريةٌ: يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مُخطَّطًا لأحدِ المنازلِ على شكلِ مستطيلٍ. أجدُ مساحةَ المنزلِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



$\dfrac{x^2-x-6}{4x^3}$

$\dfrac{2x^2+2x}{x^2+5x+6}$

$A = l \times w$ صيغةُ مساحةِ المستطيلِ الذي طولُهُ l وعرضُهُ w

$= \dfrac{2x^2+2x}{x^2+5x+6} \times \dfrac{x^2-x-6}{4x^3}$ بتعويضِ $l = \dfrac{2x^2+2x}{x^2+5x+6}$, $w = \dfrac{x^2-x-6}{4x^3}$

$= \dfrac{2x(x+1)}{(x+2)(x+3)} \times \dfrac{(x-3)(x+2)}{2x \times 2x^2}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

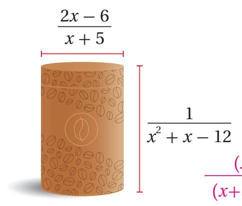
$= \dfrac{\cancel{2x}(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} \times \dfrac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{2x} \times 2x^2}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$= \dfrac{(x+1)(x-3)}{2x^2(x+3)}$ بالتبسيطِ

إذنْ، مساحةُ المنزلِ هيَ $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x^2(x+3)}$ وحدةً مُربَّعةً.

أتحقَّقُ منْ فهمي

قهوةٌ: تضعُ إحدى الشـــركاتِ مُنتَجَها مـــنَ القهوةِ في علبٍ، أبعادُها تعطى بدلالةِ x كما في الشكلِ المُجاورِ. أجدُ حجمَ علبةِ القهوةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



$\frac{(x-3)\pi}{(x+5)^2(x+4)}$

أتذكَّرُ

إذا كانَ ناتـــجُ ضـــربِ عدديـــنِ هوَ 1، فـــإنَّ كُلًّا منْهُما يُسمّى نظيرًا ضربيًّا للآخرِ، أوْ مقلوبًا للآخرِ.

قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ

يُمكِنُ قســـمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ بطريقةٍ مُشابِهةٍ لطريقةِ قســـمةِ الكسورِ، وذلكَ بضربِ المقســـومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ، ثمَّ كتابةِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ الناتجِ في أبسطِ صورةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — **قسمةُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ**

بالكلماتِ: لقسمةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ على آخرَ، يُضرَبُ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c, d مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

مثالٌ: $\frac{4x}{y} \div \frac{5}{y+1} = \frac{4x}{y} \times \frac{y+1}{5} = \frac{4x(y+1)}{5y}$

أُفكِّرُ

لماذا لا يُشترَطُ أنْ يكونَ $a \neq 0$؟

مثال 4

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2}$

$\frac{24x^2y}{5c^2d} \div \frac{16xy^3}{10c^2d^2} = \frac{24x^2y}{5c^2d} \times \frac{10c^2d^2}{16xy^3}$ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$= \frac{3\times8\times x\times x\times y}{5\times c^2\times d} \times \frac{5\times2\times c^2\times d\times d}{2\times8\times x\times y\times y^2}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

مثال 4

- أكتب مجموعة من المسائل على قسمة الكسور على اللوح، مثل الآتي:
  - » $\frac{7}{10} \div \frac{2}{8}$
  - » $\frac{14}{22} \div \frac{25}{18}$
  - » $\frac{4}{30} \div \frac{2}{9}$
- أطلب إلى الطلبة إيجاد ناتج قسمة الكسور في المسائل المكتوبة على اللوح في مجموعات ثنائية، ثم أناقش الحل مع الصف كاملًا.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن قسمة المقادير الجبرية النسبية بطريقة مشابهة لطريقة قسمة الكسور، ثم أقدّم لهم الطريقة بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق **(مفهوم أساسي)** الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش مع الطلبة حل المثال 4 على اللوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأؤكّد أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

$$=\frac{3\times\cancel{8}\times\cancel{x}\times x\times\cancel{y}}{\cancel{5}\times\cancel{e^2}\times\cancel{d}}\times\frac{\cancel{5}\times\cancel{2}\times\cancel{e^2}\times\cancel{d}\times d}{\cancel{2}\times\cancel{8}\times\cancel{x}\times\cancel{y}\times y^2}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$=\frac{3xd}{y^2}$$ بالتبسيطِ

2 $$\frac{x^2-36}{y^2+3y-4}\div\frac{x^2-9x+18}{8y+32}$$

$$\frac{x^2-36}{y^2+3y-4}\div\frac{x^2-9x+18}{8y+32}=\frac{x^2-36}{y^2+3y-4}\times\frac{8y+32}{x^2-9x+18}$$ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$=\frac{(x-6)(x+6)}{(y+4)(y-1)}\times\frac{8(y+4)}{(x-3)(x-6)}$$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$$=\frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{(y+4)}(y-1)}\times\frac{8\cancel{(y+4)}}{(x-3)\cancel{(x-6)}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$=\frac{8(x+6)}{(y-1)(x-3)}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{24b^3}{14x^2y^2}\div\frac{16\,bc^2}{21x^4y^3}$ $\quad\frac{9b^2x^2y}{4c^2}$

b) $\frac{x^2-9x+20}{y^2+10y+21}\div\frac{2x^2-9x+4}{4y+28}$ $\quad\frac{4(x-5)}{(y+3)(2x-1)}$

الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ

الكسرُ الجبريُّ المُركَّبُ (complex algebraic fraction) هوَ كسرٌ يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ، ومنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{\frac{x}{4}}{y}\ ,\quad \frac{a-6}{\frac{4}{a}}\ ,\quad \frac{\frac{y+1}{y-8}}{\frac{y-7}{5}}\ ,\quad \frac{\frac{2}{d}+8}{\frac{10}{d}+8}$$

إرشــاد: أُدير نقاشًــا مع الطلبــة حول إجابة الســؤال الموجود في صنــدوق (**أفكّــر**) المجاور لصندوق (**مفهوم أساسي**) في الصفحة 96 من كتاب الطالــب، وأتوصّل معهــم إلى أنه لــو كان المقدار الجبري a يســاوي صفرًا فإن ذلــك يجعل المقدار الجبري النسبي $\frac{a}{b}$ يســاوي صفرًا، أما بقية المقادير b و c و d فإذا كان أحدها يساوي صفرًا فإننا سنحصل على قيمة غير مُعرَّفة.

أخطاء شائعة: قد يخطئ بعض الطلبة عند قسمة مقدار جبري نسبي على آخر بالضرب بالمقســوم عليــه وليس في نظيره الضربي؛ لذا أؤكّد وبشكل مستمر على ذلك.

توجدُ أربعُ خطواتٍ يتعيَّنُ اتِّباعُها لتبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ **خطواتُ تبسيطِ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ**

يُمكِنُ تبسيطُ الكسورِ الجبريةِ المُركَّبةِ باتِّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

الخطوةُ 1: كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ في صورةِ كسرٍ واحدٍ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

الخطوةُ 2: كتابةُ الكسرِ الجبريِّ المُركَّبِ الناتجِ منَ الخطوةِ 1 في صورةِ قسمةِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ.

الخطوةُ 3: ضربُ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

الخطوةُ 4: قسمةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ، والتبسيطُ.

مثال 5

أكتبُ $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{a^2-25}}{\frac{b-a}{a+5}}$ في أبسطِ صورةٍ.

$$\dfrac{\frac{a^2-b^2}{a^2-25}}{\frac{b-a}{a+5}} = \frac{a^2-b^2}{a^2-25} \div \frac{b-a}{a+5}$$ بكتابةِ الكسرِ الجبريِّ المُركَّبِ في صورةِ قسمةِ مقدارينِ نسبيينِ

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2-25} \times \frac{a+5}{b-a}$$ بضربِ المقسومِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$= \frac{-\cancel{(b-a)}(a+b)}{(a-5)\cancel{(a+5)}} \times \frac{\cancel{a+5}}{\cancel{b-a}}$$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على العواملِ المشتركةِ

$$= -\frac{(a+b)}{(a-5)}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-36}}{\frac{x-y}{2y+12}}$ في أبسطِ صورةٍ. $\dfrac{2(x+y)}{y-6}$

مثال 5

- أوضّح للطلبة مفهوم الكسر الجبري المُركَّب، وأقدّم لهم أمثلة عليه، ثم أطلب إليهم تقديم أمثلة عليه أيضًا.
- أوضّح للطلبة أن تبسيط الكسور الجبرية المُركَّبة يمرّ بأربع خطوات، ثم أقدّم لهم الخطوات الأربع بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب، وأدوّن الخطوات بصورة مختصرة على اللوح.
- أناقش مع الطلبة خطوات تبسيط الكسر الوارد في المثال 5 على اللوح، وأؤكّد ضرورة تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تبسيط الكسور الجبرية المُركَّبة؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة اتباع خطوات التبسيط الأربع.

مثال إضافي:

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

1) $\dfrac{\frac{6xy^4}{25z^3}}{\frac{18y}{5xz^2}}$ $\quad \dfrac{x^2y^3}{15z}$

2) $\dfrac{\frac{x^2-5x+4}{2x-8}}{\frac{3x^2-3x}{2}}$ $\quad \dfrac{1}{3x}$

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 21) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (30 – 27).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 28 (**أكتشف المختلف**)، أوجّه الطلبة إلى تبسيط المقادير الجبرية النسبية جميعها؛ لتحديد المختلف منها.
- في السؤال 22 (**تحدٍّ**)، أناقش الطلبة في المقدار النسبي المكافئ للمقدار $\dfrac{1}{\dfrac{x^2-4y^2}{x+2y}}$، وأتوصّل معهم إلى أن المقدار النسبي المكافئ له هو: $\dfrac{x+2y}{x^2-4y^2}$، وأطلب إليهم كتابته في أبسط صورة.

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\dfrac{6x(x+3)}{9x^2}$ $\dfrac{2(x+3)}{3x}$

2) $\dfrac{b^2+5b+4}{b^2-2b-24}$ $\dfrac{b+1}{b-6}$

3) $\dfrac{2x^3-18x}{6x^3-12x^2-18x}$ $\dfrac{x+3}{3(x+1)}$

4) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

5) $\dfrac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$ $\dfrac{x^2}{x+6}$

6) $\dfrac{32x^4-50}{4x^3-12x^2-5x+15}$ $\dfrac{2(4x^2+5)}{x-3}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $\dfrac{3x^2y}{14c^2d}\times\dfrac{28cd}{12x^3y^2}$ $\dfrac{1}{2xyc}$

8) $\dfrac{2d+2}{d^2+8d+16}\times\dfrac{d^2+d-12}{d+1}$ $\dfrac{2(d-3)}{d+4}$

9) $\dfrac{x^2-16}{3x^3}\times\dfrac{x^2}{x^2+x-12}$ $\dfrac{x-4}{3x(x-3)}$

10) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}\times\dfrac{x^2+x-6}{x}$ $(x-3)(x+3)$

11) $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\times\dfrac{x^2+3x-4}{2x}$ $\dfrac{1}{2}(x-4)(x+4)$

12) $\dfrac{b^2+12b+11}{b^2-9}\times\dfrac{b^3+27}{b^2+20b+99}$ $\dfrac{(b+1)(b^2-3b+9)}{(b-3)(b+9)}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

13) $\dfrac{21x^3y^2}{12ab^2}\div\dfrac{3x^2y^2}{24a^3}$ $\dfrac{14xa^2}{b^2}$

14) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\div\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$ $\dfrac{x+4}{x+3}$

15) $\dfrac{p}{p-4}\div\dfrac{p^2}{p^2-5p+4}$ $\dfrac{p-1}{p}$

16) $\dfrac{g^2-4g-21}{4g^2+12g}\div(g-7)$ $\dfrac{1}{4g}$

17) $\dfrac{x^2-25}{2x-2}\div\dfrac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$ $\dfrac{x-5}{2}$

18) $\dfrac{x+2}{3x+12}\div\dfrac{x+2}{x^2-16}$ $\dfrac{x-4}{3}$

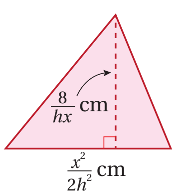
أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

19) $\dfrac{\frac{x^3y^3}{cd^4}}{\frac{x^2y}{c^2d}}$ $\dfrac{xcy^2}{d^3}$

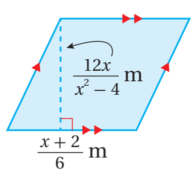
20) $\dfrac{\frac{4a-8}{a^2-9}}{\frac{a^2-a-2}{a^2+7a+12}}$ $\dfrac{4(a+4)}{(a-3)(a+1)}$

21) $\dfrac{\frac{8x^2-10x-3}{10x^2+35x-20}}{\frac{2x^2+x-6}{4x^2+18x+8}}$ $\dfrac{2(4x+1)(2x+1)}{5(2x-1)(x+2)}$

أجدُ مساحةَ كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ:

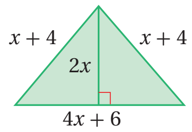
22) 

$\dfrac{2x}{h^3}$ cm^2

23) 

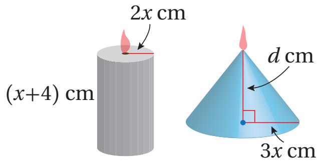
$\dfrac{2x}{x-2}$ m^2

24 أكتبُ النسبةَ بينَ محيطِ الشكلِ المُجاوِرِ ومساحتِهِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ.



محيط $(6x+14)$، مساحة $2x\ (2x+3)$، النسبة المطلوبة $\frac{3x+7}{x(2x+3)}$

25 **شموعٌ:** في الشكلِ المُجاوِرِ شمعتانِ لهُما الحجمُ نفسُهُ، وإحداهُما أسطوانيةٌ، والأُخرى مخروطيةٌ. أكتبُ مقدارًا نسبيًّا يُمثِّلُ ارتفاعَ الشمعةِ المخروطيةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.



$d = \frac{4(x+4)}{3}$

26 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $\frac{x}{x+3}$ وحدة مربعة.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مقدارًا نسبيًّا أبسطُ صورةٍ لهُ هيَ: $\frac{1}{2x+1}$. إجابة ممكنة $\frac{2x+1}{4x^2+4x+1}$

28 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المقاديرِ النسبيةِ الآتيةِ مختلفٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\frac{x^2-x+1}{x^2+4x}$ $\quad$ $\frac{x+8}{4x^2}$ $\quad$ $\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x}$ $\quad$ $\frac{x-2}{x^2}$

المقدار $\frac{x^2+6x+8}{x^2+4x}$ ليس بأبسط صورة وما تبقى من المقادير بأبسط صورة.

29 **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$= \frac{x+2}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$
$$= \frac{\cancel{x}+2}{\cancel{x-2}} \times \frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)}(\cancel{x}-1)}$$
$$= \frac{2}{-1}$$

اختُصر x في البسط مع x في المقام في المقدار $\frac{x+2}{x-1}$ وهذا خطأ.
الناتج الصحيح هو: $\frac{x+2}{x-1}$.

30 **تحدٍّ:** هلْ يُعَدُّ المقدارُ $x-2y$ مُكافِئًا للمقدارِ $\frac{1}{\frac{x^2-4y^2}{x+2y}}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الإجابة: لا. أبسط صورة للمقدار $\frac{1}{\frac{x^2-4y^2}{x+2y}}$ هي: $\frac{1}{2x-y}$ ، وهي مقلوب $2x-y$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, 23, 29 كتاب التمارين: 1, 2, 5, 6, 7, 12
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (26 – 28), 23, 24 كتاب التمارين: 3, 4, 8, 9, 10, 11, 13
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (25 – 30) كتاب التمارين: 10, 11, (14 – 18)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» أكتب كسرًا جبريًّا مُركَّبًا أبسط صورة له $\frac{x-1}{x+4}$

إجابة ممكنة: $\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2+x}}{1+\frac{4}{x}}$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (4 – 1) من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة كتابة 3 معلومات أساسية مُتعلَّمة في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المشتركة التي كتبها الطلبة؛ بُغية تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها.
- تبسيط كسر جبري مُركَّب يحتوي بسطه أو مقامه أو كلاهما على عملية جمع أو طرح.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين.
- ضرب المقادير الجبرية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح المسائل الآتية:

a. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{2}{7}+\frac{1}{8}$

c. $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}$ **d.** $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}$

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل مجموعة إيجاد ناتج كل مسألة على دفاترهم.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

الدرسُ 2

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

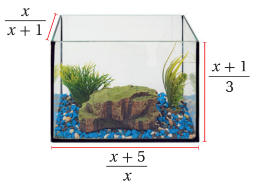
Adding and Subtracting Rational Algebraic Expressions

فكرةُ الدرس

- إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاديرِ الجبريةِ.
- جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها.

مسألةُ اليوم

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ حوضَ أسماكٍ مفتوحًا منَ الأعلى على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، أبعادُهُ مُبيَّنةٌ كما في الشكلِ. أجدُ مساحةَ سطحِ زجاجِ الحوضِ بدلالةِ x في أبسطِ صورة.



المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ للمقاديرِ الجبريةِ

تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لعددينِ. والآنَ سأتعلَّمُ بطريقةٍ مُشابِهةٍ كيفَ أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ لحدَّينِ، وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منْهُما تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةِ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ، عندئذٍ يكونُ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقدارينِ جبريينِ، وذلكَ بتحليلِ كلٍّ منْهُما إلى العواملِ، عندئذٍ يكونُ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (LCM) هوَ ناتجَ ضربِ جميعِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ بالرمزِ (م. م. أ)، أوْ بالرمزِ (LCM)؛ وهوَ اختصارٌ لـِ (least common multiple).

مثال 1

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $6ab, 8a^3, 12ab^5$

الخطوةُ 1: تحليلُ الحدودِ الجبريةِ تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةُ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ.

$$6ab = 2 \times 3 \times a \times b$$
$$8a^3 = 2^3 \times a^3$$
$$12ab^5 = 2^2 \times 3 \times a \times b^5$$

بتحليلِ الحدودِ الجبريةِ تحليلًا كاملًا، ثمَّ كتابةِ العواملِ المُتكرِّرةِ بالصورةِ الأُسِّيَّةِ.

أتذكَّرُ

تحليلُ الحدِّ الجبريِّ تحليلًا كاملًا يعني أنَّهُ يُكتَبُ في صورةِ حاصلِ ضربِ أعدادٍ أوّليةٍ ومُتغيِّراتٍ، كلٌّ منها مرفوعٌ إلى الأُسِّ 1.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » ما شكل حوض الأسماك؟ متوازي مستطيلات.
  - » ما أبعاده؟ $\frac{x}{x+1}, \frac{x+1}{3}, \frac{x+5}{x}$
  - » كيف يمكن إيجاد مساحة سطح زجاج الحوض؟ بإيجاد مجموع مساحات أوجهه الجانبية بالإضافة إلى مساحة قاعدة الحوض.
  - » هل ستكون مساحة سطح الزجاج الناتجة عددًا حقيقيًّا؟ لماذا؟ لا؛ لأن أبعاد الحوض بدلالة x؛ لذا ستكون المساحة الناتجة بدلالة x.
  - » كيف نجد المساحة الجانبية لسطح زجاج الحوض؟ باستعمال الصيغة: $L.A=Ph$، حيث P محيط القاعدة، و h ارتفاع متوازي المستطيلات.
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد محيط القاعدة المستطيلة على اللوح، وبعد كتابته المقدارَ $\frac{2x}{x+1}+\frac{2x+10}{x}$ أسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن إيجاد ناتج المقدار $\frac{2x}{x+1}+\frac{2x+10}{x}$ في أبسط صورة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أوضّح للطلبة أن جمع أو طرح المقادير الجبرية النسبية يشبه جمع الكسور وطرحها، وأنه إذا أردنا جمع أو طرح مقدارين جبريّين غير متساويين في المقام، فإننا بحاجة إلى توحيد المقام أولًا، ويكون ذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامين، وبما أن المقامين مقداران جبريان، فإنه يلزمنا تعرُّف كيفية إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريّين.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريّين باتباع الخطوات الآتية:
  - » تحليل كل من المقدارين الجبريّين تحليلًا كاملًا.
  - » كتابة العوامل المتكررة في كل من المقدارين بالصورة الأُسّية.
  - » إيجاد ناتج ضرب جميع قوى العوامل التي لها الأُسّ الأكبر.

ملاحظاتي

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأؤكّد ضرورة تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**رموز رياضية**) الوارد في الصفحة 101 من كتاب الطالب؛ لما له من أهمية في تعريف الطلبة بالرمز الخاص بالمضاعف المشترك الأصغر.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوقي (**أتذكّر**) الواردين في هامش المثال 1 من كتاب الطالب؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بمفهوم كل من تحليل الحد الجبري، وتحليل المقدار الجبري.
- في الفرع 2 من المثال 1، أذكّر الطلبة بأنه لتحليل المقدار الجبري $x^4 - 7x^3 + 12x^2$ نحتاج أولًا إلى إخراج العامل المشترك الأكبر بين حدود المقدار، ثم تحليل المقدار ثلاثي الحدود الناتج بعد إخراج العامل المشترك إلى عوامله.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

الخطوةُ 2: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ.

بضربِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ $\text{LCM} = 2^3 \times 3 \times a^3 \times b^5$

بالتبسيطِ $= 24a^3 b^5$

2 $x^4 - 7x^3 + 12x^2 , x^2 - 2x - 3$

الخطوةُ 1: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ إلى عواملِها.

بتحليلِ المقاديرِ الجبريةِ إلى عواملِها

$x^4 - 7x^3 + 12x^2 = x^2 (x-3)(x-4)$

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

الخطوةُ 2: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ.

بضربِ قوى العواملِ التي لها الأُسُّ الأكبرُ $\text{LCM} = x^2 (x-3)(x-4)(x+1)$

أتذكّرُ

تحليلُ المقدارِ الجبريِّ يعني أنَّهُ يُكتَبُ في صورةِ حاصلِ ضربِ عواملِهِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $6b^2, 12\,ab, 18ab^4$ $36ab^4$

b) $3b^2 - 15b - 18, b^3 - 7b^2 + 6b$ $3b(b-6)(b+1)(b-1)$

جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

يُمكِنُ جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها بطريقةٍ مُشابِهةٍ تمامًا لطريقةِ جمعِ الكسورِ وطرحِها. فعندَ الجمعِ أوِ الطرحِ لمقدارينِ جبريينِ نسبيينِ متساويينِ في المقامِ، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ، ويبقى المقامُ المشتركُ، ثمَّ يُبسَّطُ الناتجُ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

مفهومٌ أساسيٌّ — جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها

بالكلماتِ: لجمعِ مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ لهُما المقامُ نفسُهُ أوْ طرحِهِما، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ، ويبقى المقامُ نفسُهُ.

بالرموزِ: إذا كانَتْ a, b, c مقاديرَ جبريةً، حيثُ: $c \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad , \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

مثالٌ: $\frac{3x}{y+2} + \frac{x}{y+2} = \frac{3x+x}{y+2} = \frac{4x}{y+2}$

يُمكِنُ أيضًا الجمعُ أوِ الطرحُ لمقدارينِ جبريينِ نسبيينِ غيرِ متساويينِ في المقامِ، وذلكَ بتوحيدِ المقامينِ أوَّلًا عنْ طريقِ إيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقامينِ، ثمَّ ضربِ البسطِ والمقامِ لكلِّ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في العواملِ اللازمةِ لجعلِ المقامِ مساويًا للمضاعفِ المشتركِ الأصغرِ، ثمَّ تبسيطِ الناتجِ إنْ كانَ ذلكَ ضروريًّا.

مثال 2

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $\dfrac{y}{x(y-1)} - \dfrac{1}{x(y-1)}$

$\dfrac{y}{x(y-1)} - \dfrac{1}{x(y-1)} = \dfrac{y-1}{x(y-1)}$ بجمعِ البسطينِ

$= \dfrac{\cancel{y-1}}{x(\cancel{y-1})} = \dfrac{1}{x}$ بالتبسيطِ

2 $\dfrac{2x}{3y^3} + \dfrac{5b}{6x^2 y}$

$\dfrac{2x}{3y^3} + \dfrac{5b}{6x^2 y} = \dfrac{2x}{3y^3} \times \dfrac{2x^2}{2x^2} + \dfrac{5b}{6x^2 y} \times \dfrac{y^2}{y^2}$ بتوحيدِ المقامينِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لهُما، وهوَ: $6x^2 y^3$

$= \dfrac{4x^3}{6x^2 y^3} + \dfrac{5b\,y^2}{6x^2 y^3}$ بالضربِ

$= \dfrac{4x^3 + 5b\,y^2}{6x^2 y^3}$ بجمعِ البسطينِ

3 $\dfrac{3x-2}{x^2+4x-12} - \dfrac{5}{2x+12}$

$\dfrac{3x-2}{x^2+4x-12} - \dfrac{5}{2x+12} = \dfrac{3x-2}{(x+6)(x-2)} - \dfrac{5}{2(x+6)}$ بتحليلِ المقامينِ إلى عواملِهما

$= \dfrac{3x-2}{(x+6)(x-2)} \times \dfrac{2}{2} - \dfrac{5}{2(x+6)} \times \dfrac{x-2}{x-2}$ بتوحيدِ المقاماتِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لها، وهوَ: $2(x+6)(x-2)$

$= \dfrac{6x-4-5x+10}{2(x+6)(x-2)}$ بطرحِ البسطينِ

$= \dfrac{x+6}{2(x+6)(x-2)}$ بالتبسيطِ

مثال 2

- أذكّر الطلبة أنه عند جمع كسرين لهما المقام نفسه أو طرحهما فإن البسطين يُجمَعان أو يُطرَحان، ويبقى المقام المشترك، وهذا ينطبق على جمع أو طرح مقدارين جبريّين نسبيّين متساويين في المقام، ثم أقدّم لهم هذا المفهوم بالكلمات والرموز، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب، ثم أبيّن لهم أنه يمكن جمع أو طرح مقدارين جبريّين غير متساويين في المقام باتباع الخطوات الآتية:
  - » إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامين.
  - » ضرب البسط والمقام لكل مقدار جبري نسبي في العوامل اللازمة؛ لجعل المقام مساويًا للمضاعف المشترك الأصغر.
  - » تبسيط الناتج (إن كان ضروريًّا).
- أناقش مع الطلبة حل المثال 2 على اللوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب، وأؤكّد أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) الوارد في هامش المثال 2 من كتاب الطالب؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بمفهوم كتابة المقدار الجبري النسبي في أبسط صورة.

مثال إضافي

أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-a}$ $\quad a+b$

2 $\dfrac{3y}{y^2-7y+10} - \dfrac{2y}{y^2-8y+15}$

$\dfrac{y}{(y-2)(y-3)}$

مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال جمع أو طرح المقادير الجبرية النسبية في حل مسائل عملية وحياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أسأل:
  - » ما شكل الملصق؟ مستطيل.
  - » ما طول الملصق؟ $\dfrac{9}{y-4}$
  - » ما عرض الملصق؟ $\dfrac{y}{y+5}$
  - » كيف يمكن إيجاد طول الإطار اللازم لإحاطة الملصق؟ لماذا؟ باستعمال صيغة محيط المستطيل؛ لأن المخطط مستطيل الشكل.
  - » هل سيكون طول الإطار الناتج عددًا حقيقيًا؟ لماذا؟ لا؛ لأن طول الملصق وعرضه بدلالة y؛ لذا سيكون طول الإطار الناتج بدلالة y.
- أناقش الطلبة في حل المثال على اللوح، وأؤكّد ضرورة تبرير خطوات الحل.

$= \dfrac{\cancel{x+6}}{2(\cancel{x+6})(x-2)}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x+6)$

$= \dfrac{1}{2(x-2)}$ بالتبسيطِ

أتذكَّرُ

لكتابةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ، أَقسِمُ البسطَ والمقامَ على العواملِ المشتركةِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\dfrac{2x}{x^2(2x+5)} + \dfrac{5}{x^2(5+2x)}$ $\quad \dfrac{1}{x^2}$

b) $\dfrac{5y}{6b^2a} + \dfrac{3b^2}{8a^2}$ $\quad \dfrac{20ay+9b^4}{24a^2b^2}$

c) $\dfrac{5}{8x+8} - \dfrac{x-4}{12x^2+4x-8}$ $\quad \dfrac{13x-2}{8(x+1)(3x-2)}$

مثال 3 : منَ الحياةِ

بيئةٌ: صمَّمَتْ ميساءُ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأهميةِ إعادةِ التدويرِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ المُجاورِ. ترغبُ ميساءُ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ y في أبسطِ صورةٍ.

$\dfrac{y}{y+5}$ cm

$\dfrac{9}{y-4}$ cm

لإيجادِ طولِ الإطارِ، أجدُ محيطَ المُلصَقِ:

$P = 2l + 2w$ صيغةُ محيطِ المستطيلِ

$= 2\left(\dfrac{9}{y-4}\right) + 2\left(\dfrac{y}{y+5}\right)$ بتعويضِ $l = \dfrac{9}{y-4}$, $w = \dfrac{y}{y+5}$

$= \dfrac{18}{y-4} + \dfrac{2y}{y+5}$ بالتبسيطِ

$= \dfrac{18}{y-4} \times \dfrac{y+5}{y+5} + \dfrac{2y}{y+5} \times \dfrac{y-4}{y-4}$ بتوحيدِ المقاماتِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لها، وهوَ: $(y+5)(y-4)$

$= \dfrac{2y^2-8y+18y+90}{(y+5)(y-4)}$ بجمعِ البسطينِ

$= \dfrac{2y^2+10y+90}{(y+5)(y-4)}$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ الإطارِ اللازمُ لإحاطةِ المُلصَقِ بِهِ هوَ: $\dfrac{2y^2+10y+90}{(y+5)(y-4)}$ cm.

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُني تحليلُ: $2y^2+10y+90$؟

معلومةٌ

تحتفلُ مُنظَّمةُ الصحَّةِ العالميةِ في 31 أيّارَ منْ كلِّ عامٍ باليومِ العالميِّ للامتناعِ عنِ التدخينِ، وتحرصُ في هذا اليومِ على إبرازِ المخاطرِ الصحِّيةِ المُرتبطةِ بالتدخينِ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

صحَّةٌ: صَمَّمَ خالدٌ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأضرارِ التدخينِ في اليومِ العالميِّ للامتناعِ عنِ التدخينِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ المُجاورِ. يرغبُ خالدٌ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ. $\frac{4x^2+6x+18}{(x-3)(x+1)}$

$\frac{2x}{x+1}$ cm

$\frac{9}{x-3}$ cm

تبسيطُ الكسرِ المُركَّبِ

تعلَّمْتُ في الدرسِ السابقِ تبسيطَ الكسرِ المُركَّبِ الذي يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُبسِّطُ الكسرَ المُركَّبَ الذي يحتوي بسطُهُ أوْ مقامُهُ أوْ كلاهُما على عمليةِ جمعٍ أوْ عمليةِ طرحٍ، وذلكَ بطريقتينِ؛ إحداهُما: كتابةُ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ أوْ كليْهِما في صورةِ كسرٍ واحدٍ (إنْ لَزِمَ). والأُخرى: إيجادُ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ التي في البسطِ والمقامِ جميعِها، ثمَّ ضربُ كلٍّ منْ بسطِ المقدارِ الجبريِّ النسبيِّ ومقامِهِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ، والتبسيطُ.

مثال 4

أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2}$.

الطريقةُ 1: أُبسِّطُ المقدارَ بكتابةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ في صورةِ كسرٍ واحدٍ.

$$\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2}=\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{2x}{x}}$$
المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ لمقامي البسطِ هوَ y
المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ لمقامي المقامِ هوَ x

$$=\frac{\frac{x-y}{y}}{\frac{1+2x}{x}}$$
بتبسيطِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ

$$=\frac{x-y}{y}\div\frac{1+2x}{x}$$
بكتابةِ الكسرِ المُركَّبِ في صورةِ قسمةِ مقدارينِ نسبيينِ

المفاهيم العابرة للمواد

أؤكّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 3، أعزّز الوعي الصحي لدى الطلبة بتعريفهم بأضرار التدخين على صحة الجسم، ثم أطلب إليهم ابتكار ملصق للتوعية بهذه المخاطر، وعرضه أمام الصف في اليوم التالي، وأعزّز الملصقات المُبتكَرة.

مثال 4

- أذكّر الطلبة بمفهوم الكسر الجبري المُركّب، وأوضّح لهم أن بعض الكسور الجبرية المُركَّبة يحتوي بسطها أو مقامها أو كلاهما على عملية جمع أو طرح، ثم أوضّح لهم الطريقتين اللّتين يمكن من خلالهما تبسيط هذا النوع من الكسور المُركَّبة.
- أناقش مع الطلبة تبسيط المقدار الجبري الوارد في المثال 4 على اللوح، باتباع الطريقتين الواردتين في كتاب الطالب.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تبسيط الكسر الجبري المُركَّب الذي يحتوي بسطه أو مقامه أو كلاهما على عملية جمع أو طرح؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأقدّم لهم المساعدة اللازمة أثناء حل هذا النوع من المسائل.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 19) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

$$= \frac{x-y}{y} \times \frac{x}{1+2x}$$ بالضربِ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ

$$= \frac{x^2-xy}{y+2xy}$$ بالتبسيطِ

الطريقةُ 2: أُبسِّطُ المقدارَ بإيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقاماتِ البسطِ والمقامِ.

$$\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{1}{x}+2} \times \frac{xy}{xy}$$ بضربِ البسطِ والمقامِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لجميعِ المقاماتِ التي في البسطِ والمقامِ، وهوَ: xy

$$= \frac{x^2-xy}{y+2xy}$$ بالتبسيطِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\dfrac{2+\frac{1}{y}}{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}$. $\dfrac{2xy+x}{4y-3x}$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $4mt^2, 8m^3t, 12m^4t$ $\quad 24m^4t^2$

2) $x^2+2x-15, x^2+6x+5$ $\quad (x+5)(x-3)(x+1)$

3) $c^3+5c^2+4c, c(c+1)^2$ $\quad c(c+4)(c+1)^2$

4) $9x^2-16, 3x^2+x-4$ $\quad (3x+4)(3x-4)(x-1)$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

5) $\dfrac{6y}{3x^3}+\dfrac{2}{7y^2x}$ $\quad \dfrac{14y^3+2x^2}{7x^3y^2}$

6) $\dfrac{b}{b+3}+\dfrac{5}{b-2}$ $\quad \dfrac{b^2+3b+15}{(b+3)(b-2)}$

7) $\dfrac{m}{2m-14}+\dfrac{m^2}{m^2-49}$ $\quad \dfrac{3m^2+7m}{2(m-7)(m+7)}$

8) $\dfrac{1}{4x^2-12x+9}-\dfrac{x}{2x^2-x-3}$ $\quad \dfrac{-2x^2+4x+1}{(2x-3)^2(x+1)}$

9) $\dfrac{x+3}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x-1}$ $\quad \dfrac{-x^2-2x+1}{x^2-1}$

10) $3s^2-\dfrac{s+1}{s^2-1}$ $\quad \dfrac{3s^3-3s^2-1}{s-1}$

11) $\dfrac{2}{6z-9}-\dfrac{z+1}{2z^2-3z}$ $\quad \dfrac{-z-3}{3z(2z-3)}$

12) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-x}$ $\quad$ zero

13) $\dfrac{3w-1}{2w^2+w-3}-\dfrac{2-w}{w-1}$ $\quad \dfrac{2w^2+2w-7}{(2w+3)(w-1)}$

14) $\dfrac{x+2}{x^2+3x-10}+\dfrac{3}{2-x}$ $\quad \dfrac{2x+13}{(x+5)(2-x)}$

15) $\dfrac{2p+3}{p^2-7p+12}-\dfrac{2}{p-3}$ $\quad \dfrac{11}{(p-3)(p-4)}$

16) $\dfrac{3c+1}{c-1}+\dfrac{c+1}{c^2-4c+3}\div\dfrac{c-1}{c-3}$ $\quad \dfrac{3c^2-c}{(c-1)^2}$

106

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 – 27).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 26 (**تبرير**)، أذكّر الطلبة أنه يمكن إيجاد معامل التكبير بقسمة الطول في الصورة على الطول المُناظِر له في الشكل الأصلي.
- في السؤال 27 (**تبرير**)، أذكّر الطلبة بأن $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$، ولكن يلزم كتابة المقدار الجبري $\frac{1}{x}+1$ على صورة مقدار نسبي أولًا، ثم استعمال هذه القاعدة.

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

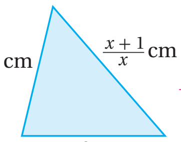
17) $\dfrac{6+\frac{a}{b}}{2-\frac{6}{b}}$ $\quad \dfrac{6b+a}{(2b-6)}$

18) $\dfrac{\frac{6}{x-4}-\frac{x}{2x+3}}{\frac{2}{2x+3}+\frac{2x}{x-4}}$ $\quad \dfrac{-x^2+16x+18}{4x^2+8x-8}$

19) $\dfrac{\frac{x}{x-2}+1}{\frac{3}{x^2-4}-1}$ $\quad \dfrac{2(x+2)(x-1)}{7-x^2}$

أجدُ محيطَ كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ:

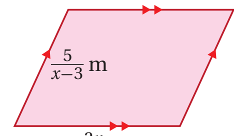
20)



$\frac{2}{3x}$ cm, $\frac{x+1}{x}$ cm, $\frac{6}{x^2}$ cm

$\dfrac{3x^2+5x+18}{3x^2}$ cm

21)



$\frac{5}{x-3}$ m, $\frac{2x}{x+5}$ m

$\dfrac{4x^2-2x+50}{(x+5)(x-3)}$ cm

22) **رحلةٌ:** قرَّرَ مُهنَّدٌ الذهابَ في رحلةٍ بحافلةٍ تسيرُ بسرعةِ (x) km/h، وتقطعُ مسافةَ 60 km، ثمَّ إكمالَ الرحلةِ بسيّارةٍ تســيرُ بسرعةِ $(x+20)$ km/h، وتقطعُ مسافةَ 140 km. أكتبُ الزمنَ الذي سيستغرقُهُ مُهنَّدٌ في الحافلةِ والسيّارةِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ. $\dfrac{200x+1200}{x(x+20)}$

23) أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. $\dfrac{4x^3+19x^2+37x+10}{3x(x+1)}$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

24) **أكتشفُ الخطأَ:** أكتشفُ الخطأَ في الحَلِّ الآتي، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{y}{y+1}+\frac{7}{y-3}=\frac{y+7}{(y+1)(y-3)} \quad ✗$$

الخطأ: جُمِعَ البسطان، مع أن المقامين مختلفان. في حالة كون LCM وهو $(y+1)(y-3)$ مقام مشترك للمقامين يكون ناتج الجمع: $\dfrac{y^2+4y+7}{(y+1)(y-3)}$

25) **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أجدُ مقدارينِ جبريينِ ناتجُ طرحِهِما هوَ $\dfrac{x-1}{x+3}$.

إجابة ممكنة: $\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{x}{x+3}$

26) **تبريـرٌ:** مُثلَّثٌ مُتطابِقُ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ هوَ $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{7}{6(x-3)}$. تمدَّدَ المُثلَّثُ مُحافِظًا على شـكلِهِ، فأصبحَ طولُ ضلعِهِ هوَ $\dfrac{5}{6(x-3)}-\dfrac{x^2}{x-3}$. أجدُ معاملَ التكبيرِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ، مُبرِّرًا إجابتي.

معامل التكبير = $\dfrac{\text{الطول الجديد}}{\text{الطول القديم}}$ ، معامل التكبير بدلالة x هو: $6x^2-5$

27) **تحدٍّ:** أُبسِّطُ المقدارَ الآتيَ: $\dfrac{x}{1-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}}$.

x^2+x

الواجب المنزلي:

أســتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,21 ,20 كتاب التمارين: 12 ,7 ,6 ,5 ,2 ,1
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,23 ,21 كتاب التمارين: 13 ,11 ,10 ,9 ,8 ,4 ,3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (27 – 25) ,22 كتاب التمارين: (18 – 14) ,11 ,10

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» أبسّط المقدار $\dfrac{\dfrac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{4}}{\dfrac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$

$$\frac{-3x^3-2x^2+16x-5}{16x^3+72x^2-24x}$$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلـى الطلبة تنفيـذ الخطوات (8 – 5) مـن خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» **أكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة:**

1) $\dfrac{5ab}{a^2-b^2}-\dfrac{a-b}{a+b}$ $\quad \dfrac{7ab-a^2-b^2}{(a-b)(a+b)}$

2) $\dfrac{2}{y+3}+\dfrac{y}{y-1}$ $\quad \dfrac{y^2+5y-2}{(y+3)(y-1)}$

3) $\dfrac{\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-1}}{\frac{3x+3}{x^2+3x-4}}$ $\quad \dfrac{x+4}{3(x-3)}$

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف المعادلة النسبية.
- حل معادلات تحتوي مقادير جبرية نسبية باستعمال الضرب التبادلي.
- حل معادلات تحتوي مقادير جبرية نسبية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر.
- حل مسائل حياتية يمكن نمذجتها باستعمال المعادلات النسبية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل المعادلات الخطية.
- حل المعادلات التربيعية.
- حل التناسبات.
- جمع المقادير النسبية وطرحها.
- ضرب المقادير الجبرية وقسمتها.
- تبسيط المقادير الجبرية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 3

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ
Solving Rational Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ نسبيةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ النسبيةُ.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ سبائكَ منَ النحاسِ والفِضَّةِ، نسبةُ الفِضَّةِ فيها هيَ 5 : 2. كمْ غرامًا منَ الفِضَّةِ يجبُ إضافتُها إلى خليطٍ منَ النحاسِ والفِضَّةِ، كتلتُهُ 800 g، وكتلة الفِضَّةِ فيهِ 200 g؛ لكيْ تكونَ النسبةُ اللازمةُ لصنعِ السبيكةِ هيَ 5 : 2؟

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ بالضربِ التبادليِّ

يُطلَقُ على المعادلةِ التي تحوي مقدارًا جبريًّا نسبيًّا أوْ أكثرَ اسمُ **المعادلةِ النسبيةِ** (rational equation)، ومنْ أمثلتِها:

$$\frac{x}{x+6}=\frac{72}{x^2-36}+5 \quad , \quad \frac{1}{x+4}=\frac{5}{2x-3} \quad , \quad \frac{x+3}{x-2}=6$$

يُمكِنُ استعمالُ الضربِ التبادليِّ لحَلِّ المعادلاتِ النسبيةِ إذا كانَتْ كلٌّ منْها في صورةِ تناسبٍ فقطْ.

أتذكَّرُ

في أيِّ تناسبٍ: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، حيثُ: $b\neq 0, d\neq 0$، فإنَّ حاصلَ ضربِ طرفيِ التناسبِ يكونُ مُساوِيًا لحاصلِ ضربِ وسطيِ التناسبِ: $a\times d=b\times c$، وتُسمّى هذهِ الخاصيةُ الضربَ التبادليَّ.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

مثال 1

أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

1) $\frac{4}{x+1}=\frac{6}{x-1}$

$\frac{4}{x+1}=\frac{6}{x-1}$	المعادلةُ الأصليةُ
$6(x+1)=4(x-1)$	بالضربِ التبادليِّ
$6x+6=4x-4$	باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ
$2x=-10$	بالتبسيطِ
$x=-5$	بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 2

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة حل التناسبات الآتية على ورقة:

a. $\frac{150}{b} = \frac{0.7}{12}$ **b.** $\frac{x}{1.5} = \frac{2}{0.3}$ **c.** $\frac{7}{4} = \frac{a}{3}$

- أطلب إلى المجموعات تبادل أوراقهم، ومناقشة الإجابات المختلفة؛ لتحديد الإجابات الصحيحة منها، وأقدّم لهم التغذية الراجعة المناسبة إن لزم الأمر.
- أناقش حل المسائل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » هل تعرفون ما السبيكة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » ممّ تتكوّن السبائك التي يصنعها المصنع في المسألة؟ من الفضة والنحاس.
  - » ما نسبة الفضة في السبائك التي يصنعها المصنع؟ 2:5
  - » ماذا تعني هذه النسبة؟ إجابة ممكنة: أن السبيكة تتكوّن من 5 أجزاء؛ جزأين منها للفضة، و3 أجزاء للنحاس.
  - » كم غرامًا من الفضة يجب إضافته إلى خليط من النحاس والفضة كتلته 800 g، وكتلة الفضة فيه 200 g؛ لكي تكون النسبة اللازمة لصنع السبيكة 2:5؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا حول التناسب وخواصّه، وأنه يمكن استعمال خاصية الضرب التبادلي لحل التناسبات.
- أذكّر الطلبة بمفهوم المقدار الجبري النسبي الذي تعلّموه في الدرس الأول من هذه الوحدة، ثم أوضّح لهم مفهوم المعادلة النسبية، وهي المعادلة التي تحوي مقدارًا جبريًّا نسبيًّا أو أكثر، ثمّ أقدّم لهم أمثلة مختلفة على معادلات نسبية، ثم أطلب إليهم تقديم أمثلة عليها.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن حل المعادلات النسبية التي على صورة تناسب باستعمال خاصية الضرب التبادلي كما في حل التناسبات، ثم أناقش معهم حل فرعَي المثال 1 على اللوح، وأوضّح لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، وأؤكّد ضرورة التحقّق من صحة الحل.

إرشادات:

- في المثال 1، أوضّح للطلبة أن التحقّق من صحة الحل يكون بتعويض قيمة المتغيّر الناتجة في المعادلة الأصلية، فإذا تساوى طرفا المعادلة بعد التعويض، فإن قيمة المتغيّر تُعَد حلًّا للمعادلة.
- أوجّه الطلبة إلى صندوقي (**الدعم البياني**) الموجودين في هامش المثال 1، واللذين يوضحان كيفية التحقّق من صحة حل المعادلات النسبية باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أطلب إليهم الاستعانة بالخطوات الواردة في الصندوقين؛ للتحقّق من صحة حلهم عند حل سؤالَي بند (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال.
- في الفرع 2 من المثال 1، أذكّر الطلبة بأنه لحل أي معادلة تربيعية نجرّب طريقة التحليل إلى العوامل قبل باقي الطرائق.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحتوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أتحقّق: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ: $\frac{4}{x+1} = \frac{6}{x-1}$

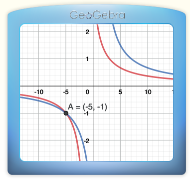
بتعويضِ $x=-5$: $\frac{4}{-5+1} \stackrel{?}{=} \frac{6}{-5-1}$

بالتبسيطِ: $-1 = -1$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=-5$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\frac{4}{x+1}$، والمعادلةِ: $y=\frac{6}{x-1}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=-5$.



2) $\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$
بالضربِ التبادليِّ	$x(x-2) = 35$
باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ	$x^2 - 2x = 35$
بطرحِ 35 منْ طرفَيِ المعادلةِ	$x^2 - 2x - 35 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x-7)(x+5) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x-7=0$ or $x+5=0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x=7$ $x=-5$

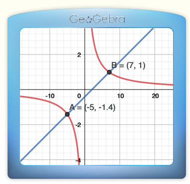
أتحقّق: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x=7$	عندما $x=-5$
$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$	$\frac{7}{x} = \frac{x-2}{5}$
$\frac{7}{7} \stackrel{?}{=} \frac{7-2}{5}$	$\frac{7}{-5} \stackrel{?}{=} \frac{-5-2}{5}$
$1 = 1$ ✓	$-\frac{7}{5} = -\frac{7}{5}$ ✓

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x=-5$، و $x=7$.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\frac{7}{x}$، والمعادلةِ: $y=\frac{x-2}{5}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x=-5$، و $x=7$.



أتحقَّقُ من فهمي

أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-2}$ 8، أنظر تحقق الطلبة.

b) $\frac{4}{x+4} = \frac{x}{x+1}$ $x=\pm 2$، أنظر تحقق الطلبة.

إضافةً إلى حَلِّ المعادلاتِ النسبيةِ، يُمكِنُ استعمالُ مفهومِ النسبةِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

أتذكَّرُ

النسبةُ هيَ طريقةٌ لمقارنةِ عددٍ بآخرَ، أوْ مقارنةِ كمِّيةٍ بأُخرى.

تُكتَبُ النسبةُ بثلاثِ طرائقَ مختلفةٍ، هيَ: $a : b$، $\frac{a}{b}$، a إلى b.

مثال 2 : منَ الحياةِ

طلاءٌ: تُخلَطُ الألوانُ بنسبٍ مُحدَّدةٍ وصولًا إلى الدرجةِ المطلوبةِ منْ لونٍ مُعيَّنٍ. أَعَدَّ سعيدٌ خليطًا منَ الألوانِ بمزجِ مكيالينِ منَ اللونِ الأزرقِ بمكيالينِ منَ اللونِ الأخضرِ. إذا كانَتْ درجةُ اللونِ التي يرغبُ سعيدٌ في الحصولِ عليْها مشروطةً بأنْ تكونَ نسبةُ اللونِ الأزرقِ إلى الخليطِ هيَ 4 : 3، فأجدُ عددَ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يتعيَّنُ على سعيدٍ إضافتُها إلى الخليطِ لكيْ يحصلَ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ.

أفترضُ أنَّ x هوَ عددُ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يجبُ إضافتُها إلى الخليطِ لإيجادِ النسبةِ المطلوبةِ.

ومنْ ثَمَّ، فإنَّ:

$$\underbrace{\overbrace{x+2}^{\text{عددُ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ}}}_{}\over{\underbrace{x+4}_{\text{عددُ المكاييلِ الكليُّ}}} = \overbrace{\frac{3}{4}}^{\text{نسبةُ اللونِ الأزرقِ في الخليطِ}}$$

لإيجادِ عددِ مكاييلِ اللونِ الأزرقِ التي يجبُ إضافتُها إلى الخليطِ، يجبُ حَلُّ المعادلةِ النسبيةِ أعلاهُ:

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$
بالضربِ التبادليِّ	$3(x+4) = 4(x+2)$
باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ	$3x + 12 = 4x + 8$
بالتبسيطِ	$x = 4$

أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$
بتعويضِ $x = 4$	$\frac{4+2}{4+4} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$
بالتبسيطِ	$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

إذنْ، يتعيَّنُ على سعيدٍ إضافةُ 4 مكاييلَ منَ اللونِ الأزرقِ إلى الخليطِ لكيْ يحصلَ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ.

معلومةٌ

يُطلَقُ على اللونِ الناتجِ منْ خلطِ اللونِ الأزرقِ واللونِ الأخضرِ اسمُ اللونِ الفيروزيِّ، ويُمكِنُ خلطُ نسبٍ مختلفةٍ منْ هذينِ اللونينِ للحصولِ على بعضِ درجاتِ (ظِلالِ) اللونِ الفيروزيِّ.

مثال 2: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال مفهوم النسبة إضافة إلى حل المعادلات النسبية في كثير من التطبيقات الحياتية، مثل خلط الألوان بنسب محددة وصولًا إلى الدرجة المطلوبة من لون معين، ثم أسألهم:
  - » ما أشهر الألوان التي تنتج من مزج لونين معًا؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » كيف يمكن الحصول على درجات مختلفة من مزج لونين مختلفين معًا؟ إجابة ممكنة: بمزج اللونين بنسبة محدّدة للحصول على الدرجة المطلوبة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 2، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوجّه الطلبة إلى افتراض أن المتغيّر x يمثّل عدد مكاييل اللون الأزرق التي يجب إضافتها إلى الخليط لإيجاد النسبة المطلوبة، ثم أسألهم:
  - » ما المقدار الذي يعبّر عن عدد مكاييل اللون الأزرق التي أصبحت في الخليط بعد إضافة x مكيالًا من اللون الأزرق إليها؟ $x + 2$.
  - » ما المقدار الذي يعبّر عن عدد المكاييل الكلّي في الخليط بعد إضافة x مكيالًا من اللون الأزرق إليه؟ $x + 4$.
  - » ما المقدار الجبري النسبي الذي يعبّر عن نسبة اللون الأزرق إلى الخليط بعد إضافة x مكيالًا من اللون الأزرق إليه؟ $\frac{x+2}{x+4}$
  - » ما المعادلة النسبية التي يمكن من خلالها حساب عدد المكاييل من اللون الأزرق التي أضيفت؟ $\frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{4}$
- أطلب إلى أحد الطلبة حل المعادلة النسبية وإيجاد قيمة x، ثم أطلب إلى آخر التحقّق من صحة الحل.

إرشاد: أوجّه الطلبة إلى قراءة المعلومة الواردة في صندوق (**معلومة**) الوارد في هامش المثال 2، والذي يبين كيفية الحصول على اللون الفيروزي من اللونين الأزرق والأخضر.

أتحقَّقُ منْ فهمي

طلاءٌ: وُضِعَ في خــلّاطِ متجرٍ للطلاءِ مكيالٌ منَ اللونِ الأحمــرِ و4 مكاييلَ منَ اللونِ الأصفرِ لإنتاجِ لونٍ مُعيَّنٍ. إذا كانَتْ درجةُ هذا اللونِ مشروطةً بأنْ تكونَ نسبةُ اللونِ الأحمرِ إلى الخليطِ هيَ 3 : 1، فأجدُ عــددَ مكاييلِ اللونِ الأحمرِ التي يتعيَّنُ إضافتُهــا إلى الخليطِ للحصولِ على الدرجةِ المطلوبةِ منَ اللونِ. مكيال واحد من اللون الأحمر.

حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ

تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ حَلَّ المعادلةِ النسبيةِ التي تكونُ في صورةِ تناسبٍ باستعمالِ الضربِ التبادليِّ. والآنَ ســأتعلَّمُ كيفَ أحُلُّ المعادلةَ النســبيةَ التي لا تكونُ في صورةِ تناسبٍ، وذلكَ بضربِ طرفــيْ هذهِ المعادلةِ في المضاعفِ المشــتركِ الأصغرِ للمقامــاتِ؛ تخلُّصًا منْ هذهِ المقاماتِ.

في بعضِ الأحيــانِ، تظهرُ حلولٌ دخيلةٌ عندَ ضــربِ طرفي المعادلةِ النســبيةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ؛ لذا يجبُ التحقُّقُ دائمًا منْ تحقيقِ أيِّ حَلٍّ ناتجٍ للمعادلةِ الأصليةِ.

أتذكَّرُ

الحَلُّ الدخيلُ هوَ حَلٌّ لا يُحقِّقُ المعادلةَ الأصليةَ. ومــنَ المُلاحَــظِ فــي المعــادلاتِ النســبيةِ أنَّ الحَلَّ الدخيلَ يجعلُ أحدَ مقاماتِ المعادلةِ صفرًا.

مثال 3

أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي:

1 $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$
بضــربِ طرفــيِ المعادلــةِ في المضاعفِ المشــتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $20(x-1)$	$20(x-1)\times\frac{2}{x-1}+20(x-1)\times\frac{3}{4}=20(x-1)\times\frac{7}{20}$
بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ	$40+15x-15=7x-7$
بالتبسيطِ	$25+15x=7x-7$
بالتبسيطِ	$8x=-32$
بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 8	$x=-4$

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ حَــلُّ الفرعِ 1 مــنَ المثــالِ 3 بطريقــةٍ أُخرى؟ أُبرِّرُ إجابتي.

تنويع التعليم:

في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة ســهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شــبكة الإنترنت عن الألوان الناتجة من مزج الألوان الأساســية معًا، والألوان الناتجة من مزج الألوان الأساســية مع الثانوية، ثــم أطلب إليهم إعداد مطوية عن ذلك وتدعيمها بالصور.

مثال 3

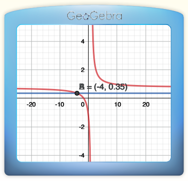
- أكتب المعادلة الآتية (الواردة في الفرع 1 من المثال 3) على اللوح:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$$

- أسأل الطلبة:
  - » هل هذه المعادلة في صورة تناسب؟ لا.
  - » لمــاذا؟ إجابة ممكنة: لأنها ليســت على صورة $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
  - » هل يمكن حل هذه المعادلة باســتعمال الضرب التبادلي؟ لا.
  - » كيف يمكن حل مثل هــذا النوع من المعادلات النسبية؟
- أوضّــح للطلبة أنه يمكن حل المعادلات النســبية التي ليســت في صــورة تناســب؛ بضــرب طرفـي المعادلة فـي المضاعـف المشـترك الأصغـر للمقامـات أولًا؛ للتخلّـص مـن هـذه المقامـات، ثـم أبيّن لهـم أن هذا الإجراء قد يتسبّب في ظهور حلـول دخيلة للمعادلة؛ لـذا يلـزم التحقّـق مـن أن أي حـل يحقّـق المعادلـة الأصلية.
- أناقـش الطلبة في حل المعادلة على اللوح (التي تمثّل الفـرع 1 مـن المثال 3)، ثم أناقش معهم حل الفرع 2 من المثال، وأؤكّد ضرورة التحقّق من صحة الحل.

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{4}$، والمعادلةِ: $y = \frac{7}{20}$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = -4$.



أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمةَ x الناتجةَ في المعادلةِ الأصليةِ.

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$
بتعويضِ $x = -4$	$\frac{2}{-4-1} + \frac{3}{4} \stackrel{?}{=} \frac{7}{20}$
بالتبسيطِ	$\frac{7}{20} = \frac{7}{20}$ ✓

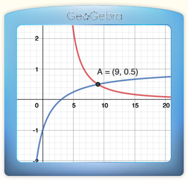
إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = -4$.

2 $\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$

المعادلةُ الأصليةُ	$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$
بضربِ طرفيِ المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $(x-3)(x+3)$	$(x-3)(x+3) \times \frac{36}{x^2-9} = (x-3)(x+3) \times \frac{2x}{x+3} - (x-3)(x+3) \times 1$
بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ	$36 = 2x(x-3)-(x+3)(x-3)$
بالتبسيطِ	$36 = x^2 - 6x + 9$
بالتبسيطِ	$x^2 - 6x - 27 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x-9)(x+3) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x-9=0$ or $x+3=0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 9$ $\quad$ $x = -3$

الدعمُ البيانيُّ:

أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، وذلكَ بتمثيلِ كلٍّ منَ المعادلةِ: $y = \frac{36}{x^2-9}$، والمعادلةِ: $y = \frac{2x}{x+3} - 1$ بيانيًّا، وملاحظةِ أنَّ منحنيي المعادلتينِ يتقاطعانِ عندما $x = 9$.



أتحقَّقُ: للتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتيْ x الناتجتينِ في المعادلةِ الأصليةِ.

عندما $x = 9$	عندما $x = -3$
$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$	$\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x+3} - 1$
$\frac{36}{(9)^2-9} \stackrel{?}{=} \frac{2(9)}{(9)+3} - 1$	$\frac{36}{(-3)^2-9} \stackrel{?}{=} \frac{2(-3)}{(-3)+3} - 1$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓	$\frac{36}{0} = \frac{-6}{0} - 1$ ✗

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x = 9$.

إرشادات:

- أناقش مع الطلبة حل السؤال الوارد في صندوق **(أفكّر)** الموجود في هامش الفرع 1 من المثال 3، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن حل المعادلة بطرح الكسر $\frac{3}{4}$ من طرفي المعادلة أولًا، ثم حل المعادلة المكافئة الناتجة باستعمال الضرب التبادلي.
- أوجّه الطلبة إلى صندوقي **(الدعم البياني)** الموجودين في هامش المثال 3، اللذين يوضّحان كيفية التحقّق من صحة حل المعادلات النسبية باستعمال برمجية جيوجبرا، ويتضمنان تمثيلًا بيانيًّا لكل معادلة في المثال باستعمال البرمجية، وأطلب إليهم ملاحظة أن للمعادلة الثانية حلًّا واحدًا فقط، وهذا يتوافق مع أن أحد الحلول الناتجة من الحل الجبري يُعَدّ حلًّا دخيلًا، ثم أطلب إلى الطلبة الاستعانة بالخطوات الواردة في الصندوقين للتحقّق من صحة حلهم عند حل سؤال بند **(أتحقّق من فهمي)** الذي يلي المثال.

مثال إضافي

أحل كلّ معادلة ممّا يأتي:

1 $\frac{5}{x-2} + 2 = \frac{17}{6}$ $\quad$ $x = 8$

2 $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$ $\quad$ $x = 1$

مثال 4: من الحياة

- أذكّـر الطلبة بما تعلّموه سـابقًا عن الفـرق بين المعدّل ومعـدّل الوحدة، ثم أوضّح لهم أنّنـا نحتاج في بعض الأمثلـة الحياتية إلى اسـتعمال معدّل الوحـدة لكتابة معادلة نسـبية لتحديد الزمن اللازم لإنجاز عمل معيّن ثم حلها.
- أطلـب إلـى أحد الطلبة قراءة المثـال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أسأل الطلبة:
  - » إذا افترضنـا أن x يمثّـل عـدد السـاعات التي يسـتغرقها أحمد في تنظيف المنزل، فكم ينظّف أحمد من المنزل في الساعة الواحدة؟ $\frac{1}{x}$.
  - » كم تنظّف رغد من المنزل في السـاعة الواحدة؟ لماذا؟ $\frac{2}{x}$؛ لأن سرعة رغد مِثْلا سرعة أحمد؛ لذا فهي تنظّف مِثلَي مـا ينظّفه أحمد من المنزل في الساعة الواحدة.
  - » كم ساعة يحتاج أحمد ورغد لتنظيف المنزل إذا عملا معًا؟ 4 ساعات.
  - » كم ينظّف أحمد ورغد من المنزل معًا في الساعة الواحدة؟ $\frac{1}{4}$
  - » ما المعادلة التي تمثّل معدّل الوحدة لإنجاز رغد وزوجها أحمد المنزل معًا؟ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$
- أطلب إلى أحد الطلبة حل المعادلة النسـبية التي تمثّل معـدّل الوحدة لإنجاز أحمد ورغـد العمل، ثم أطلب إلى آخر التحقّق من صحة الحل.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سـهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

أتحقَّقُ من فهمي

أحُلُّ كلَّ معادلةٍ ممّا يأتي: أنظر تحقّق الطلبة.

a) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$ $\frac{17}{9}$

b) $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{3x-1}=\frac{x}{3x^2-7x+2}$ $x=1, -\frac{2}{3}$

أتذكَّرُ

المُعدَّلُ هوَ نسبةٌ يُقارَنُ فيها بينَ كمّيتينِ مختلفتينِ في الوحدةِ. أمّا مُعدَّلُ الوحدةِ فهوَ تبسيطُ المُعدَّلِ ليُصبِحَ مقامُهُ وحدةً واحدةً.

تتطلَّبُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ عِدَّةٌ تحديدَ الزمنِ اللازمِ لإنجازِ عملٍ مُعيَّنٍ؛ ما يُحتِّمُ تحديدَ مُعدَّلِ الوحدةِ لإنجازِ العملِ، ثمَّ استعمالَهُ لكتابةِ معادلةٍ نسبيةٍ ثمَّ حَلِّها.

مثال 4 : منَ الحياةِ

أعمالٌ منزليةٌ: يستغرقُ تنظيفُ المنزلِ منْ رغدَ وزوجِها أحمدَ 4 ساعاتٍ منَ العملِ. إذا كانَتْ سرعةُ رغدَ هيَ مثليْ سرعةِ أحمدَ في التنظيفِ، فأجدُ الوقتَ الذي تستغرقُهُ رغدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَها.

معلومةٌ

كانَ النبيُّ صلّى اللهُ عليْهِ وسلَّمَ المَثلَ والقدوةَ معَ أهلِهِ في بيتِهِ؛ فقدْ سُئِلَتِ السيِّدةُ عائشةُ رضيَ اللهُ عنْها: ما كانَ يصنعُ النبيُّ في بيتِهِ؟ فقالَتْ: كانَ يكونُ في مهنةِ أهلِهِ (تعني خدمةَ أهلِهِ)، فإذا حضرَتِ الصلاةُ خرجَ إلى الصلاةِ. رواهُ البخاريُّ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ مُعدَّلَ الوحدةِ لإنجازِ العملِ لكلٍّ منْ رغدَ وأحمدَ.

- أفترضُ أنَّ x هوَ عددُ الساعاتِ التي يستغرقُها أحمدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَهُ. وبما أنَّ أحمدَ يُنظِّفُ المنزلَ في x ساعةً، فإنَّهُ يُنظِّفُ $\frac{1}{x}$ منَ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.
- بما أنَّ سرعةَ رغدَ هيَ مثلا سرعةِ أحمدَ، فإنَّها تُنظِّفُ $\frac{2}{x}$ منَ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.
- بما أنَّ رغدَ وأحمدَ يُنظِّفانِ المنزلَ في 4 ساعاتٍ إذا عملا معًا، فإنَّهُما يُنظِّفانِ $\frac{1}{4}$ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ.

الخطوةُ 2: أكتبُ معادلةً تُمثِّلُ مُعدَّلَ وحدةِ إنجازِهِما العملَ معًا، ثمَّ أحُلُّها.

بما أنَّ رغدَ وأحمدَ يُنظِّفانِ معًا $\frac{1}{4}$ المنزلِ في الساعةِ الواحدةِ، فإنَّهُ يُمكِنُني كتابةُ المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$$

بحَلِّ المعادلةِ، يُمكِنُ إيجادُ عددِ الساعاتِ التي يستغرقُها أحمدُ في تنظيفِ المنزلِ وحدَهُ:

$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$ المعادلةُ الأصليةُ

$4x\times\frac{3}{x}=4x\times\frac{1}{4}$ بضربِ طرفيِ المعادلةِ في المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ للمقاماتِ، وهوَ: $4x$

$x=12$ بالقسمةِ على العواملِ المشتركةِ

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكّد المفاهيم العابرة للمـواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التماريـن. ففي المثال 4، أعزّز وعي الطلبة حول أهمية المسـاعدة في أعمال المنزل اقتداءً بسـنة سـيدنا رسـول الله ﷺ الذي يمثّل القدوة والمثل مع أهله في بيته.

وبذلكَ، فإنَّ أحمدَ بحاجةٍ إلى 12 ساعةً منَ العملِ لتنظيفِ المنزلِ وحدَهُ.

بما أنَّ سرعةَ رغدَ في التنظيفِ هيَ مثلا سرعةِ أحمدَ، فإنَّها بحاجةٍ إلى 6 ساعاتٍ منَ العملِ لتنظيفِ المنزلِ وحدَها.

أتحقَّقُ منْ فهمي

جدارٌ: يتعيَّنُ على يوسفَ وإبراهيمَ العملُ 6 ساعاتٍ لطلاءِ جدارٍ في حديقةٍ منزليةٍ. إذا كانَتْ سرعةُ يوسفَ هيَ ثلاثةَ أمثالِ سرعةِ إبراهيمَ في إنجازِ العملِ، فأجدُ الوقتَ الذي يستغرقُهُ يوسفُ في طلاءِ الجدارِ وحدَهُ. يحتاج إبراهيم إلى 24 ساعة، ويحتاج يوسف إلى 8 ساعات.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1) $\frac{3y}{y+1}=\frac{y}{3-y}$ $y=0, y=2$

2) $\frac{2}{x+5}=\frac{10}{3x+7}$ $x=-9$

3) $\frac{6}{y-1}=\frac{y}{7}$ $y=7, y=-6$

4) $\frac{9}{y-1}=\frac{3y}{2}$ $y=3, y=-2$

5) $\frac{w}{w+1}=\frac{2w}{w+6}$ $w=0, w=4$

6) $\frac{x^2+4}{x-1}=\frac{5}{x-1}$ $x=-1$ ($x=1$ حل دخيل)

7) **أشجارٌ:** تحتوي مزرعةٌ للحمضياتِ على 120 شجرةً، منْها 30 شجرةَ ليمونٍ. أجدُ عددَ أشجارِ الليمونِ التي يَلزَمُ زراعتُها لتُصبحَ نسبةُ أشجارِ الليمونِ في المزرعةِ 3 : 1 15

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

8) $\frac{4}{y}+\frac{3}{8}=\frac{6}{y}$ $y=\frac{16}{3}$

9) $\frac{4}{y-2}-1=\frac{9}{y}$ $y=3, y=-6$

10) $\frac{1}{z}+\frac{1}{z-4}=\frac{z-3}{z-4}$ $z=1$ ($z=4$ حل دخيل)

11) $\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x+2}=\frac{3x^2}{x^2-4}$ $x=-3$ ($x=2$ حل دخيل)

12) $\frac{x^2-3x-4}{x^3-x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$ $x=-5$

13) $10+\frac{14}{1-x}=\frac{12}{1-x^2}$ $x=-\frac{3}{5}, x=2$

14) $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x^2+5x}=\frac{4}{x^2+5x}$ $x=5$

15) $1=\frac{n-2}{n-1}+\frac{3}{n^2+3n-4}$ $n=-1$

16) $\frac{16}{x-5}=2-\frac{6}{x}$ $x=1, x=15$

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 13) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (21 – 24).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 22 (**أكتشف الخطأ**)، أوجّه الطلبة إلى التحقّق من أن ديمة ضربت جميع حدود المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات أم لا.
- في السؤال 24 (**تحدٍّ**)، أوجّه الطلبة إلى تبسيط المقدار الجبري النسبي المُركّب أولًا؛ تمهيدًا لحل المعادلة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 16) كتاب التمارين: (6 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 21 ,20 ,19 ,14 كتاب التمارين: 12 ,11 ,9 ,8
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 22) كتاب التمارين: 13 ,10 ,8 ,7

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» أحل المعادلة الآتية:

$$\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$$

ليس لها حل؛ لأن حل المعادلة الناتجة من تبسيط هذه المعادلة هو: $x = 5$، ولكن هذا الحل يجعل الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية غير مُعرَّف $\left(\frac{9}{0}\right)$.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 9 و10 من خطوات تنفيذ المشروع.
- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

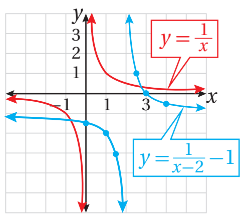
6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» أحل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{8}{x+1}=\frac{7}{x}$ $\quad x = 7$

2) $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$ $\quad x = 14$

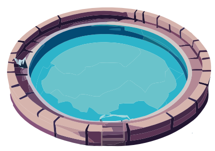


يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=\frac{1}{x}$، والمعادلةِ: $y=\frac{1}{x-2}-1$:

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-1$

17) أكتبُ معادلةً حَلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيي المعادلتين.

18) أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في السؤالِ السابقِ جبريًّا. $1\pm\sqrt{3}$



19) **مسبحٌ:** يستغرقُ مِلْءُ مسبحٍ بالماءِ 45 دقيقةً باستعمالِ خرطومِ المياهِ الأزرقِ، في حينِ يستغرقُ مِلْئُهُ بالماءِ 20 دقيقةً باستعمالِ هذا الخرطومِ وخرطومِ المياهِ ذي اللونِ الأسودِ معًا. أجدُ عددَ الدقائقِ التي يستغرقُها الخرطومُ الأسودُ في مِلْءِ المسبحِ بالماءِ. 36

20) أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 200 g

مهاراتُ التفكيرِ العليا

21) **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ معادلةً نسبيةً يُمكِنُ حَلُّها بضربِ طرفيِ المعادلةِ في $3(x-1)$. إجابة ممكنة: $\frac{1}{3}+\frac{1}{x-1}=1$

22) **أكتشفُ الخطأَ:** يُمثِّلُ التالي الخطوةَ الأولى منَ حَلِّ ديمةَ لمعادلةٍ نسبيةٍ. أكتشفُ الخطأَ في هذهِ الخطوةِ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

$$\frac{2x-1}{x}+6=\frac{3x+4}{5x-2}$$

$$x(5x-2)\times\frac{2x-1}{x}+6=x(5x-2)\times\frac{3x+4}{5x-2}$$ ✗

لم تضرب ديمة العدد 6 الموجود في الطرف الأيسر من المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

23) **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ: $\frac{2x+2}{x-1}=4+\frac{6x}{x+4}$ باستعمالِ الضربِ التبادليِّ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

لا يمكن حل المعادلة باستعمال الضرب التبادلي بوضعها الحالي، ولكن يمكن حلها بالضرب التبادلي إذا كُتِب الطرف الأيسر على شكل مقدار نسبي واحد.

24) **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلةَ الآتيةَ: $\frac{\frac{x+3}{x-2}\times\frac{x^2+x-2}{x+5}}{x-1}+2=0$.

$x=-\frac{14}{3}$

($x = 1$ حل دخيل)

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (15 – 1) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (16 – 25)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ الذي في أبسطِ صورةٍ هوَ:

a) $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ b) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x-3}$

c) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}$ d) $\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$

2 مُكعَّبٌ طولُ ضلعِهِ $2x$ وحدةً. النسبةُ بينَ مساحةِ سطحِهِ الكليةِ وحجمِهِ في أبسطِ صورةٍ هيَ:

a) $\frac{6}{x^2}$ b) $\frac{3}{2x}$

c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{3}{x}$

3 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{6}{w^2+6w+8} \times \frac{2w+8}{3}$ هيَ:

a) $\frac{4}{w+2}$ b) $\frac{2}{3(w+2)}$

c) $\frac{4(w+4)}{w+2}$ d) $\frac{2}{w+2}$

4 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{x-3}{2x} \div \frac{x-3}{6x^2}$ هيَ:

a) $\frac{1}{6x}$ b) $3x$

c) $\frac{1}{3x}$ d) $\frac{1}{3x^2}$

5 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\frac{c}{8d^2} + \frac{5}{6cd}$ هيَ:

a) $\frac{5+c}{6cd+8d^2}$ b) $\frac{20d+c^2}{24cd^2}$

c) $\frac{5d+3c^2}{24cd^2}$ d) $\frac{20d+3c^2}{24cd^2}$

6 حَلُّ المعادلةِ: $\frac{4}{x+6} = \frac{x}{x+2}$ هوَ:

a) $x=-4, 2$ b) $x=-4, 0$

c) $x=4, -2$ d) $x=-2, -6$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7 $\frac{2x^2-10x+8}{3x^2-7x+4}$ $\frac{2(x-4)}{3x-4}$

8 $\frac{7x^3-32x^2+16x}{4x-16}$ $\frac{x(7x-4)}{4}$

9 $\frac{8y^3+1}{2y^2+21y+10}$ $\frac{4y^2-2y+1}{y+10}$

10 $\frac{x^2+3x+2}{4x-12} \times \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ $\frac{x+1}{4}$

11 $\frac{x^2-9}{x^2+x-20} \times \frac{x^2-8x+16}{3x+9}$ $\frac{(x-3)(x-4)}{3(x+5)}$

12 $\frac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2} \div \frac{6x^2+x-1}{x^2-3x-4}$ $\frac{x-4}{2x+1}$

13 $\frac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5} \times \frac{2x^2-x-3}{2x^2+x-6} \div \frac{8x+20}{6x+15}$ $\frac{3(x-2)}{4(x+2)}$

14 $\frac{2x+7}{x^2-2x-3} + \frac{3x-2}{x^2+6x+5}$ $\frac{5x^2+6x+41}{(x-3)(x+1)(x+5)}$

15 $\frac{x+1}{x-4} - \frac{x+1}{x^2-7x+12}$ $\frac{(x+1)}{(x-3)}$

16 $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+5x+4}$ $\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}$

17 $\frac{2r}{r^2-s^2} + \frac{1}{r+s} - \frac{1}{r-s}$ $\frac{2}{r+s}$

18 $\frac{n-7}{n^2-2n-35} \div \frac{9n+54}{10n+50}$ $\frac{10}{9(n+6)}$

19 $\frac{10x^2-20x}{40x^3-80x^2} \times \frac{16x^3+80x^2}{6x+30}$ $\frac{2x}{3}$

20 $\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x}}$ $\frac{1-x}{x+1}$

21 $\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{3}+\frac{4}{x-1}}$ $\frac{3}{x^2+11}$

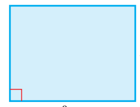
تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

22 أجدُ مساحةَ المستطيلِ الآتي بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

$\frac{5x}{4}$

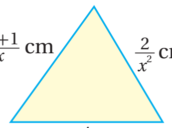


$\frac{5x-15}{4x}$ cm

$\frac{x^2}{x-3}$ cm

23 أجدُ محيطَ المُثلَّثِ المُجاوِرِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ.

$\frac{x^3-x^2+3x+6}{3x^2}$



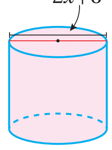
$\frac{x+1}{x}$ cm

$\frac{2}{x^2}$ cm

$\frac{x-4}{3}$ cm

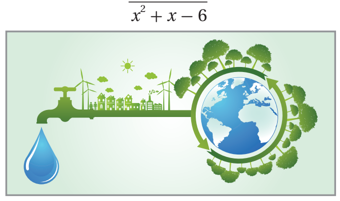
24 إذا كانَ حجمُ الأسطوانةِ المُجاوِرةِ هوَ $(x+4)\,(x^2+2x-8)\pi$ cm^3، فأجدُ ارتفاعَ الأسطوانةِ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ. $h = x - 2$

$2x+8$



25 صمَّمَتْ أحلامُ مُلصَقًا على شكلِ مستطيلٍ للتوعيةِ بأهميةِ ترشيدِ استهلاكِ المياهِ، وكانَتْ أبعادُهُ كما في الشكلِ التالي. ترغبُ أحلامُ في إحاطةِ المُلصَقِ بإطارٍ. أجدُ طولَ الإطارِ اللازمَ لذلكَ بدلالةِ x في أبسطِ صورةٍ. $\frac{2(2x-5)}{(x-2)(x-3)}$

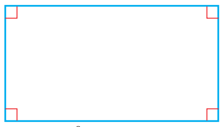
$\frac{5}{x^2+x-6}$



$\frac{2x}{x^2-9}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 يُمثِّلُ الشكلُ التالي ملعبًا لكرةِ القدمِ مساحتُهُ: $x^2 - 4$. المقدارُ الجبريُّ الذي يُمثِّلُ عَرْضَ الملعبِ هوَ:



$\frac{x^2-x-2}{x+1}$ m

a) $x-2$ b) $(x+2)(x-2)^2$

c) $x+2$ d) $(x+2)(x-2)$

27 أبسطُ صورةٍ للمقدارِ $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}{1+\frac{4}{b}}$ هيَ:

a) $\frac{b+2a}{ab+4}$ b) $\frac{b+2a}{a(b+4)}$

c) $\frac{ab+2a}{a(b+4)}$ d) $\frac{ab+2}{a(b+4)}$

28 عددُ حلولِ المعادلةِ: $\frac{5}{x-2}=\frac{x}{3}$ هوَ:

a) حَلٌّ واحدٌ. b) حَلّانِ.

c) ثلاثةُ حلولٍ. d) لا توجدُ حلولٌ للمعادلةِ.

29 يستغرقُ العاملُ الماهرُ 26 ساعةً في بناءِ سقفِ أحدِ المنازلِ، في حينِ يستغرقُ العاملُ المُبتدِئُ 39 ساعةً في بناءِ السقفِ نفسِهِ. إلى كَمْ ساعةً يحتاجُ العاملانِ لبناءِ سقفِ المنزلِ معًا؟ 15.6

كتاب التمارين

الوحدةُ 7: المقاديرُ الجبريةُ النسبيةُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ أوَّلًا. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ إلى العواملِ (الدرسُ 1)

أُحلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

1. $x^2 + 15x + 44$ $(x+11)(x+4)$
2. $x^2 + 2x - 15$ $(x+5)(x-3)$
3. $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$ $(x-2)(x^2+9)$
4. $2x^2 - x - 6$ $(2x+3)(x-2)$
5. $10x^2 + 3x - 1$ $(5x-1)(2x+1)$
6. $6x^3 + 9x^2 + 3x$ $3x(2x+1)(x+1)$
7. $100 - 16y^2$ $(10-4y)(10+4y)$
8. $7x^3y - 63xy^3$ $7xy(x-3y)(x+3y)$
9. $27x^3 + 64$ $(3x+4)(9x^2-12x+16)$

مثالٌ: أُحلِّلُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) $x^2 + 5x - 6$

في ثلاثيِّ الحدودِ المعطى، فإنَّ $b = 5$، و$c = -6$، وهذا يعني أنَّ إشارةَ $m + n$ موجبةٌ، وأنَّ إشارةَ nm سالبةٌ.

إذنْ، يجبُ أنْ تكونَ إشارةُ n أوْ إشارةُ m سالبةً، وليسَ كلتاهُما معًا.

أُنشِئُ قائمةً مُنظَّمةً منْ أزواجِ عواملِ العددِ (−6) بحيثُ تكونُ إشاراتُها مختلفةً، ثمَّ أُحدِّدُ زوجَ العواملِ الذي مجموعُهُ 5

مجموعُ العاملينِ	أزواجُ عواملِ العددِ (−6) المختلفةُ في الإشارةِ
−5	1, −6
5	−1, 6 (العاملانِ الصحيحانِ)

$x^2 + 5x - 6 = (x + m)(x + n)$ بكتابةِ القاعدةِ

$= (x - 1)(x + 6)$ بالتبسيطِ

b) $6x^2 + 11x + 4$

بما أنَّ $a = 6$، و $b = 11$، و$c = 4$، فإنَّني أبحثُ عنْ عددينِ حاصلُ ضربِهِما $6 \times 4 = 24$، ومجموعُهُما 11.
وبما أنَّ إشارةَ كلٍّ منْ c وb موجبةٌ، فإنَّني أُنشِئُ جدولًا أُنظِّمُ فيهِ أزواجَ عواملِ العددِ 24 الموجبةَ، ثمَّ أُحدِّدُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهُما 11

مجموعُ العاملينِ	أزواجُ عواملِ العددِ 24
14	2, 12
11	3, 8 (العاملانِ الصحيحانِ)

$6x^2 + 11x + 4 = 6x^2 + mx + nx + 4$ بكتابةِ القاعدةِ

$= 6x^2 + 3x + 8x + 4$ بتعويضِ $m = 3, n = 8$

$= (6x^2 + 3x) + (8x + 4)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ

$= 3x(2x + 1) + 4(2x + 1)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (2x + 1)(3x + 4)$ بإخراجِ $(3x + 4)$ عاملًا مشتركًا

c) $2x^3 + x^2 + 14x + 7$

$2x^3 + x^2 + 14x + 7 = (2x^3 + x^2) + (14x + 7)$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ

$= x^2(2x + 1) + 7(2x + 1)$ بتحليلِ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (2x + 1)(x^2 + 7)$ بإخراجِ $(2x + 1)$ عاملًا مشتركًا

تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ (الدرسُ 1)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

10. $\frac{16x^2y}{24xy^3}$ $\frac{2x}{3y^2}$
11. $\frac{4 - y^2}{y^2 - 3y - 10}$ $\frac{2 - y}{y - 5}$
12. $\frac{6n^2 + 12n}{9n^3 + 18n^2}$ $\frac{2}{3n}$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\frac{3x^2}{6x^3 - 42x}$

$\frac{3x^2}{6x^3 - 42x} = \frac{3x^2}{6x^2(x - 7)}$ بإخراجِ $6x^2$ عاملًا مشتركًا منْ حدودِ المقامِ

$= \frac{3x^2}{2 \times 3x^2 \times (x - 7)}$ العاملُ المشتركُ الأكبرُ للبسطِ والمقامِ $(3x^2)$

$= \frac{\cancel{3x^2}}{2 \times \cancel{3x^2} \times (x - 7)}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $3x^2$

$= \frac{1}{2(x - 7)}$ بالتبسيطِ

b) $\frac{1 - z^2}{z - 1}$

$\frac{1 - z^2}{z - 1} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{z - 1}$ بتحليلِ البسطِ إلى العواملِ

$= \frac{-(z - 1)(1 + z)}{z - 1}$ بكتابةِ $(1 - z)$ في صورةِ $-(z - 1)$

$= \frac{-\cancel{(z - 1)}(1 + z)}{\cancel{z - 1}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(z - 1)$

$= -1 - z$ بالتبسيطِ

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ (الدرسُ 2)

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $6 \times (-3b)$ $-18b$
2. $-2 \times (4w)$ $-8w$
3. $-2u \times 5u$ $-10u^2$
4. $8d \times (-7d)$ $-56d^2$
5. $3xy \times (-xy^2)$ $-3x^2y^3$
6. $(-dq^2)(-3qd)$ $3d^2q^3$
7. $(b + 4)(b + 1)$ $b^2 + 5b + 4$
8. $(3x - 1)(4x - x^2 + 2)$ $-3x^3 + 13x^2 + 2x - 2$
9. $(4 - p)(2p - p^2 + 1)$ $p^3 - 6p^2 + 7b + 4$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $2x(3x - y)$

$2x(3x - y) = 6x^2 - 2xy$ بضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ

b) $(x + 4)(x + 3)$

$(x + 4)(x + 3) = (x^2 + 3x) + (4x + 12)$

$= x^2 + (3x + 4x) + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

كتاب التمارين

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

يمكنُني أيضًا استخدامُ خاصيّةِ التوزيعِ بطريقةٍ مختلفةٍ كما يأتي:

$(x+4)(x+3)$

$= x(x+3) + 4(x+3)$ بفصلِ المقدارِ $(x+4)$ إلى حدَّيْنِ x ، 4 ثمَّ ضربِ كلٍّ منْهُما في المقدارِ $(x+3)$

$= (x^2+3x) + (4x+12)$ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$= x^2 + (3x+4x) + 12$ بجمعِ الحدودِ المُتشابِهةِ

$= x^2 + 7x + 12$ بكتابةِ المقدارِ في أبسطِ صورةٍ

حَلُّ التناسباتِ (الدرسُ 3)

أَحُلُّ كُلًّا منَ التناسباتِ الآتيةِ:

10) $\frac{5}{4} = \frac{20}{x}$ $x = 16$

11) $\frac{x}{12-x} = \frac{10}{30}$ $x = 3$

12) $\frac{12}{x-2} = \frac{32}{x+8}$ $x = 8$

مثالٌ: أَحُلُّ التناسبَ الآتيَ: $\frac{4}{x-4} = \frac{5}{x+4}$.

$\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-4}$ التناسبُ المعطى

$4(x+4) = 5(x-4)$ بالضربِ التبادليِّ

$4x + 16 = 5x - 20$ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ

$-x + 16 = -20$ بطرحِ $5x$ منْ طرفيِ المعادلةِ

$-x = -36$ بطرحِ 16 منْ طرفيِ المعادلةِ

$x = 36$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على -1

الدرسُ 1

ضربُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وقسمتُها

Multiplying and Dividing Algebraic Rational Expressions

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x^2+6x}{12x^2}$ $\frac{x+2}{4x}$

2) $\frac{y^2-7y-18}{9-y}$ $-(y+2)$

3) $\frac{4w^3-36w}{8w^3-48w^2+72w}$ $\frac{w+3}{2(w-3)}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

4) $\frac{5a^3b^2}{8wy^4} \times \frac{12w^2y^3}{10a^2b^3}$ $\frac{3aw}{4by}$

5) $\frac{6x^4b^2}{5wy^4} \div \frac{4x^2b^3}{10w^4y^2}$ $\frac{3x^2w^3}{by^2}$

6) $\frac{y-z}{6} \times \frac{12}{y^2-z^2}$ $\frac{2}{y+z}$

7) $\frac{n^2}{2n-8} \div \frac{3n}{n^2-16}$ $\frac{n(n+4)}{6}$

8) $\frac{x+3}{8x+4} \times \frac{4x^2-1}{x^2+6x+9}$ $\frac{2x-1}{4(x+3)}$

9) $\frac{5x-5}{x^2-16} \div \frac{10x^2-10x}{6x-24}$ $\frac{3}{x(x+4)}$

10) $\frac{2a^2-9a-5}{a^2-9a+20} \times \frac{4-a}{2a^2+a}$ $\frac{-1}{a}$

11) $\frac{2a^2-8a+6}{8a+16} \div \frac{9-a^2}{a^2+5a+6}$ $\frac{1-a}{4}$

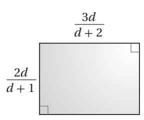
12) $\frac{\frac{1-2b}{b}}{\frac{b-4}{b}}$ $\frac{1-2b}{b-4}$

13) $\frac{\frac{x^2-16}{5x^2}}{\frac{4-x}{10x}}$ $\frac{-2(x+4)}{x}$

14) $\frac{\frac{(x+1)^2}{x^2-3x}}{\frac{x^2+2x+1}{x^2-9}}$ $\frac{x+3}{x}$

15) $\frac{\frac{4x^2-1}{3x^3-6x^2-24x}}{\frac{12x^2+12x-9}{2x^2-5x-12}}$ $\frac{2x+1}{9x(x+2)}$

مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ، أُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:



16) أجدُ النسبةَ بينَ طولِ المستطيلِ وعرضِهِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ. $\frac{3(d+1)}{2(d+2)}$

17) أجدُ مساحةَ المستطيلِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ. $\frac{6d^2}{d^2+3d+2}$

18) أسطوانةٌ مساحةُ قاعدتِها $\left(\frac{x^2+5x-6}{4x}\right)$ cm^2، وارتفاعُها $\left(\frac{x^2-4x}{x^2-5x+4}\right)$ cm. أجدُ حجمَ الأسطوانةِ في أبسطِ صورةٍ. $\frac{x+6}{4}$ cm^2

ملاحظاتي

كتاب التمارين

الدرسُ 2
جمعُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ وطرحُها
Adding and Subtracting Rational Expressions

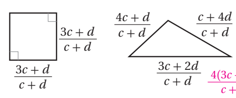
أجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ أوِ الحدودِ الجبريةِ المعطاةِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2y^3z,\ xy^2z^4$ $\quad x^2y^3z^4$
2. $x+1,\ x^2+x-6$ $\quad (x+1)(x-2)(x+3)$
3. $w^2+w,\ 3w+3,\ w+1$ $\quad 3w(w+1)$
4. $6r+2,\ 3r,\ 3r^2+7r+2$ $\quad 6r(3r+1)(r+2)$
5. $y^2+4y+3,\ y^2-4y-5$ $\quad (y+3)(y+1)(y-5)$
6. $x^4-8x^3+7x^2,\ x^2+2x-3$ $\quad x^2(x-7)(x+3)(x-1)$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7. $\frac{1}{3y^2d}+2y$ $\quad \frac{1+6y^3d}{3y^2d}$
8. $\frac{3}{2x^2y^3}+\frac{5}{4x^4y}$ $\quad \frac{6x^2+5y^2}{4x^4y^3}$
9. $\frac{1}{8c^3d^2}-\frac{3}{c^2d^5}$ $\quad \frac{d^3-24c}{8c^3d^5}$
10. $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x^2-4}$ $\quad \frac{3x+11}{x^2-4}$
11. $\frac{5}{w^2+4w-12}+\frac{2}{2w+12}$ $\quad \frac{w+3}{(w+6)(w-2)}$
12. $\frac{2r+4}{r-3}-\frac{1-4r}{2-r}$ $\quad \frac{2r^2-13r+11}{(r-3)(2-r)}$
13. $\frac{8}{c^2-2c-15}-\frac{1}{3c-15}$ $\quad \frac{21-c}{3(c-5)(c+3)}$
14. $\frac{y+1}{y^2-5y-6}+\frac{y}{y^2-3y-18}$ $\quad \frac{(2y+3)}{(y-6)(y+3)}$
15. $\frac{h-3}{h^2-7h+10}-\frac{6}{h^2-4}$ $\quad \frac{h^2-7h+24}{(h-2)(h+2)(h-5)}$
16. $\dfrac{\frac{3}{c-d}+\frac{1}{c+d}}{\frac{4}{c-d}}$ $\quad \frac{2c+d}{2(c+d)}$
17. $\frac{1}{y^2+7y-8}-\frac{2}{2y-2}\times\frac{y+8}{2}$ $\quad \frac{-y^2-16y-62}{2(y-1)(y+8)}$
18. $\dfrac{\frac{w^2+5w+4}{w^2+3w}}{\frac{2}{w}-\frac{w-1}{w+3}}$ $\quad \frac{(w+4)(w+1)}{3w-w^2+6}$

مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المُجاوِرِ، أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الثلاثةِ الآتيةِ تباعًا:



19. أجدُ محيطَ المُربَّعِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ. $\quad \frac{4(3c+d)}{c+d}$
20. أجدُ محيطَ المُثلَّثِ في صورةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ في أبسطِ صورةٍ. $\quad \frac{8c+7d}{c+d}$
21. أطرحُ محيطَ المُثلَّثِ منْ محيطِ المُربَّعِ، ثمَّ أكتبُ المقدارَ الجبريَّ النسبيَّ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ. $\quad \frac{4c-3d}{c+d}$

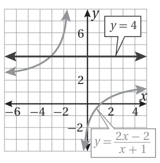
الدرسُ 3
حَلُّ المعادلاتِ النسبيةِ
Solving Rational Equations

أحُلُّ كُلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1. $\frac{12}{x-1}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ $\quad x=5$
2. $\frac{x}{1-x}-\frac{4}{3}=x$ $\quad x=\frac{2}{3}, -2$
3. $\frac{4}{x+1}+1=\frac{x+1}{2}$ $\quad x=\pm3$
4. $\frac{y+9}{y^2+3}=\frac{3}{y}$ $\quad y=\frac{3}{2}, 3$
5. $\frac{w}{w+2}=\frac{5w-4}{2w+1}$ $\quad w=\frac{-8}{3}, 1$
6. $\frac{1}{y-3}+\frac{1}{y+3}=\frac{3}{y^2-9}$ $\quad y=\frac{3}{2}$
7. $\frac{1}{b-4}+\frac{b}{2b+2}=\frac{b}{2b^2-6b-8}$ $\quad b=1, 2$
8. $\frac{1}{x+1}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad \varnothing$ ($x=1$ حل دخيل)
9. $\frac{1}{2c+1}+\frac{2}{c+2}=1$ $\quad c=1, -1$

10. **حيواناتٌ:** يوجدُ في مزرعةٍ للحيواناتِ 140 حيوانًا، منْها 10 أرانبَ. أجدُ عددَ الأرانبِ التي يَلزمُ شراؤُها لتُصبِحَ نسبةُ الأرانبِ في المزرعةِ 6 : 1 $\quad$ 16 أرنبًا.

يُبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى كلٍّ منَ المعادلةِ: $y=4$، والمعادلةِ: $y=\frac{2x-2}{x+1}$:



11. أكتبُ معادلةً حَلُّها هوَ الإحداثيُّ x لنقطةِ تقاطعِ منحنيي المعادلتينِ. $\quad \frac{2x-2}{x+1}=4$
12. أحُلُّ المعادلةَ التي كتبْتُها في السؤالِ السابقِ جبريًّا. $\quad x=-3$

13. **تبليطٌ:** يستغرقُ تبليطُ حديقةِ منزلٍ منْ خالدٍ وسعيدٍ 8 ساعاتٍ منَ العملِ. إذا كانَتْ سرعةُ خالدٍ هيَ ثلاثةَ أمثالِ سرعةِ سعيدٍ في التبليطِ، فأجدُ الوقتَ الذي يستغرقُهُ خالدٌ في تبليطِ حديقةِ المنزلِ وحدَهُ.

$\frac{32}{3}$ ساعة.

ملاحظاتي

الوحدة 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probability

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: مقاييس التشتّت	• إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة. • إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات منظمة في جداول تكرارية. • استنتاج أثر إجراء تحويل لبيانات مفردة في كلٍّ من وسطها الحسابي وانحرافها المعياري. • استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهيلًا للحسابات. • إيجاد الانحراف المعياري والوسط الحسابي لبيانات مفردة قبل تحويلها وبَعده من خلال معرفة العلاقة التي استُعمِلت للتحويل، وبعض المعلومات عن البيانات بعد التحويل.	التباين. الانحراف المعياري. تحويل البيانات.	• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية.	5
الدرس 2: الجداول التكرارية ذات الفئات	• تنظيم بيانات عددية متصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول. • تنظيم بيانات عددية منفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول. • تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات. • حل مسائل حياتية على مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.		• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية.	3
الدرس 3: المُدرَّجات التكرارية	• تعرّف المُدرَّجات التكرارية. • تمثيل البيانات العددية المتصلة المنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية. • تعرّف مفهوم الكثافة التكرارية، وتوظيفه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية.	المُدرَّجات التكرارية. الكثافة التكرارية.	• أقلام لوح ملوّنة. • آلة حاسبة علمية. • ورقة المصادر 2 • لوح مستوى إحداثي متنقل. • ورقة المصادر 8	3
الدرس 4: الاحتمالات وأشكال ڤن	• التعبير بالرموز عن حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن. • إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن. • استعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية. • إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن. • تعرّف مفهوم الاحتمالات المتنافية الشاملة، واستعمالها في حلّ المسائل.	الحادث المُتمِّم. الحوادث المتنافية. الحوادث الشاملة.	• أقلام لوح ملوّنة. • ورقة المصادر 9	4
الدرس 5: الاحتمال الهندسي	• تعرّف الاحتمال الهندسي. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال المساحات. • إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الزوايا.	الاحتمالات الهندسية.	• أقلام لوح ملوّنة. • ورقة المصادر 10 • ورقة المصادر 11 • ورقة المصادر 12	3
عرض نتائج مشروع الوحدة				1
اختبار نهاية الوحدة				1
المجموع:				20 حصة

الوحدة 8

نظرة عامة على الوحدة

سيتعرّف الطلبة في هذه الوحدة مفهوم التباين والانحراف المعياري بوصفهما مقياسين من مقاييس تشتّت البيانات، وسيجدونهما لبيانات مفردة وبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية. كما سيتعرفون أثر تحويل البيانات المفردة في كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري، ويستعملونه في حل المسائل. سيتعرّف الطلبة أيضًا كيفية تنظيم البيانات المتصلة والمنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول، إضافة إلى تعرّف مفهوم الكثافة التكرارية وتوظيفه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية. إضافة إلى ما سبق، سيتعرّف الطلبة تقدير مقاييس النزعة المركزية للجداول التكرارية ذات الفئات.

واستكمالًا لما تعلّمه الطلبة سابقًا حول إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية، سيتعرّف الطلبة كيفية إيجاد احتمالات حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن، واستعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.

وسيتعرّف الطلبة أيضًا مفهومًا جديدًا في الاحتمالات يُسمّى **(الاحتمال الهندسي)**، وسيجدون احتمالات هندسية باستعمال الأطوال والمساحات والزوايا.


الوحدةُ 8

الإحصاءُ والاحتمالاتُ
Statistics and Probability

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُقدِّمُ هذهِ الوحدةُ مجموعةً مِنْ موضوعاتِ الإحصاءِ والاحتمالاتِ التي يُعَدُّ اكتسابُها ضروريًّا لكلِّ إنسانٍ في هذا العصرِ، مثلَ: تنظيمِ البياناتِ، وتحليلِها، واستعمالِ قوانينِ الاحتمالاتِ لوضعِ استنتاجاتٍ دقيقةٍ عنْها؛ ما يساعدُ على اتخاذِ قراراتٍ صحيحةٍ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ اليوميةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مفردةٍ.
- ✓ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ، ثمَّ تمثيلَها في مُخطَّطاتٍ تكراريةٍ.
- ✓ تمثيلَ البياناتِ بأشكالِ ڤِنْ.
- ✓ إيجادَ احتمالاتِ وقوعِ الحوادثِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ إيجادَ مقاييسِ التشتُّتِ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- ◄ تنظيمَ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.
- ◄ تقديرَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.
- ◄ إيجادَ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ، وإيجادَ احتمالاتٍ هندسيةٍ.

118

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف السادس

- تعرّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيم البيانات في جداول تكرارية، وحساب مقاييس النزعة المركزية لها.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول، وتمثيلها باستعمال المخططات التكرارية.

الصف السابع

- وصف أثر القيمة المتطرفة في الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات المفردة.
- حساب الوسيط والمنوال والمدى لمجموعة من البيانات المفردة، وتحديد المقياس الأنسب لوصف البيانات.
- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.

الصف الثامن

- تعرّف المدى الربيعي وعلاقته بتشتّت البيانات.
- إيجاد المدى الربيعي لبيانات مفردة.
- استخدام مخطط الشجرة، والجدول، ومخطط الاحتمال لعرض الفضاء العيني لتجارب عشوائية مُركّبة.
- إيجاد احتمالات حوادث مُركَّبة باستعمال مخطط الشجرة، والجدول، ومخطط الاحتمال.

الصف التاسع

- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة، وبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.
- استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة؛ تسهيلًا للحسابات.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول وغير متساوية الطول بمُدرَّجات تكرارية.
- إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال والمساحات والزوايا.

الصف العاشر

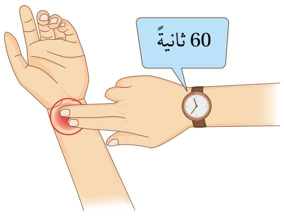
- فهم أشكال الانتشار، ووصفها.
- إيجاد الربيعيات والمئينات، للبيانات المُبوَّبة في جداول تكرارية باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
- إيجاد مقاييس التشتّت في جداول مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- حساب احتمالات حوادث متنافية، وغير متنافية، ومُتمِّمة الحادث.
- حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مشروعُ الوحدةِ

جمعُ البياناتِ، وتنظيمُها، وتحليلُها

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنْ عددٍ منَ الأشخاصِ، وتنظيمُها، وتحليلُها.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أطلبُ إلى 40 شخصًا (نصفُهُمْ منَ الذكورِ، ونصفُهُمُ الآخرُ منَ الإناثِ) قياسَ عددِ دقّاتِ قلوبِهِمْ في الدقيقةِ الواحدةِ، وتحديدَ اليدِ التي يكتبونَ بها، وبيانَ إذا كانوا يرتدونَ نظّاراتٍ أمْ لا.
2. أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.
3. أجدُ الانحرافَ المعياريَّ والتباينَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ.
4. أُنظِّمُ بياناتِ عددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
5. أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والمنوالَ لعددِ دقّاتِ القلبِ لكلٍّ منَ الذكورِ والإناثِ باستعمالِ الجدولينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ، ثمَّ أُقارِنُ ذلكَ بالإجابةِ الدقيقةِ لكلٍّ منْهُما.
6. أُمثِّلُ كُلًّا منَ الجدولينِ التكراريينِ اللذينِ أنشأْتُهُما في الخطوةِ السابقةِ بمُدرَّجٍ تكراريٍّ، ثمَّ أكتبُ وصفًا للبياناتِ.
7. أُمثِّلُ بياناتِ اليدِ المُستعمَلةِ للكتابةِ، وبياناتِ ارتداءِ النظّارةِ في شكلِ قِنْ.
8. أكتبُ مجموعةً منَ المسائلِ الاحتماليةِ عنْ حادثِ اختيارِ شخصٍ عشوائيًّا منْ بينِ مجموعةٍ منَ الأشخاصِ، ثمَّ أطلبُ إلى بعضِ زملائي/ زميلاتي إجابةَ هذهِ المسائلِ.

عرضُ النتائجِ:

- أُصمِّمُ مطويةً أكتبُ فيها النتائجَ التي توصَّلْتُ إليْها في هذا المشروعِ.
- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ الصفِّ، ثمَّ أُقارِنُ نتائجي بنتائجِهِمْ.

119

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	إيجاد مقاييس النزعة المركزية للبيانات.			
2	تنظيم بيانات عدد دقّات قلب كل من الذكور والإناث في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول.			
3	تقدير الوسط الحسابي والمنوال للجدولين التكراريين.			
4	تمثيل كل من الجدولين التكراريين بمُدرَّج تكراري.			
5	التعاون والعمل بروح الفريق.			
6	إعداد المشروع في الوقت المُحدَّد.			
7	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
8	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى جمع بيانات عن عدد من الأشخاص، وإيجاد الانحراف المعياري والتباين لها، وتنظيمها في جداول تكرارية متساوية الطول، وتقدير مقاييس النزعة المركزية لهذه البيانات، وتمثيلها بمُدرَّج تكراري، ووصفها.

ويهدف مشروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلُّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكّد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضّح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، وأؤكّد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أوّلًا بأوّل، وتعزيزها بالصور.
- أذكّر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبيّن للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبيّن للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة أحد أفرادها؛ للوقوف أمام المجموعات الأُخرى، وعرض البيانات التي جمعها مع أفراد مجموعته (تتمثّل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلُّب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة.
- إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.
- استنتاج أثر إجراء تحويل لبيانات مفردة في كل من وسطها الحسابي وانحرافها المعياري.
- استعمال تحويل البيانات لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المُعقَّدة (ذات القيم غير الصحيحة)؛ تسهيلًا للحسابات.
- إيجاد الانحراف المعياري والوسط الحسابي لبيانات مفردة قبل تحويلها وبَعده من خلال معرفة العلاقة التي استُعمِلت للتحويل، وبعض المعلومات عن البيانات بعد التحويل.

نتاجات التعلّم القبلي:

- إيجاد المدى، والربيعات، والمدى الربيعي، لمجموعة مفردة من البيانات.
- حساب مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 1

مقاييسُ التشتُّتِ

Measures of Variation

فكرةُ الدرسِ
- إيجادُ التباينِ والانحرافِ المعياريِّ لبياناتٍ مفردةٍ، وأُخرى مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.
- تحديدُ أثرِ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ.

المصطلحاتُ التباينُ، الانحرافُ المعياريُّ، تحويلُ البياناتِ.

مسألةُ اليومِ في ما يأتي عددُ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ كلَّ يومٍ مُدَّةَ 10 أيامٍ:

3, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 6

1) أجدُ تباينَ عددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

2) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ أكوابِ الماءِ التي شربَتْها أميرةُ في الأيامِ العشرةِ.

التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ مقاييسَ التشتُّتِ تُستعمَلُ لوصفِ مقدارِ تشتُّتِ البياناتِ وتباعدِها. ومنْ هذهِ المقاييسِ: المدى، والمدى الربيعيُّ. ولكنْ، كلٌّ منْ هذينِ المقياسينِ يعتمدُ على قِيَمٍ مُحدَّدةٍ منَ البياناتِ، لا على القِيَمِ جميعِها؛ لذا توجدُ مقاييسُ أُخرى أكثرُ دقَّةً للتشتُّتِ تأخذُ جميعَ قِيَمِ البياناتِ بالاعتبارِ.

في ما يأتي مجموعةٌ منَ البياناتِ، وسطُها الحسابيُّ هوَ: $\overline{x} = 64$.

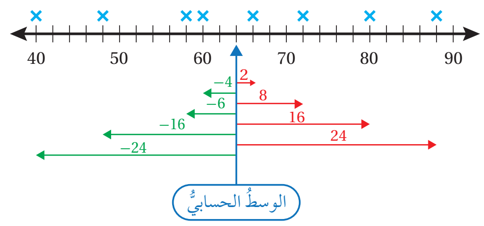
58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

تُستعمَلُ الصيغةُ $x - \overline{x}$ لإيجادِ انحرافِ (بُعْدِ) كلِّ مشاهدةٍ منْ قِيَمِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ. وبذلكَ، فإنَّ انحرافَ قِيَمِ البياناتِ أعلاهُ عنْ وسطِها الحسابيِّ باستعمالِ هذهِ الصيغةِ هوَ كما يأتي:

أتذكَّرُ
المدى هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ قِيَمِ البياناتِ وأصغرِها. أمّا المدى الربيعيُّ فهوَ الفرقُ بينَ الربيعِ الأعلى والربيعِ الأدنى.

لغةُ الرياضياتِ
يُطلَقُ على كلِّ قيمةٍ منَ القِيَمِ في مجموعةِ البياناتِ اسمُ المشاهدةِ.

120



عندَ جمعِ الانحرافاتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ أعلاهُ، فإنَّ الناتجَ يكونُ كما يأتي:

$$-24 + -16 + -6 + -4 + 2 + 8 + 16 + 24 = 0$$

أُلاحِظُ أنَّ مجموعَ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يساوي صفرًا، وهذا لا يقتصرُ على هذهِ البياناتِ فقطْ، وإنَّما يتحقَّقُ في أيِّ مجموعةِ بياناتٍ عدديةٍ؛ لذا، فإنَّ حسابَ مجموعِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يُقدِّمُ شيئًا عنْ تشتُّتِ البياناتِ، ولا يُميِّزُ أيَّ مجموعةِ بياناتٍ عنْ أُخرى. إلّا أنَّ إيجادَ مُربَّعاتِ هذهِ الانحرافاتِ يجعلُها موجبةً. ولهذا، فإنَّ مجموعَ مُربَّعاتِ الانحرافاتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ لا يساوي صفرًا.

عندَ حسابِ الوسطِ الحسابيِّ لمُربَّعاتِ الانحرافاتِ، بقسمةِ مجموعِها على عددِها، ينتجُ مقياسٌ مُهِمٌّ منْ مقاييسِ التشتُّتِ يُسمّى **التباينَ** (variance)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ σ^2. فمثلًا، يُمكِنُ حسابُ تباينِ مجموعةِ البياناتِ أعلاهُ على النحوِ الآتي:

$$\sigma^2 = \frac{(-24)^2 + (-16)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 8^2 + 16^2 + 24^2}{8} = 223$$

وبأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للتباينِ، ينتجُ مقياسٌ آخرُ لتشتُّتِ البياناتِ يُسمّى **الانحرافَ المعياريَّ** (standard deviation).

في هذا الدرسِ، سيُنظَرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ، ويُقرَأُ: ميو.

مفهومٌ أساسيٌّ **التباينُ، والانحرافُ المعياريُّ**

يُعرَّفُ تباينُ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، بالصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ انحرافَ المشاهدةِ عنْ وسطِها الحسابيِّ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ أكبرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ، ويكونُ سالبًا إذا كانَتْ أصغرَ منَ الوسطِ الحسابيِّ.

رموزٌ رياضيةٌ

الحرفُ اليونانيُّ σ يُقرَأُ: سيجما، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على الانحرافِ المعياريِّ. أمّا الرمزُ σ^2 فيُقرَأُ: سيجما تربيعٌ، وهوَ يُستعمَلُ للدلالةِ على التباينِ.

رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الرمزُ $\sum$ للدلالةِ على المجموعِ. وفي قانونِ التباينِ، فإنَّهُ يُستعمَلُ للدلالةِ على مجموعِ مُربَّعاتِ انحرافاتِ البياناتِ عنْ وسطِها الحسابيِّ بصورةٍ مختصرةٍ، ويُقرَأُ: سيجما.

- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألّا أقول للطالب/ للطالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأوّل/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت مَن أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح مجموعة من الأعداد المتتابعة مع تكرار بعضها (مثلًا: ... ,5 ,3 ,3 ,3 ,2 ,2).
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة تنظيم البيانات المكتوبة على اللوح في جدول تكراري للعدد وعدد مرّات تكراره.
- أطلب إلى المجموعات إيجاد الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات.
- أطلب إلى المجموعات إيجاد المدى، والمدى الربيعي للبيانات.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - » كم يومًا أحصت فيه أميرة عدد أكواب الماء التي شربتها؟ 10 أيام.
  - » ما مدى عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟ 4 أكواب.
  - » ما المدى الربيعي لعدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟ 1 كوب.
  - » ما تباين عدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟
  - » ما الانحراف المعياري لعدد أكواب الماء التي شربتها أميرة في الأيام العشرة؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - » مَنْ يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بمفهوم تشتّت البيانات، وبمقياسي التشتّت اللذين تعلموهما سابقًا، وهما: المدى، والمدى الربيعي، ثم أوضّح لهم أن دقة هذين المقياسين ضعيفة؛ لأنهما يعتمدان على قيم محددة من البيانات، وأنه توجد مقاييس أكثر دقة لقياس التشتّت تأخذ في الحسبان قيم البيانات كافّة، والتي سوف يتعلّمونها في هذا الدرس.
- أكتب مجموعة البيانات الآتية على اللوح:

58, 88, 40, 60, 72, 66, 80, 48

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إلى كل مجموعة إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات على دفاترهم، ثم أطلب إلى مندوب/ مندوبة عن إحدى المجموعات إيجاد الوسط الحسابي على اللوح.
- أوضّح للمجموعات أن الصيغة $x - \overline{x}$ تُستعمَل لإيجاد انحراف (بُعد) كل مشاهدة من قيم البيانات عن وسطها الحسابي، ثم أطلب إليهم استعمال هذه الصيغة لإيجاد انحراف قيم البيانات عن وسطها الحسابي، ثم رسم مخطط سهمي لتوضيح هذه الانحرافات.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، وبعد إنهاء المجموعات المطلوب إليهم أسألهم:
  - » إذا كانت المشاهدة أكبر من الوسط الحسابي، فما إشارة انحرافها عن الوسط الحسابي؟ موجبة.
  - » إذا كانت المشاهدة أصغر من الوسط الحسابي، فما إشارة انحرافها عن الوسط الحسابي؟ سالبة.
  - » ما مجموع انحراف المشاهدات عن وسطها الحسابي؟ 0
  - » هل مجموع انحرافات أي مجموعة بيانات عددية عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا، أم أن هذا يقتصر على هذه المجموعة من البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.

مثال 1: منَ الحياةِ

تجارةٌ: في ما يأتي عددُ الأجهزةِ الكهربائيةِ التي بيعَتْ في متجرٍ خلالَ خمسةِ أشهرٍ:

18, 22, 21, 25, 24

1 أجدُ التباينَ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ للأجهزةِ المَبيعةِ.

$$\mu = \frac{\sum x}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{18+22+21+25+24}{5} = 22$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ انحرافَ كلِّ قيمةٍ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، إضافةً إلى حسابِ مُربَّعاتِ الفروقِ.

x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
18	−4	16
22	0	0
21	−1	1
25	3	9
24	2	4
المجموعُ		30

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليْها بصيغةِ التباينِ.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$ صيغةُ التباينِ

$$= \frac{30}{5} = 6$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، التباينُ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ هوَ 6.

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأجهزةِ المَبيعةِ في هذهِ الأشهرِ.

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$$

أتعلَّمُ

إذا كانَتِ البياناتُ: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تُمثِّلُ عيِّنةً عشوائيةً منْ مجتمعٍ إحصائيٍّ ما، فإنَّ التباينَ يُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ s^2، ويُعرَّفُ بأنَّهُ:

$$s^2 = \frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n-1}$$

في هذا الدرسِ، ستُعامَلُ جميعُ البياناتِ على أساسِ أنَّها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ التباينَ سيُعرَّفُ بالصيغةِ الواردةِ في صندوقِ المفهومِ الأساسيِّ السابقِ.

أتذكَّرُ

مجموعُ $(x-\mu)$ يساوي صفرًا.

122

أتحقَّقُ منْ فهمي

إنترنتْ: في ما يأتي عددُ زائري موقعٍ إلكترونيٍّ تعليميٍّ خلالَ أيامِ أحدِ الأسابيعِ:

103, 115, 124, 125, 171, 165, 170

a) أجدُ التباينَ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ. $\sigma^2 \approx 707.71$

b) أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ زائري الموقعِ في ذلكَ الأسبوعِ. $\sigma \approx 26.6$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ هذهِ الصيغةُ لتسهيلِ الحساباتِ في حالِ كانَتْ قيمةُ الوسطِ الحسابيِّ عددًا غيرَ صحيحٍ.

توجدُ صيغةٌ أُخرى لإيجادِ التباينِ منْ دونِ حاجةٍ إلى حسابِ انحرافِ المشاهداتِ عنِ الوسطِ الحسابيِّ، وهذهِ الصيغةُ هيَ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

مثال 2

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: 15, 14, 18, 6, 12, 4, 7, 8, 8

لإيجادِ التباينِ، أتَّبِعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ $\mu = \frac{\sum x}{n}$

بالتعويضِ، والتبسيطِ $= \frac{15+14+18+6+12+4+7+8+8}{9} = \frac{92}{9}$

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ.

x	x^2
15	225
14	196
18	324
6	36
12	144
4	16
7	49
8	64
8	64
المجموع	1118

الخطوةُ 3: أُعوِّضُ القِيَمَ التي توصَّلْتُ إليها بصيغةِ التباينِ.

الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$

بتعويضِ $\Sigma x^2 = 1118, \mu = \frac{92}{9}$ $= \frac{1118}{9} - \left(\frac{92}{9}\right)^2$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 19.73

أتعلَّمُ

ألاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

- أوضّح للطلبة أن مجموع انحرافات أي مجموعة بيانات عددية عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا، ولكن بتربيع هذه الانحرافات وإيجاد الوسط الحسابي لمربعاتها نحصل على مقياس تشتّت جديد يُسمّى **(التباين)**، ثم أقدّم لهم رمز التباين وصيغته بالاستعانة بصندوق **(مفهوم أساسي)**، ثم أجد لهم تباين مجموعة البيانات على اللوح.
- أوضّح للطلبة أنه عند أخذ الجذر التربيعي للتباين فإنه ينتج مقياس تشتّت آخر يُسمّى **(الانحراف المعياري)**، ثم أجد لهم الانحراف المعياري للبيانات على اللوح.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوقي **(رموز رياضية)** الواردين في الصفحة 121 من كتاب الطالب؛ لما لهما من أهمية في تعريف الطلبة بالرمز الدالّ على التباين، والرمز الدالّ على المجموع، وكيفية قراءة كل منهما.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يُطلَق على كل قيمة من قيم البيانات اسم **(مشاهدة)**.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق **(أتعلّم)** الوارد في هامش المثال 1؛ لتعريفهم بالفرق بين تباين البيانات التي تمثّل عينة عشوائية من المجتمع، وبين تباين البيانات التي تمثّل مجتمعًا إحصائيًّا من حيث الرمز والصيغة لكل منهما.
- عند مناقشة حل المثال 1، أوجّه الطلبة إلى تنظيم البيانات في جدول؛ لتسهيل إيجاد انحرافاتها عن الوسط الحسابي، ومربعات هذه الانحرافات.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربيــة واللغة الإنجليزيــة، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حــل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـــتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضّــح للطلبة أن هنـاك صيغـة أخـرى للتبايـن غيـر تلـك التـي تعلّموها، ثم أكتـب لهم الصيغـة الجديدة علـى اللــوح، وألفـت انتباههم إلـى أنـه لا حاجة إلى حسـاب انحرافات المشـاهدات عن الوسط الحسابي عند اسـتعمال هـذه الصيغة؛ لذا يُفضَّل اسـتعمالها في حال كان الوسـط الحسابي عددًا غير صحيح؛ لتسهيل الحسابات.
- أناقـش مـع الطلبة حـل المثال 2 علـى اللـوح، باتباع الخطوات الواردة في كتاب الطالب.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشــاد: بعد الانتهاء من مناقشـــة المثال 2، أوجّــه الطلبة إلى إيجــاد تباين البيانات باســتعمال الصيغة الأولى للتباين، وملاحظة الفرق بين الصيغتين من حيث سهولة الحسابات.

أخطاء شائعة:
قد يخطئ بعض الطلبة عند التطبيق في الصيغة الثانية للتباين، وذلك بطرح الوســط الحســابي للبيانات من الوســط الحســابي لمربعات القيم؛ لذا أؤكّد وبشكل مستمر أن الصحيح هو طرح مربع الوسط الحسابي.

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$\sigma \approx 4.44$

أتحقَّقُ من فهمي

أجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ الآتيةِ: **1, 4, 5, 7, 6, 14, 11**

a) $\sigma^2 \approx 16.41$

b) $\sigma \approx 4.05$

التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا تنظيمَ بياناتٍ عدديةٍ باستعمالِ جداولَ تكراريةٍ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ

يُمكِنُ إيجادُ تباينِ مجموعةٍ منَ البياناتِ، عددُها n، ووسطُها الحسابيُّ μ، إذا كانَتْ مُنظَّمةً في جداولَ تكراريةٍ، حيثُ f عددُ مرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ، باستعمالِ إحدى الصيغتينِ الآتيتينِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum((x-\mu)^2 \times f)}{\sum f} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

ويكونُ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةِ البياناتِ هوَ الجذرَ التربيعيَّ للتباينِ.

أتذكَّرُ
يُمكِنُ إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ للبياناتِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ: $\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$، حيثُ f عددُ مرّاتِ تكرارِ المشاهدةِ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

قمصانٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ القمصانِ الرياضيةِ لمجموعةٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ. أجِدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ.

عددُ القمصانِ (x)	1	2	3	4	5	6
التكرارُ (f)	2	12	45	114	41	16

124

لإيجادِ التباينِ، أُنشِئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدةَ المُظلَّلةَ عناوينُها على النحوِ الآتي:

x	f	$x \times f$	x^2	$x^2 \times f$
1	2	2	1	2
2	12	24	4	48
3	45	135	9	405
4	114	456	16	1824
5	41	205	25	1025
6	16	96	36	576
المجموعُ	230	918	91	3880

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} = \frac{918}{230}$$ بالتعويضِ في صيغةِ الوسطِ الحسابيِّ

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$ الصيغةُ الثانيةُ للتباينِ

$$= \frac{3880}{230} - \left(\frac{918}{230}\right)^2$$ بالتعويضِ

$$= 0.93905$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتعلَّم

ألاحِظُ أنَّ الوسطَ الحسابيَّ عددٌ غيرُ صحيحٍ؛ لذا يُفضَّلُ إيجادُ التباينِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x^2 \times f)}{\sum f} - \mu^2$$

بما أنَّ الانحرافَ المعياريَّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ، فإنَّ:

$$\sigma \approx 0.969$$

أتحقَّقُ من فهمي

عائلـةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التالي عددَ الأخوةِ والأخواتِ لمجموعةٍ منْ طالباتِ الصفِّ التاسعِ في مدرسةٍ عائشة. أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ. $\sigma^2 \approx 1.05, \sigma \approx 1.02$

عددُ الأخوةِ والأخواتِ	1	2	3	4	5
التكرارُ (f)	2	4	8	5	1

مثال 3: من الحياة

- أناقش الطلبة في ما تعلّموه سابقًا عن الجدول التكراري (الذي يبيّن عدد مرات ظهور كل قيمة من قيم البيانات).
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد التباين والانحراف المعياري لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية، ثم أقدّم لهم صيغتي التباين الخاصتين بالبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية بالرموز، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة الوسط الحسابي الخاصة بالبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية.
- ألفت انتباه الطلبة في المثال 3 إلى أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح؛ لذا فإنه يُفضَّل استعمال الصيغة الثانية للتباين.

مثال إضافي:

يبيّن الجدول الآتي عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في آخر 20 مباراة له. أجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

عدد الأهداف (x)	التكرار (f)
0	6
1	8
2	4
3	2

$\sigma^2 = 0.89, \sigma \approx 0.94$

نشاط مفاهيمي: تحويل البيانات

- أقـدّم للطلبة مفهوم تحويل البيانات، ثم أقسّـمهم إلى مجموعات رباعية، لتنفيذ النشاط المفاهيمي (**تحويل البيانات**) الوارد في صفحة 126 من كتاب الطالب.
- أتابـع عمل المجموعات، وأقدّم لهـم التغذية الراجعة اللازمة أثناء تنفيذهم النشاط.
- أناقـش مع المجموعات السـؤال 1 من أسـئلة (**أحلّل النتائج**) الواردة في النشاط المفاهيمي، وذلك بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة قبل إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 13
  - » ما الوسط الحسابي لعلامات الطلبة بعد إضافة 3 علامات إلى علامة كل طالب؟ 16
  - » هل تأثّر الوســط الحســابي بإضافة العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هذا التأثّر؟ الوسط الحسابي الجديد ناتج من إضافة العدد 3 إلى الوســط الحســابي القديم.
  - » ما الانحــراف المعياري لعلامــات الطلبة قبل إضافـة 3 علامــات إلــى علامــة كل طالب؟ 3.03 تقريبًا.
  - » مــا الانحراف المعيــاري لعلامــات الطلبة بعد إضافـة 3 علامــات إلــى علامــة كل طالب؟ 3.03 تقريبًا.
  - » هل تأثّر الانحراف المعياري بإضافة العلامات؟ لا.
  - » برأيكم/ برأيكن، لماذا تأثّر الوســط الحســابي للبيانات بعــد الإضافــة ولم يتأثــر الانحراف المعياري؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى أن إضافة عدد حقيقي إلى مجموعة بيانات يؤثّر في وسطها الحسـابي، وأن الوسط الحسابي الجديد ينتج من إضافة العدد الحقيقي نفسـه إلى الوسـط الحسابي القديـم. أما الانحـراف المعياري فإنـه لا يتأثر بإضافة عـدد حقيقي إلـى مجموعة البيانـات؛ لأن الإضافة لا تؤثّر في تشـتّتها، ويمكنني تعزيز هذا الاستنتاج بتمثيل البيانات بالنقاط قبل الإضافة وبعدها.

تحويلُ البياناتِ

تحويلُ البياناتِ (data transformation) هوَ تطبيقُ عمليةٍ حسـابيةٍ (أوْ أكثرَ) على جميعِ القِيَمِ في مجموعةِ بياناتٍ للحصولِ على مجموعةٍ أُخرى مختلفةٍ. سأستكشـفُ في النشـاطِ المفاهيمـيِّ الآتي أثرَ تحويلِ البياناتِ في كلٍّ منَ الوسـطِ الحسـابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ.

نشاطٌ مفاهيميٌّ — **تحويلُ البياناتِ**

الإجراءاتُ:

في ما يأتي علاماتُ 5 طلبةٍ في اختبارِ رياضياتٍ، نهايتُهُ العظمى هيَ 20:

12, 17, 11, 9, 16

1) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ.
2) إذا أرادَ المُعلِّمُ إضافةَ 3 علاماتٍ إلى علامةِ كلِّ طالبٍ، فأجدُ الوسـطَ الحسـابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.
3) إذا أرادَ المُعلِّـمُ تحويلَ نهايـةِ الاختبارِ العظمى إلى 40، بضـربِ كلِّ علامةٍ في العددِ 2، فأجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التحويلِ.

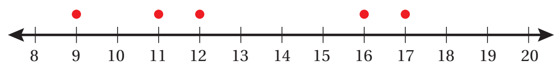
أُحلِّلُ النتائجَ:

1) أُقارِنُ بينَ الوسـطِ الحسـابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويـلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بإضافةِ 3 علاماتٍ. ماذا أستنتجُ؟
2) أُقارِنُ بينَ الوسـطِ الحسـابيِّ والانحرافِ المعياريِّ قبلَ تحويـلِ العلاماتِ وبعدَ تحويلِها بضربِها في العددِ 2. ماذا أستنتجُ؟

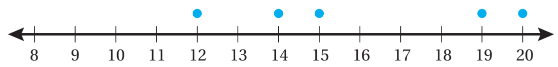
أستنتجُ منْ هذا النشاطِ أنَّ إضافةَ العددِ 3 إلى علامةِ كلِّ طالبٍ أثَّرَتْ في الوسطِ الحسابيِّ، ولمْ تُؤثِّرْ في الانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ هذهِ الإضافةَ أدَّتْ إلى انسـحابِ البياناتِ جميعِها بالمقدارِ نفسِهِ (3 وحداتٍ إلى اليمينِ) كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي، لكنَّ ذلكَ لمْ يُؤثِّرْ في تشتُّتِ البياناتِ.

أستنتجُ أيضًا أنَّ الوسطَ الحسابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ إضافةِ العددِ 3 إلى الوسطِ الحسابيِّ القديمِ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



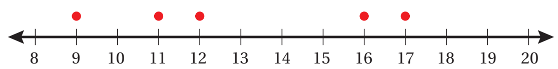
علاماتُ الطلبةِ بعدَ إضافةِ العددِ 3 إليْها.



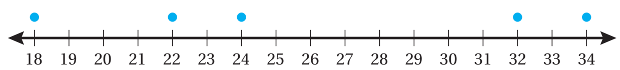
أمّا تحويــلُ البياناتِ بضربِها في العددِ 2 فقدْ أثَّرَ في كلٍّ منَ الوســطِ الحســابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ؛ لأنَّ عمليةَ الضربِ تُؤثِّرُ في تشتُّتِ البياناتِ كما يظهرُ في التمثيلِ النقطيِّ التالي.

كذلكَ أســتنتجُ أنَّ الوســطَ الحســابيَّ الجديدَ ناتجٌ منْ ضربِ الوسطِ الحســابيِّ القديمِ في العددِ 2، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الانحرافِ المعياريِّ.

علاماتُ الطلبةِ قبلَ التحويلِ.



علاماتُ الطلبةِ بعدَ ضربِها في العددِ 2.



مفهومٌ أساسيٌّ — **تحويلُ البياناتِ**

عندَ تحويلِ مجموعةٍ منَ البياناتِ باســتعمالِ العلاقةِ: $y = ax + b$، حيثُ a و b عددانِ حقيقيانِ، و x المشاهدةُ قبلَ التحويلِ، و y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، فإنَّهُ:

- يُمكِــنُ إيجادُ الوســطِ الحســابيِّ للبياناتِ بعــدَ التحويلِ μ_y باســتعمالِ العلاقةِ: $\mu_y = a\mu_x + b$، حيثُ μ_x الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.
- يُمكِنُ إيجــادُ الانحرافِ المعيــاريِّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ σ_y باســتعمالِ العلاقةِ: $\sigma_y = |a|\sigma_x$، حيثُ σ_x الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ.

- أناقش مع المجموعات السـؤال 2 من أسـئلة (**أحلّل النتائج**) الوارد في النشـاط المفاهيمي بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ما الوسـط الحسابي لعلامات الطلبة قبل ضرب العلامات في 2؟ 13
  - » ما الوسط الحسـابي لعلامات الطلبة بعد ضرب العلامات في 2؟ 26
  - » هل تأثّر الوسـط الحسـابي بضرب العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هذا التأثّر؟ الوسط الحسابي الجديد ناتج من ضرب الوسط الحسابي القديم في 2
  - » ما الانحـراف المعياري لعلامـات الطلبة قبل ضرب العلامات في 2؟ 3.03 تقريبًا.
  - » ما الانحـراف المعياري لعلامـات الطلبة بعد ضرب العلامات في 2؟ 6.06 تقريبًا.
  - » هل تأثّر الانحراف المعياري بضرب العلامات؟ نعم.
  - » كيف نصف هـذا التأثّر؟ الانحـراف المعياري الجديد ناتـج من ضرب الانحـراف المعياري القديم في 2
- أناقش الطلبة في إجابة الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلـى أن ضرب مجموعة بيانات بعـدد حقيقي يؤثّر في وسطها الحسـابي، وأن الوسط الحسابي الجديد ينتج من ضرب العدد الحقيقي نفسه في الوسـط الحسابي القديم، . وكذلك يتأثـر الانحراف المعياري للبيانات عنـد ضربها بعـدد حقيقـي؛ لأن عملية الضـرب تؤثّر فـي تشـتّتها، وأن الانحـراف المعيـاري الجديـد ينتج من ضرب القيمة المُطلَقـة لذلك العدد في الانحراف المعيـاري القديـم، ويمكننـي تعزيـز هـذا الاسـتنتاج بتمثيل البيانات بالنقاط قبل الضرب وبعده.
- ألخّـص الاسـتنتاجات التـي توصّلت إليها مـع الطلبة حول تحويل البيانات على اللوح بالرموز، بالاسـتعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.

تنويع التعليم

- يسـاعد تمثيل البيانـات بالنقاط الطلبة علـى تخيُّل أثر كل نـوع مـن أنـواع التحويل فـي البيانـات، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

مثال 4: من الحياة

- أوضّح للطلبة أهمية تحويل البيانات في إيجاد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للبيانات ذات القيم غير الصحيحة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضّح للطلبة أن العلاقة التي توصّل إليها العالم تسهم في تبسيط المشاهدات؛ تسهيلًا لإجراء الحسابات، ثم أطلب إلى أحد الطلبة استعمال العلاقة في إيجاد درجات الحرارة بعد التحويل، ثم أطلب إلى آخر إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة بعد التحويل، ثم إلى آخر إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة بعد التحويل.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة قبل التحويل –من دون الرجوع إلى البيانات الأصلية– بالاعتماد على الوسط الحسابي بعد التحويل وصيغة تحويل الوسط الحسابي، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاده.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة قبل التحويل –من دون الرجوع إلى البيانات الأصلية– بالاعتماد على الانحراف بعد التحويل وصيغة تحويل الانحراف المعياري، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاده.

يُستعمَلُ تحويلُ البياناتِ أحياناً لإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ للبياناتِ المُعقَّدةِ (ذاتِ القِيَمِ غيرِ الصحيحةِ)؛ تسهيلًا لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 4 : منَ الحياةِ

معلومةٌ

تنتجُ منَ التفاعلاتِ النوويةِ طاقةٌ حراريةٌ كبيرةٌ تُستعمَلُ لتوليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ.

علومٌ: قاسَ عالِمٌ درجةَ حرارةِ مفاعلٍ نوويٍّ (بالسلسيوس) في 5 مواقعَ مختلفةٍ، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَ إليْها كما يأتي:

332.5, 335.3, 336.2, 337.5, 340.3

استعملَ هذا العالِمُ العلاقةَ: $y = 10x - 3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، وy درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

أُفكِّرُ

كيفَ توصَّلَ العالِمُ إلى المعادلةِ: $y = 10x - 3300$؟ هلْ هذا التحويلُ هوَ الوحيدُ المُمكِنُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

1 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ درجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أستعملُ العلاقةَ: $y=10x-3300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، بحيثُ تصبحُ كالآتي:

25, 53, 62, 75, 103

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

$$\mu_y = \frac{\sum y}{n}$$ صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ

$$= \frac{25 + 53 + 62 + 75 + 103}{5} = 63.6$$ بالتعويضِ، والتبسيطِ

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ: 63.6

الخطوةُ 3: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ.

أُنشِئُ جدولًا أحسُبُ فيهِ مُربَّعَ كلِّ مشاهدةٍ، ثمَّ أُعوِّضُ في صيغةِ الانحرافِ المعياريِّ:

y	y^2
25	625
53	2809
62	3844
75	5625
103	10609
المجموعُ	23512

أتذكّر

الانحـرافُ المعياريُّ هوَ الجذرُ التربيعيُّ للتباينِ.

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$ الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ

$= \sqrt{\frac{23512}{5} - (63.6)^2}$ بتعويضِ $\Sigma y^2 = 23512, \mu_y = 63.6, n = 5$

≈ 25.64 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ هوَ 25.64

2 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

- **الوسطُ الحسابيُّ قبلَ التحويلِ:**

$\mu_y = a\mu_x + b$ صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ

$63.6 = 10\mu_x - 3300$ بتعويضِ $\mu_y = 63.6, a = 10, b = -3300$

$3363.6 = 10\mu_x$ بجمعِ 3300 إلى طرفَيِ المعادلةِ

$336.36 = \mu_x$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 10

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 336.36

- **الانحرافُ المعياريُّ قبلَ التحويلِ:**

$\sigma_y = |a|\sigma_x$ صيغةُ تحويلِ الانحرافِ المعياريِّ

$25.64 \approx |10|\sigma_x$ بتعويضِ $\sigma_y = 25.64, a = 10$

$2.564 \approx \sigma_x$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 10

إذنْ، الانحرافُ المعياريُّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ هوَ 2.564 تقريبًا.

إرشادات:

- أُدير نقاشًا مع الطلبة حول إجابة السؤال الموجود في صندوق (**أفكّر**) المجاور للمثال 4، وأتوصّل معهم إلى أن المشاهدات جميعها تحتوي على منزلة عشرية واحدة؛ لذا فإنه يمكن التخلّص من هذه المنزلة بضرب جميع المشاهدات في 10، إضافة إلى أن المشاهدات جميعها تشترك في العدد 3300 الذي يمكن التخلّص منه بطرحه من كل مشاهدة، ثم أطلب إلى الطلبة اقتراح معادلات أخرى للتحويل.
- ألفت انتباه الطلبة عند إيجاد الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل في المثال 4 إلى أن الوسط الحسابي عدد غير صحيح؛ لذا يُفضَّل استعمال الصيغة الثانية للانحراف المعياري؛ تسهيلًا للحسابات.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن قيمة الانحراف المعياري قُرِّبت بعد التحويل في المثال 4؛ لذا فإنه يلزم وضع إشارة التقريب عند إيجاد الانحراف المعياري للبيانات قبل التحويل.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة بعدم أخذ القيمة المُطلَقة للعدد الذي ضُربت فيه البيانات عند حساب الانحراف المعياري للبيانات بعد التحويل؛ لذا أؤكّد هذا بشكل مستمر.

توسعة

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن المفاعلات النووية، وطرق ضبط درجة حرارتها، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال 5: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة بيانات إذا عُلمت العلاقة التي استُعمِلت لإجراء التحويل، وبعض المعلومات الأخرى عن البيانات من دون الحاجة إلى معرفة البيانات الأصلية أو البيانات بعد التحويل.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضّح للطلبة أنه لإيجاد الوسط الحسابي لسرعة الدراجات قبل التحويل فإنه يلزم توافر معلومتين، هما: علاقة التحويل، والوسط الحسابي لسرعة الدراجات بعد التحويل، وبما أن علاقة التحويل معطاة في السؤال، فإننا بحاجة إلى إيجاد الوسط الحسابي بعد التحويل، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجادها، وأطلب إلى آخر إيجاد الوسط الحسابي قبل التحويل.
- أوضّح للطلبة أن العلاقة التي استُعمِلت لتحويل البيانات اعتمدت على إضافة (-10) إلى كل مشاهدة، ثم أذكّرهم بأن الإضافة لا تؤثّر في الانحراف المعياري؛ لذا فإن الانحراف المعياري لسرعة الدراجات قبل التحويل مُساوٍ للانحراف المعياري لسرعة الدراجات بعد التحويل، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الانحراف المعياري بعد التحويل.

أتحقَّقُ منْ فهمي

درجاتُ حرارةٍ: رُصِدَتْ درجاتُ الحرارةِ (بالسلسيوس) في 7 مناطقَ مختلفةٍ منَ العاصمةِ عمّانَ في أحدِ الأيامِ، وكانَتْ على النحوِ الآتي:

32.1, 31.7, 31.2, 31.5, 31.9, 32.2, 32.7

استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 10x - 300$ لتحويلِ درجاتِ الحرارةِ، حيثُ x درجةُ الحرارةِ قبلَ التحويلِ، وy درجةُ الحرارةِ بعدَ التحويلِ:

a) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ التحويلِ. $\mu_y = 19, \sigma_y \approx 4.57$

b) أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لدرجاتِ الحرارةِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ. $\mu_x \approx 31.9, \sigma_x \approx 0.46$

يُمكِنُ أحيانًا إيجادُ الوسطِ الحسابيِّ والانحرافِ المعياريِّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ بعدَ تحويلِها مِنْ دونِ معرفةِ البياناتِ الأصليةِ، أوِ البياناتِ بعدَ التحويلِ؛ إذْ يكتفى بمعرفةِ العلاقةِ التي استُعمِلَتْ لإجراءِ التحويلِ، وبعضِ المعلوماتِ عنِ البياناتِ بعدَ التحويلِ.

مثال 5 : منَ الحياةِ

سرعةٌ: رُصِدَتْ سرعةُ 25 درّاجةً هوائيةً مشاركةً في سباقٍ للدرّاجاتِ عندَ مرورِها منْ أحدِ الشوارعِ بوحدةِ km/h، ثمَّ حُوِّلَتْ سرعةُ هذهِ الدرّاجاتِ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 10$، حيثُ y السرعةُ بعدَ التحويلِ، وx السرعةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -5, \sum y^2 = 2803$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

$$\mu_y = \frac{\sum y}{n} \quad \text{صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ}$$

$$= \frac{-5}{25} = -0.2 \quad \text{بتعويضِ } \sum y = -5, n = 25$$

الخطوةُ 2: أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

صيغةُ تحويلِ الوسطِ الحسابيِّ $\mu_y = a\mu_x + b$

بتعويضِ $\mu_y = -0.2, a = 1, b = -10$ $-0.2 = \mu_x - 10$

بجمعِ 10 إلى طرفَيِ المعادلةِ $\mu_x = 9.8$

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ هوَ 9.8

2 الانحرافُ المعياريُّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الخطوةُ 1: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ بعدَ التحويلِ.

الصيغةُ الثانيةُ للانحرافِ المعياريِّ $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \mu_y^2}$

بتعويضِ $\Sigma y^2 = 2803, \mu_y = -0.2$ $= \sqrt{\frac{2803}{25} - (-0.2)^2}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 10.6

الخطوةُ 2: أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لسرعةِ الدرّاجاتِ قبلَ التحويلِ.

الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 10.6 تقريبًا؛ لأنَّ التحويلَ تمثَّلَ في إضافةِ (10−)، وهذا لا يُؤثِّرُ في الانحرافِ المعياريِّ.

أتذكَّرُ

إضافةُ قيمةٍ إلى البياناتِ لا تُؤثِّرُ في تشتُّتِها.

أتحقَّقُ من فهمي

زراعةٌ: قيسَتْ كتلُ 40 كيسًا منَ السمادِ بوحدةِ kg، ثمَّ حُوِّلَتْ هذهِ الكتلُ باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 60$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، وx الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = -814, \sum y^2 = 22125$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ. $\mu_x \approx 39.65$

b) الانحرافُ المعياريُّ لكتلِ أكياسِ السمادِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x \approx 11.79$

معلومةٌ

يُعَدُّ الأردنُّ إحدى الدولِ الرائدةِ في إنتاجِ الأسمدةِ عاليةِ الجودةِ على مستوى العالَمِ؛ نظرًا إلى وفرةِ خاماتِ الفوسفاتِ التي تُستعمَلُ لصناعةِ الأسمدةِ.

تنويع التعليم:

في المثال 5، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة برويّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 5، أعزّز الوعي البيئي لدى الطلبة بأهمية الأسمدة في تحسين خواصّ التربة، وزيادة قدرتها على الحفاظ على الماء والعناصر المعدنية.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (8 – 1) والمسألتين (11, 12) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أمطارٌ: في ما يأتي عددُ الأيامِ الماطرةِ منْ شهرِ شباطَ في إحدى المدنِ على مدارِ سبعةِ أعوامٍ متتاليةٍ:

18, 20, 11, 13, 5, 12, 14

1. أجدُ تباينَ عددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ. $\sigma^2 \approx 20.5$
2. أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأيامِ الماطرةِ في الأعوامِ السبعةِ. $\sigma \approx 4.5$

كرةُ قدمٍ: شاركَ فريقُ كرةِ قدمٍ في دوريٍّ للمُحترفينَ 5 مواسمَ متتاليةٍ، وكانَ عددُ الأهدافِ التي سجَّلَها الفريقُ في هذهِ المواسمِ كما يأتي:

61, 54, 44, 57, 38

3. أجدُ تباينَ عددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ. $\sigma^2 \approx 72.6$
4. أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأهدافِ في المواسمِ الخمسةِ. $\sigma \approx 8.5$

أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

6. 12, 15, 18, 16, 7, 9, 14
$\sigma^2 \approx 13.14$, $\sigma \approx 3.62$

5. 27, 43, 29, 34, 53, 37, 19, 58
$\sigma^2 \approx 153.5$, $\sigma \approx 12.4$

أطفالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي عددَ الأطفالِ في 35 عائلةً:

عددُ الأطفالِ	0	1	2	3	4	5
عددُ العائلاتِ	6	12	9	4	3	1

7. أجدُ تباينَ عددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ. $\sigma^2 \approx 1.6$
8. أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لعددِ الأطفالِ في هذهِ العائلاتِ. $\sigma \approx 1.3$

132

كتلٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي كتلَ عددٍ منَ الصناديقِ في شاحنةٍ:

الكتلةُ (kg)	50	55	60	65	70	75
عددُ الصناديقِ	3	10	18	22	17	10

9 أجدُ تباينَ كتلِ هذهِ الصناديقِ. $\sigma^2 \approx 44$

10 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لكتلِ هذهِ الصناديقِ. $\sigma \approx 6.6$

نباتاتٌ: قاسَتْ مُهندِسةٌ زراعيةٌ أطوالَ 7 نبتاتٍ منَ النوعِ نفسِهِ (بالسنتيمترِ)، وكانَتِ النتائجُ التي توصَّلَتْ إليْها كما يأتي:

53.6, 52.7, 55.4, 55.4, 57.2, 59.9, 62.6

ثمَّ اســتعملَتِ العلاقةَ: $y = 10x - 500$ لتحويلِ أطوالِ النبتاتِ، حيثُ x طولُ النبتةِ قبلَ التحويلِ، وy طولُها بعدَ التحويلِ:

$\mu_y \approx 66.86, \sigma_y \approx 32.58$

11 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ بعدَ التحويلِ.

12 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ النبتاتِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ.

$\mu_x \approx 56.69, \sigma_x \approx 3.26$

حقائبُ: قيسَــتْ كتلُ 97 حقيبةَ يــدٍ (بـ kg) على متنِ إحدى الرحلاتِ الجويةِ، ثمَّ حُوِّلَتْ كتلُ هذهِ الحقائبِ باســتعمالِ العلاقةِ: $y = x - 5$، حيثُ y الكتلةُ بعدَ التحويلِ، وx الكتلةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ: $\sum y = 314, \sum y^2 = 1623$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسطُ الحسابيُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ. $\mu_x \approx 8.2$

14 التباينُ والانحرافُ المعياريُّ لكتلِ الحقائبِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x^2 \approx 6.3, \sigma_x \approx 2.5$

15 فــي مجموعــةِ بيانــاتٍ إحصائيــةٍ، إذا كانَ: $n = 40$، وكانَ: $\sum x = 6400$، وكانَ: $\sum x^2 = 1400000$، فأجدُ الانحرافَ المعياريَّ لهذهِ البياناتِ. $\sigma_x \approx 97$

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 – 19).
- أرصد أيّة أفكار غيــر تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 19 (**تبرير**)، أذكّر الطلبة بأن الانحراف المعياري مقياس لمدى تشـتّت البيانات؛ لذا فإن إجابـة السـؤال تكـون بتحديـد أي البيانـات أقل تشتّتًا.
- في السؤال 22 (**تحدٍّ**)، أوجّه الطلبة إلى التعويض في الصيغة الثانية للتباين.

الواجب المنزلي:

أسـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 9, 10, 18 كتاب التمارين: (1 – 4), 13, 14
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (15 – 17), 11, 12 كتاب التمارين: (5 – 7), (10 – 12)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 – 22), 16, 17 كتاب التمارين: (8 – 10), (15 – 18)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» في مجموعة بيانات إحصائية، إذا كان: $n = 20$، وكان: $\sum (x-10) = 12$، وكان: $\sum (x-10)^2 = 144$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات. $\mu = 10.6, \sigma = 2.62$

2 أجد $\sum (x-8)$، و $\sum (x-8)^2$.

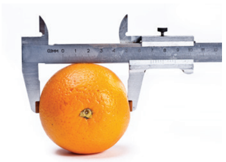
$\sum (x-8) = 52, \sum (x-8)^2 \approx 272$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (3 – 1) من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة كتابة 3 معلومات أساسية مُتعلَّمة في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المُشترَكة التي كتبها الطلبة؛ بُغية تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.



قيسَتْ أطوالُ أقطارِ 8 حبّاتِ برتقالٍ بوحدةِ cm، وكانَتِ انحرافاتُ أطوالِ الأقطارِ عنْ وسطِها الحسابيِّ كما يأتي: 4, −2, 3, 3, −1, *k*, −5, 2

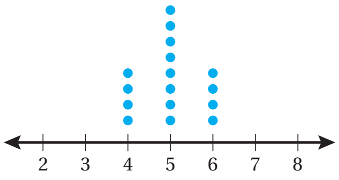
16 أجدُ قيمةَ الثابتِ k. $k = -4$

17 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ أقطارِ حبّاتِ البرتقالِ. $\sigma^2 = 10.5, \sigma \approx 3.2$

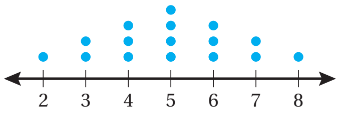
18 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. **(1)** : $\sigma^2 = 1.84$, **(2)** $\sigma \approx 1.4$

مهاراتُ التفكيرِ العليا

19 **تبريرٌ:** أيُّ التمثيلينِ النقطيينِ قيمةُ انحرافِهِ المعياريِّ أصغرُ: a أمْ b؟ أُبرِّرُ إجابتي منْ دونِ إيجادِ الانحرافِ المعياريِّ لكلِّ تمثيلٍ. التمثيل a؛ لأن القيم فيه متقاربة أكثر من القيم في التمثيل b.



(a)



(b)

20 **تحدٍّ:** في مجموعةِ بياناتٍ إحصائيةٍ، إذا كانَ: $\sum(3x-1) = 53, n = 10$، فأجدُ $\sum x$.

$y = 3x-1, \mu_y = 5.3, \mu_x = 2.1, 2.1 = \frac{\sum x}{10}, \sum x = 21$

21 **تبريرٌ:** هلْ يُمكِنُ أنْ يكونَ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ منَ البياناتِ صفرًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

أنظر الهامش.

22 **تحدٍّ:** تمكَّنَ يوسفُ في لعبةٍ إلكترونيةٍ منْ إحرازِ النقاطِ الآتيةِ في المراحلِ الستِّ الأولى منَ اللعبةِ: 42 ,39 ,37 ,24 ,54 ,34. أجدُ عددَ النقاطِ التي يتعيَّنُ على يوسفَ إحرازُها في المرحلةِ السابعةِ منَ اللعبةِ ليكونَ الانحرافُ المعياريُّ لنتائجِها في المراحلِ السبعِ هوَ: $10\sqrt{2}$. أنظر الهامش.

إجابات الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

21) يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا إذا كانت القيم متساوية؛ حيث يكون انحراف كل قيمة عن وسطها صفرًا، ومنه فإن مربع انحراف كل قيمة عن وسطها يساوي صفرًا، ومجموع مربعات الانحرافات عن وسطها يساوي صفرًا.

22) أفرض أن m عدد النقاط التي يتعين على يوسف تسجيلها في المرحلة السابعة ليكون الانحراف المعياري $10\sqrt{2}$

$$\frac{9302 + m^2}{7} - \left(\frac{230 + m}{7}\right)^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2$$

بحل المعادلة $m = 71$

(يهمل الحل $m = 5.6$؛ لأنّ النقاط لا يمكن أن تكون كسورًا عشرية).


الدرس 2

الجداولُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ
Frequency Tables with Class Intervals

فكرةُ الدرسِ
- تنظيمُ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
- تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ للجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ.

مسألةُ اليومِ في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي استغرقَتْهُ مجموعةٌ منَ الأطفالِ لإنهاءِ لعبةِ قطعِ التركيبِ:

83	114	84	90	103
77	92	108	124	185
89	74	176	61	162
49	63	79	91	65

1) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

2) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ متصلةٍ.

أتذكَّرُ
البياناتُ المتصلةُ هيَ بياناتٌ قِيَمُها المُمكِنةُ غيرُ قابلةٍ للعدِّ، لكنَّها قابلةٌ للقياسِ، ويُمكِنُ تقريبُها لتُعطِيَ درجةً منَ الدقَّةِ. ومِنْ أمثلتِها: الطولُ، والكتلةُ، ودرجةُ الحرارةِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

رياضةٌ: في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) المُستغرَقُ في لعبِ 24 مباراةَ كرةِ تِنِسٍ:

102	126	216	104	66	93	129	186
54	73	194	138	98	77	145	90
238	55	87	165	181	94	110	176

1 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أصغرُ قيمةٍ في البياناتِ هيَ 54، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ 238.

135

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تنظيم بيانات عددية متصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تنظيم بيانات عددية منفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- حل مسائل حياتية على مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول.
- حساب مقاييس النزعة المركزية للجداول التكرارية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

ملاحظاتي

1 التهيئة

- أسأل طلبة الصف عن أطوالهم بالسنتيمتر، وأسجلّها على اللوح.
- أسأل الطلبة:
  » هل الأطوال بيانات عددية أم نوعية؟ عددية.
  » هل الأطوال بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ عددية متصلة.
  » ما أفضل طريقة لتنظيم البيانات على اللـــوح: إبقاؤها على صورة بيانات مفردة، أم تنظيمها في جداول تكرارية، أم تنظيمها في جداول تكرارية ذات فئات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السـؤال السـابق، وأتوصّل معهم إلى أن أفضل طريقة لتنظيم البيانات هي الجـداول التكراريـة ذات الفئات، ثم أطلب إليهم تنظيمها في جـدول تكراري مُكوَّن من 4 إلى 6 فئات متساوية الطول –بحسب عدد طلبة الصف–، وأحدّد لهم فئات الجدول.

إرشـاد: تعلّم الطلبة في الصف الســادس تنظيم بيانات مُفرَدة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول معطاة، وسيتعلّمون في هذا الدرس تنظيم بيانات مُفرَدة في جداول تكرارية يحدّدون فئاتها بأنفسهم.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » هل الزمن بيانات عددية أم نوعية؟ عددية.
  » هل الزمن بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ متصلة.
  » كيف يمكن تنظيم البيانات في جدول تكراري ذي فئات متساوية الطول؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سـابقًا عن البيانات العددية المتصلة والمنفصلة، وأذكّرهم بشـكل الفئات التي تُستعمَل للتعبير عن كل نوع من أنواع هذه البيانات.
- أذكّر الطلبة بأن الجداول التكرارية ذات الفئات تُسـتعمَل لعرض البيانات العددية المتصلة والمنفصلة والمُجمَّعة في فئات، بحيث تقابل كل فئة عدد البيانات التي تحويها (**التكرار**)، ثم أذكّرهم بأنّهم تعلّموا تنظيـم البيانـات العدديـة في جداول تكراريـة ذات فئات معطاة، ثـم أبيّن لهم أنّهم سـيتعلّمون في هذا الدرس تنظيم البيانات العددية في جداول تكرارية ذات فئات متسـاوية الطول يحدّدون فئاتها بأنفسهم بما ينسجم مع البيانات.

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.

وبما أنَّ البياناتِ متصلةٌ، فإنَّني أستعملُ المتبايناتِ للتعبيرِ عنَ الفئاتِ كما في الجدولِ الآتي:

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنِسِ (t)		
التكرارُ	الإشاراتُ	الزمنُ (min)
		$40 \le t < 80$
		$80 \le t < 120$
		$120 \le t < 160$
		$160 \le t < 200$
		$200 \le t < 240$

الخطوةُ 3: أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

الزمنُ المُستغرَقُ لمبارياتِ التِّنِسِ (t)		
التكرارُ	الإشاراتُ	الزمنُ (min)
5	𝍸	$40 \le t < 80$
8	𝍸 |||	$80 \le t < 120$
4	||||	$120 \le t < 160$
5	𝍸	$160 \le t < 200$
2	||	$200 \le t < 240$

أتعلَّمُ

يُفضَّلُ ألّا يقلَّ عددُ الفئاتِ المختارةِ عنْ 4 فئاتٍ، وألّا يزيدَ عددُها على 8 فئاتٍ، و لا يُشترَطُ أنْ يكونَ الحدُّ الأدنى للفئةِ الأولى هوَ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وإنَّما يجبُ أنْ تحتويَ الفئةُ الأولى على أصغرِ قيمةٍ في البياناتِ، وكذا الحالُ بالنسبةِ إلى الفئةِ الأخيرةِ والقيمةِ الكبرى في البياناتِ.

أتذكَّرُ

يقعُ العددُ 40 ضمنَ الفئةِ: $40 \le t < 80$، في حينِ لا يقعُ العددُ 80 ضمنَ هذهِ الفئةِ.

2 **أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.**

أُلاحِظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ معظمَ المبارياتِ تستغرقُ زمنًا يتراوحُ بينَ 80 دقيقةً و200 دقيقةٍ، وأنَّ عددًا قليلًا منْها يستمرُّ أقلَّ منْ ذلكَ أوْ أكثرَ.

أتحقَّقُ منْ فهمي

صحَّةٌ: في ما يأتي كتلُ 27 مشتركًا في نادٍ رياضيٍّ، مُقرَّبةً إلى أقربِ كيلوغرام: أنظر الهامش.

57	50	75	86	40	55	72	67	53
65	60	53	48	79	82	73	68	64
70	75	69	70	63	45	56	61	67

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)

كتل المشتركين في النادي الرياضي (m)		
التكرار	الإشارات	الكتلة (kg)
3	|||	$40 \le m < 50$
6	𝍸		$50 \le m < 60$
9	𝍸 ||||	$60 \le m < 70$
7	𝍸 ||	$70 \le m < 80$
2	||	$80 \le m < 90$

b) تتراوح كتل 81% من المشتركين بين 50 kg وَ 80 kg، وعدد قليل من المشتركين كتلهم أقل من ذلك أو أكثر.

- أوضّح للطلبة أنه يمكن تلخيص خطوات تنظيم البيانات العددية في جداول تكرارية باتباع الآتي:
  » تحديد نوع البيانات العددية إن كانت متصلة أم منفصلة.
  » تحديد أصغر قيمة في البيانات، وأكبر قيمة فيها.
  » اختيار فئات مناسبة تشمل البيانات المستهدفة، على ألّا يقل عدد الفئات المختارة عن 4 فئات، وألّا يزيد عددها على 8، بحيث تحتوي الفئة الأولى أصغر قيمة في البيانات، وتحتوي الفئة الأخيرة أكبر قيمة في البيانات، إضافة إلى اختيار المتباينات المتصلة للتعبير عن الفئات إذا كانت البيانات عددية متصلة، واختيار فئات بينها فجوات للتعبير عن الفئات إذا كانت البيانات عددية منفصلة.
  » وضع إشارات عدّ مقابل كل فئة تمثّل عدد البيانات التي تحويها، وإيجاد مجموع الإشارات في عمود التكرار.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 1، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسأل الطلبة:
  » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 54
  » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 238
  » ما عدد الفئات متساوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههم إلى الفئات المُستعمَلة في تنظيم البيانات في كتاب الطالب.
- أكتب الجدول التكراري على اللوح، وأنظّم البيانات فيه مع الطلبة، ثم أسألهم:
  » كيف يمكن وصف البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش إجابات الطلبة عن السؤال السابق، وأعزّز الإجابات الصحيحة.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) الوارد في هامش المثال 1؛ لما له من أهمية في تنظيم البيانات في الجدول التكراري، وتحديد إن كان العدد يقع ضمن الفئة أم لا.
- في المثال 1، ألفت انتباه الطلبة إلى كتابة المتباينات بصورة متصلة للتعبير عن الفئات؛ لأن البيانات في المثال متصلة.
- أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال باختيار فئات متساوية الطول مختلفة عن الفئات التي اعتُمدت في كتاب الطالب، وملاحظة تأثير ذلك في الحكم على وصف توزيع البيانات.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.
- أذكّر الطلبة بأن القيم الحقيقية للبيانات لا تظهر في الجداول التكرارية ذات الفئات.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند استعمال المتباينات للتعبير عن فئات البيانات العددية المتصلة بإغلاق طرفي الفئة باستعمال رمز المساواة؛ لذا أؤكّد وبشكل مستمر جعل أحد طرفي الفئة مغلقًا والآخر مفتوحًا.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

إنشاءُ جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الفئاتِ تُستعمَلُ أيضًا لتجميعِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ وعرضِها عرضًا مُبسَّطًا، وأنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ تُستعمَلُ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المنفصلةِ والمُجمَّعةِ في فئاتٍ، بحيثُ تُقابِلُ كلُّ فئةٍ عددَ البياناتِ التي تحويها (التكرارُ). والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا ذا فئاتٍ متساويةِ الطولِ لتمثيلِ بياناتٍ منفصلةٍ.

أتذكَّرُ

البياناتُ المنفصلةُ هيَ بياناتٌ تأخذُ قِيَمًا مُحدَّدةً قابلةً للعَدِّ، مثلَ: عددِ الأخوةِ، وعددِ الكتبِ، وعددِ الأشجارِ.

مثال 2 : منَ الحياةِ

مكتباتٌ: في ما يأتي عددُ الكتبِ المُعارةِ منْ إحدى المكتباتِ العامّةِ في 18 يومًا:

23	45	31	37	63	54	36	60	49
50	32	45	40	38	37	41	53	57

1 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

الخطوةُ 1: أحدِّدُ أقلَّ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها.

أقلُّ قيمةٍ في البياناتِ هيَ: 23، وأكبرُ قيمةٍ فيها هيَ: 63

الخطوةُ 2: أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

أختارُ فئاتٍ تتساوى في الطولِ، وتشملُ جميعَ البياناتِ، مثلَ اختيارِ 5 فئاتٍ متساويةٍ في الطولِ.

وبما أنَّ البياناتِ منفصلةٌ، فإنَّني أعبِّرُ عنها كما في الجدولِ الآتي:

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ		
عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29		
30 – 39		
40 – 49		
50 – 59		
60 – 69		

أتذكَّرُ

عندَ تنظيمِ البياناتِ المنفصلةِ بالفئاتِ، أجعلُ فجواتٍ بينَ الفئاتِ. فمثلًا: تنتهي الفئةُ الأولى عندَ العددِ 29، وتبدأُ الفئةُ الثانيةُ عندَ العددِ 30

الخطوة 3: أضعُ إشـاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ البياناتِ التي تحويها، ثمَّ أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

عددُ الكتبِ المُعارةِ في إحدى المكتباتِ		
عددُ الكتبِ المُعارةِ	الإشاراتُ	التكرارُ
20 – 29	ǀ	1
30 – 39	卌 ǀ	6
40 – 49	卌	5
50 – 59	ǀǀǀǀ	4
60 – 69	ǀǀ	2

2 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

أُلاحِظُ منَ الجدولِ التكراريِّ أنَّ نسبةَ الأيامِ التي أعارَتِ المكتبةُ فيها ما يتراوحُ بينَ 30 إلى 59 كتابًا في اليومِ الواحدِ تزيدُ على 80% منَ أيامِ الإعارةِ.

أتحقَّقُ من فهمي

بنـكُ الطعامِ الأردنيُّ: في ما يأتي عددُ الأُسَـرِ المحتاجةِ التي حصلَـتْ على وجباتٍ منْ بنكِ الطعامِ الأردنيِّ في 22 يومًا: انظر الهامش.

41 24 13 14 15 16 30 17 56 18 19

24 22 12 20 27 17 34 10 18 72 16

a) أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

b) أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

معلومة

بنـك الطعـام الأردني
Jordanian Food Bank

يهدفُ بنكُ الطعامِ الأردنيُّ إلى القضاءِ على الجوعِ في الأردنِّ عنْ طريقِ توفيرِ الطعامِ للأُسَرِ المحتاجـةِ، ويهـدفُ أيضًا إلى نشـرِ الوعيِ حولَ كيفيةِ اسـتغلالِ الفائضِ منَ الغذاءِ فـي المؤتمـراتِ والأفراحِ والمناسـباتِ وإيصالِـهِ إلى الفقراءِ والمحرومينَ.

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

تعلَّمْتُ سـابقًا إيجادَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، وهيَ: الوسـطُ الحسابيُّ، والوسيطُ، والمنوالُ للبيانـاتِ المفردةِ. وبالرغمِ منْ أنَّ الجداولَ التكراريةَ ذاتَ الفئاتِ لا تظهرُ فيها القِيَمُ الحقيقيةُ للبياناتِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُها لتقديرِ كلٍّ منَ الوسطِ الحسابيِّ، والوسيطِ، والمنوالِ؛ إذْ يُمكِنُ النظرُ إلى جميعِ القِيَمِ في فئةٍ مُعيَّنةٍ (سواءٌ كانَتِ البياناتُ متصلةً أوْ منفصلةً) على أساسِ أنَّ كُلًّا منْها تساوي منتصفَ الفئةِ (مركزُ الفئةِ).

138

مثال 2: من الحياة

- أوضّـح للطلبة أنّهم تعلّموا فـي المثال 1 تنظيم بيانات عدديـة متصلة في جداول تكرارية، وأنّهم سـيتعلّمون فـي المثال 2 تنظيم بيانـات عددية منفصلة في جداول تكرارية.
- أطلـب إلى أحد الطلبة قراءة نـص المثال 2، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسأل الطلبة:
  - » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عدديـة منفصلة؛ لأنها بيانات تأخذ قيمًا محدّدة قابلة للعدّ.
  - » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 23
  - » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 63
  - » ما عدد الفئات متسـاوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقـش الطلبـة فـي إجابـة السـؤال السـابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسـبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههـم إلى الفئات المُسـتعمَلة في تنظيم البيانات في كتاب الطالب.
- أكتب الجدول التكـراري على اللوح، وأنظّم البيانات في الجدول مع الطلبة، ثم أسألهم:
  - » كيف يمكن وصف البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقـش إجابـات الطلبة عـن السـؤال السـابق، وأعزّز الإجابات الصحيحة.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 2):

a)

عدد الأسر المحتاجة		
عدد الأسر	الإشارات	التكرار
0–19	卌 卌 ǀǀ	12
20–39	卌 ǀǀ	7
40–59	ǀǀ	2
60–79	ǀ	1

b) ألاحظ من الجدول التكراري أن أكثر من 85% من أيام التوزيع يكون عدد الأسر التي تحصل على معونات من بنك الطعام في اليوم الواحد أقل من أو يساوي 39 أسرة.

تقديرُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ

مفهومٌ أساسيٌّ

- لتقديرِ الوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أستعملُ الصيغةَ الآتيةَ:

$$\mu = \frac{\sum(x \times f)}{\sum f}$$

حيثُ:

x: مركزُ الفئةِ.

f: التكرارُ المُقابِلُ لكلِّ فئةٍ.

- لتقديرِ المنوالِ لبياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجدُ مركزَ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا.
- لتقديرِ وسيطِ بياناتٍ مُنظَّمةٍ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ، أجدُ مركزَ الفئةِ التي تكرارُها التراكميُّ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي: $\frac{n+1}{2}$، حيثُ n مجموعُ التكراراتِ.

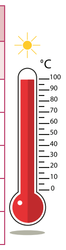
أتعلَّمُ

في هذا الدرسِ، أنظرُ إلى جميعِ البياناتِ بوصفِها تُمثِّلُ مجتمعًا إحصائيًّا، يُرمَزُ إلى وسطِهِ الحسابيِّ بالرمزِ μ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

طقسٌ: **يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأيامِ شهرِ آذارَ بحسبِ درجاتِ الحرارةِ (إلى أقربِ درجةٍ سلسيةٍ) في محافظةِ عجلونَ:**

درجاتُ الحرارةِ (T)	
درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ
$10 \le T < 12$	3
$12 \le T < 14$	7
$14 \le T < 16$	12
$16 \le T < 18$	5
$18 \le T < 20$	3



1 **أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لدرجاتِ الحرارةِ.**

أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما مراكزَ الفئاتِ ونواتجَ ضربِ التكراراتِ في مراكزِ الفئاتِ على النحوِ الآتي:

درجاتُ الحرارةِ (°C)	f	x	$f \times x$
$10 \le T < 12$	3	11	33
$12 \le T < 14$	7	13	91
$14 \le T < 16$	12	15	180
$16 \le T < 18$	5	17	85
$18 \le T < 20$	3	19	57
المجموعُ	30		446

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوقي (**أتذكّر**) الواردين في هامش المثال 2؛ لما لهما من أهمية في كتابة الفئات في الجدول التكراري بصورة منفصلة؛ لأن البيانات في المثال منفصلة.
- أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال باختيار فئات متساوية الطول مختلفة عن الفئات التي اعتُمِدت في كتاب الطالب، وملاحظة تأثير ذلك في الحكم على وصف توزيع البيانات.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (**أتحقّق من فهمي**) الذي يلي المثال 2، أعزّز وعي الطلبة بالتنمية المستدامة التي تسعى إلى القضاء على الجوع وتوفير الطعام للأُسَر المحتاجة، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن أهداف بنك الطعام الأردني، والأنشطة التي يقوم بها، وكتابة فقرة قصيرة توضّح كيف يمكن دعم عمله.

صيغةُ الوسطِ الحسابيِّ	$\mu = \dfrac{\sum(x \times f)}{\sum f}$
بالتعويضِ	$= \dfrac{446}{30}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	≈ 14.9

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لدرجاتِ الحرارةِ هوَ 14.9 °C تقريبًا.

2 أُقدِّرُ منوالَ درجاتِ الحرارةِ.

لتقديرِ المنوالِ، أبحثُ عنْ مركزِ الفئةِ الأكثرِ تكرارًا. وبالرجوعِ إلى البياناتِ في الجدولِ أعلاهُ، أُلاحِظُ أنَّ الفئةَ: $14 \leq t < 16$ تُقابِلُ أعلى تكرارٍ، وهوَ 12. وبذلكَ، فإنَّ المنوالَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، منوالُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

3 أُقدِّرُ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ.

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ التكرارِ التراكميِّ بإضافةِ عمودِ التكرارِ التراكميِّ كما في الجدولِ المجاورِ.

درجاتُ الحرارةِ (°C)	التكرارُ التراكميُّ
$10 \leq T < 12$	3
$12 \leq T < 14$	$3 + 7 = 10$
$14 \leq T < 16$	$3 + 7 + 12 = 22$
$16 \leq T < 18$	$3 + 7 + 12 + 5 = 27$
$18 \leq T < 20$	$3 + 7 + 12 + 5 + 3 = 30$

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ رتبةَ الوسيطِ.

رتبةُ الوسيطِ هيَ: $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{30+1}{2} = 15.5$.

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ.

بما أنَّ رتبةَ الوسيطِ هيَ 15.5 ، فإنَّ وسيطَ درجاتِ الحرارةِ يقعُ في الفئةِ: $14 \leq t < 16$؛ لأنَّ التكرارَ التراكميَّ لهذهِ الفئةِ هوَ أوَّلُ تكرارٍ تراكميٍّ أكبرَ منْ أوْ يساوي 15.5

وبذلكَ، فإنَّ الوسيطَ هوَ مركزُ هذهِ الفئةِ تقريبًا.

إذنْ، وسيطُ درجاتِ الحرارةِ هوَ 15 تقريبًا.

أتعلَّمُ

عندَ ترتيبِ المشاهداتِ تصاعديًّا بحسبِ قِيَمِها، فإنَّ رتبةَ المشاهدةِ هيَ ترتيبُ موقعِها في مجموعةِ البياناتِ. وبما أنَّ القِيَمَ الدقيقةَ للبياناتِ في هذا المثالِ غيرُ معلومةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحديدُ الفئةِ التي تقعُ فيها المشاهدةُ عنْ طريقِ رتبتِها، وإنشاءِ جدولِ تكرارٍ تراكميٍّ.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلّم**) الوارد في هامش المفهوم الأساسي، وأؤكّد أن جميع البيانات الواردة في أمثلة أو أسئلة هذا الدرس سيُنظَر إليها على أنها تمثّل مجتمعًا إحصائيًا وليس عينة منه، وأذكّرهم بالرموز المُستعمَلة للوسط الحسابي بوصفه معلمة لمجتمع أو بوصفه معلمة لعيّنة من المجتمع الإحصائي.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتعلم**) الوارد في هامش المثال 3؛ لما له من أهمية في توضيح مفهوم رتبة المشاهدة، وعلاقته بتقدير قيمة الوسيط في الجداول التكرارية ذات الفئات.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة تحديد الفئة التي يقع فيها وسيط البيانات؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأوضّح لهم أهمية تحديد رتبة الوسيط أولًا، ثم البحث عن أول فئة تكرارها التراكمي أكبر من أو يساوي رتبة الوسيط.

مثال 3: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن إيجاد الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات المُفردة، وأقدّم لهم مثالًا على ذلك.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن تقدير الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال للبيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية؛ لأن الفئات لا تُظهر القيم الحقيقية للبيانات، ولكن يمكن النظر إلى جميع القيم في فئة معينة على أساس أنها تساوي مركز الفئة.
- أوضّح للطلبة كيفية تقدير مقاييس النزعة المركزية لبيانات مُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات، بالاستعانة بصندوق (**مفهوم أساسي**) الوارد في كتاب الطالب.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أكتب الجدول التكراري ذا الفئات الخاص بالمثال على اللوح، وأسأل الطلبة:
  - » ما نوع البيانات؟ لماذا؟ عددية متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  - » ما الفئة الأكثر تكرارًا؟ $14 \leq T < 16$
- أطلب إلى أحد الطلبة أن يضيف عمودين إلى الجدول الذي على اللوح، ويكتب في أحدهما مراكز الفئات، ثم أطلب إلى طالب آخر/ طالبة أخرى كتابة نواتج ضرب التكرارات في مراكز الفئات في العمود الآخر.
- أطلب إلى أحد الطلبة تقدير قيمة الوسط الحسابي للبيانات المُنظَّمة في الجدول.
- أذكّر الطلبة أن منوال البيانات المُنظَّمة في جدول هو مركز الفئة الأكثر تكرارًا، ثم أطلب إلى أحد الطلبة تحديده، وأذكّرهم أن قيمته تقريبية.
- أوضّح للطلبة أننا نحتاج إلى إنشاء جدول تكرار تراكمي لتقدير وسيط البيانات المُنظَّمة في الجداول التكرارية ذات الفئات، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إنشاءه.
- أطلب إلى أحد الطلبة تحديد رتبة الوسيط، ثم أطلب إلى آخر تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط، والتي يمثّل مركزها تقديرًا للوسيط.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (4 – 1) والمسائل (10 – 8) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 – 15).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 19 (**أكتشف الخطأ**)، أوجّه الطلبة إلى تحديد نوع البيانات أولًا؛ لمساعدتهم على تحديد الحل الصحيح.
- في السؤال 20 (**تبرير**)، أوجّه الطلبة إلى تقدير الوسط الحسابي للمسافات التي قطعها اللاعب، ومقارنته بثلث مسافة السباق.

أتحقَّقُ من فهمي

حلوياتٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لكتلِ كعكاتٍ في أحدِ المخابزِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ غرامٍ:

كتلُ الكعكاتِ (m)	
التكرارُ	الكتلُ (g)
4	$300 \le m < 400$
7	$400 \le m < 500$
6	$500 \le m < 600$
3	$600 \le m < 700$

a) أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للكتلِ. 490 g

b) أُقدِّرُ منوالَ الكتلِ. 450

c) أُقدِّرُ وسيطَ الكتلِ. 450

أتدرَّبُ وأحلُّ المسائلَ

أوراقٌ: في ما يأتي أطوالُ مجموعةٍ منْ أوراقِ الشجرِ بالسنتيمترِ: (1, 2) أنظر الهامش.

11.4	6.3	9.8	13.2	8.5	16.3	5.4	7.9	10.2	11.5	8.6	7.0
8.7	12.1	9.9	8.7	10.7	8.5	11.2	14.8	17.2	12.6	10.4	8.7

1. أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
2. أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

مقالاتٌ: في ما يأتي عددُ الكلماتِ في مقالاتٍ كتبَها الطلبةُ المُتقدِّمونَ لمسابقةِ المقالةِ القصيرةِ: (3, 4) أنظر الهامش.

495	511	483	502	500	496	532	498	496
499	503	521	487	518	526	508	514	503

3. أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.
4. أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

1)

أطوال أوراق الشجر (l)		
التكرار	الإشارات	الأطوال
1	|	$3 \le l < 6$
9	卌 ||||	$6 \le l < 9$
8	卌 |||	$9 \le l < 12$
4	||||	$12 \le l < 15$
2	||	$15 \le l < 18$

2) أطوال 87.5% من أوراق الشجر أكبر من أو يساوي 6 وأقل من 15، وعدد قليل منها طوله أقل من ذلك أو أكثر.

3)

عدد كلمات مقالات الطلبة		
التكرار	الإشارات	عدد الكلمات
2	||	480–489
5	卌	490–499
5	卌	500–509
3	|||	510–519
2	||	520–529
1	|	530–539

4) ثُلثا المقالات تقريبًا عدد كلماتها من 490 كلمة إلى 519 كلمة، وعدد قليل من المقالات تتضمن كلمات أقل من ذلك أو أكبر.

عياداتٌ طبيةٌ: في ما يأتي أعمارُ المُراجعينَ لعيادةٍ في أحدِ المستشفياتِ خلالَ أحدِ الأيامِ:

51	62	54	55	45	58	53	41	64	44
49	52	47	43	52	49	37	58	47	50
58	51	62	56	44	47	50	53	58	52

5 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ. (5–7) أنظر الهامش.

6 أستعملُ الجدولَ التكراريَّ لوصفِ توزيعِ البياناتِ.

7 أُعيدُ تنظيمَ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ، بحيثُ أختارُ فئاتٍ ذاتَ أطوالٍ تختلفُ عنْ أطوالِ الفئاتِ في السؤالِ 5، ثمَّ أُحدِّدُ الجدولَ الذي تُعرَضُ فيهِ البياناتُ بصورةٍ أفضلَ.

أزهارٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأطوالِ مجموعةٍ منْ أزهارِ النرجسِ، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:

أطوالُ أزهارِ النرجسِ (t)	
الطولُ (cm)	**التكرارُ**
$10 \le t < 14$	21
$14 \le t < 18$	57
$18 \le t < 22$	65
$22 \le t < 26$	52
$26 \le t < 30$	12

8 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ لأطوالِ الأزهارِ. 19.6

9 أُقدِّرُ منوالَ أطوالِ الأزهارِ. 20

10 أُقدِّرُ وسيطَ أطوالِ الأزهارِ. 20

كتبٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لأعدادِ الكتبِ التي اشتراها 25 شخصًا منْ مكتبةِ زيادٍ في أحدِ الأيامِ:

عددُ الكتبِ المَبيعةِ	
عددُ الكتبِ	**التكرارُ**
1 – 3	10
4 – 6	8
7 – 9	4
10 – 12	1
13 – 15	2

11 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ. 5.24

12 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ. 2

13 أُقدِّرُ وسيطَ البياناتِ. 5

14 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (14 – 11), 6, 5 كتاب التمارين: 7, 5, 3, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 19 ,(13 – 11) ,(7 – 5) كتاب التمارين: 8, 6, 3, 1
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 – 15) كتاب التمارين: 9, 6, 4, 1

إجابة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل):

5)

أعمار المراجعين لعيادة طبية (n)		
الأعمار	**الإشارات**	**التكرار**
$34 \le n < 42$	||	2
$42 \le n < 50$	𝍸 ||||	9
$50 \le n < 58$	𝍸 𝍸 ||	12
$58 \le n < 66$	𝍸 ||	7

6) حوالي 93% من المراجعين أعمارهم 42 عامًا أو أزيد.

7)

أعمار المراجعين لعيادة طبية (n)		
الأعمار	**الإشارات**	**التكرار**
$36 \le n < 41$	|	1
$41 \le n < 46$	𝍸	5
$46 \le n < 51$	𝍸 ||	7
$51 \le n < 56$	𝍸 ||||	9
$56 \le n < 61$	𝍸	5
$61 \le n < 66$	|||	3

عرض البيانات في هذا الجدول أفضل؛ لأن أغلب البيانات توزّعت على 6 فئات بدلًا من 4 فئات كما في السؤال 5 وهذا يجعل وصف البيانات وتقدير مقاييس النزعة المركزية لها باستعمال هذا الجدول أكثر دقة.

14) (1)

الزمن المُستغرَق لإنهاء لعبة تركيب (t)		
الزمن (min)	**الإشارات**	**التكرار**
$45 \le t < 75$	𝍸	5
$75 \le t < 105$	𝍸 ||||	9
$105 \le t < 135$	|||	3
$135 \le t < 165$	|	1
$165 \le t < 195$	||	2

(2) 70% من الأطفال يستغرقون أقل من 105 دقائق في تركيب اللعبة.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

» **يبيّن الجدول الآتي توزيعًا للنقاط التي حققها مجموعة من اللاعبين/ اللاعبات في إحدى المسابقات:**

التكرار	النقاط
8	0 – 9
5	10 – 19
10	20 – 29
5	30 – 39
2	40 – 49

» إذا علمتُ أن تبديلًا جرى بين موقعي تكرار فئتين في الجدول بالخطأ، وأدّى ذلك إلى زيادة في تقدير الوسط الحسابي للبيانات بمقدار 1.7 تقريبًا، فأي تكرارين بُدِّل بين موقعيهما؟ أبرّر إجابتي. الخطأ في موقع تكراري الفئتين 10–19 و 20–29؛ لأن الوسط الحسابي للبيانات في الوضع الحالي 20.5، والوسط الحسابي عند تبديل تكراري الفئتين 18.8 تقريبًا، وهذا يجعل الفارق بين الوسطين الحسابيين يساوي 1.7 تقريبًا.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 4 و 5 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» **أقدّر الوسط الحسابي والمنوال والوسيط للبيانات الواردة في الجدول الآتي:**

التكرار	z
9	1 – 20
13	21 – 40
21	41 – 60
34	61 – 80
17	81 – 100

الوسط الحسابي: 58.37 تقريبًا.

الوسيط: 70.5 تقريبًا.

المنوال: 70.5 تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تبريرٌ: اختبرَ قسمُ الجودةِ في مصنعٍ لإنتاجِ المصابيحِ الكهربائيةِ 100 مصباحٍ لتعرُّفِ إذا كانَ مُتوسِّطُ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ أكثرَ منْ 200 ساعةٍ، ثمَّ نظَّمَ النتائجَ التي توصَّلَ إليْها في الجدولِ المجاورِ:

العمرُ الافتراضيُّ للمصابيحِ (h)

التكرارُ	العمرُ (h)
24	$150 \le h < 175$
45	$175 \le h < 200$
18	$200 \le h < 225$
10	$225 \le h < 250$
3	$250 \le h < 275$

15 أُقدِّرُ منوالَ أعمارِ المصابيحِ. 187.5

16 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لأعمارِ المصابيحِ. 193.25

17 أجدُ النسبةَ المئويةَ للمصابيحِ التي عمرُها الافتراضيُّ أكثرُ منْ أوْ يساوي 200 ساعةٍ، مُبرِّرًا إجابتي. 31%

18 هلْ يُمكِنُ استنتاجُ أنَّ مُتوسِّطَ العمرِ الافتراضيِّ للمصابيحِ هوَ أكثرُ منْ 200 ساعةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
لا؛ لأن النسبة المئوية للمصابيح التي متوسط عمرها الافتراضي أكبر من 200 ساعة يساوي 31% وهو أقل من 50%

19 أكتشفُ الخطأَ: في ما يأتي عددُ الدقائقِ (مُقرَّبةً إلى أقربِ دقيقةٍ) التي استغرقَها بعضُ المُتسابِقينَ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

55	60	61	59	58	53	52	59	55	57	54
54	61	58	57	58	54	58	57	60	59	57

نظَّمَ كلٌّ منْ رامي وفيصلٍ البياناتِ كما هوَ مُبيَّنٌ تاليًا. أيُّهُما نظَّمَ البياناتِ بصورةٍ صحيحةٍ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

رامي
52 – 54
55 – 57
58 – 60
61 – 63

فيصلٌ
$52 \le t < 54$
$54 \le t < 56$
$56 \le t < 58$
$58 \le t < 60$
$60 \le t < 62$

نظّم فيصل البيانات بصورة صحيحة؛ لأن البيانات متصلة ونظّمها باستعمال المتباينات، أما رامي فنظّمها بجعل فجوات بين الفئات المتتالية.

20 تبريرٌ: يتدرَّبُ لاعبٌ يوميًّا على سباقٍ طويلِ المسافةِ (الماراثونُ) طولُهُ 21 km. يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا للمسافةِ (إلى أقربِ كيلومترٍ) التي يقطعُها اللاعبُ كلَّ يومٍ خلالَ شهرٍ كاملٍ. إذا وجدَ اللاعبُ أنَّهُ منَ الأفضلِ أنْ يقطعَ مسافةً كلَّ يومٍ تُعادِلُ في مُتوسِّطِها ثلثَ مسافةِ السباقِ، فهلْ يعني ذلكَ أنَّهُ تدرَّبَ بصورةٍ كافيةٍ في هذا الشهرِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

التكرارُ	المسافةُ (km)
3	$0 \le d < 5$
8	$5 \le d < 10$
13	$10 \le d < 15$
5	$15 \le d < 20$
2	$20 \le d < 25$

تدرّب بشكل كاف؛ لأن الوسط الحسابي للتدريب اليومي يساوي 11.7 km وهذا يزيد على ثُلث مسافة السباق التي تساوي 7 km والتي يهدف إلى أن يتدرّبها يوميًا.

الدرس 3

المُدرَّجاتُ التكراريةُ
Histograms

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ البياناتِ المتصلةِ المُنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ.

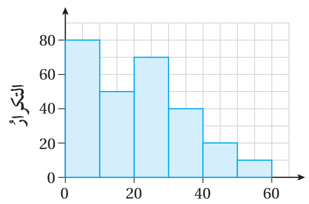
المصطلحاتُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ، الكثافةُ التكراريةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ توزيعًا لمجموعةٍ منَ الشققِ السكنيةِ في إحدى المناطقِ تبعًا لمساحةِ كلٍّ منْها. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ مُخطَّطٍ تكراريٍّ.

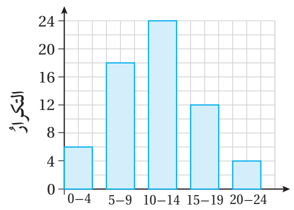
التكرارُ	المساحةُ (m^2)
15	$70 \le t < 100$
18	$100 \le t < 150$
12	$150 \le t < 250$
6	$250 \le t < 300$

المُدرَّجاتُ التكراريةُ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُخطَّطاتِ التكراريةَ هيَ أكثرُ الطرائقِ شيوعًا لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ والمنفصلةِ والمُمثَّلةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ.



أستعملُ تدريجًا متصلًا للبياناتِ المتصلةِ.



أستعملُ تدريجًا منفصلًا للبياناتِ المنفصلةِ.

أتعلَّمُ
تُستعمَلُ المُدرَّجاتُ التكراريةُ لتمثيلِ البياناتِ المتصلةِ أصلًا، حتى لو كانَتْ قِيَمُها مُقرَّبةً إلى أعدادٍ صحيحةٍ.

يُطلَقُ على المُخطَّطاتِ التكراريةِ المُستعمَلةِ لعرضِ البياناتِ العدديةِ المتصلةِ والمنظَّمةِ في جداولَ تكراريةٍ اسمُ **المُدرَّجاتِ التكراريةِ** (histograms). سأتعلَّمُ في هذا الدرسِ تمثيلَ نوعينِ منْها، هما: المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ، والمُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرّف المُدرَّجات التكرارية.
- تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول بمدرَّجات تكرارية.
- تعرّف مفهوم الكثافة التكرارية، وتوظيفه في تمثيل البيانات العددية المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية الطول بمُدرَّجات تكرارية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف البيانات العددية المتصلة والمنفصلة.
- تنظيم بيانات عددية متصلة ومنفصلة في جداول تكرارية ذات فئات متساوية الطول، وتمثيلها باستعمال المخططات التكرارية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أذكّـر الطلبـة بأنـواع التمثيلات البيانيـة التي تعلّموها سـابقًا (التمثيـل بالصور، الأعمـدة البيانية، القطاعات الدائرية، التمثيل بالنقاط، الخطوط البيانية، السـاق والورقة، الصندوق ذو العارضتين، المخطط التكراري)، وأسجّلها على اللوح.
- أقسّـم الطلبة إلـى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة تحديـد نوع البيانات الذي يمكن تمثيله عن طريق هذه التمثيلات.
- أناقش الإجابات مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ماذا يمثّل الجدول؟ توزيعًا لمجموعة من الشـقق السـكنية في إحدى المناطق تبعًا لمساحة كلّ منها.
  - هل المساحة بيانات عددية متصلة أم منفصلة؟ متصلة.
  - هل الفئات في الجدول متساوية في الطول؟ لا.
  - كيـف يمكن تمثيل بيانات متصلة مُنظَّمة في جدول تكراري ذي فئات غير متسـاوية الطول باستعمال مخطط تكراري؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  - مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سـابقًا عن تمثيل البيانات المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات فئات باسـتعمال المخططـات التكراريـة، ثم أوجّههـم إلى تأمّـل المخططين التكراريـن الواردين فـي الصفحة 144 مـن كتـاب الطالب (أو أسـتعين **بورقة المصـادر 8: المدرجـات التكرارية**)؛ لتذكيرهم أنّنا نسـتعمل المخططـات التكراريـة المنفصلـة (يوجـد فراغات بيـن أعمدة المخطـط) لتمثيل البيانـات العددية المنفصلة، ونستعمل المخططات التكرارية المتصلة (لا يوجد فراغات بين أعمدة المخطط) لتمثيل البيانات العددية المتصلة.
- أبيّـن للطلبـة أنّه يُطلَق علـى المخططات التكرارية المُسـتعمَلة لتمثيل البيانات العددية المتصلة اسـم (**المدرجـات التكراريـة**)، وأن لهـذه المُدرَّجـات نوعين، أولهمـا المُدرَّجات التكراريـة ذات الفئات متسـاوية الطول (وهي التي تعلّموا تمثيلها سابقًا في الصف السادس)، وثانيهما المُدرَّجات التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول التي سيتعلّمون تمثيلها في هذا الدرس.

ملاحظاتي

الوحدةُ 8

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ مُتساويةِ الطولِ

عنـدَ تمثيلِ البياناتِ العدديـةِ المتصلةِ والمُجمَّعـةِ في فئاتٍ بمُدرَّجـاتٍ تكراريةٍ عنْ طريقِ استعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ، يجبُ استعمالُ تدريجٍ متصلٍ على المحورِ الأفقيِّ، وهذا يعني عدمَ وجودِ فراغاتٍ بينَ أعمدةِ المُدرَّجِ.

مثال 1 : منَ الحياةِ

أطوالٌ: **في ما يأتي أطوالُ 50 طالبًا، مُقرَّبةً إلى أقربِ سنتيمترٍ:**

166	166	155	156	177	160	148	160	157	145
162	152	172	159	155	152	142	160	162	170
154	150	173	144	163	170	155	175	152	180
170	155	168	147	182	155	164	154	162	136
180	158	142	160	160	144	175	163	175	160

1 **أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.**

الخطـوةُ 1: أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ.

أُحدِّدُ أصغرَ قيمةٍ في البياناتِ، وأكبرَ قيمةٍ فيها. بعدَ ذلكَ أختارُ فئاتٍ مناسبةً تشملُ جميعَ البياناتِ المُستهدَفةِ.

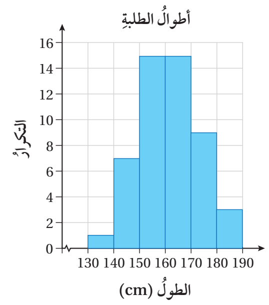
أطوالُ الطلبةِ (h)

التكرارُ	الطولُ (cm)
1	$130 \le h < 140$
7	$140 \le h < 150$
15	$150 \le h < 160$
15	$160 \le h < 170$
9	$170 \le h < 180$
3	$180 \le h < 190$

الخطوةُ 2: أرسـمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسـفلَ المحورِ الأفقـيِّ، ثمَّ أضعُ تدريجًا مناسبًا للمحورِ الرأسيِّ.

الخطـوةُ 3: أُسمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.

الخطوةُ 4: أرسـمُ عمودًا يُمثِّـلُ ارتفاعُهُ تكرارَ كلِّ فئةٍ.



أتذكَّرُ

إذا بـدأَتِ البياناتُ بعددٍ أكبـرَ منَ الصفـرِ، فإنَّني أبدأُ التدريجَ على المحورِ بعـددٍ أكبرَ مـنَ الصفرِ، مشـيرًا إلى ذلـكَ بخطٍّ مُتعرِّجٍ .

- أطلـب إلى أحد الطلبة قراءة نـص المثال 1، ثم أكتب البيانات على اللوح، وأسألهم:
  - » ما نـوع البيانات؟ لماذا؟ عدديـة متصلة؛ لأنها بيانات غير قابلة للعدّ ولكنها قابلة للقياس.
  - » ما أصغر قيمة في البيانات؟ 136
  - » ما أكبر قيمة في البيانات؟ 182
  - » ما عدد الفئات متسـاوية الطول المناسب لتنظيم البيانات؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبـة فـي إجابـة السـؤال السـابق، وأتوصّل معهم إلى الفئات المناسـبة لتنظيم البيانات، ويمكنني توجيههـم إلى الفئات المُسـتعمَلة في تنظيـم البيانات في كتاب الطالب.
- أرسم على اللوح محورًا أفقيًّا وآخر عموديًّا، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما التدريج المناسـب للمحور الأفقي؟ تدريجه بحسب الفئات في الجدول.
  - » مـا التدريـج المناسـب للمحـور العمودي؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش إجابـات الطلبـة عـن السـؤالين السـابقين، وأتوصّـل معهـم إلى تدريـج المحور الأفقي بحسـب فئات الجدول مع الانتباه إلى بدء التدريج بالعدد 130 الـذي يمثّل بداية الفئـة الأولى، وضـرورة وضع خط متعرج للإشارة إلى ذلك، ثم تدريج المحور العمودي اثنينـات بداية من العدد 0 وصـولًا إلى العدد 16؛ لأن هـذا التدريـج يناسـب تكـرارات البيانات، ثـم أختار مع الطلبة اسـمًا مناسـبًا لكلّ مـن المحورين والتمثيل البياني.
- أطلـب إلـى أحـد الطلبـة تمثيـل الأعمـدة التـي تمثّل تكـرارات الفئـات، ثـم أطلـب إلـى الطلبـة وصـف البيانات.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- في المثال 1، أذكّر الطلبة عند تمثيل البيانات بمُدرَّج تكراري بأنه يلزم استعمال تدريج متصل بالمحور الأفقي، وعدم جعل فراغات بين أعمدة المُدرَّج.
- يساعد استعمال لوح متنقّل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المُدرَّجات التكرارية، ويوفّر الوقت المُستنفَد في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما، ويمكن إعداده بسهولة برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المقوّى، ثمّ تغطيته بلاصق شفاف.
- أوجّه الطلبة إلى استعمال أوراق المربعات المُرفَقة في كتاب التمارين عند تمثيل المُدرَّجات التكرارية.
- أذكّر الطلبة بأنه يمكن وصف توزيع البيانات في الجدول التكراري ذي الفئات بأكثر من طريقة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

---

2 أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

تقعُ أطوالُ أكثرَ منْ نصفِ الطلبةِ بينَ 150 cm و 170 cm، في حينِ أنَّ طولَ عددٍ قليلٍ منْهُمْ يكونُ أكثرَ منْ 180 cm، أوْ أقلَّ منْ 140 cm.

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ في المثال 1 هيَ: 10:70:150:150:90:30، وأنَّ النسبةَ بينَ التكراراتِ هيَ: 1 : 7 : 15 : 15 : 9 : 3، وهذا يعني أنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ متناسبةٌ معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ، وسألحظُ أهميةَ ذلكَ في المثالِ التالي.

أتحقَّقُ منْ فهمي

وقتٌ: في ما يأتي الزمنُ (مُقرَّبًا إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي تستغرقُهُ 30 طالبةً للوصولِ إلى المدرسةِ:

أنظر الهامش.

6	18	29	55	7	34	28	56	33	4
2	41	33	23	7	43	26	53	4	41
32	46	16	17	3	26	17	47	22	17

a) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ.

b) أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

المُدرَّجاتُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ

في بعضِ الأحيانِ، تُجمَّعُ البياناتُ المتصلةُ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ غيرِ متساويةٍ في الطولِ. وفي هذهِ الحالةِ، يتعيَّنُ تمثيلُ هذهِ البياناتِ بمُدرَّج تكراريٍّ ذي فئاتٍ غيرِ مُتساويةِ الطولِ. ولكنْ، إذا مُثِّلَتِ البياناتُ باستعمالِ تكراراتِها، فإنَّ التمثيلَ الناتجَ يكونُ مُضلِّلًا؛ لأنَّ النسبةَ بينَ مساحاتِ الأعمدةِ لا تكونُ متناسبةً معَ النسبةِ بينَ التكراراتِ. وهنا تظهرُ الحاجةُ إلى إيجادِ **الكثافةِ التكراريةِ** (frequency density) لكلِّ فئةٍ، وذلكَ بقسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها كما يأتي:

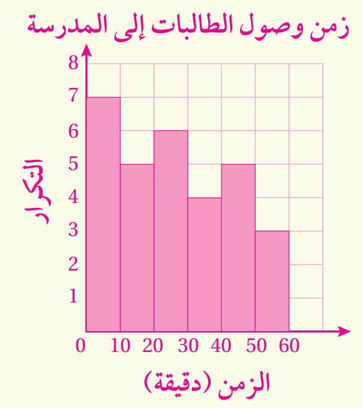
$$\frac{\text{(تكرارَ الفئةِ)}}{\text{(طولِ الفئةِ)}} = \text{(الكثافةُ التكراريةُ)}$$

عندَ تمثيلِ الجداولِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ المتساويةِ في الطولِ بمُدرَّجاتٍ تكراريةٍ، فإنَّ المحورَ y يُسمّى الكثافةَ التكراريةَ، وإنَّ ارتفاعَ كلِّ عمودٍ يُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ لفئتِهِ.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):

a)

زمن وصول الطالبات إلى المدرسة (t)	
الزمن (دقيقة)	التكرار
$0 \le t < 10$	7
$10 \le t < 20$	5
$20 \le t < 30$	6
$30 \le t < 40$	4
$40 \le t < 50$	5
$50 \le t < 60$	3



b) 90% من الطالبات يصلن إلى المدرسة بزمن يقل عن 50 دقيقة.

مثال 2 : منَ الحياةِ

أحياءٌ: قاسَتْ عالِمةُ أحياءٍ أطوالَ 48 دودةَ أرضٍ، ثمَّ نظَّمَتِ البياناتِ التي توصَّلَتْ إليْها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

الطولُ (cm)	التكرارُ
$15 \le t < 20$	6
$20 \le t < 30$	14
$30 \le t < 40$	26
$40 \le t < 60$	2

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولًا بإضافةِ عمودينِ إلى الجدولِ المعطى، أُنظِّمُ فيهما أطوالَ الفئاتِ والكثافةَ التكراريةَ على النحوِ الآتي:

الطولُ (cm)	التكرارُ	طولُ الفئةِ	الكثافةُ التكراريةُ
$15 \le t < 20$	6	5	1.2
$20 \le t < 30$	14	10	1.4
$30 \le t < 40$	26	10	2.6
$40 \le t < 60$	2	20	0.1

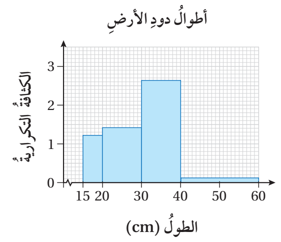
أتعلَّم

طولُ الفئةِ الأولى هوَ: $20 - 15 = 5$. وبالطريقةِ نفسِها يُمكِنُ إيجادُ أطوالِ بقيةِ الفئاتِ.

الخطوةُ 2: أرسمُ محورًا أفقيًّا وآخرَ عموديًّا، ثمَّ أكتبُ الفئاتِ أسفلَ المحورِ الأفقيِّ، ثمَّ أضعُ تدريجًا مناسبًا للمحورِ الرأسيِّ.

الخطوةُ 3: أُسمّي كُلًّا منَ المحورينِ، ثمَّ أكتبُ عنوانًا مناسبًا للمُدرَّجِ التكراريِّ.

الخطوةُ 4: أرسمُ عمودًا يُمثِّلُ ارتفاعُهُ الكثافةَ التكراريةَ لكلِّ فئةٍ.



أتحقَّقُ منْ فهمي

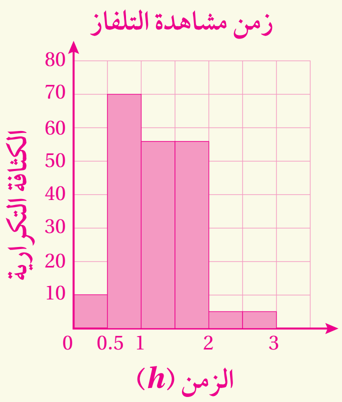
تلفازٌ: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ (بالساعاتِ) الذي يستغرقُهُ 100 شخصٍ يوميًّا في مشاهدةِ التلفازِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ. أنظر الهامش.

الزمنُ (h)	التكرارُ
$0 \le h < 0.5$	5
$0.5 \le h < 1$	35
$1 \le h < 2$	56
$2 \le h < 3$	4

147

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 2):

زمن مشاهدة التلفاز			
الزمن (h)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$0 \le h < 0.5$	5	0.5	10
$0.5 \le h < 1$	35	0.5	70
$1 \le h < 2$	56	1	56
$2 \le h < 3$	4	1	4



مثال 2: من الحياة

- أطلب إلى الطلبة إيجاد مساحة كل عمود من أعمدة المُدرَّج التكراري في المثال 1، ثم كتابة النسبة بين هذه المساحات على النحو الآتي:

$$10 : 70 : 150 : 150 : 90 : 30$$

- ثم أطلب إليهم كتابة النسبة بين التكرارات على النحو الآتي:

$$1 : 7 : 15 : 15 : 9 : 3$$

- أسأل الطلبة: ما العلاقة بين النسبة بين مساحات الأعمدة والنسبة بين التكرارات؟ النسبتان متناسبتان.
- أوضّح للطلبة أن النسبة بين مساحات الأعمدة والتكرارات تكون متناسبة في المُدرَّجات التكرارية المُمثِّلة للبيانات المتصلة المُنظَّمة في جداول تكرارية ذات الفئات متساوية الطول، وهذا يعني بالضرورة أن المُدرَّج التكراري حقيقي وغير مضلّل، ولكن في بعض الحالات الإحصائية يلزم تجميع البيانات المتصلة في جداول تكرارية ذات فئات غير متساوية في الطول، والتي إذا مُثِّلت في مُدرَّج تكراري ذي فئات غير متساوية في الطول باستعمال تكراراتها، فإن المُدرَّج التكراري الناتج يكون مضلّلًا، لذا يلزم إيجاد ما يُسمّى **(الكثافة التكرارية لكل فئة)** التي تنتج من قسمة تكرار الفئة على طولها، والتي تسهم في ضمان أن يكون المُدرَّج التكراري المُمثِّل للجدول التكراري ذي الفئات غير المتساوية غير مضلّل.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 2، ثم أكتب الجدول التكراري ذا الفئات الخاص بالمثال على اللوح، ثم أضيف عمودين إلى الجدول أنظّم فيهما أطوال الفئات والكثافة التكرارية بمساعدة الطلبة.
- أرسم على اللوح محورًا أفقيًّا وآخر عموديًّا، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما التدريج المناسب للمحور الأفقي؟ تدريجه بحسب الفئات في الجدول.
  - » ما التدريج المناسب للمحور العمودي؟ ستختلف إجابات الطلبة.

- أناقش إجابات الطلبة عن السؤالين السابقين، وأتوصّل معهم إلى تدريج المحور الأفقي بحسب فئات الجدول مع الانتباه إلى بدء التدريج بالعدد 15 الذي يمثّل بداية الفئة الأولى، وضرورة وضع خط متعرج للإشارة إلى ذلك، ثم تدريج المحور العمودي واحدات بداية من العدد 0 وصولًا إلى العدد 3؛ لأن هذا التدريج يناسب الكثافة التكرارية للبيانات، ثم أختار مع الطلبة اسمًا مناسبًا لكل من المحورين والتمثيل البياني.
- أطلب إلى أحد الطلبة تمثيل الأعمدة التي تمثّل الكثافة التكرارية للفئات.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

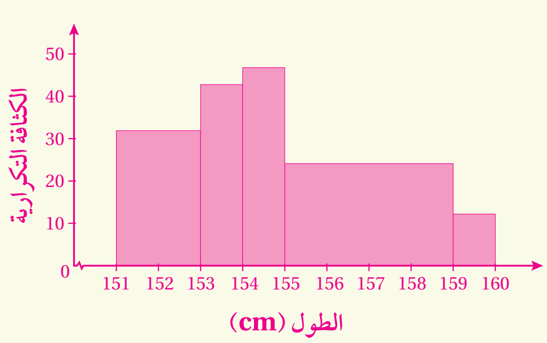
إرشاد: ألفت انتباه الطلبة عند تمثيل الجداول التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول بمُدرَّجات تكرارية، إلى أن المحور y يُسمّى (**الكثافة التكرارية**).

مثال إضافي:

» **يبيّن الجدول الآتي أطوال مجموعة من الطلبة بالسنتيمتر. أمثّل الجدول باستعمال المُدرَّج التكراري.**

التكرار (f)	الطول (h)
64	$151 \leq h < 153$
43	$153 \leq h < 154$
47	$154 \leq h < 155$
96	$155 \leq h < 159$
12	$159 \leq h < 160$

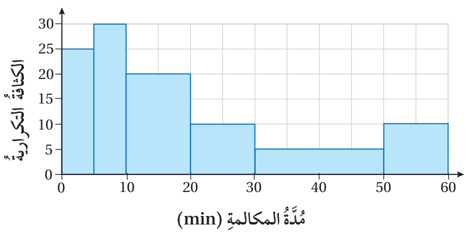
الحل:



يُمكِنُ استعمالُ المُدرَّجاتِ التكراريةِ ذاتِ الفئاتِ غيرِ مُتساويةِ الطولِ لتفسيرِ البياناتِ التي يُمثِّلُها المُدرَّجُ التكراريُّ.

مثال 3 : منَ الحياةِ

مكالماتٌ: أُجرِيَ مسحٌ على مجموعةٍ منَ الأشخاصِ لتحديدِ مُدَدِ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ الأخيرةِ، ثمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليْها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ الآتي:



1 **كمْ شخصًا شاركَ في عمليةِ المسحِ؟**

بما أنَّ ارتفاعاتِ الأعمدةِ لا تُمثِّلُ التكراراتِ، وإنَّما تُمثِّلُ الكثافةَ التكراريةَ للفئةِ، فإنَّهُ يتعيَّنُ إيجادُ تكرارِ كلِّ فئةٍ، وذلكَ بإيجادِ مساحةِ كلِّ عمودٍ، علمًا بأنَّ مجموعَ هذهِ المساحاتِ يُمثِّلُ عددَ الأشخاصِ الذينَ شاركوا في عمليةِ المسحِ:

$$A = (25 \times 5) + (30 \times 5) + (20 \times 10) + (10 \times 10) + (5 \times 20) + (10 \times 10)$$ مجموعُ مساحاتِ الأعمدةِ

$$= 775$$ بالتبسيطِ

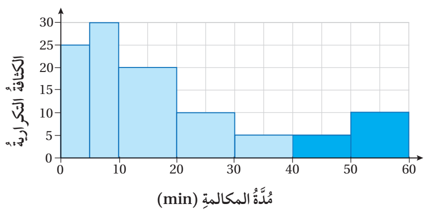
إذنْ، شاركَ في عمليةِ المسحِ 775 شخصًا.

أتعلَّمُ

بما أنَّ الكثافةَ التكراريةَ تُمثِّلُ ناتجَ قسمةِ تكرارِ الفئةِ على طولِها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ تكرارِ الفئةِ بضربِ الكثافةِ التكراريةِ للفئةِ في طولِ الفئةِ، وهذا يُمثِّلُ مساحةَ العمودِ المُمثِّلِ للفئةِ.

2 **أجدُ عددَ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً.**

لإيجادِ عددِ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً، أجدُ مساحةَ العمودينِ المُظلَّلينِ باللونِ الأزرقِ الغامقِ في الشكلِ المجاورِ:



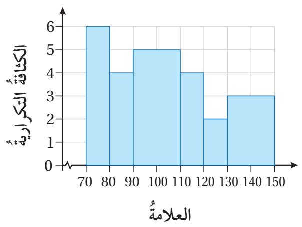
$A = (10 \times 5) + (10 \times 10)$ مجموعُ مساحتي العمودينِ

$= 150$ بالتبسيطِ

إذنْ، عددُ الأشخاصِ الذينَ تزيدُ مُدَدُ مكالماتِهِمُ الهاتفيةِ على 40 دقيقةً هوَ 150 شخصًا.

أتحقَّقُ من فهمي

علاماتٌ: يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكـراريُّ المجاورُ علاماتِ مجموعةٍ مِنَ الطلبةِ في اختبارٍ نهايتُهُ العظمى هيَ **150**:



a) كمْ طالبًا تقدَّمَ للاختبارِ؟ 320

b) أجدُ عددَ الطلبةِ الذيـنَ تزيدُ علاماتُهُمْ على 124. 72

c) أجدُ عددَ الطلبةِ الذينَ تقعُ علاماتُهُمْ بينَ 100 و130. 110

أتدرَّبُ وأحلُّ المسائلَ

سباقاتٌ: في ما يأتي الزمنُ (بالثواني) الذي تستغرقُهُ مجموعةٌ مِنَ الطلبةِ لإنهاءِ سباقٍ للجري:

52 63 81 66 75 59 77 66 80 64 72 78 58 61 68 72 76 66

74 79 65 82 87 91 68 77 75 86 81 70 93 68 74 80 68 84

1) أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ. أنظر الهامش.

2) أكتبُ وصفًا للبياناتِ. %86 من الطلبة استغرقوا وقتًا يزيد على 60 ثانية ويقل عن 90 ثانية لإنهاء السباق، وعدد قليل من الطلبة أنهوا السباق بزمن أقل من ذلك أو أكثر.

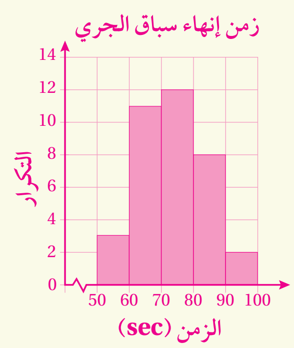
3) **أطوالٌ**: يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ أطوالَ مجموعةٍ مِنَ الطالباتِ بالسنتيمترِ. أُمثِّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ. أنظر الهامش.

التكرارُ	الطولُ (h)
8	$120 \le h < 130$
12	$130 \le h < 140$
10	$140 \le h < 150$
7	$150 \le h < 160$

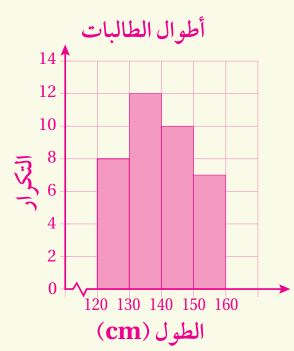
إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

1)

زمن انهاء سباق جري (t)	
الزمن (sec)	التكرار
$50 \le t < 60$	3
$60 \le t < 70$	11
$70 \le t < 80$	12
$80 \le t < 90$	8
$90 \le t < 100$	2



3)



مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال المُدرَّجات التكرارية ذات الفئات غير متساوية الطول لتفسير البيانات.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أرسم المُدرَّج التكراري الوارد في المثال على اللوح، ثم أناقش معهم حل الفرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يمثّل عرض كل عمود؟ طول الفئة.
  - » ماذا يمثّل ارتفاع كل عمـود؟ الكثافة التكرارية للفئة.
  - » كيف يمكن إيجاد تكـرار كل فئة؟ بضرب طول كل فئة في كثافتها التكرارية.
  - » ماذا يمثّل تكرار كل فئة؟ عدد الأشخاص في كل فئة.
  - » كيف يمكن إيجاد عدد الأشخاص الذين شاركوا في عملية المسح؟ بإيجاد تكرار كل فئة، ثم جمع هذه التكرارات.
- أطلب إلـى أحد الطلبة إيجاد تكـرار كل فئة، ثم جمع التكرارات لإيجاد عدد الأشـخاص الذين شاركوا في عملية المسح.
- أناقـش مـع الطلبـة حـل الفـرع 2 مـن المثال بتوجيه السؤال الآتي إليهم:
  - » أي أعمـدة المُـدرَّج يمكـن بها إيجـاد عدد الأشــخاص الذين تزيد مُدَدُ مكالماتهم على 40 دقيقة؟ العمود الذي يقابل الفئة $40 \le m < 50$، والعمود الذي يقابل الفئة $50 \le m < 60$
- أظلّل العمودين اللذين أشار إليهما الطلبة للإجابة عن السؤال السابق، ثم أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد تكرار كلّ من الفئتين، ثم جمع التكرارين.
- إن لـزم الأمـر، أناقـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- فـي المثـال 3، أوضّـح للطلبـة أن تكـرار كل فئة يمثّل مساحة كل عمود.
- إذا توفّـر فـي المدرسـة جهـاز عـرض (Data Show)، فيمكن استعماله للمساعدة في عرض المُدرَّجات التكرارية عن طريق نسخة إلكترونية مـن كتـاب الطالـب، ما يسـهم في توفيـر الوقت والجهد المستغرقَين في رسمها على اللوح.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (3 – 1) والمسائل (10 – 7) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أُخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (18 – 16).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 16 (**تبرير**)، أوجّه الطلبة إلى إيجاد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 90، وإيجاد عدد الطلبة الذين تقدموا للاختبار؛ وذلك لإيجاد النسبة المطلوبة.

---

4) **درجاتُ حرارةٍ:** يُبيّنُ الجدولُ التكراريُّ المجاورُ توزيعَ درجاتِ الحرارةِ (بالسلسيوس) خلالَ 50 يومًا في إحدى المناطقِ. أُمثّلُ بياناتِ الجدولِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

أنظر الهامش.

درجةُ الحرارةِ (t)	التكرارُ
$8 \leq t < 10$	6
$10 \leq t < 12$	13
$12 \leq t < 15$	18
$15 \leq t < 17$	4
$17 \leq t < 20$	3
$20 \leq t < 24$	6

أُمثّلُ البياناتِ في كلٍّ منَ الجدولينِ التكراريينِ الآتيينِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

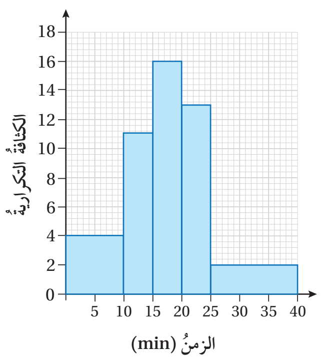
5) أنظر ملحق الإجابات.

الزمنُ	$0 \leq t < 8$	$8 \leq t < 12$	$12 \leq t < 16$	$16 \leq t < 20$
التكرارُ	72	84	54	36

6) أنظر ملحق الإجابات.

العمرُ (بالعام)	$11 \leq a < 14$	$14 \leq a < 16$	$16 \leq a < 17$	$17 \leq a < 20$
التكرارُ	51	36	12	20

شركاتٌ: يُبيّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ المجاورُ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي يستغرقُهُ موظفو إحدى الشركاتِ للوصولِ إلى مكانِ العملِ:



7) أجدُ عددَ موظفي الشركةِ. 270

8) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بأقلَّ منْ 15 دقيقةً. 95

9) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يستغرقُ وصولُهُمْ إلى مكانِ العملِ زمنًا يتراوحُ بينَ 20 دقيقةً و 30 دقيقةً. 75

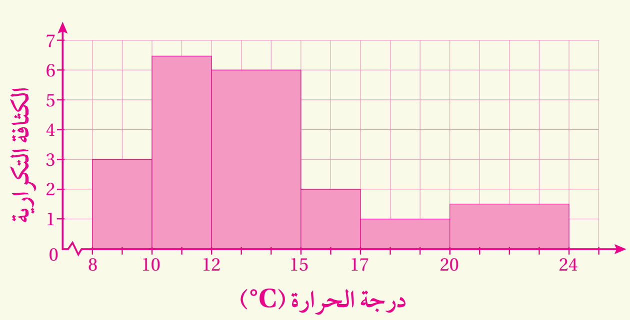
10) أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ يصلونَ إلى مكانِ العملِ بزمنٍ أكثرَ منْ 30 دقيقةً. 20

150

إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

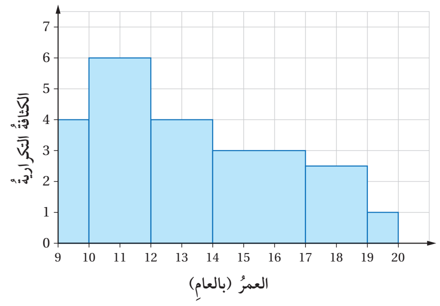
4)

درجة الحرارة (t)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$8 \leq t < 10$	6	2	3
$10 \leq t < 12$	13	2	6.5
$12 \leq t < 15$	18	3	6
$15 \leq t < 17$	4	2	2
$17 \leq t < 20$	3	3	1
$20 \leq t < 24$	6	4	1.5



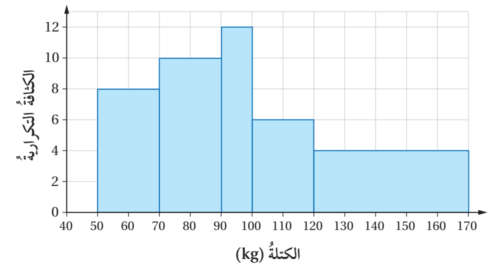
أُنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلٍّ منَ المُدرَّجاتِ التكراريةِ الآتيةِ:

11



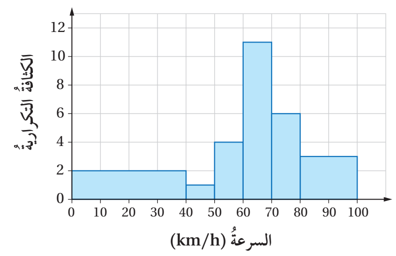
التكرار	العمر (عام)
4	$9 \le x < 10$
12	$10 \le x < 12$
8	$12 \le x < 14$
9	$14 \le x < 17$
5	$17 \le x < 19$
1	$19 \le x < 20$

12



التكرار	الكتلة (kg)
160	$50 \le t < 70$
200	$70 \le t < 90$
120	$90 \le t < 100$
120	$100 \le t < 120$
200	$120 \le t < 170$

سـرعةٌ: أُجريَ مسحٌ لتعرُّفِ سرعةِ السـيّاراتِ التي تمرُّ منْ نقطةٍ مُعيَّنةٍ على إحدى الطرقِ السـريعةِ، ثـمَّ مُثِّلَتِ البياناتُ التي خَلُصَ إليْها المسحُ بالمُدرَّجِ التكراريِّ المجاورِ.



13 أمـلأُ الفراغَ فـي الجدولِ الآتـي بناءً علـى التمثيلِ بالمُدرَّجِ التكراريِّ أعلاهُ.

السرعةُ	$0 \le y < 40$	$40 \le y < 50$	$50 \le y < 60$	$60 \le y < 70$	$70 \le y < 80$	$80 \le y < 100$
التكرارُ	80	10	40	110	60	60

14 أجدُ عددَ السيّاراتِ التي أُجريَ عليْها المسحُ. 360

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 4, 6, 13, 14 كتاب التمارين: 1, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (15 – 13), 11, 5 كتاب التمارين: 2, 3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 16), 12 كتاب التمارين: (6 – 4)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

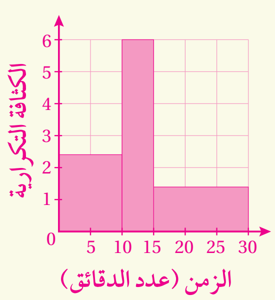
» جمعت كل من سمر ولينا البيانات نفسها حول عدد الدقائق التي تستغرقها مجموعة من الطالبات للوصول إلى المدرسة، ولكن نظّمت كل منهما البيانات بطريقة مختلفة كالآتي:

تنظيم سمر للبيانات	
عدد الدقائق (min)	التكرار (f)
$0 \le h < 5$	10
$5 \le h < 10$	15
$10 \le h < 15$	30
$15 \le h < 20$	12
$20 \le h < 25$	6
$25 \le h < 30$	3

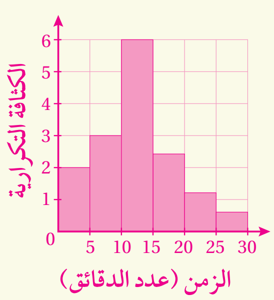
تنظيم لينا للبيانات	
عدد الدقائق (min)	التكرار (f)
$0 \le h < 10$	25
$10 \le h < 15$	30
$15 \le h < 30$	21

1 أمثّل كلًّا من الجدولين بمُدرَّج تكراري.

تمثيل لينا



تمثيل سمر



2 أصف أوجه التشابه والاختلاف بين المُدرَّجين التكراريين. أنظر إجابات الطلبة.

تعليمات المشروع:

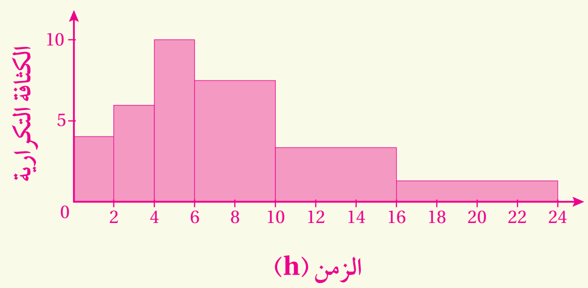
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة 6 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

» **أمثّل البيانات في الجدول الآتي باستعمال الجدول التكراري:**

تنظيم سمر للبيانات	
التكرار (f)	الزمن (h)
8	$0 \leq h < 2$
12	$2 \leq h < 4$
20	$4 \leq h < 6$
30	$6 \leq h < 10$
20	$10 \leq h < 16$
10	$16 \leq h < 24$



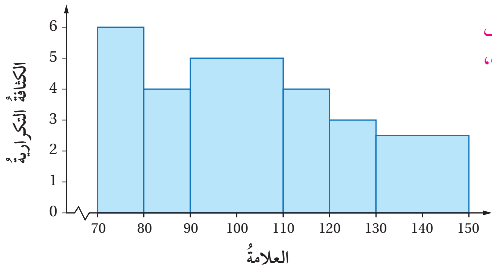
15 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

مهارات التفكير العليا

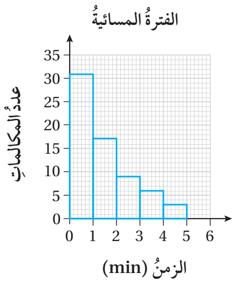
16 **تبرير:** يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي علاماتِ مجموعةٍ منَ الطلبةِ في أحدِ الاختباراتِ. إذا كانَتْ علامةُ النجاحِ في الاختبارِ هيَ 90، فأجدُ نسبةَ الطلبةِ الذينَ أخفقوا في الاختبارِ، مُبرِّرًا إجابتي.

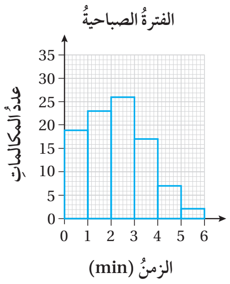
عدد الطلبة الذين حصلوا على أقل من 90 هو 100 طالب، والعدد الكلي للطلبة هو 320

نسبة الذين أخفقوا 31% تقريبًا.



تحدٍّ: يُسجِّلُ برنامجُ حاسوبٍ في إحدى المؤسساتِ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي ينتظرُهُ المتصلونَ قبلَ الردِّ على مكالماتِهِمْ في الفترةِ الصباحيةِ والفترةِ المسائيةِ. وقدْ مُثِّلَتِ البياناتُ التي سجلَّها البرنامجُ في أحدِ الأيامِ بالمُدرَّجينِ التكراريينِ الآتيينِ:





17 أجدُ عددَ المكالماتِ التي انتظرَ فيها المتصلونَ أكثرَ منْ 4 دقائقَ قبلَ الردِّ عليْهِمْ في الفترةِ الصباحيةِ منْ ذلكَ اليومِ. 9

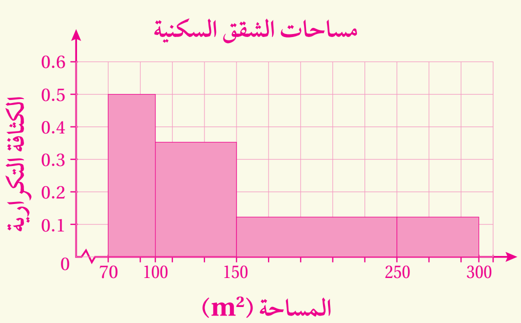
18 أجدُ نسبةَ المكالماتِ التي رُدَّ فيها على المتصلينَ خلالَ ما لا يزيدُ على دقيقتينِ في ذلكَ اليومِ. 56%

152

إجابة التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

15)

المساحة (m²)	$70 \leq t < 100$	$100 \leq t < 150$	$150 \leq t < 250$	$250 \leq t < 300$
التكرار	15	18	12	6
طول الفئة	30	50	100	50
الكثافة التكرارية	0.5	0.36	0.12	0.12



الدرس 4

نتاجات الدرس

- التعبير بالرموز عن حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية مُمثَّلة بأشكال ڤن.
- استعمال أشكال ڤن لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.
- إيجاد احتمالات حوادث متنافية باستعمال أشكال ڤن.
- تعرّف مفهوم الاحتمالات المتنافية الشاملة، واستعمالها في حلّ المسائل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.
- حساب احتمال عدم وقوع حادث ما.
- تمثيل البيانات باستعمال أشكال ڤن.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات **(أستعد لدراسة الوحدة)** في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 4

الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

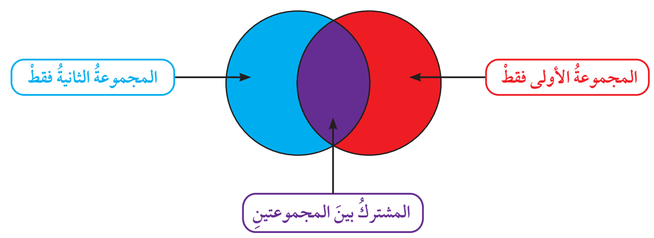
فكرةُ الدرسِ إيجادُ الاحتمالِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ.

المصطلحاتُ الحادثُ المُتمِّمُ، الحوادثُ المتنافيةُ، الحوادثُ الشاملةُ.

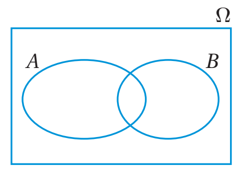
مسألةُ اليومِ يدرسُ 120 طالبًا في معهدِ لغاتٍ، منْهُمْ 75 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ، و35 طالبًا يدرسونَ اللغةَ الإسبانيةَ، و10 طلبةٍ يدرسونَ اللغتينِ معًا. إذا اختيرَ طالبٌ منَ المعهدِ عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممَّنْ يدرسونَ اللغةَ الكوريةَ فقطْ؟

التعبيرُ بالرموزِ عنْ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أشكالَ ڤِنْ، واستعملْتُها لتمثيلِ البياناتِ؛ وذلكَ بتنظيمِها في مجموعتينِ أوْ أكثرَ باستعمالِ منحنياتٍ مُغلَقةٍ مُتداخِلةٍ (متقاطعةٌ)؛ إذْ يُشكِّلُ كلُّ منحنٍ مجموعةً مستقلةً منَ البياناتِ، ويُمثِّلُ الجزءُ المُتداخِلُ بينَ المنحنيينِ البياناتِ المشتركةَ بينَ المجموعتينِ.



يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ ڤِنْ للتعبيرِ عنْ حوادثِ تجربةٍ عشوائيةٍ بيانيًّا، وذلكَ لتسهيلِ إيجادِ احتمالاتِ هذهِ الحوادثِ. فمثلًا، إذا كانَ A و B حادثينِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُهُما باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ، وذلكَ برسمِ مستطيلٍ يُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ، ثمَّ رسمِ منحنى مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ A، ورسمِ منحنى آخرَ مُغلَقٍ يُمثِّلُ الحادثَ B.

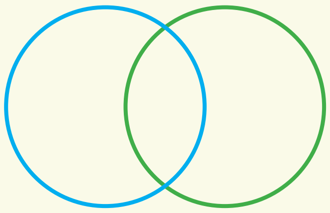


رموزٌ رياضيةٌ

يُستعمَلُ الحرفُ اليونانيُّ Ω للدلالةِ على الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ، وهوَ مجموعةُ النواتجِ التي يُتوقَّعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشوائيةٍ ما، ويُقرَأُ: أوميجا.

1 التهيئة

» **أرسم شكل ڤن الآتي على اللوح:**



- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة رسم شكل ڤن المرسوم على اللوح على دفاترهم، وتمثيل كل مجموعة مما يأتي فيه:
  » مضاعفات العدد 3 حتى العدد 21
  » الأعداد الزوجية حتى العدد 18
- أتابع عمل المجموعات وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

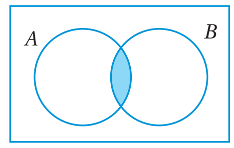
- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  » كم طالبًا يدرس في معهد اللغات؟ 120 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغة الكورية؟ 75 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغة الإسبانية؟ 35 طالبًا.
  » كم طالبًا يدرس اللغتين الكورية والإسبانية؟ 10 طلبة.
  » إذا اختير أحد طلبة المعهد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغة الكورية؟ $\frac{75}{120}$
  » إذا اختير أحد طلبة المعهد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغتين الكورية والإسبانية معًا؟ $\frac{10}{120}$
  » إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون ممّن يدرسون اللغة الكورية فقط؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق باستعمال أشكال ڤن في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكن؟
  » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

ملاحظاتي

أتعلَّم

تقاطعُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَهُما معًا.

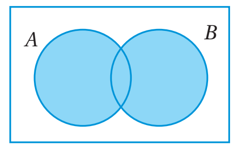
تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلَةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ تقاطعَ الحادثِ A والحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنها بالرمزِ $A\cap B$.



أتعلَّم

اتحادُ الحادثِ A والحادثِ B يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثينِ معًا.

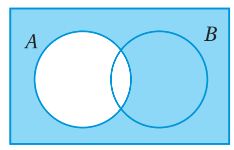
أمّا المنطقةُ المُظلَّلَةُ في شكلِ فِنْ المجاورِ فتُمثِّلُ اتحادَ الحادثِ A والحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنها بالرمزِ $A\cup B$.



أتعلَّم

لأيِّ تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ $\bar{A}$ يعني عدمَ وقوعِ الحادثِ A.

في حينِ تُمثِّلُ المنطقةُ المُظلَّلَةُ في الشكلِ المجاورِ **الحادثَ المُتمِّمَ** (complement event) للحادثِ A، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْهُ بالرمزِ $\bar{A}$.



أتعلَّم

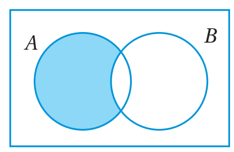
يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ الحادثِ $A-B$ بالرمزِ $A\cap\bar{B}$.

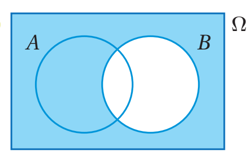
وأمّا الحادثُ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلَةُ في الشكلِ المجاورِ فهوَ وقوعُ الحادثِ A فقط، وعدمُ وقوعِ الحادثِ B، ويُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $A-B$.

مثال 1

أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلَةُ في كلٍّ منْ أشكالِ فِنْ الآتيةِ:

1





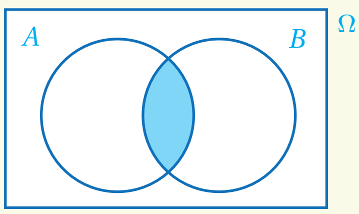
ألاحِظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلَةَ تُعبِّرُ عنْ مُتمِّمةِ الحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\bar{B}$.

154

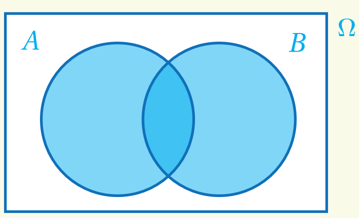
3 التدريس

مثال 1

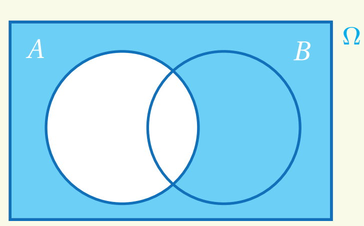
- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن تمثيل البيانات باستعمال أشكال فن، ثم أوضّح لهم أنه يمكن أيضًا استعمال أشكال فن للتعبير عن حوادث تجربة عشوائية، وذلك برسم مستطيل يمثّل الفضاء العيني للتجربة، ورسم منحنيات مغلقة لتمثّل كل حادث من حوادث التجربة العشوائية.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 9: أشكال فن**)، وأُخبر الطلبة أنّه يمثل تجربة عشوائية فضاؤها العيني Ω، و A و B حادثان في هذه التجربة العشوائية، ثم أبيّن لهم أن تظليل المنطقة يعني وقوع الحادث، وأن عدم تظليل المنطقة يعني عدم وقوع الحادث.



- أسأل الطلبة:
  - » ماذا تمثّل المنطقة المُظلّلة؟ منطقة تقاطع الحادث A والحادث B.
  - » ماذا يعني تقاطع الحادث A مع الحادث B؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟
- أُخبر الطلبة أن تقاطع الحادثين A و B يعني وقوعهما معًا، وأنه يمكن التعبير عن منطقة تقاطع الحادثين بالرمز $A\cap B$.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح للتجربة العشوائية نفسها، وأذكّر الطلبة أن تظليل المنطقة يعني وقوع الحادث، وأن عدم تظليل المنطقة يعني عدم وقوع الحادث، ثم أسألهم:



  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟ نعم؛ لأن المنطقة A مُظلَّلة بالكامل.
  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادث B؟ لماذا؟ نعم؛ لأن المنطقة B مُظلَّلة بالكامل.
  - » هل يدل الشكل على وقوع الحادثين A و B معًا؟ لماذا؟ نعم؛ لأن منطقة تقاطع الحادثين مُظلَّلة.
  - » ماذا تمثّل المنطقة المُظلَّلة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟
- أوضّح للطلبة أن المنطقة المُظلَّلة تمثّل اتحاد الحادثين A و B، وأن ذلك يعني وقوع الحادث A، أو وقوع الحادث B، أو وقوع الحادثين معًا، وأنه يمكن التعبير عن منطقة اتحاد الحادثين بالرمز $A\cup B$.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح للتجربة العشوائية نفسها، ثم أسأل الطلبة:

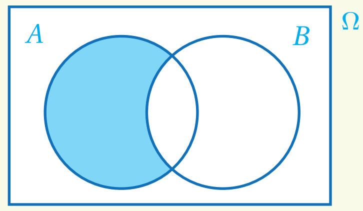


» هل يدل الشـكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟
لا؛ لأن المنطقة A غير مُظلَّلة.

» ماذا تمثّـل المنطقة المُظلَّلة؟ إجابة ممكنة: ظُلّل الفضاء العيني كاملًا ما عدا الحادث A.

» كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟

- أوضّـح للطلبـة أن المنطقـة المُظلَّلـة تمثّـل الحـادث المُتمِّم للحادث A وأن ذلك يعني عدم وقوع الحادث A، وأنه يمكن التعبير عنه بالرمز $\overline{A}$.
- أرسـم الشـكل الآتي على اللـوح للتجربة العشـوائية نفسها، ثم أسأل الطلبة:



» هل يدل الشـكل على وقوع الحادث A؟ لماذا؟
لا؛ لأن المنطقـة A غير مُظلَّلـة بالكامل؛ إذ إن منطقة تقاطع الحادثين A وB غير مُظلَّلة.

» ماذا تمثّل المنطقة المُظلَّلة؟ سـتختلف إجابات الطلبة.

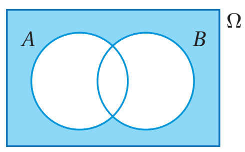
» كيف يمكن التعبير بالرموز عن هذه المنطقة؟

- أوضّح للطلبة أن المنطقة المُظلَّلة تمثّل وقوع الحادث A فقط وعدم وقوع الحادث B، وأنه يمكن التعبير عنه بالرمز $A-B$، أو الرمز $A\cap\overline{B}$.
- أناقـش حل أفرع المثال 1 مع الطلبة باتباع الإجراءات نفسها التي اتبعتها في مناقشة الأشكال السابقة.

إرشادات:

- أناقـش مـع الطلبة حل سـؤال (**أفكّـر**) الوارد في هامـش الفرع 2 مـن المثـال 1، وأتوصّـل معهم إلـى أنه يمكن التعبير عن المنطقة المُظلَّلة بالرمز $\overline{A}\cap\overline{B}$.
- أطلب إلـى الطلبة التعبير عـن المنطقـة المُظلَّلة فـي الفـرع a مـن بند (**أتحقّـق من فهمـي**) التابع للمثال 1 بأكثر من رمز.

2

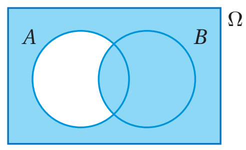


أُلاحِظُ أنَّ المنطقـةَ المُظلَّلةَ تُعبِّـرُ عنْ عدمِ وقوعِ اتحـادِ الحادثِ A والحـادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{A\cup B}$.

أُفكِّرُ

هـلْ يُمكِنُ التعبيـرُ عنِ الحـادثِ الـذي تُمثِّلُـهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ بالرموزِ بطريقـةٍ أُخـرى؟ أُبـرِّرُ إجابتي.

3

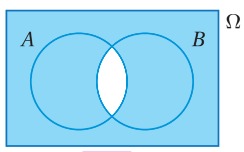


أُلاحِـظُ أنَّ المنطقةَ المُظلَّلـةَ تُعبِّرُ عنِ اتحادِ الحادثِ المُتمِّمِ للحادثِ A والحادثِ B؛ لذا يُمكِنُ التعبيرُ عنْ هذا الحادثِ بالرمزِ $\overline{A}\cup B$.

أتحقَّقُ منْ فهمي

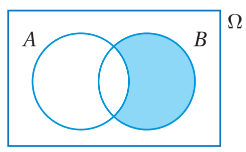
أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ شكليْ ڤِنْ الآتيينِ:

a)



$\overline{A\cap B}$

b)



$B-A$

إيجادُ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ.

$$P(A)=\frac{\text{(عددَ عناصرِ الحادثِ } A\text{)}}{\text{(عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ)}}$$

بمـا أنَّ الفضاءَ العينيَّ Ω هوَ مجموعـةٌ تحوي جميعَ النواتجِ التي يُتوقَّـعُ حدوثُها عندَ إجراءِ تجربةٍ عشـوائيةٍ ما، فإنَّ احتمالَ الفضاءِ العينيِّ هوَ 1؛ أيْ إنَّ $P(\Omega)=1$. ولهذا، فإنَّ احتمالَ الحادثِ المُتمِّمِ لأيِّ حادثٍ في الفضاءِ العينيِّ، مثلَ A، هوَ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

رموزٌ رياضيةٌ

يشـيرُ الرمـزُ $P(A)$ إلى احتمالِ وقـوعِ الحادثِ A، علمًـا بـأنَّ الحرفَ P هـوَ اختصـارٌ لكلمـةِ (Probability) التـي تعني الاحتمالَ.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلـب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بنـد (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

احتمالُ الحادثِ المُتمِّمِ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلماتِ: احتمالُ وقوعِ الحادثِ المُتمِّمِ للحادثِ A هوَ 1 ناقصُ احتمالِ وقوعِ الحادثِ A.

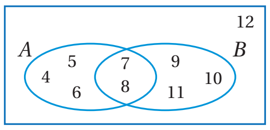
بالرموزِ: لأيِّ حادثٍ (A) في تجربةٍ عشوائيةٍ، فإنَّ:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

يُمكِنُ استعمالُ المفاهيمِ السابقةِ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ مُمثَّلةٍ بأشكالِ ڤِنْ.

مثال 2

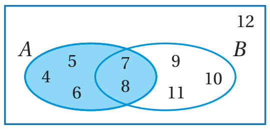
كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 4 إلى 12 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ ڤِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



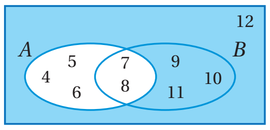
1 $P(A)$

بما أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ هوَ 9، وعددَ عناصرِ الحادثِ A هوَ 5 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(A) = \frac{5}{9}$$



2 $P(\overline{A})$



$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$= 1 - \frac{5}{9}$ بالتعويضِ

$= \frac{4}{9}$ بالتبسيطِ

أُفكِّرُ

أَصِفُ الحادثَ A بالكلماتِ.

أتعلَّمُ

يظهرُ في الشكلِ المجاورِ أنَّ مُتمِّمةَ A تحوي 4 عناصرَ، هيَ: $\{9, 10, 11, 12\}$؛ لذا، فإنَّ احتمالَها هوَ $\frac{4}{9}$

مثال 2

- أذكّر الطلبة بكيفية إيجاد احتمال وقوع حادث في تجربة عشوائية متساوية الاحتمال بالكلمات والرموز.
- أوضّح للطلبة أن احتمال وقوع الفضاء العيني يساوي 1، وأن احتمال الحادث المُتمِّم هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث A.
- أوضّح للطلبة أنه يمكنهم استعمال المفاهيم التي تعلّموها في المثال 1 لإيجاد احتمالات حوادث مُمثَّلة بأشكال ڤن، ثم أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 2، وأطلب إلى الطلبة تأمّل شكل ڤن المجاور له، ثم أناقش معهم حل الفرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
  - » ما عدد عناصر الفضاء العيني؟ 9
  - » ماذا نعني بـ $P(A)$؟ احتمال وقوع الحادث A.
  - » ما عناصر الحادث A؟ أظلّلها. 4, 5, 6, 7, 8 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » ما عدد عناصر الحادث A؟ 5
  - » كيف يمكن وصف الحادث A بالكلمات؟ إجابة ممكنة: مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيد على أو تساوي 4، وتقل عن أو تساوي 8
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 1 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 2 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(\overline{A})$؟ احتمال وقوع الحادث المُتمِّم للحادث A.
  - » ما عناصر الحادث $\overline{A}$؟ أظلّلها. 9, 10, 11, 12 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » ما عدد عناصر الحادث $\overline{A}$؟ 4
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أناقش مع الطلبة حل الفرع 3 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(A \cap B)$؟ احتمال وقوع الحادث A والحادث B معًا.

» ما عناصر الحادث $A \cap B$؟ أظلّلها. 7, 8 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

» ما عدد عناصر الحادث $A \cap B$؟ 2

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 4 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:

» ماذا نعني بـ $P(A \cup B)$؟ احتمال اتحاد الحادث A، والحادث B.

» ما عناصر الحادث $A \cup B$؟ أظلّلها. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

» ما عدد عناصر الحادث $A \cup B$؟ 8

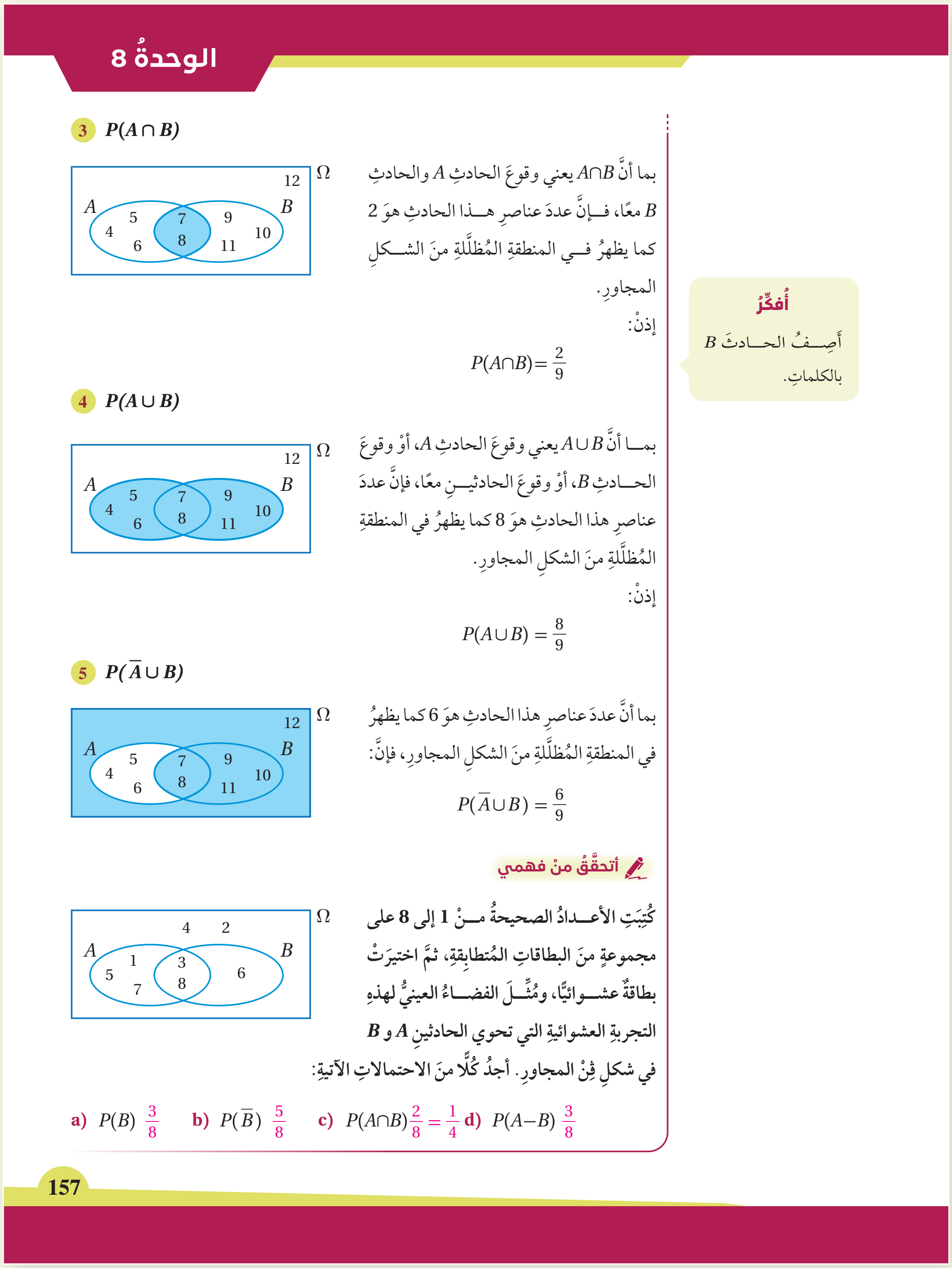
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 4 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 5 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:

» ماذا نعني بـ $P(\bar{A} \cup B)$؟ احتمال اتحاد الحادث المُتمِّم للحادث A والحادث B معًا.

» ما عناصر الحادث $\bar{A} \cup B$؟ أظلّلها. 7, 8, 9, 10, 11, 12 (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).

» ما عدد عناصر الحادث $\bar{A} \cup B$؟ 6

- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 5 على اللوح.



3 $P(A \cap B)$

بما أنَّ $A \cap B$ يعني وقوعَ الحادثِ A والحادثِ B معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 2 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

4 $P(A \cup B)$

بما أنَّ $A \cup B$ يعني وقوعَ الحادثِ A، أوْ وقوعَ الحادثِ B، أوْ وقوعَ الحادثينِ معًا، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 8 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

إذنْ:

$$P(A \cup B) = \frac{8}{9}$$

5 $P(\bar{A} \cup B)$

بما أنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 6 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ، فإنَّ:

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{6}{9}$$

أُفكِّرُ

أَصِفُ الحادثَ B بالكلماتِ.

أتحقَّقُ من فهمي

كُتِبَت الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 8 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

a) $P(B)$ $\frac{3}{8}$ b) $P(\bar{B})$ $\frac{5}{8}$ c) $P(A \cap B)$ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ d) $P(A - B)$ $\frac{3}{8}$

إرشادات:

- أناقش مع الطلبة حل سؤال (**أفكّر**) الوارد في هامش الفرع 3 من المثال 2، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن وصف الحادث بأكثر من طريقة، إحداها الحادث B وهو مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيد على أو تساوي 7، وتقل عن أو تساوي 11
- أوجّه الطلبة عند إيجاد احتمالات حوادث مُمثَّلة بأشكال فن إلى تظليل المنطقة التي تعبّر عن الحادث؛ لمساعدتهم على تحديد عدد عناصر الحادث.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند تحديد عناصر حوادث مُمثَّلة بأشكال فن؛ لذا أوجّههم وبشكل مستمر إلى وصف الحادث بالكلمات ومطابقة الوصف مع المنطقة المُظلَّلة.

استعمالُ أشكالِ فِنْ لإيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ

يُمكِنُ استعمالُ أشكالِ فِنْ لتسهيلِ إيجادِ احتمالاتِ حوادثَ لتجاربَ عشوائيةٍ تُمثِّلُ مواقفَ حياتيةً.

مثال 3 : منَ الحياةِ

اختباراتٌ: تقدَّمَ 200 طالبٍ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ لامتحانٍ وطنيٍّ يقيسُ قدراتِهِمْ في مادتيِ اللغةِ العربيةِ والرياضياتِ. نجحَ منْ هؤلاءِ الطلبةِ 162 طالبًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ، و137 طالبًا في مادةِ الرياضياتِ. أمّا عددُ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا فبلغَ 121 طالبًا:

1 أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ فِنْ.

الخطوةُ 1: أُحدِّدُ الحوادثَ المذكورةَ في التجربةِ العشوائيةِ.

أفترضُ أنَّ A هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مادةِ اللغةِ العربيةِ، وأنَّ M هوَ حادثُ اختيارِ طالبٍ ناجحٍ في مادةِ الرياضياتِ.

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ والحوادثَ بشكلِ فِنْ.

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ (A):

$$162 - 121 = 41$$

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا منْ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ (M):

$$137 - 121 = 16$$

- أُحدِّدُ عددَ الطلبةِ الذينَ لمْ ينجحوا في أيٍّ منَ المادتينِ، وذلكَ بطرحِ عددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في مادةِ الرياضياتِ فقطْ، وعددِ الطلبةِ الناجحينَ في المادتينِ معًا، منَ العددِ الكليِّ للطلبةِ:

$$200 - (41 + 16 + 121) = 200 - 178 = 22$$

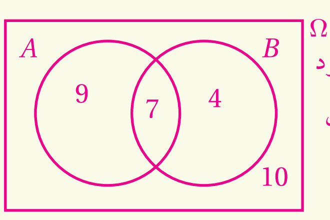
مثال 3: من الحياة

- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال أشكال ڤن للتمكّن من إيجاد احتمالات حوادث تجارب عشوائية تمثّل مواقف حياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش حل الفرع 1 مع الطلبة بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ما الحوادث المذكورة في التجربة العشوائية؟ حادث اختيار طالب ناجح في مادة اللغة العربية، وحادث اختيار طالب ناجح في مادة الرياضيات.
  - » ما عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ 41؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية.
  - » ما عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات فقط؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ 16؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من عدد الطلبة الناجحين في مادة الرياضيات.
  - » ما عدد الطلبة الذين لم ينجحوا في أي من المادتين؟ كيف أوجدتم/ أوجدتنّ ذلك؟ 22؛ بطرح عدد الطلبة الناجحين في مادة اللغة العربية فقط، وعدد الناجحين في مادة الرياضيات فقط، وعدد الطلبة الناجحين في المادتين معًا من العدد الكلي للطلبة.
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة أوجّههم إلى افتراض أن حادث اختيار طالب ناجح في مادة اللغة العربية هو A، وافتراض أن حادث اختيار طالب ناجح في مادة الرياضيات هو M، ثم أطلب إلى أحد الطلبة تمثيل البيانات بشكل ڤن، وأوجّه إلى ضرورة الانتباه إلى وضع عناصر الفضاء العيني التي لا ينتمي أيّ منها إلى الحادثين A و M خارج الدائرتين المُمثِّلتين للحادثين.

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص الفرع 2 من المثال، ثم أناقشهم في حله بتوجيه الأسئلة الآتية إليه:
  - » ماذا يعني أن يكون الطالب ناجحًا في إحدى المادتين على الأقل؟ أن يكون ناجحًا في مادة اللغة العربية، أو أن يكون ناجحًا في مادة الرياضيات، أو أن يكون ناجحًا في المادتين معًا.
  - » إذن، ما الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ أظلّله. اتحاد الحادث A والحادث M (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ $A \cup M$
  - » ما عدد عناصر هذا الحادث؟ 178
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص الفرع 3 من المثال، ثم أناقش الطلبة في حلّه بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني أن يكون الطالب ناجحًا في اللغة العربية فقط؟ يعني نجاحه في مادة اللغة العربية وعدم نجاحه في مادة الرياضيات.
  - » إذن، ما الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ أظلّله. وقوع الحادث A وعدم وقوع الحادث M (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » كيف يمكن التعبير بالرموز عن الحادث المطلوب إيجاد احتماله؟ $A - M$
  - » ما عدد عناصر هذا الحادث؟ 41
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح.

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 3):

a)



A: لون الشعر أسود

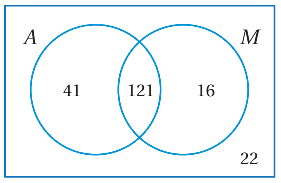
B: لون العيون بني

b) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

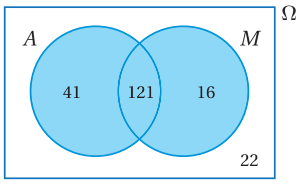
d) $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

- أُمثِّلُ هذهِ البياناتِ بشكلِ فِنْ كالآتي:



أتعلَّمُ
أُلاحِظُ أنَّ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ التي لا ينتمي أيٌّ منْها إلى الحادثينِ تقعُ خارجَ الدائرتينِ.

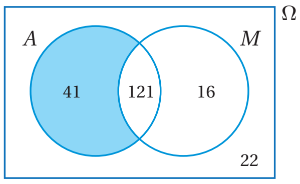
2 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في إحدى المادتينِ على الأقلِّ.**



إنَّ كلمتيْ (على الأقلِّ) في السؤالِ تشيرانِ إلى أنَّ المطلوبَ هوَ اتحادُ الحادثِ A والحادثِ M كما في الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A \cup M) = \frac{178}{200}$$

3 **إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ المُتقدِّمينَ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ هذا الطالبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ.**



إنَّ احتمالَ أنْ يكونَ الطالبُ ناجحًا في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ يعني إيجادَ احتمالِ المنطقةِ المُظلَّلةِ في شكلِ فِنْ المجاورِ. إذنْ:

$$P(A - M) = \frac{41}{200}$$

أتذكَّرُ
إنَّ حادثَ نجاحِ الطالبِ في مادةِ اللغةِ العربيةِ فقطْ يعني عدمَ نجاحِهِ في مادةِ الرياضياتِ، وهوَ ما يُعبَّرُ عنْهُ بالرمزِ $A-M$ أوِ الرمزِ $A \cap \overline{M}$.

أتحقَّقُ منْ فهمي أنظر الهامش.

صفاتٌ وراثيةٌ: يوجدُ في أحدِ الصفوفِ 30 طالبةً، منْهُنَّ 16 طالبةً منْ ذواتِ الشعرِ الأسودِ، و11 طالبةً لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ، و7 طالباتٍ لونُ أعينِهِنَّ بُنِّيٌّ وشعرُهُنَّ أسودُ:

a) أُمثِّلُ البياناتِ بشكلِ فِنْ.

b) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ شعرُها أسودَ، أوْ لونُ عينيها بُنِّيًّا.

c) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ يكونَ لونُ عينيها بُنِّيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

d) إذا اختيرَتْ طالبةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ ألّا يكونَ لونُ عينيها بُنِّيًّا، وشعرُها ليسَ أسودَ.

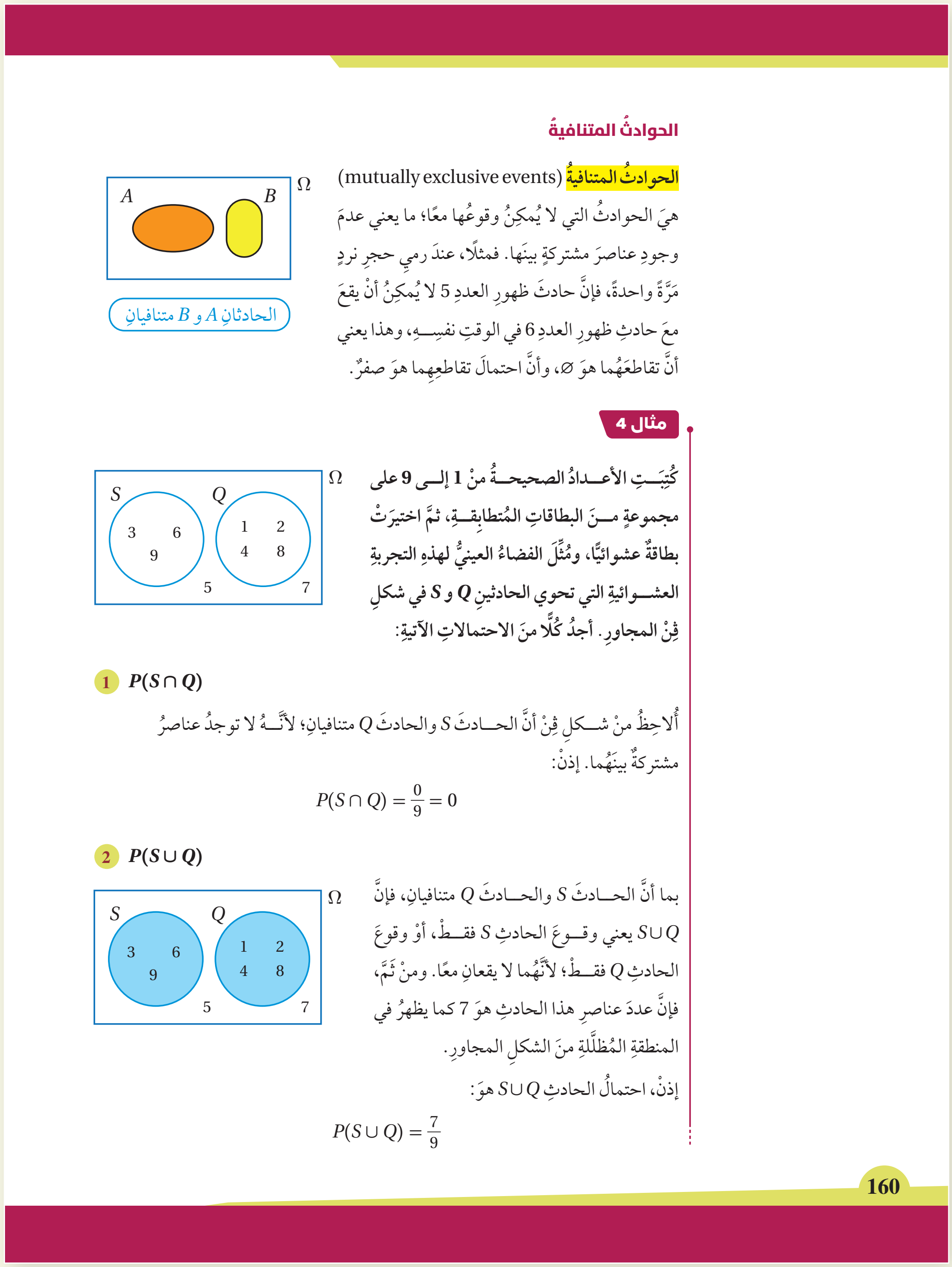
مثال إضافي

» في دراسة شملت 100 شخص، تبيّن أن 60 شخصًا منهم زاروا طبيب الأسنان خلال العام الماضي، وأن 35 شخصًا منهم زاروا طبيبًا مختصًّا خلال العام الماضي، وأن 18 شخصًا منهم زاروا طبيب الأسنان وطبيبًا مختصًّا خلال العام الماضي. إذا اختير أحد هؤلاء الأشخاص عشوائيًّا، فأجد احتمال كل حادث مما يأتي باستعمال أشكال فن:

1 أن يكون الشخص ممّن زاروا طبيب الأسنان ولم يزوروا طبيبًا مختصًّا. $\frac{42}{100}$

2 أن يكون الشخص ممّن زاروا طبيبًا مختصًّا، ولم يزوروا طبيب أسنان. $\frac{17}{100}$

3 أن يكون الشخص ممّن لم يزوروا طبيب الأسنان، ولا طبيبًا مختصًّا. $\frac{23}{100}$



الحوادثُ المتنافيةُ

الحوادثُ المتنافيةُ (mutually exclusive events) هيَ الحوادثُ التي لا يُمكِنُ وقوعُها معًا؛ ما يعني عدمَ وجودِ عناصرَ مشتركةٍ بينَها. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ مَرَّةً واحدةً، فإنَّ حادثَ ظهورِ العددِ 5 لا يُمكِنُ أنْ يقعَ معَ حادثِ ظهورِ العددِ 6 في الوقتِ نفسِهِ، وهذا يعني أنَّ تقاطعَهُما هوَ $\varnothing$، وأنَّ احتمالَ تقاطعِهِما هوَ صفرٌ.

مثال 4

كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ Q و S في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

1 $P(S \cap Q)$

أُلاحِظُ منْ شكلِ فِنْ أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ؛ لأنَّهُ لا توجدُ عناصرُ مشتركةٌ بينَهُما. إذنْ:

$$P(S \cap Q) = \frac{0}{9} = 0$$

2 $P(S \cup Q)$

بما أنَّ الحادثَ S والحادثَ Q متنافيانِ، فإنَّ $S \cup Q$ يعني وقوعَ الحادثِ S فقط، أوْ وقوعَ الحادثِ Q فقط؛ لأنَّهُما لا يقعانِ معًا. ومنْ ثَمَّ، فإنَّ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ هوَ 7 كما يظهرُ في المنطقةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ.

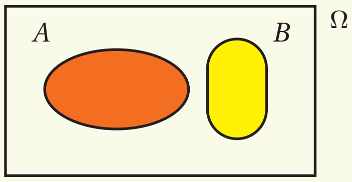
إذنْ، احتمالُ الحادثِ $S \cup Q$ هوَ:

$$P(S \cup Q) = \frac{7}{9}$$

160

مثال 4

- أرسم شكل فِن الآتي على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة تأمّله.

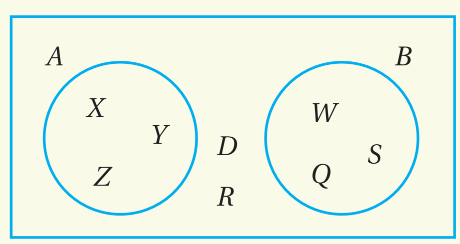


- أسأل الطلبة:
  - » هل يمكن أن يقع الحادثان A وB معًا؟ لماذا؟ لا؛ لأنه يظهر من شكل فِن عدم وجود منطقة تقاطع بين الحادثين.
  - » كيف يمكن التعبير عن تقاطع الحادثين بالرموز؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- بعد مناقشة إجابات الطلبة عن السؤالين السابقين، أوضّح لهم أن الحادثين A وB يُسمَّيان **(حادثين متنافيين)**؛ أي أنه لا يمكن أن يقعا معًا؛ ما يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما؛ لذا يمكن التعبير عن حادث تقاطعهما بالرمز $\varnothing$، والذي يُعَدّ حادثًا مستحيلًا، لذا فإن احتمال وقوعه يساوي صفرًا.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 4، ثم أرسم شكل فِن المرافق للمثال على اللوح، ثم أسأل الطلبة:
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - » ما عدد عناصر الفضاء العيني؟ 9
  - » ما عناصر الحادث S؟ 3, 6, 9
  - » ما عناصر الحادث Q؟ 1, 2, 4, 8
  - » هل يوجد تقاطع بين الحادثين S وQ؟ لا.
  - » إذن، ما العلاقة بين الحادثين S وQ؟ حادثان متنافيان.
  - » كيف يمكن التعبير عن ناتج تقاطع الحادثين S و Q بالرموز؟ $\varnothing$.
- أناقش حل الفرع 1 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(S \cap Q)$؟ إيجاد احتمال وقوع الحادث S والحادث Q معًا.
  - » ما عدد عناصر الحادث $S \cap Q$؟ 0؛ لأن الحادثين متنافيان.
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 1 على اللوح.

- أناقش حل الفرع 2 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(S \cup Q)$؟ احتمال اتحاد الحادث S والحادث Q.
  - » ما عناصر الحادث $S \cup Q$؟ أظلّلها. $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ (أطلب إلى أحد الطلبة تظليل الحادث).
  - » ما عدد عناصر الحادث $S \cup Q$؟ 7
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 2 على اللوح.
- أناقش حل الفرع 3 من المثال بتوجيه الأسئلة الآتية:
  - » ماذا نعني بـ $P(Q-S)$؟ إيجاد احتمال وقوع الحادث Q فقط وعدم وقوع الحادث S.
  - » بما أن الحادثين S وQ متنافيان، فكيف يمكن التعبير عن الحادث $Q-S$؟ لماذا؟ يمكن التعبير عنه بالحادث Q فقط؛ لأن الحادثين لا يمكن أن يقعا معًا؛ لأنهما متنافيان.
- بعد مناقشة إجابات الأسئلة السابقة مع الطلبة، أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد الاحتمال المطلوب في الفرع 3 على اللوح، وأتوصّل معهم إلى أن الحادث $Q - S$ في هذا الفرع يساوي الحادث Q، وأن لهما الاحتمال نفسه.

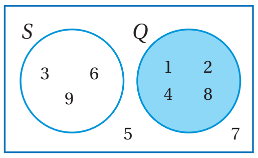
مثال إضافي

- كُتِبت الأحرف X, Y, Z, W, S, Q, D, R على مجموعة من البطاقات المتطابقة، ثم اختيرت بطاقة عشوائيًّا، ومُثِّل الفضاء العيني لهذه التجربة العشوائية التي تحوي الحادثين A وB في شكل فِن أدناه. أجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:



1. $P(A \cup B)$ $\frac{3}{4}$
2. $P(A \cap B)$ 0
3. $P(A \cap \bar{B})$ $\frac{3}{8}$
4. $P(\bar{A})$ $\frac{5}{8}$

3 $P(Q-S)$

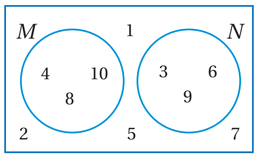


بمــا أنَّ الحــادثَ S والحادثَ Q متنافيــانِ، فإنَّ $Q-S$ يعني وقــوعَ الحادثِ Q فقــطْ؛ لأنَّهُما لا يقعــانِ معًا كما يظهــرُ في المنطقــةِ المُظلَّلةِ منَ الشكلِ المجاورِ. إذنْ:

$$P(Q-S) = \frac{4}{9}$$

أتحقَّقُ منْ فهمي

كُتِبَــتِ الأعــدادُ الصحيحةُ مــنْ 1 إلى 10 على مجموعــةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقــةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ M و N في شكلِ فِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



a) $P(M \cap N)$ 0

b) $P(M \cup N)$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

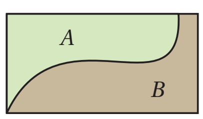
c) $P(M-N)$ $\frac{3}{10}$

الحوادثُ المتنافيةُ الشاملةُ

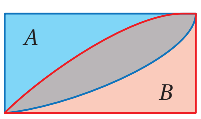
الحوادثُ الشــاملةُ (exhaustive events) هيَ الحوادثُ التي يُشــكِّلُ اتحادُ نواتجِها المُحتمَلةِ الفضاءَ العينيَّ كاملًا. فمثلًا، عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ 3 وحادثَ ظهورِ عددٍ أقلَّ منْ 5 يُمثِّلانِ حادثينِ شاملينِ.

قدْ تكونُ بعضُ الحوادثِ متنافيةً وشاملةً. فمثلًا، عندَ رمي حجرِ نردٍ، فإنَّ حادثَ ظهورِ عددٍ فرديٍّ وحادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ يُمثِّلانِ حادثينِ متنافيينِ؛ لأنَّهُ لا يُمكِنُ أنْ يقعا معًا. وهما أيضًا حادثانِ شاملانِ؛ لأنَّ نواتجَهُما المُحتمَلةَ تُشكِّلُ الفضاءَ العينيَّ كاملًا.

يُظهِرُ شكلا فِنْ الآتيانِ كُلًّا منَ الحوادثِ الشاملةِ، والحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ:



الحادثُ A والحادثُ B متنافيانِ وشاملانِ.



الحادثُ A والحادثُ B شــاملانِ، لكنَّهُما ليسا متنافيينِ.

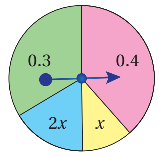
إذا كانَتِ الحوادثُ متنافيةً وشاملةً، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1.

مثال 5

أتعلَّمُ

مجموعُ احتمالاتِ الحوادثِ المتنافيةِ والشاملةِ هوَ 1، أمّا الحوادثُ الشاملةُ غيرُ المتنافيةِ فيكونُ مجموعُ احتمالاتِها أكبرَ منْ 1.

قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 4 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأخضرِ والزهريِّ والأزرقِ والأصفرِ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ الجدولُ الآتي يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.



اللونُ	الأخضرُ	الزهريُّ	الأصفرُ	الأزرقُ
الاحتمالُ	0.3	0.4	x	$2x$

بما أنَّ حوادثَ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ على الألوانِ الأربعةِ هيَ حوادثُ متنافيةٌ وشاملةٌ، فإنَّ مجموعَ احتمالاتِها هوَ 1:

$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$ مجموعُ الحوادثِ الشاملةِ

$0.7 + 3x = 1$ بجمعِ الثوابتِ، وجمعِ المُتغيِّراتِ

$3x = 0.3$ بطرحِ 0.7 منَ الطرفينِ

$x = 0.1$ بقسمةِ طرفيِ المعادلةِ على 3

أتحقَّقُ منْ فهمي

قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابِقةٍ، ومُلوَّنةٍ بالأحمرِ والأصفرِ والأزرقِ. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ كلِّ لونٍ منْ هذهِ الألوانِ، فأجدُ قيمةَ x.

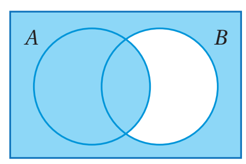
اللونُ	الأزرقُ	الأحمرُ	الأصفرُ
الاحتمالُ	0.3	0.4	x

$x = 0.3$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

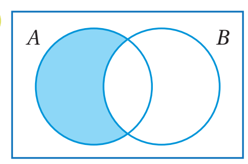
أُعبِّرُ بالرموزِ عنِ الحادثِ الذي تُمثِّلُهُ المنطقةُ المُظلَّلةُ في كلٍّ منْ أشكالٍ فِنْ الآتيةِ:

1



$\overline{B-A}$

2



$A-B$

162

مثال 5

- أقدّم للطلبة مفهوم الحوادث الشاملة، وأعطي لهم أمثلة على حوادث شاملة لتجارب عشوائية مختلفة.
- أوضّح للطلبة أن بعض الحوادث تكون متنافية وشاملة؛ لذا فإن مجموع احتمالاتها هو 1، وأقدّم لهم أمثلة على ذلك، ثم أوجّههم إلى تأمّل شكلَيْن الواردين في الصفحة 161؛ لمعرفة الفرق بين الحوادث الشاملة، والحوادث المتنافية الشاملة.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، وأكتب جدول الاحتمال الوارد في المسألة على اللوح.
- أوضّح للطلبة أن حوادث توقُّف مؤشّر القرص على الألوان الأربعة هي حوادث متنافية وشاملة، وهذا يعني أن مجموع احتمالاتها هو 1، ويمكن الاستفادة من هذه المعلومة في إيجاد قيمة x.
- أناقش مع الطلبة كيفية إيجاد قيمة x على اللوح، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (17 – 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (31 – 26).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

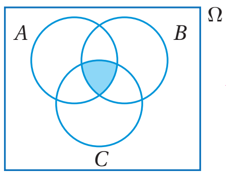
إرشادات:

- في السؤال 27 (**تبرير**)، أوجّه الطلبة إلى تمثيل المستقيمين $y = x$ و $y = 4 - x$ بيانيًّا لتحديد النقاط التي تقع على المستقيمين معًا.
- في المسائل (30 – 28) (**تحدٍّ**)، ألفت انتباه الطلبة إلى أن جميع عناصر الحادث B هي من عناصر الحادث A.

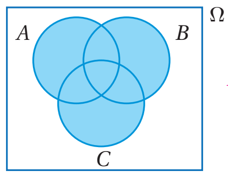
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

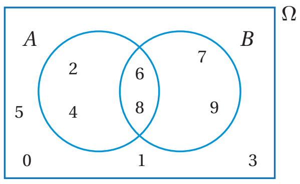
المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 25 ,(23 – 21) كتاب التمارين: (15 – 7) ,(4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 24 ,(20 – 18) كتاب التمارين: ,(15 – 13) ,(6–3) (27 – 21)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (31 – 26) ,24 كتاب التمارين: ,(31–28) ,(20–16) (24 – 21)

3 

$A \cap B \cap C$

4 

$A \cup B \cup C$



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 0 إلى 9 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابِقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ A و B في شكلِ قِنْ المجاورِ. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

5 $P(A)$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 6 $P(B)$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 7 $P(A \cap B)$ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

8 $P(A \cup B)$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 9 $P(\overline{A})$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 10 $P(\overline{B})$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

11 $P(\overline{A \cap B})$ $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 12 $P(\overline{A \cup B})$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 13 $P(B-A)$ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

يحتوي صندوقٌ على بطاقاتٍ مُتطابِقةٍ، ومُرقَّمةٍ منْ 1 إلى 100. إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ قِنْ: (17–14) أنظر الهامش.

14 أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15، ومضاعفاتِ العددِ 10.

15 أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 15 أوْ مضاعفاتِ العددِ 10.

16 أنْ يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، وليسَ منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

17 ألّا يكونَ العددُ المُدوَّنُ على البطاقةِ منْ مضاعفاتِ العددِ 10، ولا منْ مضاعفاتِ العددِ 15.

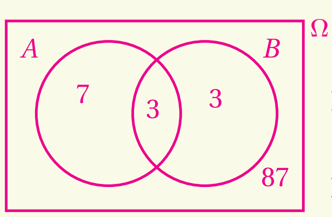
تغذيةٌ: **في دراسةٍ شملَتْ 320 شخصًا يعانونَ السمنةَ، تبيَّنَ أنَّ 130 شخصًا منْهُمْ يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ، وأنَّ 147 شخصًا يمارسونَ الرياضةَ، وأنَّ 64 شخصًا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ ويمارسونَ الرياضةَ معًا. إذا اختيرَ أحدُ هؤلاءِ الأشخاصِ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلِّ حادثٍ ممّا يأتي باستعمالِ أشكالِ قِنْ:** (20–18) أنظر الهامش.

18 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ويراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

19 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

20 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ الرياضةَ، ولا يراجعونَ اختصاصيي التغذيةِ.

إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):



A: العدد من مضاعفات 10

B: العدد من مضاعفات 15

$A=\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$, $n(A) = 10$

$B=\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$, $n(B) = 6$

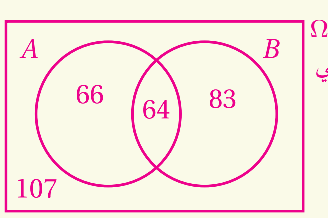
$n(A \text{ and } B) = 3$

14) $P(A \cap B) = \frac{3}{100}$

15) $P(A \cup B) = \frac{13}{100}$

16) $P(A - B) = \frac{7}{100}$

17) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{87}{100}$



A: يراجع اختصاصي التغذية

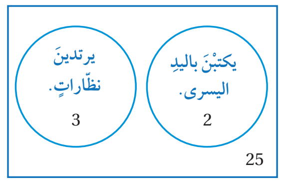
B: يمارس الرياضة

18) $P(A \cap B) = \frac{64}{320} = \frac{1}{5}$

19) $P(B - A) = \frac{83}{320}$

20) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{107}{320}$

صفاتٌ وراثيةٌ: سألَتِ المُعلِّمةُ الطالباتِ في أحدِ الصفوفِ عمَّنْ ترتدي منهُنَّ نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى، ثمَّ لخَّصَتِ البياناتِ في شكلِ فِنْ المجاورِ. إذا اختيرَتْ طالبةٌ منهُنَّ عشوائيًّا، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



21 أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، وتكتبُ بيدِها اليسرى. 0

22 أنْ تكونَ الطالبةُ ترتدي نظّارةً، أوْ تكتبُ بيدِها اليسرى. $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

23 أنْ تكونَ الطالبةُ لا ترتدي نظّارةً. $\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$

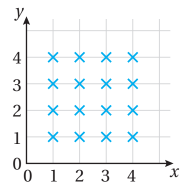
24 قرصٌ دائريٌّ مُقسَّمٌ إلى 6 قطاعاتٍ غيرِ مُتطابقةٍ، وهيَ مُرقَّمةٌ بالأرقامِ: 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1. إذا كانَ الجدولُ المجاورُ يُبيِّنُ احتمالَ توقُّفِ المؤشِّرِ عندَ كلِّ رقمٍ منْ هذهِ الأرقامِ، فأجدُ قيمةَ x. $x = 0.15$

الرقم	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

25 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. أنظر الهامش.

مهارات التفكير العليا

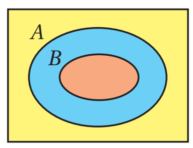
تبرير: يُبيِّنُ مُخطَّطُ الاحتمالِ المجاورُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ. إذا كانَ الحادثُ A يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = x$، وكانَ الحادثُ B يُمثِّلُ النقاطَ الواقعةَ على المستقيمِ $y = 4-x$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:



26 أُمثِّلُ التجربةَ بأشكالِ فِنْ. أنظر الهامش.

27 إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ أنْ تقعَ على المستقيمِ $y = x$، والمستقيمِ $y = 4 - x$، مُبرِّرًا إجابتي.
توجد نقطة واحدة تقع على المستقيمين معًا، هي: (2, 2) $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$

تبرير: أستعملُ شكلَ فِنْ المجاورَ لكتابةِ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ، مُبرِّرًا إجابتي:



28 $A \cap B$ — B؛ لأن B محتواه في A.

29 $A \cup B$ — A؛ لأن B محتواه في A.

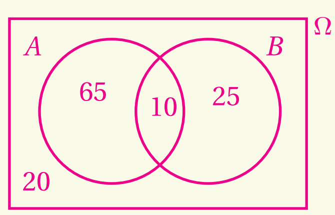
30 $B - A$ — $\varnothing$ لا توجد عناصر في B وليست في A.

31 مسألةٌ مفتوحةٌ: أصِفُ 3 حوادثَ متنافيةٍ وشاملةٍ في تجربةٍ عشوائيةٍ.
إجابة ممكنة: التجربة العشوائية: رمي حجر نرد، A: ظهور عدد زوجي أكبر من 3، B: ظهور عدد فردي، C: ظهور العدد 2

164

إجابات التدريب في بند (أتدرب وأحل المسائل):

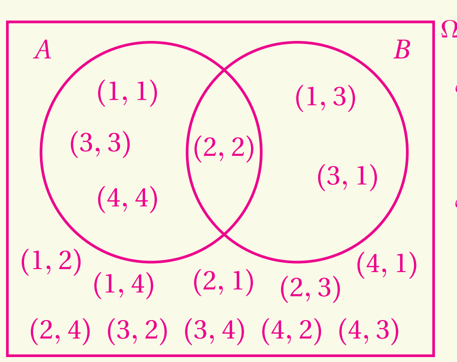
25) $P(A - B) = \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$



A: يدرسون اللغة الكورية

B: يدرسون اللغة الإسبانية

26)

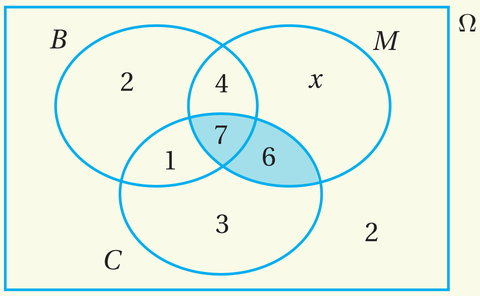


A: النقطة تقع على $y = x$

B: النقطة تقع على $y = 4-x$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
  » سُئل 30 طالبًا عمّا إذا كانوا يملكون دراجة (B)، وهاتفًا نقّالًا (M)، وجهاز حاسوب (C)، ومُثِّلت النتائج في شكل فِن الآتي:



1 أجد قيمة المتغيّر x. 5

2 أعبّر عن المنطقة المُظلَّلة بالرموز. $C \cap M$

3 أجد عدد عناصر الحادث $C \cap (\overline{M \cup B})$. 3

4 إذا اختير أحد الطلبة عشوائيًّا، فأجد احتمال كل حادث ممّا يأتي:

a. أن يكون الطالب/ الطالبة ممّن لا يملكون هاتفًا نقّالًا. $\frac{8}{30}$

b. أن يكون الطالب/ الطالبة ممّن يملكون دراجة وجهاز حاسوب ولا يملكون هاتفًا نقّالًا. $\frac{1}{30}$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 7 و 8 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة كتابة 3 معلومات أساسية مُتعلَّمة في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعِدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المُشترَكة التي كتبها الطلبة؛ بُغْيَة تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

الدرس
5

نتاجات الدرس

- تعرُّف الاحتمال الهندسي.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الأطوال.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال المساحات.
- إيجاد احتمالات هندسية باستعمال الزوايا.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حساب احتمالات وقوع حوادث لتجارب عشوائية متساوية الاحتمال.
- حساب احتمال عدم وقوع حادث ما.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وجدت) في صفحات (**أستعد لدراسة الوحدة**) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرسُ
5

الاحتمالُ الهندسيُّ
Geometric Probability

فكرةُ الدرسِ إيجادُ احتمالاتٍ هندسيةٍ باستعمالِ الأطوالِ والمساحاتِ والزوايا.

المصطلحاتُ الاحتمالاتُ الهندسيةُ.

مسألةُ اليومِ يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ لوحةَ إعلاناتٍ مضيئةً على شكلِ مُربَّعٍ أخضرَ، طولُ ضلعِهِ 3 m، وفي داخلِهِ مستطيلٌ أزرقُ، طولُهُ 2.83 m، وعرضُهُ 1.41 m. إذا كانَتِ اللوحةُ تضاءُ بآلافٍ منْ وحداتِ البكسلِ الصغيرةِ، ورُصِدَتْ وحدةٌ محروقةٌ منْ هذهِ الوحداتِ، فأجدُ احتمالَ أنْ تكونَ منْ وحداتِ اللوحِ الأزرقِ.

الاحتمالُ الهندسيُّ

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتِ التجربةُ العشوائيةُ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ فيها يساوي نسبةَ عددِ عناصرِ الحادثِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ. والآنَ سأتعلَّمُ كيفَ أجدُ احتمالَ تجاربَ عشوائيةٍ ترتبطُ بهذا المفهومِ، لكنَّها تتضمَّنُ مقاييسَ هندسيةً، مثلَ: الأطوالِ، والمساحاتِ، والزوايا، وتُسمّى **الاحتمالاتِ الهندسيةَ** (geometric probabilities).

الاحتمالُ الهندسيُّ: الأطوالُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{AB}$ التي تحوي القطعةَ المستقيمةَ $\overline{CD}$. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K على $\overline{CD}$ يساوي نسبةَ طولِ $\overline{CD}$ إلى طولِ $\overline{AB}$؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{AB}$ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ، وجميعَ النقاطِ الواقعةِ على $\overline{CD}$ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{وقوعُ } K \text{ على } \overline{CD}) = \frac{CD}{AB}$$

أتعلَّمُ
يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ على $\overline{AB}$.

1 التهيئة

- أكتب المصطلحات الآتية على اللوح:
  - » التجربة العشوائية.
  - » الفضاء العيني.
  - » الحادث.
  - » الحادث المُؤكَّد.
  - » الحادث المستحيل.
  - » الحادث الممكِن.
  - » التجربة متساوية الاحتمال.
  - » التجربة غير متساوية الاحتمال.
  - » مقياس الاحتمال.
  - » الاحتمال النظري.
  - » الاحتمال التجريبي.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأطلب إلى كل مجموعة ذكر تعريف لكل من المصطلحات المكتوبة عل اللوح، ومثال توضيحي لكل منها.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملًا.

2 الاستكشاف

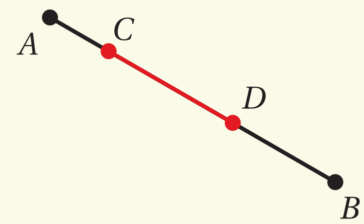
- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، وتأمّل الشكل المجاور لها، ثم أسألهم:
  - » ما طول ضلع المربع الأخضر؟ 3 m
  - » ما أبعاد المستطيل الأزرق؟ طوله 2.83 m، وعرضه 1.41 m
  - » بماذا تضاء الوحدة؟ بآلاف من وحدات البكسل الصغيرة.
  - » هل يمكن عَدُّ أنّ كل وحدة بكسل تعبّر عن نقطة داخل لوحة الإعلانات؟ نعم.
  - » إذا رُصِدت وحدة محروقة من هذه الوحدات، فكيف يمكن إيجاد احتمال أن تكون من وحدات اللوح الأزرق؟
- أُخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
  - » ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتكنّ؟
  - » مَن يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

ملاحظاتي

3 التدريس

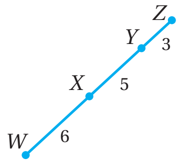
مثال 1

- أذكّر الطلبة بما تعلّموه سابقًا عن التجارب العشوائية متساوية الاحتمال، وأبيّن لهم أنه من غير الممكن تطبيق قانون الاحتمال لإيجاد احتمالات حوادث لتجارب عشوائية غير متساوية الاحتمال، وأنه يمكن الاستفادة من هذا المفهوم لإيجاد ما يُسمّى **(الاحتمالات الهندسية)**، وهي احتمالات لتجارب عشوائية تتضمن مقاييس هندسية، مثل: الأطوال، والمساحات، والزوايا.
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 10: الاحتمال الهندسي (الأطوال)**):



- أسأل الطلبة:
  - » هل تُعَد تجربة اختيار نقطة من النقاط الواقعة على $\overline{AB}$ عشوائيًّا تجربة متساوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة اختيار أي نقطة على $\overline{AB}$ هي نفسها.
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ جميع النقاط الواقعة على $\overline{AB}$.
  - » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هذه النقطة على $\overline{CD}$؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن النقاط الواقعة على $\overline{CD}$ تمثّل عناصر حادث اختيار النقطة K عشوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّل جميع النقاط الواقعة على $\overline{AB}$، وبما أن القطعة المستقيمة هي مسار مستقيم من النقاط له نقطة بداية ونقطة نهاية؛ فإن احتمال وقوع النقطة K على $\overline{CD}$ يساوي نسبة طول $\overline{CD}$ إلى طول $\overline{AB}$.
- أناقش حل المثال 1 مع الطلبة، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال 1



مُعتمِدًا الشكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$.**

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{YZ}$ هوَ A. إذنْ

$P(A) = \frac{YZ}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$= \frac{3}{14}$ بتعويضِ $YZ = 3, WZ = 14$

2 **احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.**

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ B. إذنْ:

$P(B) = \frac{XY}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

$= \frac{5}{14}$ بتعويضِ $XY = 5, WZ = 14$

3 **احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$.**

إنَّ حادثَ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ هوَ الحادثُ المُتمِّمُ للحادثِ B. إذنْ:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ صيغةُ احتمالِ المُتمِّمةِ

$= 1 - \frac{XY}{WZ}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الطولِ

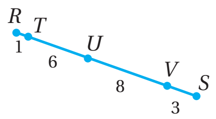
$= 1 - \frac{5}{14}$ بالتعويضِ

$= \frac{9}{14}$ بالتبسيطِ

أُفكِّرُ

هلْ يُمكِنُ إيجادُ احتمالِ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$ بطريقةٍ أُخرى؟

أتحقَّقُ منْ فهمي



مُعتمِدًا الشكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TU}$. $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$

b) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$. $\frac{11}{18}$

c) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{US}$. $\frac{7}{18}$

166

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بأن الرمز AB يشير إلى طول القطعة المستقيمة، في حين يشير الرمز $\overline{AB}$ إلى القطعة المستقيمة نفسها.
- في الفرع 3 من المثال 1، ألفت انتباه الطلبة إلى أنه لو افتُرِض أن حادث وقوع النقطة على $\overline{XY}$ هو B؛ فإن هذا يعني أن حادث عدم وقوع النقطة على $\overline{XY}$ هو $\overline{B}$.
- أناقش مع الطلبة حل سؤال **(أفكّر)** الوارد في هامش الفرع 3 من المثال 1، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن إيجاد الاحتمال بإيجاد نسبة مجموع طولي $\overline{YZ}$ و $\overline{WX}$ إلى طول $\overline{WZ}$.
- أطلب إلى الطلبة حل الفرع c من بند **(أتحقّق من فهمي)** التابع للمثال 1 بأكثر من طريقة.

الاحتمالُ الهندسيُّ: المساحاتُ

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المنطقةَ J التي تحوي المنطقةَ M. إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ منَ النقاطِ الواقعةِ في المنطقةِ J، ولتكنْ K، فإنَّ احتمالَ وقوعِ K في المنطقةِ M يساوي نسبةَ مساحةِ المنطقةِ M إلى مساحةِ المنطقةِ J؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في المنطقةِ J تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في المنطقةِ M تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.

$$P(\text{وقوعُ } K \text{ في المنطقةِ } M) = \frac{(\text{مساحةَ المنطقةِ } M)}{(\text{مساحةِ المنطقةِ } J)}$$

أتعلَّمُ

يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ اختيارِ النقطةِ K؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ تقعُ في المنطقةِ J.

مثال 2 : منَ الحياةِ

لوحةُ أسهمٍ: أطلقَ وليدٌ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الحمراءِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ هوَ A. إذنْ:

$P(A) = \frac{\text{مساحةَ المنطقةِ الحمراءِ}}{\text{مساحةِ لوحةِ السهامِ}}$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ المساحةِ

$= \frac{\pi r^2}{s^2}$ صيغةُ مساحةِ الدائرةِ، وصيغةُ مساحةِ المُربَّعِ

$= \frac{\pi(5)^2}{(40)^2}$ بتعويضِ $r = 5, s = 40$

≈ 0.05 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقَّقُ منْ فهمي

مُعتمِدًا المعلوماتِ المعطاةَ في المثالِ 2، أجدُ احتمالَ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ الصفراءِ. 0.15 تقريبًا.

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة مساحة كل من الدائرة والمربع.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن احتمال وقوع السهم في المنطقة الحمراء قليل؛ لأن مساحة الدائرة الحمراء صغيرة بالمقارنة بالمساحة الكلية للوحة السهام.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن مساحة المنطقة الصفراء ليست مساحة دائرة، وإنما هي مساحة الدائرة الكبيرة مطروحًا منها مساحة الدائرة الصغيرة الحمراء.

تعزيز اللغة ودعمها:

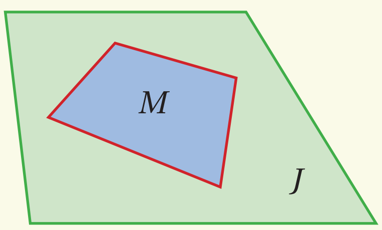
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنّبًا لإحراجه.

مثال 2: من الحياة

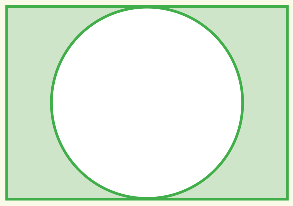
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في **ورقة المصادر 11: الاحتمال الهندسي (المساحات)**):



- أسأل الطلبة:
  » هل تُعَدّ تجربة اختيار نقطة من النقاط الواقعة في المنطقة J عشوائيًّا تجربة متساوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة اختيار أي نقطة في المنطقة J هي نفسها.
  » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ جميع النقاط الواقعة في المنطقة J.
  » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هذه النقطة في المنطقة M؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن النقاط الواقعة في المنطقة M تمثّل عناصر حادث اختيار النقطة K عشوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّل جميع النقاط الواقعة في المنطقة J؛ لذا فإن احتمال وقوع النقطة K في المنطقة M يساوي نسبة مساحة المنطقة M إلى مساحة المنطقة J.
- أناقش حل المثال 2 مع الطلبة، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

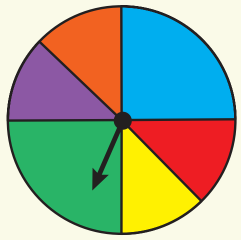
إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل الآتي، فما احتمال أن تقع في المنطقة المُظلَّلة؟



احتمال أن تقع النقطة في المنطقة المُظلَّلة (الخضراء) يساوي 0.51 تقريبًا.

مثال 3

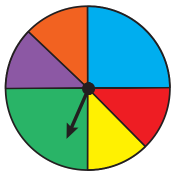
- أرسم الشكل الآتي على اللوح (أو أستعين بالنموذج الموجود في ورقة المصادر **12: الاحتمال الهندسي (الزوايا)**):



- أسأل الطلبة:
  - » هل تُعَدّ تجربة توقّف المؤشّر عشوائيًّا عند أيّ نقطة في الدائرة تجربة متساوية الاحتمال؟ لماذا؟ نعم؛ لأن فرصة وقوف المؤشّر عند أي نقطة في الدائرة هي نفسها.
  - » ما الفضاء العيني لهذه التجربة؟ جميع النقاط الواقعة داخل الدائرة.
  - » إذا اختيرت النقطة K عشوائيًّا، فما احتمال وقوع هذه النقطة في القطاع الأخضر؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابات الأسئلة السابقة، وأتوصّل معهم إلى أن النقاط الواقعة في القطاع الأخضر تمثّل عناصر حادث اختيار النقطة K عشوائيًّا، وأن عناصر الفضاء العيني تمثّل جميع النقاط الواقعة في الدائرة، وأبيّن لهم أن احتمال وقوع k في القطاع الأخضر يساوي نسبة قياس زاوية القطاع الأخضر إلى مجموع الزوايا حول مركز الدائرة.
- أناقش حل المثال 3 مع الطلبة، وأبيّن لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

الاحتمالُ الهندسيُّ: الزوايا

إذا دُوِّرَ المُؤشِّرُ في القرصِ المجاورِ عشوائيًّا، فإنَّ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ يساوي نسبةَ قياسِ زاويةِ القطاعِ الأخضرِ إلى مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ؛ لأنَّ جميعَ النقاطِ في الدائرةِ تُمثِّلُ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ، وجميعَ النقاطِ في القطاعِ الأخضرِ تُمثِّلُ عناصرَ الحادثِ.



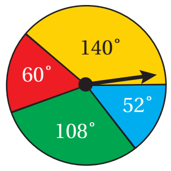
$$P(\text{توقُّفُ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأخضرِ}) = \frac{(\text{زاويةُ القطاعِ الأخضرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$

أتعلَّم

يتساوى الاحتمالُ في تجربةِ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ أيِّ نقطةٍ في الدائرةِ؛ لأنَّ فرصةَ الوقوعِ هيَ نفسُها لأيِّ نقطةٍ يتوقَّفُ عندَهُ المُؤشِّرُ.

مثال 3

مُعتمِدًا زوايا القطاعاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:



1 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأصفرِ هوَ A. إذنْ:

$$P(A) = \frac{(\text{زاويةُ القطاعِ الأصفرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا

$$= \frac{140^\circ}{360^\circ}$$ بالتعويضِ

$$= \frac{7}{18}$$ بالتبسيطِ

2 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ.

أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ عندَ القطاعِ الأزرقِ أوِ القطاعِ الأحمرِ هوَ B. إذنْ:

$$P(B) = \frac{(\text{مجموعُ زاويتي القطاعينِ الأزرقِ والأحمرِ})}{(\text{مجموعِ الزوايا حولَ مركزِ الدائرةِ})}$$ صيغةُ الاحتمالِ باستعمالِ الزوايا

$$= \frac{60^\circ + 52^\circ}{360^\circ}$$ بالتعويضِ

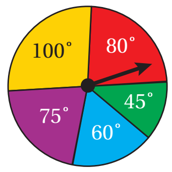
$$= \frac{112^\circ}{360^\circ} = \frac{14}{45}$$ بالتبسيطِ

أتذكّر

في الاحتمالِ، يدلُّ حرفُ العطفِ (أوْ) على الاتحادِ.

أتحقّقُ من فهمي

مُعتمِدًا زوايا القطاعاتِ الظاهرةِ على القرصِ المجاورِ، أجدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشّرِ القرصِ:



a) احتمالُ توقُّفِ مُؤشّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأزرقِ. $\frac{1}{6}$

b) احتمالُ توقُّفِ مُؤشّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأحمرِ. $\frac{1}{2}$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

مُعتمِدًا الشكلَ المجاورَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{WZ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XZ}$. $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

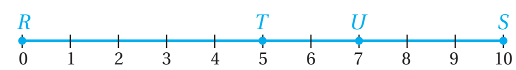
2) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

3) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WX}$ أوْ $\overline{YZ}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

4) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{WY}$. $\frac{7}{10}$

5) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{XY}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

مُعتمِدًا الشكلَ الآتي، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{RS}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:



6) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

7) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{TS}$. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

8) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{RT}$ أوْ $\overline{US}$. $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

9) احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$. $\frac{7}{10}$

10) احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{UR}$. $\frac{3}{10}$

إرشادات:

- أذكّر الطلبة بصيغة مساحة كل من الدائرة والمربع.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه كلّما كانت زاوية القطاع أكبر، كانت فرصة توقُّف مؤشّر القرص عند نقطة في القطاع أكبر.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (**أتذكّر**) الوارد في هامش المثال 3؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بأن حرف العطف (أو) يدل على اتحاد الحادثين، وهذا بدوره يساعدهم على حل الفرع b من بند (**أتحقّق من فهمي**) التابع للمثال 3

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (5 – 1) والمسائل (14 – 11) والمسائل (23 – 21) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنّني أختار أحد الطلبة ممّن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفّز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرّب وأحل المسائل**)، فإنّني أضع كلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند **(مهارات التفكير العليا)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (27 – 25).
- أرصد أيّة أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

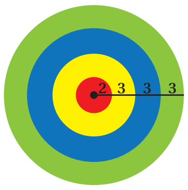
- في السؤال 24 **(تبرير)**، أوضّح للطلبة أنه بما أن طول $\overline{BZ}$ معلوم، واحتمال وقوع النقطة على $\overline{MN}$ معلوم أيضًا، فإنه يمكن التعويض في قاعدة احتمال المساحة لإيجاد طول $\overline{MN}$.
- في السؤال 25 **(تبرير)**، أوجّه الطلبة إلى إيجاد مساحة المثلث والدائرة ومتوازي الأضلاع؛ لمساعدتهم على إيجاد الاحتمال المطلوب.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 6, 7, 9, 15, 16 كتاب التمارين: (1 – 4), 6, 7
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (8 – 10), 18, 20, 24 كتاب التمارين: 5, 8, 10, 11
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 – 26), 17, 19 كتاب التمارين: (11 – 14), 9

لوحةُ أسهمٍ: أطلقَتْ دلالُ سهمًا على لوحةِ الأسهمِ المجاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحةِ، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



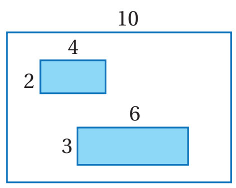
11) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الحمراءِ. $\frac{4}{121}$

12) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الصفراءِ. $\frac{21}{121}$

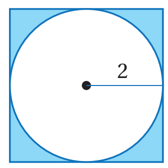
13) عدمُ وقوعِ السهمِ على المنطقةِ الزرقاءِ. $\frac{82}{121}$

14) وقوعُ السهمِ على المنطقةِ الخضراءِ أوِ المنطقةِ الصفراءِ. $\frac{78}{121}$

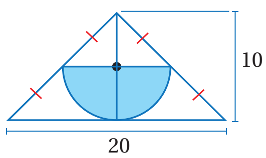
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ:

15)


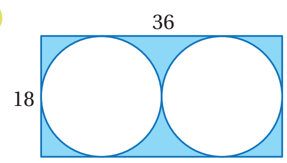
$\frac{13}{45}$ تقريبًا.

16)


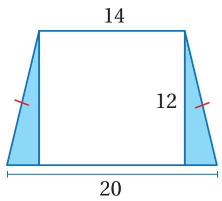
0.21 تقريبًا.

17)


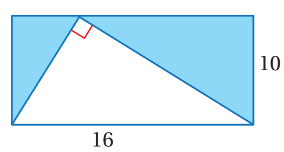
0.39 تقريبًا.

18)


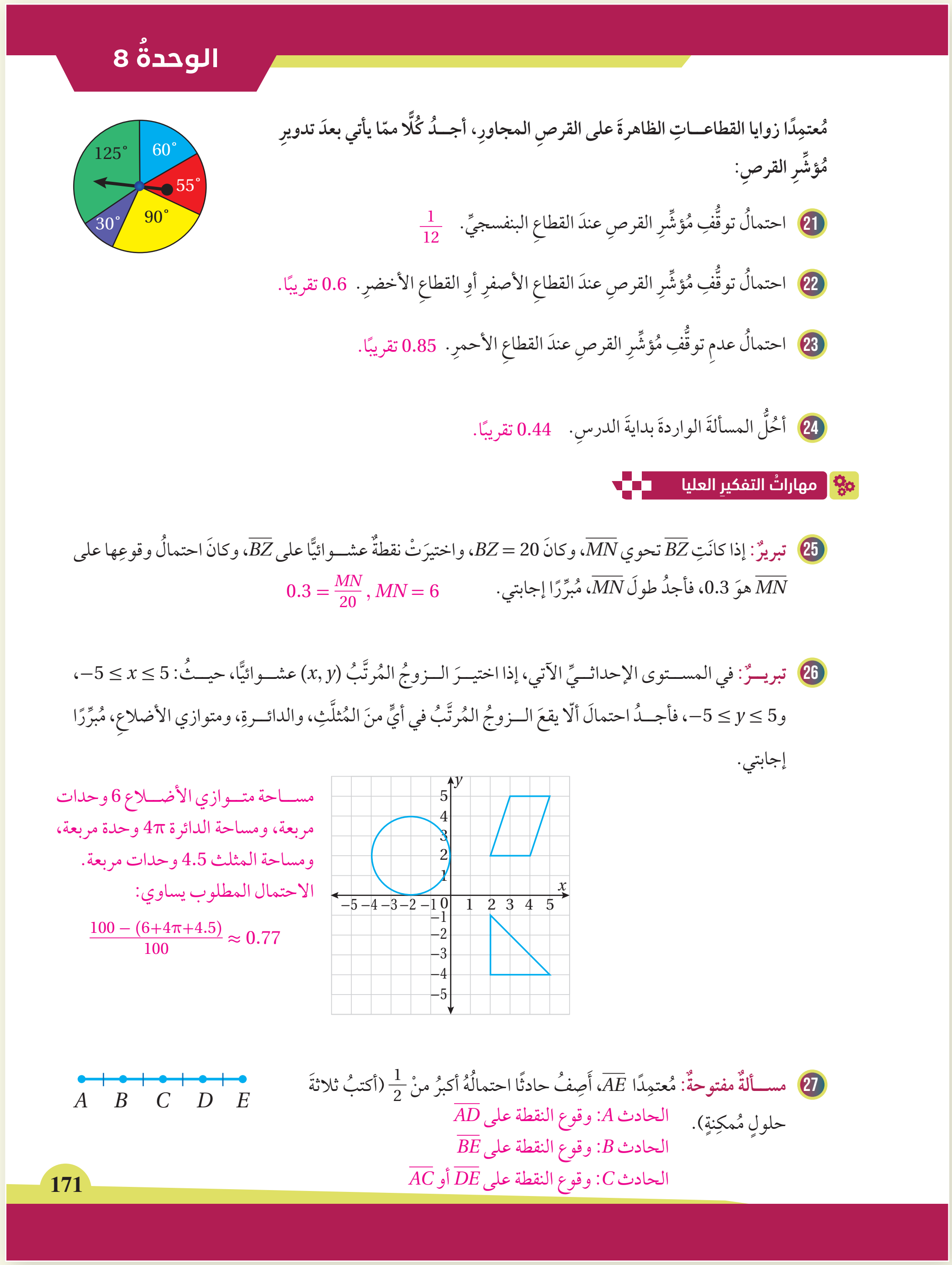
0.21 تقريبًا.

19)


$\frac{3}{17}$

20)


$\frac{1}{2}$



مُعتمِدًا زوايا القطاعــاتِ الظاهرةَ على القرصِ المجاورِ، أجـدُ كُلًّا ممّا يأتي بعدَ تدويرِ مُؤشِّرِ القرصِ:

21 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ البنفسجيِّ. $\frac{1}{12}$

22 احتمالُ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأصفرِ أوِ القطاعِ الأخضرِ. 0.6 تقريبًا.

23 احتمالُ عدمِ توقُّفِ مُؤشِّرِ القرصِ عندَ القطاعِ الأحمرِ. 0.85 تقريبًا.

24 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. 0.44 تقريبًا.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

25 **تبريرٌ:** إذا كانَتْ $\overline{BZ}$ تحوي $\overline{MN}$، وكانَ $BZ = 20$، واختيرَتْ نقطةٌ عشـوائيًّا على $\overline{BZ}$، وكانَ احتمالُ وقوعِها على $\overline{MN}$ هوَ 0.3، فأجدُ طولَ $\overline{MN}$، مُبرِّرًا إجابتي. $0.3 = \frac{MN}{20}$, $MN = 6$

26 **تبريـرٌ:** في المسـتوى الإحداثيِّ الآتي، إذا اختيـرَ الـزوجُ المُرتَّبُ (x, y) عشـوائيًّا، حيـثُ: $-5 \le x \le 5$، و $-5 \le y \le 5$، فأجـدُ احتمالَ ألّا يقعَ الـزوجُ المُرتَّبُ في أيٍّ منَ المُثلَّثِ، والدائـرةِ، ومتوازي الأضلاعِ، مُبرِّرًا إجابتي.

مسـاحة متـوازي الأضـلاع 6 وحدات مربعة، ومساحة الدائرة 4π وحدة مربعة، ومساحة المثلث 4.5 وحدات مربعة. الاحتمال المطلوب يساوي:

$\frac{100-(6+4\pi+4.5)}{100} \approx 0.77$

27 **مسـألةٌ مفتوحةٌ:** مُعتمِدًا $\overline{AE}$، أَصِفُ حادثًا احتمالُهُ أكبرُ منْ $\frac{1}{2}$ (أكتبُ ثلاثةَ حلولٍ مُمكِنةٍ).

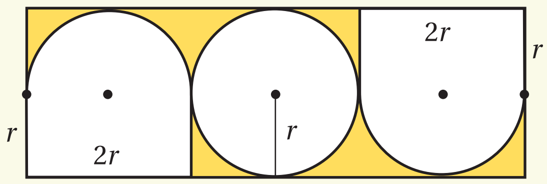
الحادث A: وقوع النقطة على $\overline{AD}$

الحادث B: وقوع النقطة على $\overline{BE}$

الحادث C: وقوع النقطة على $\overline{AC}$ أو $\overline{DE}$

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
  » **إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا من كل شكل من الآتية، فأجد احتمال وقوعها في المنطقة المُظلَّلة.**



0.14 تقريبًا.

تعليمات المشروع:

- أذكّر الطلبة بأنّ موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكّد أنّ عناصره كافّة متوافرة يوم العرض.

6 الختام

- أطلب إلى كل طالب/ طالبة اختيار فكرة فهمها/ فهمتها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها/ تفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- أطلب إلى الطلبة تسليمي الأوراق.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أخطّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلِّ ممّا يأتي:

1 تبايـنُ مجموعةِ البياناتِ الآتيةِ مُقرَّبًـا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ هوَ:

11, 13, 14, 16, 18

a) 5.8 b) 2.4

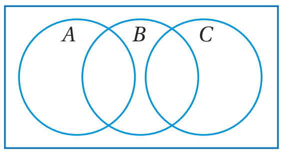
c) 14.4 d) 3.8

2 استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = 2x - 15$ لتعديلِ مجموعةٍ منَ البيانـاتِ. إذا كانَ الانحرافُ المعيـاريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ هوَ 3، فـإنَّ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ هوَ:

a) −9 b) 21

c) 3 d) 6

3 الحادثُ A والحادثُ C في شكلِ فِنْ الآتي هما:



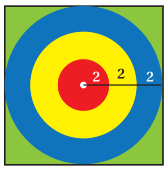
a) حادثانِ شاملانِ.

b) حادثانِ متنافيانِ.

c) حادثانِ متنافيانِ وشاملانِ.

d) حادثانِ متقاطعانِ.

4 أُطلِقَ سـهمٌ علـى لوحةِ الأسـهمِ المجـاورةِ. إذا وقعَ السهمُ عشوائيًّا داخلَ اللوحـةِ، فـإنَّ احتمـالَ وقوعِـهِ علـى المنطقـةِ الصفراءِ هوَ:



a) $\frac{\pi}{36}$ b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{\pi}{4}$

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي قياساتِ أحذيةٍ لمجموعةٍ منَ الطلبةِ:

المقاسُ	33	34	35	36	37	38	39
التكرارُ	1	3	8	14	6	2	1

5 أجدُ تباينَ قياساتِ الأحذيةِ. 1.47 تقريبًا.

6 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لقياساتِ الأحذيةِ. $\sigma \approx 1.21$

حُوِّلَتْ مجموعةٌ منَ البياناتِ، عددُها 50، باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 70$، حيثُ y المشاهدةُ بعدَ التحويلِ، وx المشاهدةُ قبلَ التحويلِ. إذا كانَ:

$\sum y = -135, \sum y^2 = 2567$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

7 الوسطُ الحسابيُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ. $\mu = 67.3$

8 الانحرافُ المعياريُّ للمشاهداتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma \approx 6.6$

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (10 – 1) فرديًّا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (28 – 11)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجّههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

في ما يأتي أسعارُ مجموعةٍ منَ السيّاراتِ المُستعمَلةِ بالدينارِ:

2590 2650 2650 2790 2850 2925

3090 3125 3125 3420 3595 3740

3750 3920 3945 4050 4150 4200

9 أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ مُتساويةِ الطولِ. (9, 10) أنظر الهامش.

10 أكتبُ وصفًا للبياناتِ.

يُبيِّنُ الجدولُ الآتي توزيعًا لعددِ الجرائدِ المَبيعةِ في إحدى المكتباتِ خلالَ 15 يومًا:

التكرارُ	عددُ الجرائدِ
4	81 – 85
5	86 – 90
4	91 – 95
2	96 – 100
15	المجموعُ

11 أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ للبياناتِ. $\mu_x \approx 89.3$

12 أُقدِّرُ منوالَ البياناتِ. المنوال 88

13 أُحدِّدُ الفئةَ التي يقعُ فيها وسيطُ البياناتِ. فئة الوسيط 90 – 86

14 يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ التالي كمِّيةَ الماءِ (باللترِ) التي استهلكَتْها مجموعةٌ منَ الأشخاصِ في أحدِ الأيامِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

التكرارُ	كمِّيةُ الماءِ (L)
45	$75 \le s < 125$
50	$125 \le s < 150$
70	$150 \le s < 175$
90	$175 \le s < 225$
45	$225 \le s < 300$

أنظر الهامش.

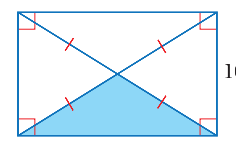
في مجموعةٍ تضمُّ 25 شخصًا منْ منتسبي أحدِ النوادي الرياضيةِ، كانَ 13 شخصًا منْهُمْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، و11 شخصًا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، و6 أشخاصٍ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ ولعبةَ كرةِ القدمِ معًا. إذا اختيرَ شخصٌ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ: (15–17) أنظر الهامش.

15 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ أو لعبةَ كرةِ القدمِ.

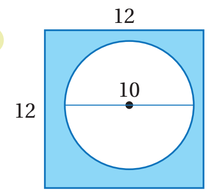
16 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ.

17 أنْ يكونَ الشخصُ ممَّنْ لا يمارسونَ لعبةَ كرةِ السَّلَّةِ، ولا يمارسونَ لعبةَ كرةِ القدمِ.

إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الشكلينِ الآتيينِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ باللونِ الأزرقِ.

18 

$\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$

19 

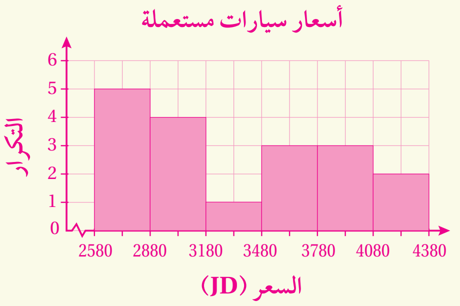
0.45 تقريبًا.

173

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

9)

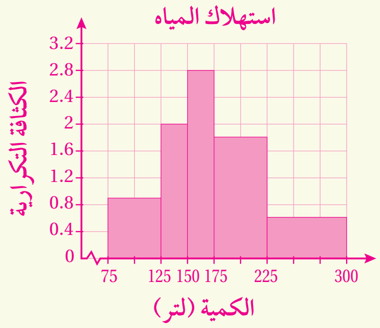
أسعار سيارات مستعملة (p)	
السعر (JD)	التكرار
$2580 \le p < 2880$	5
$2880 \le p < 3180$	4
$3180 \le p < 3480$	1
$3480 \le p < 3780$	3
$3780 \le p < 4080$	3
$4080 \le p < 4380$	2



10) أغلب أسعار السيارات تقل عن JD 3180 أو تزيد على JD 3780، وعدد قليل منها يختلف عن ذلك.

14)

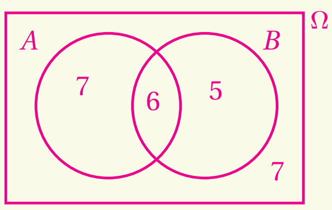
استهلاك المياه			
الكمية (لتر)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$75 \le s < 125$	45	50	0.9
$125 \le s < 150$	50	25	2
$150 \le s < 175$	70	25	2.8
$175 \le s < 225$	90	50	1.8
$225 \le s < 300$	45	75	0.6



15) $P(A \cup B) = \frac{18}{25}$

16) $P(B - A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

17) $P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{25}$



A: يمارسون لعبة كرة السلة

B: يمارسون لعبة كرة القدم

تدريب على الاختبارات الدولية:

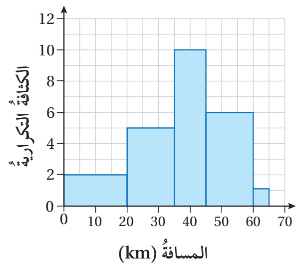
- أعرّف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبيّن لهم أهميتها، ثم أوجّههم إلى حلّ الأسئلة في بند **(تدريب على الاختبارات الدولية)** فرديًّا، ثمّ أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّيّة، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

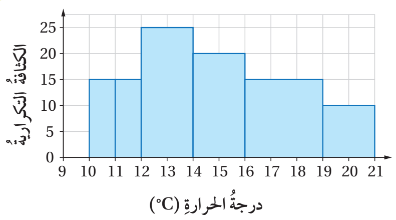
أنشِئُ جدولًا تكراريًّا لكلِّ مُدرَّجٍ تكراريٍّ ممّا يأتي:

(20, 21) أنظر الهامش.

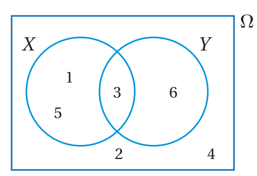
20



21



كُتِبَتِ الأعدادُ الصحيحةُ منْ 1 إلى 6 على مجموعةٍ منَ البطاقاتِ المُتطابقةِ، ثمَّ اختيرَتْ بطاقةٌ عشوائيًّا، ومُثِّلَ الفضاءُ العينيُّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ التي تحوي الحادثينِ X و Y في شكلِ فِنْ الآتي. أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:



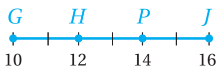
22 $P(X \cap Y)$ $\frac{1}{6}$

23 $P(X \cup Y)$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

24 $P(\overline{X \cup Y})$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

25 $P(X - Y)$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مُعتمِدًا الشكلَ الآتيَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{GJ}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يلي:



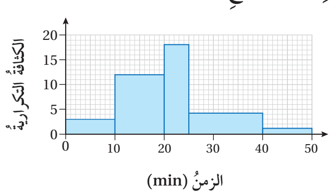
26 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HP}$. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

27 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{GP}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

28 احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{HJ}$. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يُبيِّنُ المُدرَّجُ التكراريُّ الآتي الزمنَ (بالدقائقِ) الذي استغرقَهُ عددٌ منَ المرضى في الانتظارِ قبلَ دخولِهِمْ عندَ طبيبِ الأسنانِ خلالَ أسبوعٍ:



29 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا أكثرَ منْ 30 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ. 50

30 أجدُ عددَ المرضى الذينَ انتظروا منْ 10 دقائقَ إلى 40 دقيقةً قبلَ الدخولِ عندَ الطبيبِ. 270

قيسَتْ أطوالُ 8 أشخاصٍ بوحدةِ السنتيمترِ، وكانَتِ النتائجُ كالآتي:

165	170	190	180
175	185	176	184

31 أجدُ تباينَ أطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ. $\sigma^2 \approx 59.9$

32 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لأطوالِ الأشخاصِ الثمانيةِ. $\sigma \approx 7.7$

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

20)

المسافة (km)	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 35$	$35 \le x < 45$	$45 \le x < 60$	$60 \le x < 65$
التكرار	40	75	100	90	5

21)

درجة الحرارة (°C)	$10 \le x < 11$	$11 \le x < 12$	$12 \le x < 14$	$14 \le x < 16$	$16 \le x < 19$	$19 \le x < 21$
التكرار	15	15	50	40	45	20

كتاب التمارين

أختبرُ معلوماتي بحَلِّ التدريباتِ أوَّلًا. وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ، أستعينُ بالمثالِ المعطى.

المدى والمدى الربيعيُّ (الدرسُ 1)

أجدُ المدى والربيعياتِ والمدى الربيعيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

1) 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

المدى 37 ، $Q_1 = 60.5$ ، $Q_2 = 73$ ، $Q_3 = 79.5$ ، $IQR = 19$

2) 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

المدى 16 ، $Q_1 = 29.5$ ، $Q_2 = 37$ ، $Q_3 = 41$ ، $IQR = 11.5$

3)

الساقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: **19|3 = 193**

المـــدى 39، $Q_1 = 202$ ، $Q_2 = 218$ ، $Q_3 = 221$ ، $IQR = 19$

4)

الساقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
11	7

المفتاحُ: **5|0 = 5.0**

المدى 6.7، $Q_1 = 6.35$ ، $Q_2 = 7.6$ ، $Q_3 = 8.65$ ، $IQR = 2.3$

سرعةٌ: يُبيِّنُ الجدولُ الآتي سرعةَ مجموعةٍ منَ الحيواناتِ بالكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ:

السرعةُ (km/h)	الحيوانُ
100	الفهدُ الصيّادُ
58	النَّمِرُ
48	القِطَّةُ
40	الفيلُ
13	الفأرُ
2	العنكبوتُ

5) أجدُ المدى الربيعيَّ للبياناتِ. $IQR = 45$

6) أَصِفُ توزيعَ البياناتِ. ربع هذه الحيوانات ســرعتها 13 km/h أو أقل، وربعها سرعتها 58 km/h أو أكثر. تتراوح سرعات النصف الأوسط من هذه الحيوانات بين 13 km/h و 58 km/h ولا يتجاوز الفرق بين سرعاتها 45 km/h

مثالٌ:

محافظاتٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المُجاوِرُ مســاحاتِ المحافظاتِ الأردنيةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

مساحاتُ المحافظاتِ الأردنيةِ	
المساحةُ (بآلافِ الكيلومتراتِ المُربَّعةِ)	المحافظةُ
0.4	عجلونُ
7.5	عمّانُ
6.9	العقبةُ
1.1	البلقاءُ
1.5	إربدُ
0.4	جرشُ
3.4	الكركُ
32.8	معانُ
0.9	مأدبا
26.5	المفرقُ
2.2	الطفيلةُ
4.7	الزرقاءُ

a) **أجدُ المدى.**

الخطـوةُ 1 أُرتِّبُ البياناتِ تصاعديًّا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

الخطـوةُ 2 أجدُ المدى.

أكبرُ قِيَمِ البياناتِ هيَ 32.8، وأصغرُها هيَ 0.4، إذنْ، المدى هوَ:

$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$

b) **أجدُ المدى الربيعيَّ (IQR).**

$$Q_2 = \frac{2.2 + 3.4}{2} = 2.8$$

النصفُ الأدنى: 0.4 0.4 0.9 1.1 1.5 2.2

النصفُ الأعلى: 3.4 4.7 6.9 7.5 26.5 32.8

$$Q_1 = \frac{0.9 + 1.1}{2} = 1 \qquad Q_3 = \frac{6.9 + 7.5}{2} = 7.2$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$$

إذنْ، المدى الربيعيُّ (IQR) للبياناتِ هوَ 6.2

c) **أستعملُ المدى والمدى الربيعيَّ لوصفِ البياناتِ.**

مدى هذهِ البياناتِ هوَ 32.4 ألفَ كيلومترٍ مُربَّعٍ، وربعُ محافظاتِ المملكةِ مساحاتُها ألفُ كيلومترٍ مُربَّعٍ أوْ أقلُّ، وربعُ المحافظاتِ أيضًا مساحاتُها 7.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ أوْ أكثرُ. أمّا مساحاتُ النصفِ الأوسطِ منَ المحافظاتِ فتتراوحُ بينَ ألفِ كيلومترٍ مُربَّعٍ و 7.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ، ولا تتجاوزُ الفروقُ بينَ مساحاتِها 6.2 آلافِ كيلومترٍ مُربَّعٍ.

تنظيمُ البياناتِ المتصلةِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ (الدرسُ 2)

في ما يأتي أطوالُ 20 خنفساءَ بالسنتيمترِ:

0.7 1.3 3.2 2.7 0.9 3.1 2.5 1.8 2.3 4.4

0.6 2.6 3.9 2.1 1.7 2.6 3.5 2.8 3.2 1.6

7) أُنظِّمُ أطوالَ الخنافسِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

أطوالُ الخنافسِ (l)		
الطولُ (cm)	الإشاراتُ	التكرارُ
$0 \le l < 1$	𝍷𝍷𝍷	3
$1 \le l < 2$	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
$2 \le l < 3$	𝍸 𝍷𝍷	7
$3 \le l < 4$	𝍸	5
$4 \le l < 5$	𝍷	1

8) ما عددُ الخنافسِ التي لا يقلُّ طولُها عنْ 2 cm؟ 13

مثالٌ: في ما يأتي كتلُ 20 حبَّةَ تفّاحٍ بالغرامِ:

94 103 113 89 94 102 99 111 97 103

114 116 101 95 88 107 102 113 95 104

a) **أُنظِّمُ كتلَ حبّاتِ التفّاحِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.**

تُمثِّلُ كتلُ حبّاتِ التفّاحِ بياناتٍ عدديةً متصلةً؛ لذا لا توجدُ فجواتٌ بينَ الفئاتِ، وتشملُ هذهِ الفئاتُ جميعَ كتلِ حبّاتِ التفّاحِ، وتكونُ أطوالُها (الفئاتُ) في الجدولِ متساويةً.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$		
$90 \le m < 100$		
$100 \le m < 110$		
$110 \le m < 120$		

أملأُ الفراغَ في الجدولِ السابقِ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

الخطـوةُ 1 أضعُ إشــاراتِ عَدٍّ مُقابِلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ حبّاتِ التفّاحِ التي تحويها.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$	𝍷𝍷	
$90 \le m < 100$	𝍸 𝍷	
$100 \le m < 110$	𝍸 𝍷𝍷	
$110 \le m < 120$	𝍸	

الخطـوةُ 2 أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

كتلُ حبّاتِ التفّاحِ (m)		
الكتلةُ (g)	الإشاراتُ	التكرارُ
$80 \le m < 90$	𝍷𝍷	2
$90 \le m < 100$	𝍸 𝍷	6
$100 \le m < 110$	𝍸 𝍷𝍷	7
$110 \le m < 120$	𝍸	5

b) **ما عددُ حبّاتِ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منها عنْ 100 g؟**

تقعُ حبّاتُ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منها عنْ 100 g في أوَّلِ فئتينِ. ولإيجادِ عددِها، أجمعُ تكراراتِ هاتينِ الفئتينِ:

$2 + 6 = 8$

إذنْ، عددُ حبّاتِ التفّاحِ التي تقلُّ كتلةُ كلٍّ منْها عنْ 100 g هوَ 8

تنظيمُ البياناتِ في جداولَ تكراريةٍ ذاتِ فئاتٍ معطاةٍ (الدرسُ 2)

في ما يأتي عددُ الأحاديثِ النبويةِ الشريفةِ التي حفظَتْها مجموعةٌ منَ الطلبةِ:

23 29 31 36 20 35

19 27 15 33 18 24

10 25 17 14 39 31

9) أُنظِّمُ هذهِ البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاوِرِ.

عددُ الأحاديثِ المحفوظةِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
10 – 15	𝍷𝍷𝍷	3
16 – 21	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
22 – 27	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
28 – 33	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
34 – 39	𝍷𝍷𝍷	3

10) ما عددُ الطلبةِ الذينَ حفظوا 28 حديثًا أوْ أكثرَ؟ 7

كتاب التمارين

مثالٌ: في ما يأتي عددُ أقلامِ التلوينِ لدى كلِّ طالبٍ وطالبةٍ في أحدِ صفوفِ روضةِ أطفالٍ:

18	12	9	15	4	0	11	10	2
7	14	16	12	6	13	12	5	17

a) أُنظِّمُ هذهِ البياناتِ في الجدولِ التكراريِّ المُجاورِ.

يُمثِّلُ عددُ الأقلامِ بياناتٍ عدديةً منفصلةً؛ لذا توجدُ فجواتٌ بينَ الفئاتِ، وتكونُ أطوالُ الفئاتِ في الجدولِ متساويةً.

عددُ أقلامِ التلوينِ		
العددُ	الإشاراتُ	التكرارُ
0 – 3		
4 – 7		
8 – 11		
12 – 15		
16 – 19		

أملأُ الفراغَ في الجدولِ السابقِ باتِّباعِ الخطوتينِ الآتيتينِ:

الخطوةُ 1 أضعُ إشاراتِ عَدٍّ مُقابلَ كلِّ فئةٍ بحيثُ تُمثِّلُ عددَ أقلامِ التلوينِ التي تحويها.

<table>
<tr><th colspan="3">عددُ أقلامِ التلوينِ</th></tr>
<tr><th>العددُ</th><th>الإشاراتُ</th><th>التكرارُ</th></tr>
<tr><td>0 – 3</td><td>||</td><td></td></tr>
<tr><td>4 – 7</td><td>||||</td><td></td></tr>
<tr><td>8 – 11</td><td>||||</td><td></td></tr>
<tr><td>12 – 15</td><td>卌</td><td></td></tr>
<tr><td>16 – 19</td><td>|||</td><td></td></tr>
</table>

الخطوةُ 2 أكتبُ عددَ الإشاراتِ في عمودِ التكرارِ.

<table>
<tr><th colspan="3">عددُ أقلامِ التلوينِ</th></tr>
<tr><th>العددُ</th><th>الإشاراتُ</th><th>التكرارُ</th></tr>
<tr><td>0 – 3</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4 – 7</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8 – 11</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>12 – 15</td><td>卌</td><td>5</td></tr>
<tr><td>16 – 19</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
</table>

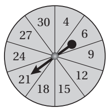
b) ما عددُ الطلبةِ الذينَ لدى كلٍّ منْهُمْ 12 قلمَ تلوينٍ أوْ أكثرَ؟

$5 + 3 = 8$

عددُ الطلبةِ الذينَ لدى كلٍّ منْهُمْ 12 قلمَ تلوينٍ أوْ أكثرَ هو 8

إيجادُ احتمالاتِ وقوعِ الحوادثِ (الدرسُ 4)

دُوِّرَ مُؤشِّرُ القرصِ المُجاورِ المُقسَّمِ إلى 10 قطاعاتٍ مُتطابِقةٍ:



11 أجدُ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ العشوائيةِ. $\Omega = \{4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

12 أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ فرديٍّ. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

13 أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 20 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

اختارَتْ ليلى بطاقةً عشوائيًّا منْ بينِ البطاقاتِ المُجاورةِ. أجدُ احتمالَ اختيارِ:

14 بطاقةٍ تحملُ دائرةً. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

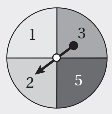
15 بطاقةٍ تحملُ مستطيلًا والعددَ 3 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

16 بطاقةٍ تحملُ العددَ 1 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

17 بطاقةٍ تحملُ شكلًا لهُ أضلاعٌ. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

مثالٌ: **دُوِّرَ مُؤشِّرُ القرصِ المُجاورِ المُقسَّمِ إلى 4 قطاعاتٍ مُتطابِقةٍ:**

أجدُ احتمالَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 3



أفترضُ أنَّ حادثَ توقُّفِ المُؤشِّرِ على عددٍ أكبرَ منْ 3 هوَ A.

بما أنَّهُ يوجدُ عددٌ واحدٌ أكبرُ منْ 3، هوَ 5، فإنَّ:

$P(A) = \frac{1}{4}$

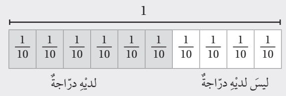
احتمالُ عدمِ وقوعِ الحادثِ (الدرسُ 4)

18 إذا كانَ احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ القدمِ الذي تُشجِّعُهُ سلمى هوَ $\frac{3}{7}$، فما احتمالُ ألّا يفوزَ الفريقُ؟ $\frac{4}{7}$

19 إذا كانَ احتمالُ أنْ تصلَ الحافلةُ في موعدِها هوَ $\frac{8}{11}$، فما احتمالُ أنْ تتأخَّرَ الحافلةُ؟ $\frac{3}{11}$

مثالٌ:

إذا كانَ احتمالُ اختيارِ طالبٍ منَ الصفِّ السابعِ لديْهِ درّاجةٌ هوائيةٌ هوَ $\frac{6}{10}$، فما احتمالُ اختيارِ طالبٍ ليسَ لديْهِ درّاجةٌ هوائيةٌ؟



P (ليسَ لديْهِ درّاجةٌ) $= 1 - P$ (لديْهِ درّاجةٌ)

$= 1 - \frac{6}{10}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{2}{5}$

أتذكَّرُ

احتمالُ عدمِ وقوعِ الحادثِ A هوَ: $1 - P(A)$

الدرسُ 1

مقاييسُ التشتُّتِ
Measures of Variation

شاركَ 200 عدّاءٍ في سباقِ الضاحيةِ، وسُجِّلَ الزمنُ (إلى أقربِ دقيقةٍ) الذي استغرقَهُ كلُّ عدّاءٍ لقطعِ مسافةِ السباقِ، ثمَّ نُظِّمَتِ البياناتُ في الجدولِ الآتي:

الزمنُ (min)	28	29	31	32	35	39	40	42	43
عددُ العدّائينَ	2	8	30	54	48	39	12	4	3

1 أجدُ تباينَ البياناتِ أعلاهُ. $\sigma^2 \approx 13.18$

2 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ أعلاهُ. $\sigma \approx 3.6$

تعبئةٌ: تُعبَّأُ زجاجاتُ عصيرِ الفاكهةِ في أحدِ المصانعِ بصورةٍ آليَّةٍ. اختيرَتْ 12 زجاجةً عشوائيًّا لقياسِ حجمِ العصيرِ داخلَ كلٍّ منْها بوحدةِ (cm^3)، وكانَتِ النتائجُ كالآتي:

330.2	332.0	328.5	335.2	338.7	329.1
331.7	328.5	334.2	329.9	336.4	330.7

ثُمَّ حُوِّلَتْ هذهِ البياناتُ باستعمالِ العلاقةِ: $y = 10x - 3300$، حيثُ y الحجمُ بعدَ التحويلِ، وx الحجمُ قبلَ التحويلِ.

3 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لحجمِ العصيرِ داخلَ الزجاجاتِ بعدَ التحويلِ. $\sigma_y^2 \approx 1013.1, \sigma_y \approx 31.8$

4 أجدُ تباينَ حجمِ العصيرِ داخلَ الزجاجاتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_x \approx 3.18, \sigma_x^2 \approx 10.1$

سجَّلَ باحثٌ المُدَّةَ (إلى أقربِ دقيقةٍ) التي استغرقَها 50 مُراجِعًا لإنجازِ معاملاتِهِمْ في إحدى الدوائرِ الحكوميةِ، وكانَتِ البياناتُ كالآتي:

8	9	6	11	8	5	6	6	6	10
8	7	6	12	5	6	6	7	9	11
5	6	10	7	7	6	6	6	10	8
8	7	7	11	6	4	7	6	6	9
8	8	6	7	10	12	5	6	7	9

5 أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ.

5)

الزمن (min)	التكرار
4	1
5	4
6	16
7	9
8	7
9	4
10	4
11	3
12	2

6 أجدُ تباينَ البياناتِ أعلاهُ. $\sigma_t^2 \approx 3.8$

7 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ أعلاهُ. $\sigma_t \approx 1.95$

كتاب التمارين

مقاييسُ التشتُّتِ
Measures of Variation

إذا كانَتِ انحرافاتُ 8 مشاهداتٍ عنْ وسطِها الحسابيِّ كما يأتي: $-1, 1, -2, 1, 1, 2b+1, -4, 3, 2$، فأُجيبُ عنِ السؤالينِ الآتيينِ تباعًا:

8 أجدُ قيمةَ الثابتِ b. $b = -\frac{1}{2}$

9 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ المشاهداتِ. $\sigma^2 = 4.5, \sigma \approx 2.12$

10 أجدُ الانحرافَ المعياريَّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ، عددُها 20، علمًا بأنَّ مجموعَ هذهِ المشاهداتِ هوَ 208، ومجموعُ مُربَّعاتِها هوَ 2200. $\sigma \approx 1.36$

في ما يأتي مجموعةُ بياناتٍ:

24 17 80 38 73 31 73 52

ثمَّ استُعمِلَتِ العلاقةُ: $y = \frac{x-3}{7}$ لتحويلِ البياناتِ، حيثُ x القيمةُ قبلَ التحويلِ، وy القيمةُ بعدَ التحويلِ:

11 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ بعدَ التحويلِ. $\mu_y = 6.5, \sigma_y \approx 3.3$

12 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ والانحرافَ المعياريَّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ بناءً على النتائجِ في الفرعِ السابقِ. $\mu_x \approx 48.5, \sigma_x \approx 23.1$

حُوِّلَتْ مجموعةٌ منَ البياناتِ، عددُها 20، باستعمالِ العلاقةِ: $y = x - 25$، حيثُ y القيمةُ بعدَ التحويلِ، وx القيمةُ قبلَ التحويلِ.

إذا كانَ: $\sum y = 124, \sum y^2 = 3531$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

13 الوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ. $\mu_y = 6.2, \mu_x = 31.2$

14 الانحرافُ المعياريُّ للبياناتِ قبلَ التحويلِ. $\sigma_y \approx 11.8, \sigma_x \approx 11.8$

(15–18) أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ المُجاورُ علاماتِ الطلبةِ في شعبتينِ منَ الصفِّ التاسعِ في اختبارِ الرياضياتِ في إحدى المدارسِ:

	الشعبةُ (أ)	الشعبةُ (ب)
عددُ الطلبةِ	20	15
الوسطُ الحسابيُّ	14	18
التباينُ	10	6

15 أجدُ مجموعَ علاماتِ الطلبةِ في كلِّ شعبةٍ.

16 أجدُ مجموعَ مُربَّعاتِ علاماتِ الطلبةِ في كلِّ شعبةٍ.

17 أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ طلبةِ الشعبتينِ معًا.

18 أجدُ التباينَ والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ طلبةِ الشعبتينِ معًا.

الجداولُ التكراريةُ ذاتُ الفئاتِ
Frequency Tables with Class Intervals

في كلٍّ ممّا يأتي، أُنظِّمُ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ متساويةِ الطولِ: (1–4) أنظر ملحق الإجابات.

1 كتلُ أكياسِ اللحومِ (g).

28.4	27.5	29.1	26.3	27.8
28.6	27.2	27.5	28.3	25.7
29.3	26.2	27.3	26.9	28.5

2 أعدادُ الطلبةِ.

81	75	66	62	72	78
68	74	64	82	70	64
72	79	77	76	72	69

3 أعدادُ طلباتِ التوصيلِ الأسبوعيةِ.

381	291	652	335	376	618
407	525	493	380	671	428
576	493	465	266	526	398
673	552	518	470	601	374

4 درجاتُ الحرارةِ (°C).

27.3	28.4	32.4	11.4	32.4	14.2	19.6
17.4	32.7	29.0	13.2	17.4	37.8	29.1
26.1	22.2	14.5	19.7	33.1	27.3	15.2
20.7	31.2	29.3	30.2	26.0	17.1	29.3

أُقدِّرُ الوسطَ الحسابيَّ والمنوالَ والوسيطَ لكلٍّ منَ البياناتِ الآتيةِ:

5

x	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
التكرارُ	4	6	11	17	9

الوسط الحسابي 29.5 تقريبًا، المنوال 35، الوسيط 35

6

y	$0 \le y < 100$	$100 \le y < 200$	$200 \le y < 300$	$300 \le y < 400$	$400 \le y < 500$	$500 \le y < 600$
التكرارُ	95	56	32	21	9	3

الوسط الحسابي 158.3 تقريبًا، المنوال 50، الوسيط 150

7

z	$0 \le z < 5$	$5 \le z < 10$	$10 \le z < 15$	$15 \le z < 20$
التكرارُ	16	27	19	13

الوسط الحسابي 9.4 تقريبًا، المنوال 7.5، الوسيط 7.5

8

m	1–3	4–6	7–9	10–12	13–15
التكرارُ	5	8	14	10	7

الوسط الحسابي 8.4 تقريبًا، المنوال 8، الوسيط 8

9

n	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
التكرارُ	1	12	24	15	13	9	5

الوسط الحسابي 34.9 تقريبًا، المنوال 25.5، الوسيط 35.5

المُدرَّجاتُ التكراريةُ
Histograms

1 **واجباتٌ منزليةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ الزمنَ (بالدقائقِ) الذي استغرقَتْهُ مجموعةٌ منْ طالباتِ الصفِّ التاسعِ في حَلِّ واجبٍ منزليٍّ لمادةِ الرياضياتِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

الزمنُ (min)	التكرارُ
$10 \le t < 20$	3
$20 \le t < 30$	9
$30 \le t < 40$	28
$40 \le t < 50$	6

أنظر ملحق الإجابات.

2 **تسوُّقٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ زمنَ انتظارِ مجموعةٍ منْ زبائنِ أحدِ المحالِّ التجاريةِ لحينِ دفعِ ثمنِ الحاجياتِ التي اشتروها. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

الزمنُ (min)	التكرارُ
$0 \le t < 2$	15
$2 \le t < 4$	7
$4 \le t < 6$	12
$6 \le t < 8$	15
$8 \le t < 10$	12

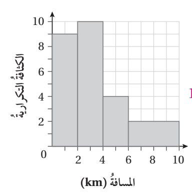
أنظر ملحق الإجابات.

3 **مساجدُ:** يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ أعمارَ المُصلّينَ لصلاةِ الفجرِ في أحدِ المساجدِ. أُمثِّلُ البياناتِ باستعمالِ المُدرَّجِ التكراريِّ.

العمرُ (بالعامِ)	التكرارُ
$0 \le x < 20$	35
$20 \le x < 30$	85
$30 \le x < 60$	120

أنظر ملحق الإجابات.

يُبيِّنُ الجدولُ التكراريُّ المُجاوِرُ المسافةَ (بالكيلومترِ) بينَ موقعِ شركةٍ ومنازلِ موظفيها:



4 أجدُ عددَ موظفي الشركةِ. 54

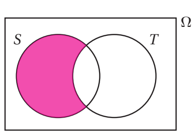
5 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ تزيدُ المسافةُ بينَ منازلِهِمْ وموقعِ الشركةِ على 5 km. 12

6 أجدُ عددَ الموظفينَ الذينَ تقلُّ المسافةُ بينَ منازلِهِمْ وموقعِ الشركةِ عنْ 7 km. 48

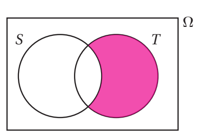
الاحتمالاتُ وأشكالُ فِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

أُظلِّلُ المنطقةَ التي تُمثِّلُ الحادثَ المعطى في كلٍّ منْ أشكالِ فِنْ الآتيةِ:

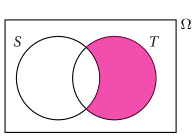
1 $S - T$



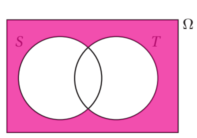
2 $T - S$



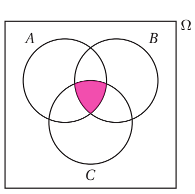
3 $\bar{S} \cap T$



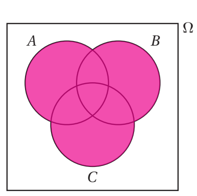
4 $\overline{S \cup T}$



5 $A \cap B \cap C$



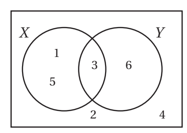
6 $A \cup B \cup C$



كتاب التمارين

الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

يُبيِّنُ شكلُ ڤِنْ المُجاوِرُ الحادثَ X والحادثَ Y في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ.

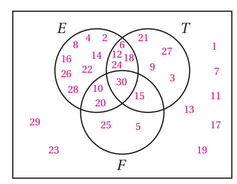


أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

7. $P(X)$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
8. $P(Y)$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
9. $P(X\cap Y)$ $\frac{1}{6}$
10. $P(X\cup Y)$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
11. $P(\overline{X})$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
12. $P(\overline{Y})$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
13. $P(\overline{X\cap Y})$ $\frac{5}{6}$
14. $P(\overline{X\cup Y})$ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
15. $P(Y-X)$ $\frac{1}{6}$

سُحِبَتْ كرةٌ عشوائيًّا منْ صندوقٍ يحوي كراتٍ مُتماثِلةً، ومُرقَّمةً منْ 1 إلى 30. إذا كانَ E هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ، وكانَ T هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 3، وكانَ F هوَ حادثَ ظهورِ عددٍ منْ مضاعفاتِ العددِ 5، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ الخمسةِ الآتيةِ تباعًا:

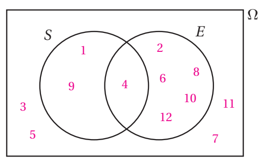
16. أُمثِّلُ في شكلِ ڤِنْ الآتي الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ العشوائيةِ، وكُلًّا منَ الحادثِ E، والحادثِ T، والحادثِ F.



17. أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3. $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$
18. أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 3 والعددِ 5. $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$
19. أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ على الكرةِ التي سُحِبَتْ منْ مضاعفاتِ العددِ 5، أوْ عددًا زوجيًّا. $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$
20. أجدُ احتمالَ ألّا يكونَ العددُ زوجيًّا على الكرةِ التي سُحِبَتْ. $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

الاحتمالاتُ وأشكالُ ڤِنْ
Probabilities and Venn Diagrams

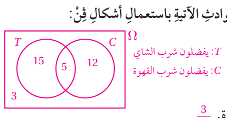
21. إذا كانَ الفضاءُ العينيُّ لتجربةٍ عشوائيةٍ هوَ: $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$، وكانَ الحادثُ S يُمثِّلُ المُربَّعاتِ الكاملةَ منْ بينِ هذهِ الأعدادِ، وكانَ الحادثُ E يُمثِّلُ الأعدادَ الزوجيةَ، فأُمثِّلُ في شكلِ ڤِنْ الآتي الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ العشوائيةِ، وكُلًّا منَ الحادثِ S، والحادثِ E.



أجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ بناءً على شكلِ ڤِنْ أعلاهُ:

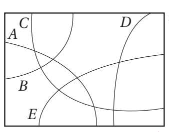
22. $P(\overline{E})$ $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$
23. $P(S\cap\overline{E})$ $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$
24. $P(\overline{S\cup E})$ $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

يعملُ في أحدِ المصانعِ 35 عاملًا، منْهُمْ 20 عاملًا يُفضِّلونَ شربَ الشايِ، و17 عاملًا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ، و5 عُمّالٍ يُفضِّلونَ شربَ الشايِ والقهوةِ. إذا اختيرَ عاملٌ منْهُمْ عشوائيًّا، فأجدُ احتمالَ كلٍّ منَ الحوادثِ الآتيةِ باستعمالِ أشكالِ ڤِنْ:



25. أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ يُفضِّلونَ شربَ الشايِ فقطْ. $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$
26. أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ لا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ. $\frac{18}{35}$
27. أنْ يكونَ العاملُ ممَّنْ لا يُفضِّلونَ شربَ الشايِ، ولا يُفضِّلونَ شربَ القهوةِ. $\frac{3}{35}$

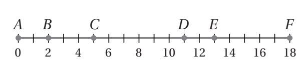
مُعتمِدًا شكلَ ڤِنْ المُجاوِرَ الذي يُمثِّلُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ تحوي الحوادثَ: A، وB، وC، وD، وE. أُحدِّدُ الجملَ الصحيحةَ والجملَ غيرَ الصحيحةِ في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



28. A وB حادثانِ متنافيانِ.
غيرُ صحيحة؛ توجد منطقة مشتركة بينهما.
29. A وD حادثانِ متنافيانِ.
صحيحة، لا توجد منطقة مشتركة بينهما.
30. B وC حادثانِ شاملانِ.
غير صحيحة؛ اتحادهما لا يساوي Ω.
31. A، وB، وC، وD، وE حوادثُ شاملةٌ.
صحيحة؛ اتحاد هذه الحوادث يساوي Ω.

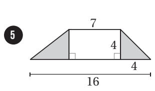
الاحتمالُ الهندسيُّ
Geometric Probability

مُعتمِدًا الشكلَ المُجاوِرَ، إذا اختيرَتْ عشوائيًّا نقطةٌ تقعُ على $\overline{AF}$، فأجدُ كُلًّا ممّا يأتي:

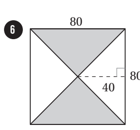


1. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{CD}$. $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$
2. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{BE}$. $\frac{11}{18}$
3. احتمالُ وقوعِ النقطةِ على $\overline{EF}$ أوْ $\overline{AB}$. $\frac{7}{18}$
4. احتمالُ عدمِ وقوعِ النقطةِ على $\overline{DE}$. $\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

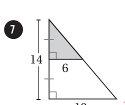
إذا اختيرَتْ نقطةٌ عشوائيًّا منْ كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، فأجدُ احتمالَ وقوعِها في المنطقةِ المُظلَّلةِ:

5.


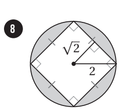
$\frac{9}{23}$

6.


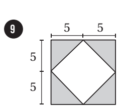
$\frac{1}{2}$

7.


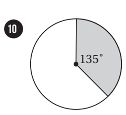
$\frac{1}{4}$

8.


$\frac{\pi-2}{\pi}$

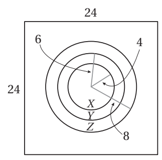
9.


$\frac{1}{2}$

10.


$\frac{3}{8}$

إذا وقعَ سهمٌ رُمِيَ عشوائيًّا داخلَ لوحةِ الأسهمِ المُجاوِرةِ، فأجدُ كُلًّا منَ الاحتمالاتِ الآتيةِ:

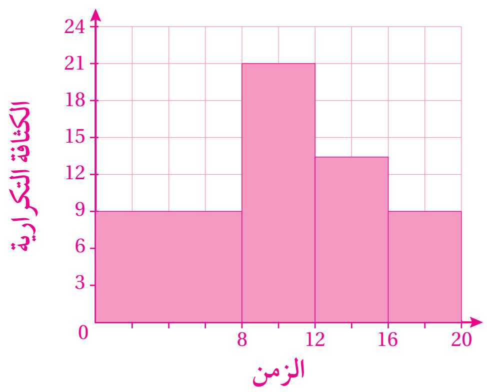


11. وقوعُ السهمِ في المنطقةِ X. 0.09 تقريبًا.
12. وقوعُ السهمِ في المنطقةِ Y. 0.11 تقريبًا.
13. عدمُ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ Z. 0.85 تقريبًا.
14. عدمُ وقوعِ السهمِ في المنطقةِ X. 0.91 تقريبًا.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

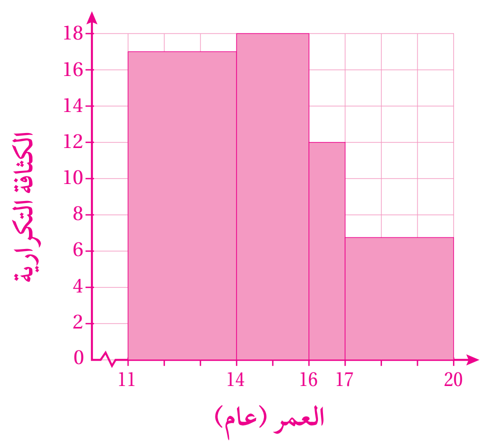
5)

الزمن	$0 \le t < 8$	$8 \le t < 12$	$12 \le t < 16$	$16 \le t < 20$
التكرار	72	84	54	36
طول الفئة	8	4	4	4
الكثافة التكرارية	9	21	13.5	9



6)

العمر (عام)	$11 \le a < 14$	$14 \le a < 16$	$16 \le a < 17$	$17 \le a < 20$
التكرار	51	36	12	20
طول الفئة	3	2	1	3
الكثافة التكرارية	17	18	12	$6\frac{2}{3}$



إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 1:

15) x : علامات الشعبة أ، y : علامات الشعبة ب

$$\sum x = 20 \times 14 = 280\ ,\ \sum y = 15 \times 18 = 270$$

16) $10 = \frac{\sum x^2}{20} - 14^2\ ,\ \sum x^2 = 4120$

$6 = \frac{\sum y^2}{15} - 18^2\ ,\ \sum y^2 = 4950$

17) $\mu = \frac{280 + 270}{20 + 15} \approx 15.7$

18) $\sigma^2 = \frac{4120+4950}{20 + 15} - (15.7)^2 \approx 12.7,\ \sigma \approx 3.6$

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 2:

1)

كتل أكياس اللحم (m)		
الكتلة (g)	الإشارات	التكرار
$25 \le m < 26$	$\vert$	1
$26 \le m < 27$	$\vert\vert\vert$	3
$27 \le m < 28$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
$28 \le m < 29$	$\vert\vert\vert\vert$	4
$29 \le m < 30$	$\vert\vert$	2

2)

أعداد الطلبة		
العدد	الإشارات	التكرار
60–64	$\vert\vert\vert$	3
65–69	$\vert\vert\vert$	3
70–74	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
75–79	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
80–84	$\vert\vert$	2

3)

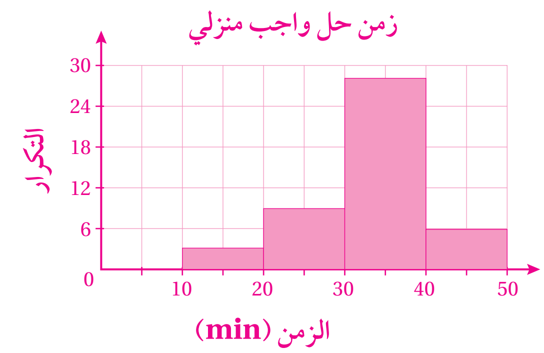
طلبات التوصيل الأسبوعية		
العدد	الإشارات	التكرار
265–350	|||	3
351–436	~~||||~~ ||	7
437–522	~~||||~~	5
523–608	~~||||~~	5
609–694	||||	4

4)

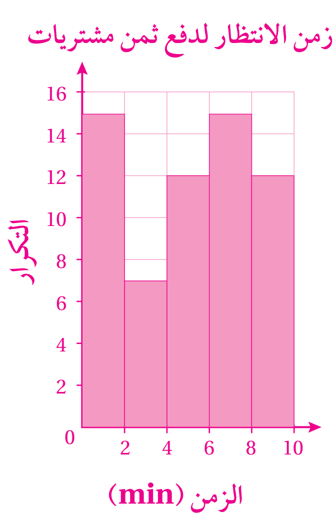
درجات الحرارة (t)		
الدرجة (°C)	الإشارات	التكرار
$11 \le t < 17$	~~||||~~	5
$17 \le t < 23$	~~||||~~ ||	7
$23 \le t < 29$	~~||||~~	5
$29 \le t < 35$	~~||||~~ ~~||||~~	10
$35 \le t < 41$	|	1

إجابات أسئلة كتاب التمارين، الدرس 3:

1)

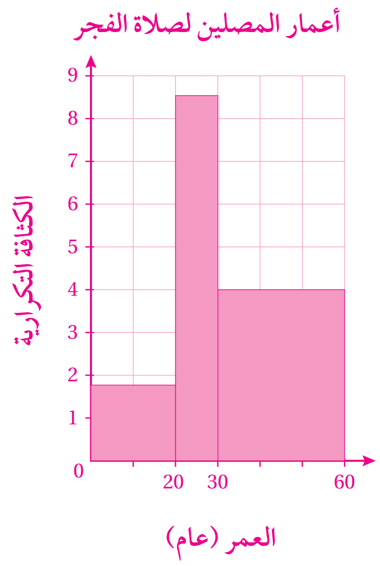


2)



3)

العمر (بالعام)	التكرار	طول الفئة	الكثافة التكرارية
$0 \le t < 20$	35	20	1.75
$20 \le t < 30$	85	10	8.5
$30 \le t < 60$	120	30	4



أوراق المصادر

ورقة المصادر 1: مسابقة المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية

أصلُ بينَ المعادلةِ في العمود الأيمنِ والحلِّ الصحيحِ لها في العمودِ الأيسرِ:

المعادلة		الحل الصحيح للمعادلة
1	$5x = 10$	$x = 2, x = -2$
2	$3x + 1 = x - 7$	$x = 8$
3	$2 - 4x = 10$	$x = -2, x = -3$
4	$8x^2 = 32$	$x = 1, x = -9$
5	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x = 2$
6	$x^2 - 11x + 18 = 0$	$x = -4$
7	$x^2 - 2x - 8 = 0$	$x = -2, x = 4$
8	$x^2 + 8x - 9 = 0$	$x = -2$
		$x = 2, x = 9$
		$x = -9$

الطالبان/ الطالبتان: .... و .... عدد الإجابات الصحيحة: ....

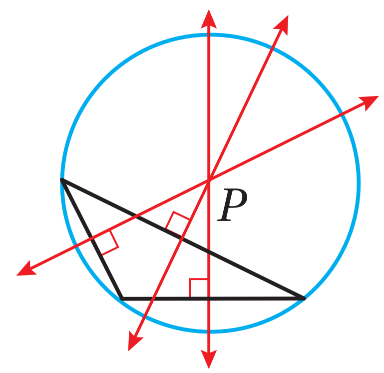
ورقة المصادر 1: مسابقة المعادلات الخطية والمعادلات التربيعية (الإجابة)

رقم المعادلة	الحل الصحيح للمعادلة
1	$x = 2$
2	$x = -4$
3	$x = -2$
4	$x = 2, x = -2$
5	$x = -2, x = -3$
6	$x = 2, x = 9$
7	$x = -2, x = 4$
8	$x = 1, x = -9$

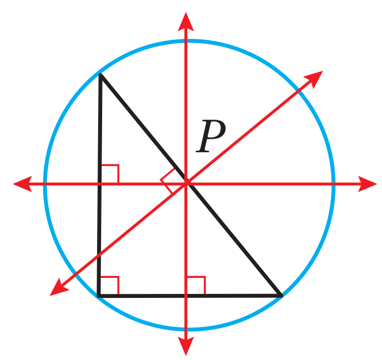
ورقة المصادر 2: ورقة رسم بياني

ورقة المصادر 3: شبكة مربعات

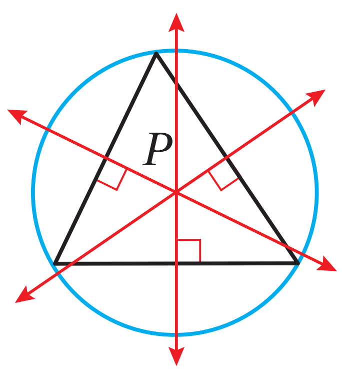
ورقة المصادر 4: مركز الدائرة الخارجية للمثلث



مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

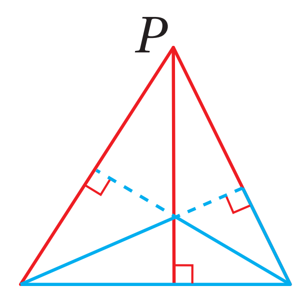


مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ تقعُ P على وترِ المُثلَّثِ.

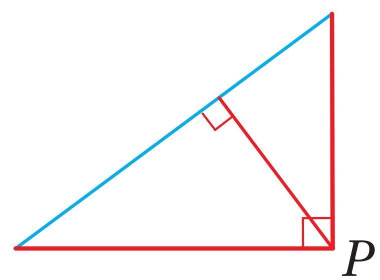


مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

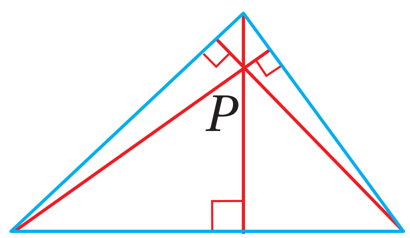
ورقة المصادر 5: ملتقى الارتفاعات



مُثلَّثٌ مُنفرِجُ الزاويةِ، وفيهِ
تقعُ P خارجَ المُثلَّثِ.

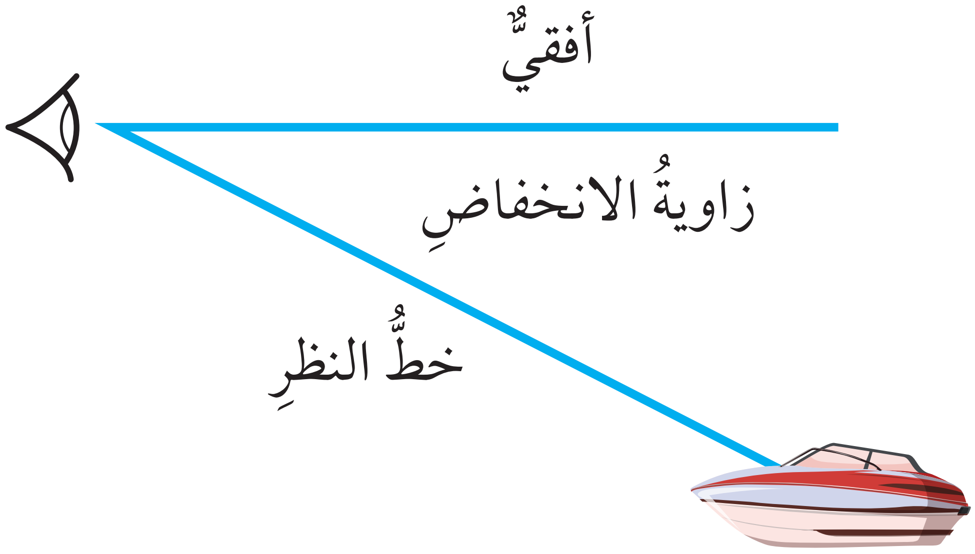


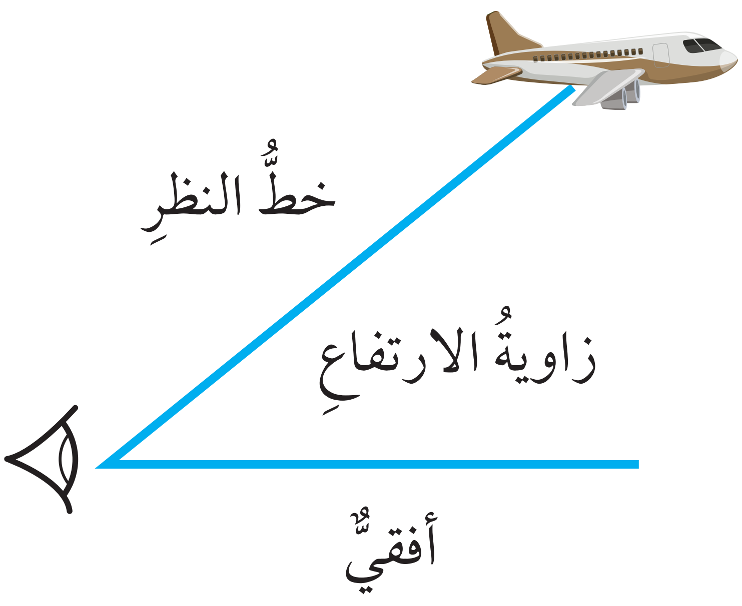
مُثلَّثٌ قائمُ الزاويةِ، وفيهِ
تقعُ P عندَ رأسِ القائمةِ.



مُثلَّثٌ حادُّ الزوايا، وفيهِ
تقعُ P داخلَ المُثلَّثِ.

ورقة المصادر 6: زوايا الارتفاع والانخفاض



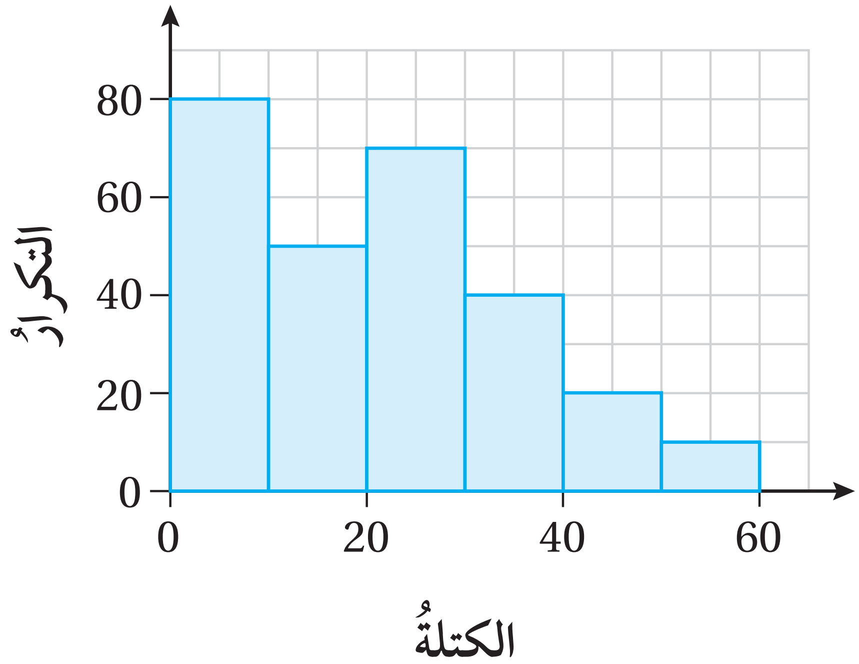


ورقة المصادر 7: الصيغة الأسّية

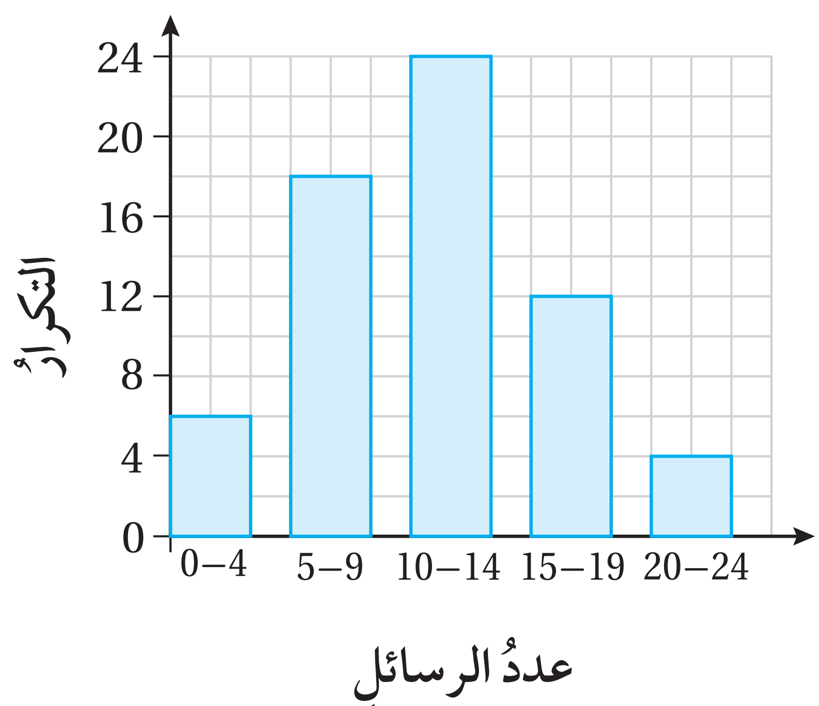
أُكمل الجدول الآتي بالتعبير عن كل مقدار عددي معطى بالصيغة الأسّية وإيجاد القيمة العددية للمقدار:

القيمة العددية	الصيغة الأسّية	المقدار العددي
		$5 \times 5 \times 5 \times 5 =$
		$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$
		$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} =$
		$\frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} =$
		$\frac{-1}{6} \times \frac{-1}{6} \times \frac{-1}{6} =$

ورقة المصادر 8: المدرجات التكرارية

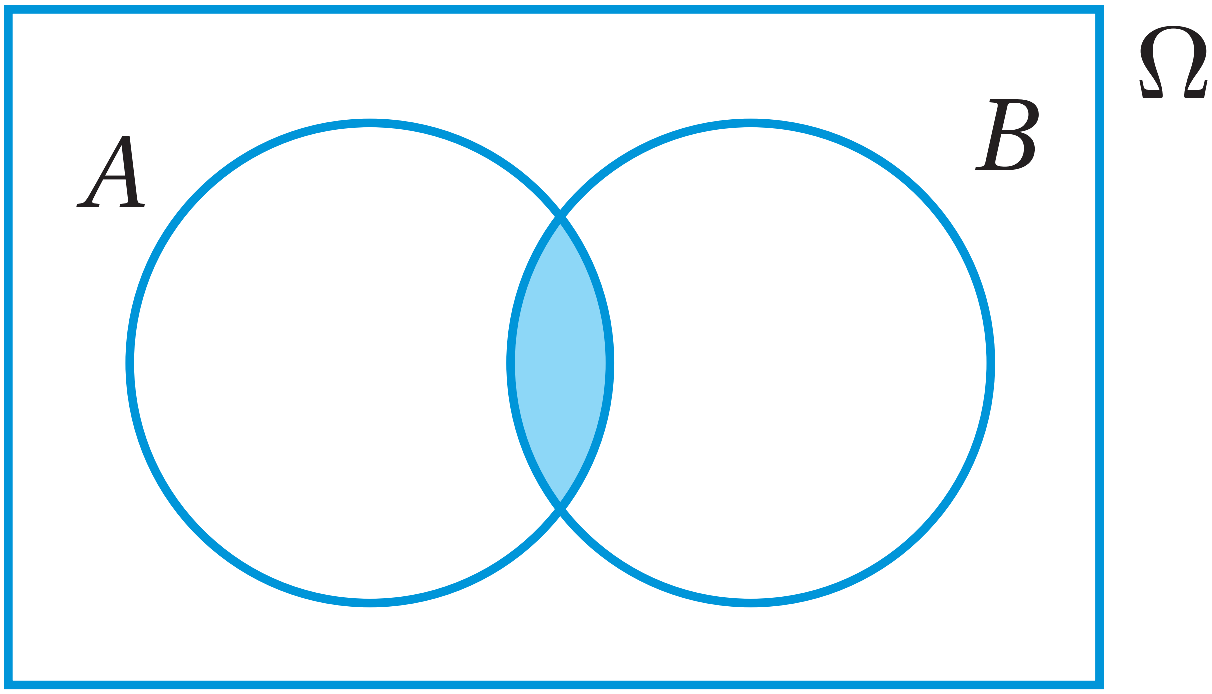


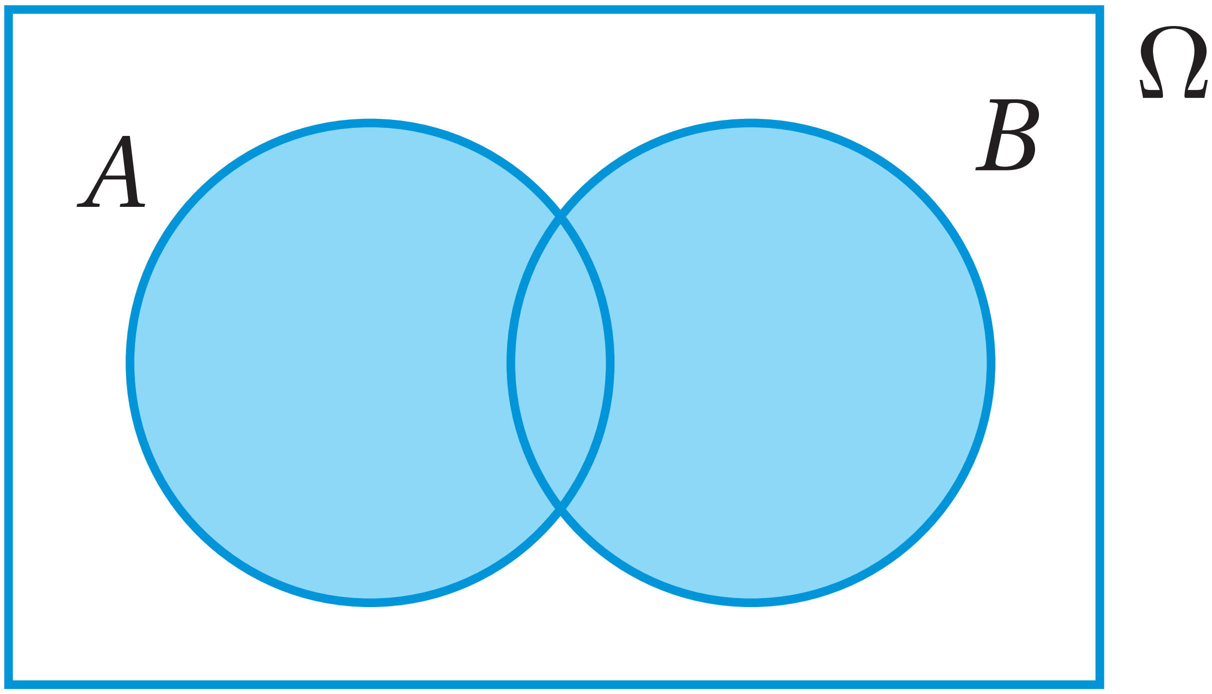
أستعملُ تدريجًا متصلًا للبياناتِ المتصلةِ.



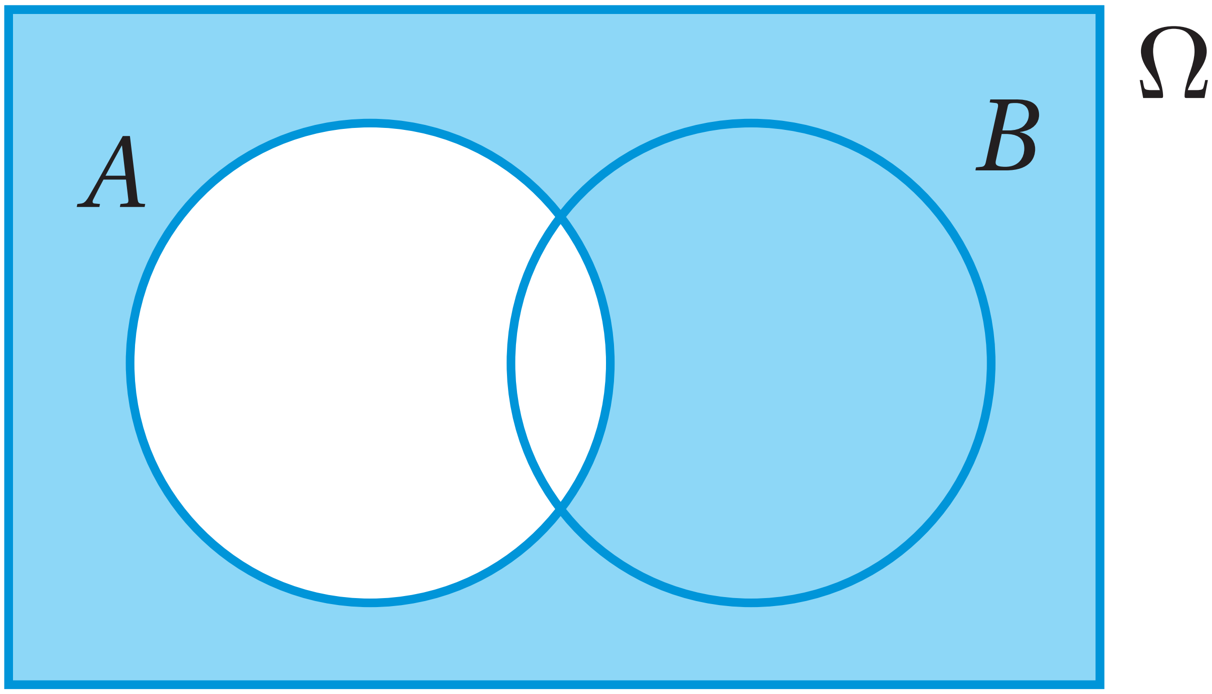
أستعملُ تدريجًا منفصلًا للبياناتِ المنفصلةِ.

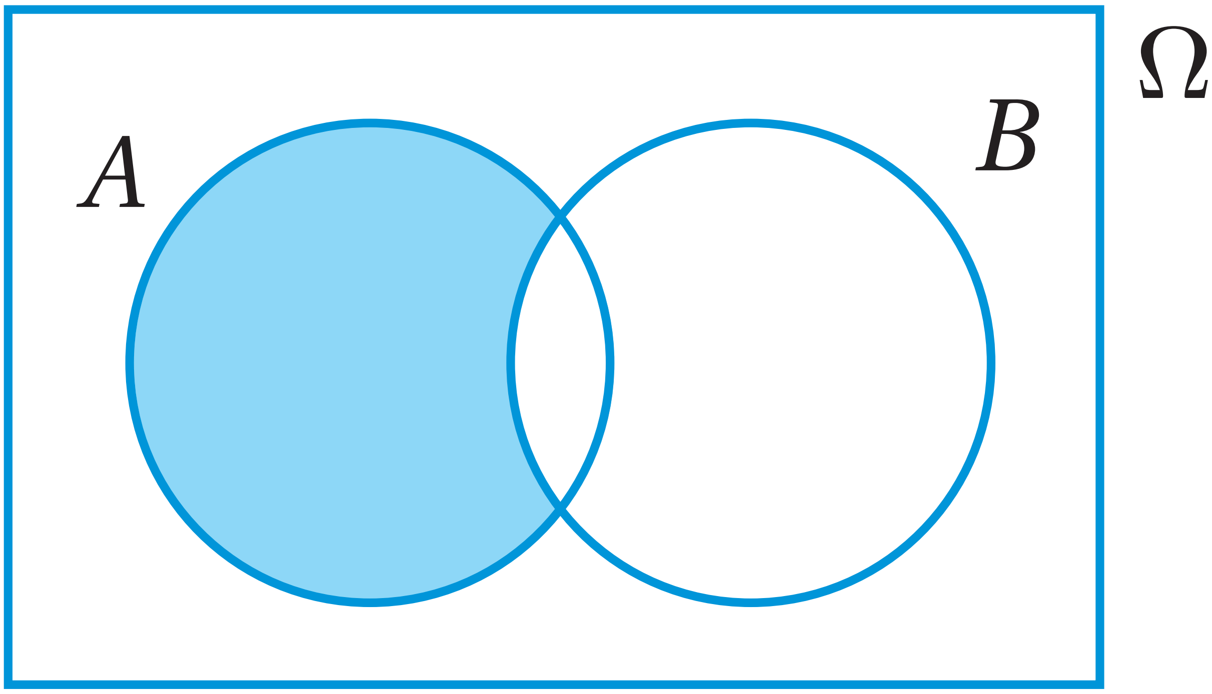
ورقة المصادر 9: أشكال ڤن (1 من 2)



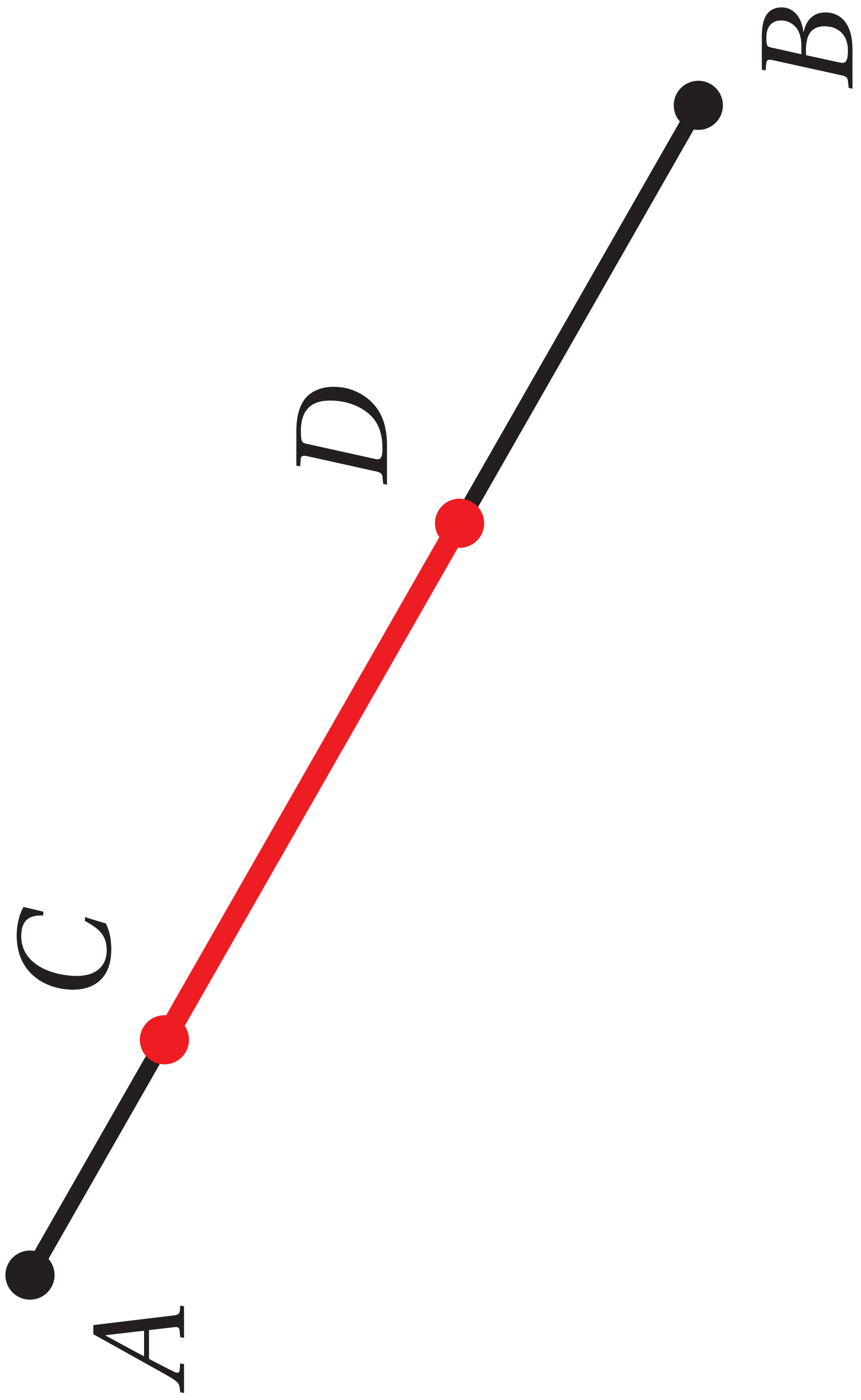


ورقة المصادر 9: أشكال ڤن (2 من 2)

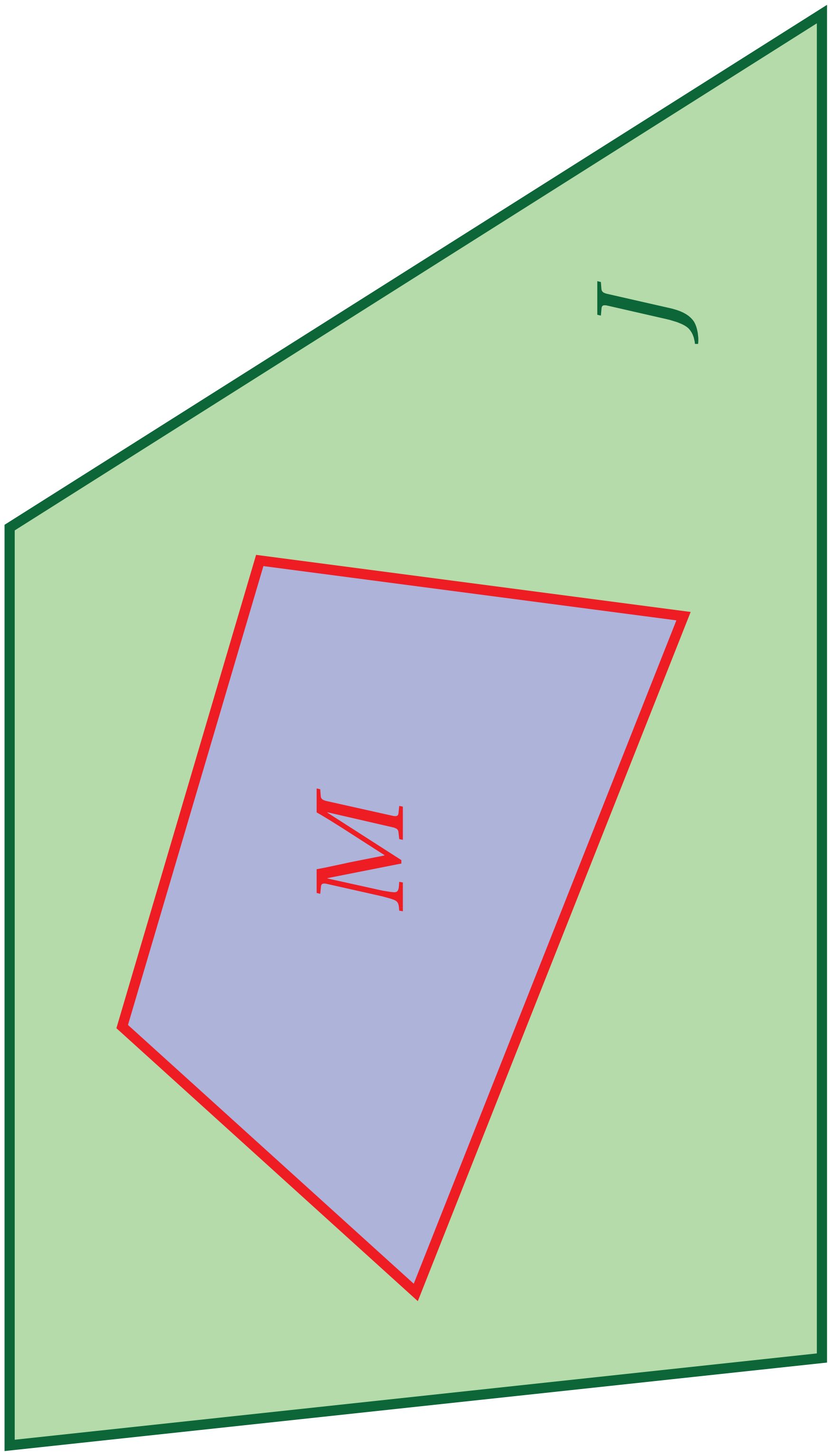




ورقة المصادر 10: الاحتمال الهندسي (الأطوال)



ورقة المصادر 11: الاحتمال الهندسي (المساحات)



ورقة المصادر 12: الاحتمال الهندسي (الزوايا)