

الرياضيات

الصف التاسع - دليل المعلم

الفصل الدراسي الأول

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات

بيان هاني الكريمين

هبة ماهر التميمي

نور محمد حسان

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📱 @nccdjr 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناء على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2024/8)، تاريخ 2024/10/16 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2024/192) تاريخ 2024/11/17 م بدءاً من العام الدراسي 2024 / 2025 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2024.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 650 - 1

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2024/6/3444)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات (دليل المعلم): الصف التاسع، الفصل الدراسي الأول
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2024
رقم التصنيف	373.19
الوصفات	/ تدريب الرياضيات / / المناهج / / التعليم الأساسي /
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعتبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحرير اللغوي: محمد صالح شنيور

التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

التحكيم التربوي: أ. د. عدنان سليم عابد

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing - in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أن يُقدِّم للمُعَلِّمين والمُعَلِّمات دليل المُعَلِّم للصف التاسع، آملاً أن يكون لهم مُرشدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعَلِّم على جميع المصادر التي تُلزم المُعَلِّم / المُعَلِّمة، بدءًا بالنسخ المُصَغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكن للمُعَلِّم / للمُعَلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلاً بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة»، وتعرض العناصر الرئيسة في كُلِّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعَلِّم، وتبيِّن النهج المُعتمد في كُلِّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعَلِّم / المُعَلِّمة قراءة هذه الصفحات بترَوٍّ وتدبُّرٍ قبل البدء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بدءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنُها المنهاج المُطوَّر، فضلاً عن الأخطاء المفاهيمية الشائعة والإرشادات التي تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على حول كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدِّم الدليل نتائج التعلُّم السابق ونتائج التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلاً عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعَلِّم / المُعَلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دقَّةً.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنَّا نُؤمِّل أن ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعَلِّمين والمُعَلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنَّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

a-j	أهلا بك في مناهج الرياضيات المطورة
6A	الوحدة 1 المتباينات الخطية
6B	مخطط الوحدة
6	نظرة عامة على الوحدة
7	مشروع الوحدة: المتباينات والعلوم
8	الدرس 1 المجموعات والفترات
17	الدرس 2 حلّ المتباينات المركّبة
26	الدرس 3 حلّ معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها
35	الدرس 4 تمثيل المتباينات الخطية بمتغيّرين بيانياً
46	معمل برمجة جيوجبرا: تمثيل المتباينات الخطية بمتغيّرين بيانياً
48	اختبار نهاية الوحدة
49A	كتاب التمارين
49D	ملحق الإجابات
50A	الوحدة 2 العلاقات والاقترانات
50B	مخطط الوحدة
50	نظرة عامة على الوحدة
51	مشروع الوحدة: القطع المكافئ في حياتنا
52	الدرس 1 الاقترانات
64	الدرس 2 تفسير التمثيلات البيانية
74	الدرس 3 الاقتران التربيعي
85	معمل برمجة جيوجبرا: استكشاف التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي
87	الدرس 4 التحويلات الهندسية للاقترانات التربيعية
98	اختبار نهاية الوحدة
99A	كتاب التمارين
99E	ملحق الإجابات

قائمة المحتويات

الوحدة 3 حلّ المعادلات 100A

100B مخطط الوحدة

100 نظرة عامة على الوحدة

101 مشروع الوحدة: أبني منجنيقا

102 الدرس 1 حلّ المعادلات التربيعية بيانياً

109 الدرس 2 حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل (1)

118 الدرس 3 حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل (2)

127 الدرس 4 حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

135 الدرس 5 حلّ المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

146 الدرس 6 حلّ معادلات خاصة

154 اختبار نهاية الوحدة

155A كتاب التمارين

155D ملحق الإجابات

الوحدة 4 الهندسة الإحداثية 156A

156B مخطط الوحدة

156 نظرة عامة على الوحدة

157 مشروع الوحدة: الهندسة الإحداثية والخريطة

158 الدرس 1 المسافة في المستوى الإحداثي

168 الدرس 2 المسافة بين نقطة ومستقيم

177 الدرس 3 البرهان الإحداثي

186 اختبار نهاية الوحدة

187A كتاب التمارين

187D ملحق الإجابات

A1-A16..... أوراق العمل الداعمة

أهلاً بك

في مناهج الرياضيات المطورة



عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسرُّنا في هذه المُقدِّمة أن نُبيِّن الأسس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوَّرة بطريقة مُبسَّطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإننا نأمل أن تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوَّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل الغرفة الصفية، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
 2. أنواع التقويم، وأدواته.
 - التقويم القبلي.
 - التقويم التكويني.
 - التقويم الختامي.
 3. بعض استراتيجيات التعلُّم:
 - التعلُّم القائم على المشاريع.
 - التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
 - الخطوات الأربع لحلَّ المسألة (خطة حلَّ المسألة).
 - التعلُّم بالاستكشاف.
 4. مهارات التفكير العليا.
 5. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
 6. الوصول إلى الطلبة كافةً.
 7. مراجعة التعلُّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي.
 - مصادر التعلُّم المُيسَّرة لتنفيذ خطة معالجة الفاقد التعليمي.
 - إجراءات معالجة الفاقد التعليمي في كل حصة صفية.
- وفي نهاية هذه المُقدِّمة، توجد بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعاً، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطاً مبنياً على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يُمكن أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بدء الدرس.

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعين عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (أستكشف) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتاً كافياً لدراساتها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا يتعين عليك تقبل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقاً بعد انتهاء الدرس، والتحقق من صحتها، علماً بأن تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (أستكشف)؛ لحلّها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المُتوقَّع أن تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فببدء مرحلة (التعلم) في إعادة التوازن لديهم؛ للتمكن من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيراً من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعين الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

أنواع التقويم وأدواته:

2

التقويم جزء لا يتجزأ من عملية التعلم؛ فهو يُؤاكب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولاً إلى تحقيق الهدف. يُعرّف التقويم بأنه عملية تُستعمل فيها معلومات من مصادر مُتعددة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي.**

أ التقويم القبلي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفة السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يلزم الطلبة من معالجات تتمثل في مصادر التعلم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلم الطلبة أولاً بأول، والتأكد أن العملية التعليمية التعلمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. أما أبرز أدوات التقويم التكويني فهي: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.

تحتوي مناهج الرياضيات المُطوّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثل في مسائل بند (أتحقّق من فهمي) التي تلي كل مثال.

الوحدة 1: المتباينات الخطيّة

أحلّ المعادلة الخطيّة بتقريب واحد (الدرس 1)

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

- $x + 4 = -2$
- $8 = y - 2$
- $-4.5 + u = 6.5$
- $4m = -24$
- $\frac{a}{5} = -1$
- $7.5 = \frac{b}{-2}$
- $2(4x + 1) = 16$
- $3 - 2b = -5(b + 2) - 1$

مثال: أحلّ المعادلة $2(3x + 4) = 4x + 17$

المعادلة الأصلية

$$2(3x + 4) = 4x + 17$$

حاشية التوزيع

$$6x + 8 = 4x + 17$$

إطرح 8 من طرفي المعادلة

$$6x + 8 - 8 = 4x + 17 - 8$$

أطرح $4x$ من طرفي المعادلة

$$6x - 4x = 4x - 4x + 9$$

أقسم طرفي المعادلة على 2

$$\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$$

إبسّط

$$x = 4.5$$

التعزيز عن مسأله حياتية بمعادلة، ثم حلّها (الدرس 1)

علا أصغر بـ 7 سنوات من ريم، وسليم شلّو يساوي ضعف عُمر ريم. إذا كان مجموع عُمر ريم وعلا وسليم مطروحاً من 57، فأكتب معادلة، ثم أحلّها لأجد عُمر كلّ واحد منهم.

شَلّو: برعّ علا في شراء تلسكوب لمرافقة النجوم ليلاً، فإذا كان ثمن التلسكوب 92 JD، وكان ثمن علا 32 JD، فأكتب معادلة يمكن حلّها لإيجاد المبلغ الذي يدفعه علا لشراء تلسكوبه، ليتمكن من شراء التلسكوب خلال 4 أشهر، ثم أحلّها.

أتحقّق من فهمي

أعبر عن كلّ من المجموعات الآتية باستعمال طريقة سرد العناصر، وطريقة الصّفّة المُميّزة:

- مجموعة الأعداد الثكّليّة التي تقلّ عن 8
- مجموعة مُضاعفات العدد 3 التي تقلّ عن 18
- مجموعة حلّ المعادلة $3x - 2 = 0$

أنواع المجموعات

توجد عدّة أنواع للمجموعات تبعاً لعدد عناصرها، منها:

- المجموعة الخالية (empty set):** هي المجموعة التي لا تحتوي على أيّ عنصر، وتُرمز لها بالرمز $\emptyset$ (يقرأ فاي) أو الرمز $\{\}$ ، وتُسمى أحياناً مجموعة الأعداد الفردية التي تقلّ القسمة على 2، فبأنّ المعلوم أنّ لا يوجد عدد فردي يقبل القسمة على 2.
- المجموعة البسيطة (singleton set):** هي المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد فقط، وتُسمى أحياناً مجموعة حلّ المعادلة $3x - 2 = 0$ ؛ وهي: $\{x \text{ فهي تحتوي على عنصر واحد فقط، فهو } x = 8\}$.
- المجموعة المنتهية (finite set):** هي المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر، مثل $\{4, 8, \dots, 24, 28, 32\}$ ، حيث تحتوي على 4 عناصر.
- المجموعة غير المنتهية (infinite set):** هي المجموعة التي تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر، مثل مجموعة الأعداد الثكّليّة التي تزيد على 7، وهي: $P = \{8, 9, 10, \dots\}$.

مثال 2

أكتب كلّ مجموعة من المجموعات الآتية بطريقة سرد العناصر، ثم أكتب ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

- $P = \{x \mid x > -3, x \in \mathbb{Z}\}$

تُشكّل P مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيد على -3 ، وتُكتب بطريقة سرد العناصر كما يأتي:

$$P = \{-2, -1, \dots\}$$

إذاً، المجموعة P غير منتهية.

أنتم

تُسمّى الكائنات التي لا تتصلّ باللاانتهية على أنّ المجموعة غير منتهية، وتُسمّى أيضاً باللاانتهية على انحصار عناصر مجموعة منتهية.

لموز رياضية

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ ، وهي: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

أتحقّق من فهمي

أعبر عن كلّ من المجموعات الآتية باستعمال طريقة سرد العناصر، وطريقة الصّفّة المُميّزة:

- مجموعة الأعداد الكليّة التي تقلّ عن 8
- مجموعة مُضاعفات العدد 3 التي تقلّ عن 18
- مجموعة حلّ المعادلة $3x - 2 = 0$

ج التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي قُدمت لهم.

تُوفّر المناهج المُطوّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثل في بند (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوعة تشمل نتائج الوحدة كلها.

3 بعض استراتيجيات التعلم:

أ التعلم القائم على المشاريع.

يُعَدُّ التعلم القائم على المشاريع أحد أساليب التعلم الحديثة التي تجمع بين المعرفة والتطبيق؛ إذ يُمكن للطلبة دراسة معارف المناهج الدراسية الأساسية، ثم تطبيقها في حلّ مشكلات حقيقية، وصولاً إلى نتائج قابلة للتطبيق. تساعد هذه الطريقة الطلبة على تنمية قدراتهم ومهاراتهم؛ فهي تراعي الفروق الفردية بينهم، وتُنمّي لديهم الثقة بالنفس، وتُحفّزهم على الإبداع، والتواصل، والابتكار، وتحثّل المسؤولية، وتُعدهم للحياة، وتحثهم على العمل والإنتاج.

ب التعلم باستعمال التكنولوجيا.

تُسهم التكنولوجيا إسهامًا فاعلاً في تعلّم الرياضيات؛ فهي تُوفّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمل والتحليل والتفكير بدلاً من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنح أدلة المُعلّم في مناهج الرياضيات المُطوّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

اختبار نهاية الوحدة

أكتب كل مجموعة من المتباينات بطريقة المُعَيَّن:

- {11, 12, 13, 14, ...}
- {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- {3, 6, 9, 12}
- {3, 2, 1}

أعبر عن كل من المجموعات الآتية، باستعمال طريقة سرد العناصر وطريقة المُعَيَّن:

- الأعداد الزوجية التي تزيد على 7 وتقل عن 20
- الأعداد الكسرية التي تقل عن 4

أكتب مُتباينة تُعبر عن كل جملة من المتباينات، ثم أمثلها على خطّ الأعداد:

- عدد على الأكثر -3 أو على الأقل 5
- عدد على الأقل 2 وعلى الأكثر 9
- عدد لا يزيد على 6 ولا يقل عن -4
- عدد أقل من 100 أو أكبر من 300

أكتب مُتباينة تُعبر عن كل تمثيل من المتباينات، ثم أعبر عنها برمز الفترة:

- $x \leq 9$
- $x \geq 9$
- $x \leq -9$
- $x \geq -9$

الفترة التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:

- $(4, \infty)$
- $[4, \infty)$
- $(-\infty, 4)$
- $[-\infty, 4]$

المُتباينة المُعَيَّن التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:

- $-1 < x < 3$
- $x \leq -1$ or $x > 3$
- $x < -1$ or $x \geq 3$
- $x > -1$ or $x \leq 3$

مجموعة حلّ المُتباينة $-7 < x + 2 < 4$ هي:

- $(-5, 6)$
- $(-9, 6)$
- $(-5, 2)$
- $(-9, 2)$

مجموعة حلّ المُعادلة $|x + 5| = 2$ هي:

- $\{-3, 3\}$
- $\{-3, -7\}$
- $\{-2, 2\}$
- $\{3, 7\}$

مشروع الوحدة

الفتيات والعلوم

فكرة المشروع: توظيف المُتباينات الخطية في مواقف علمية مختلفة.

المواد والأدوات: شبكة الإنترنت.

خطوات تنفيذ المشروع:

- أختار ثلاثة موضوعات من المتباينات، وأبحث في شبكة الإنترنت عن موقف في كل منها، وأعبر عنه باستعمال طريقة سرد العناصر وطريقة المُعَيَّن:
- أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث عن موقف في كل منهما يمكن التعبير عنه باستعمال مُتباينة ثنائية ثنائية.
- أكتب مسألة حياتية على كل من الموقفين اللذين اخترتهما في الخطوة السابقة، وأحلّ المسألة باستعمال حلّ المُتباينات الثنائية، وأمثل الحلّ على خطّ الأعداد.
- أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث فيهما عن موقفين يمكن التعبير عن أحدهما باستعمال مُعادلة القيمة المطلقة، وعن الآخر باستعمال مُتباينة القيمة المطلقة.
- أكتب مسألة حياتية على كل من الموقفين اللذين اخترتهما في الخطوة السابقة، وأحلّهما باستعمال حلّ مُعادلات و مُتباينات القيمة المطلقة، وأمثل الحلّ على خطّ الأعداد.

نشاط التكنولوجيا:

- يمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل الاقتران التربيعي وتحديد نقطة القيمة العظمى أو الصغرى له باتباع الخطوات الآتية:
- « إدخال قاعدة الاقتران التربيعي الذي يُراد تمثيله في شريط الإدخال Input باستعمال أزرار الآلة

معمل برمجية جيو جبرا

تمثيل المُتباينات الخطية بمُتغيرين بيانياً
Graphing Linear Inequalities in Two Variables

يُمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل مُتباينات خطية بمُتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي.

نشاط: أمثل كل من المُتباينات الآتية بيانياً، باستعمال برمجية جيو جبرا:

- $3x - y \leq 5$

أكتب المُتباينة في شريط الإدخال، بتمر المفاتيح الآتية:

3 x - y ≤ 5

ج. التعلُّم بالاستكشاف.

التعلُّم بالاستكشاف نموذج تعليمي يعمل فيه الطلبة على معالجة المعلومات، وتركيبها، وتحويلها، وصولاً إلى معلومات جديدة باستعمال نشاط مفاهيمي يتضمَّن عمليات الاستقراء، أو الاستنباط، أو أيَّ طريقة أُخرى. يمتاز هذا النوع من التعلُّم بتحفيز الطلبة، وإثارة حماسهم، وزيادة دافعيتهم إلى التعلُّم، بما يُوفِّر لهم من تشويق أثناء اكتشافهم المعلومات باستعمال الأدوات التكنولوجية، أو المحسوسات، أو غير ذلك.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطبيق هذا النموذج؛ فهي تحوي أنشطة مفاهيمية خاصة تسبق بعض الدروس.

الوحدة 1

المتباينات العددية والمنطق

تعلَّم في الدرس السابق كيفية التعبير عن المتباينات البسيطة باستعمال رمز الفترة، ويمكن أيضاً التعبير عن المتباينات العددية باستعمال رمز الفترة.

يمكن التعبير عن بعض المتباينات العددية التي تحتوي على أداة الربط (أو) باستعمال **رمز الفترة** (Bounded interval)، ومن فترة لا يمتدُّ أيَّ من طرفيها إلى السالبة، وفي ما يأتي أشكال الفترات المحدودة المختلفة التي تُعبَّر عن المتباينات العددية:

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين، حيث $a < b$ ، فيمكن التعبير عن كلٍّ من المتباينات (المتباينة) الآتية باستعمال فترة محدودة:

المتباينة	رمز الفترة	النقطة على خط الأعداد
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	

أما إذا احتوت المتباينة العددية على أداة الربط (أو)، فيمكن التعبير عن كلٍّ من المتباينتين المتكوِّنتين لها، ثمَّ الربط بين الفترتين باستعمال رمز الاتحاد $\cup$.

مثال 2

أكتب كلَّ متباينة لمرقبة منا يأتي باستعمال رمز الفترة، ثمَّ إنقلها على خط الأعداد:

1 $-5 \leq x \leq 5$

رمز الفترة: $[-5, 5]$

النقطة على خط الأعداد:

4 مهارات التفكير العليا:

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحديِّ قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمِّي قدراتهم على التأمل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتائج الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدِّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

اكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحسِّن عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

22

23

مهارات التفكير العليا

24 **اكتشف الخطأ:** أعاد أحمد كتابة الفترة $(-\infty, -8)$ باستعمال الضَّفَّة المُعَيَّنة، كما هو مبين أدناه:

$\{x \mid x < -8\}$

أبيّن الخطأ الذي وقع فيه أحمد، وأصحِّحه.

25 **تحدِّ:** أكتب المجموعة $D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50} \right\}$ باستعمال الضَّفَّة المُعَيَّنة.

26 **اكتشف المختلف:** أيُّ متباينة مختلفة؟ أبرِّز إجابتني:

$x < -3$

$\{x \mid x < -3\}$

$\{-5, -4, -3, \dots\}$

5

تعزيز لغة الرياضيات وإثرائها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أوَّل مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتِها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

المجموعة وطرائق التعبير عنها

المجموعة (set) تجمعُ أنْ

تكوِّن المجموعة عُنصرًا

كلماتٍ غير مُكرَّرة.

6 الوصول إلى الطلبة كافة:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كلِّ منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوُّق لديهم.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أندرب وأحل المسائل)، فإنَّني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليشتركوا في حل الأسئلة.

بعض الصفوف عندما إذا كانت الصفوف فردية أو زوجية

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل آية مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة ممَّن تمكَّنوا من حل المسألة لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحقِّز الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المقَّدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أندرب وأحل المسائل)، فإنَّني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميِّزين؛ ليشتركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 - 26).
- أُرصد آية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

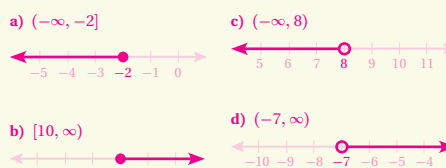
✓ **إرشاد:** في السؤال 25 (تحل)، أوجه الطلبة إلى البحث عن علاقة بين مقام كل كسر وبسطه.

- 1 مجموعة الأعداد الكليَّة التي تزيد على أو تساوي 20: $A = \{x | x \geq 20, x \in \mathbb{W}\}$
- 2 مجموعة مُضاعفات العدد 50 التي تقلُّ عن 50: $A = \{20, 21, 22, \dots\}$
- 3 مجموعة الأعداد الفردية التي تزيد على أو تساوي 11: $A = \{20, 21, 22, \dots\}$
- 4 مجموعة الأعداد المُضحيَّة التي تقلُّ عن -4: $D = \{\dots, -7, -6, -5\}$
- 5 مجموعة الأعداد الزوجية التي تقلُّ عن أو تساوي 100: $C = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{W}, k \geq 5\}$
- 6 مجموعة حلِّ المعادلة $5x - 30 = 0$: $F = \{6\}$
- 7 مجموعة مُضاعفات العدد 5 التي تقلُّ عن 4: $E = \{\dots, 96, 98, 100\}$
- 8 مجموعة الأعداد الكليَّة في لا تقلُّ من 1 ولا تزيد على 15: $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- 9 مجموعة الأعداد الكليَّة التي تقلُّ عن أو تساوي 15: $G = \emptyset$
- 10 مجموعة الأعداد الكليَّة التي تقلُّ عن أو تساوي 15: $H = \{x | 1 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{W}\}$

أكتب كل مجموعة من الأعداد بطريقة سرد العناصر، ثم أحدد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم متناهية، أم غير متناهية:

- 1 $A = \{x | x \in \mathbb{W}, x \leq 1\}$ متناهية
- 2 $B = \{x | 3x + 1 = 0\}$ مفردة
- 3 $A = \{0, 1\}$ متناهية
- 4 $D = \{x | x^2 = x, x \in \mathbb{Z}\}$ متناهية
- 5 $C = \{\dots, -1, 0, 1\}$ غير متناهية
- 6 $E = \{x | x = 6k, k \in \mathbb{W}, 0 < x < 5\}$ خالية
- 7 $D = \{0, 1\}$ متناهية
- 8 $T = \{x | x = k^2, k \in \mathbb{W}, x < 80\}$ متناهية

إجابة التدريب في بند (أتحقَّق من فهمي 4):



إجابة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل):

- 2 $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
 $B = \{x | x = 4k, k \in \mathbb{W}, 0 < x < 50\}$

أولاً: مصادر التعلّم المُيسّرة لتنفيذ خطة معالجة الفاقد التعليمي

أ صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين.

يشتمل كتاب التمارين على صفحات تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة)، وهي تساعد الطلبة على تذكّر ما درسوه في صف سابق أو صفين سابقين، وتحتوي فقرات يُعالج كلّ منها مفهوماً رياضياً مختلفاً، يرتبط بدرس مُحدّد في كتاب الطالب.

الوحدة 1: المتباينات الخطيّة

أستعدّ لدراسة الوحدة

مثال: أحلّ المتباينة: $6x - 5 \geq 2x + 11$ ، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد:

المتباينة الأصليّة
بجمع 5 لطرفي المتباينة
بطرح $2x$ من طرفي المتباينة
بقسمة طرفي المتباينة على 4
بالتبسيط

إذن، الحلّ هو $x \geq 4$ ، وتمثيلاً على خطّ الأعداد على النحو الآتي:

القيمة المطلقة (الدرس 3)

أجد قيمة كلّ من المقدّرات الآتية:

21 $|17|$ 22 $|-32| - 10$ 23 $4 + |12|$
24 $3 + |-7|$ 25 $|-8| + |-22|$ 26 $|-9| - 2$

مثال: أجد القيمة المطلقة لكلّ عدديّ متباينين:

العدد 2 (a)
بما أنّ المسافة بين العددين 2
والضّفر هي 2، فإنّ $|2| = 2$.
المسافة بين العددين 2 والضّفر هي 2

القيمة المطلقة (الدرس 3)

ب أوراق العمل الداعمة

تهدف أوراق العمل الداعمة إلى معالجة المفاهيم الرياضية البسيطة التي تُعدّ أساساً للتعلّم الحالي، علماً بأنّ الطلبة درسوها في صفوف بعيدة زمنياً عن صفهم الآن.

بُنيت أوراق العمل الداعمة بطريقة مُشابهة لصفحات (أستعد لدراسة الوحدة)؛ تسهّلاً على كلّ من المُعلّمين / المُعلّمات والطلبة؛ الذين اعتادوا هذا النمط.

ج دليل المعلم

يقدم دليل المعلم في مبحث الرياضيات إرشادات تفصيلية لإجراءات معالجة الفاقد التعليمي في الحصّة الصفّيّة بطريقة تضمن استمرار تدريس الكتاب المدرسي في كل حصّة؛ بوصفه مصدرّاً أساسيّاً للتعلّم، مع الحرص على تمكين الطلبة جميعهم وبمختلف مستوياتهم من اللحاق بالتعلّم الحاليّ في أسرع وقت ممكن.



أمسح الرمز المجاور للحصول على نسخة إلكترونية من كتب أوراق العمل الداعمة.



ثانيًا: إجراءات معالجة الفاقد التعليمي في كل حصة صفية

- يحدد المعلم/ المعلمة من كُتِبَ أوراق العمل الداعمة الفقرات المرتبطة بنتائج الدرس التي يُتَوَقَّع تحقيقها في الحصة القادمة، ويطلب إليهم جميعًا حلّها واجبًا منزليًا بوصفه اختبارًا تشخيصيًا؛ لغايات تقييم الطلبة وتحديد مستوياتهم واحتياجاتهم.

- في الدقائق العشر الأولى من الحصة التالية، يتجوّل المعلم/ المعلمة بين الطلبة؛ لتحديد الفقرات التي أظهرت حاجتهم إلى التحسين فيها، ويشاركهم بمناقشة الأمثلة المحولة في تلك الفقرات على اللوح، ثم يطلب إليهم حل التدريبات المرتبطة بتلك الأمثلة.

- بعد ذلك يوجّه المعلم/ المعلمة الطلبة جميعهم إلى الفقرات المرتبطة بنتائج الدرس التي يُتَوَقَّع تحقيقها في الحصة الحالية من صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم حلّ تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية، تحت إشرافه وبمتابعته الحثيثة.

- يتجوّل المعلم/ المعلمة بين الطلبة لمتابعتهم في أثناء الحلّ، وفي حال واجهتهم صعوبة في الحلّ يتم توجيههم إلى الاسترشاد بالمثال المعطى. وإذا أنهى الطلبة ذوو المستويين المتوسط وفوق المتوسط الحلّ، يُطلب إليهم مساعدة زملائهم/ زميلاتهم من ذوي المستوى دون المتوسط؛ تجسيدًا لأسلوب التعلم بالأقران.

الوحدة 1

المتباينات الخطيّة

أختر معلوماتي بحلّ التدريبات أولاً، وفي حال عُدّ تأكدي من الإجابة، أشتدّ بالبحث المُعطى.

(الدّرس 1)

أكتب مقداراً عددياً أو جبرياً يعبر عن كلّ من الجمل الآتية:

1 ضرب 49 في p

2 g أمثال h

3 ينقص عن 33 z

4 يزيد على w بـ 43

5 ثلث x

6 ناقصاً m k

مثال: أكتب مقداراً عددياً أو جبرياً يعبر عن كلّ من الجمل الآتية:

(a) خمسة 49 على 7

(b) جمع n إلى 73

(c) ضرب 5 في عدد

المقدّر العددي: $49 \div 7$

المقدّر الجبري: $73 + n$

المقدّر الجبري: $5 \times m$

(الدّرس 1)

أفهم أيّ مما يأتي يُمثّل معادلة وأيّها يُمثّل مقداراً جبرياً:

7 $7x + 1 = 5$

8 $11y + 8$

9 $1 - 2z$

10 $17n - 3 = -6$

11 $\frac{m}{3} = 9$

12 $-6 - r$

3

الوحدة 3

حلّ المعادلات

مربعات الأعداد الكليّة (الدّرس 2)

أجد مربعاً على عددياً يأتي:

1 14

2 22

3 8

4 32

5 81

مثال: أجد مربع العدد 12

تعريف مربع العدد 12

أضرب

$12^2 = 12 \times 12$

$= 144$

مربع العدد هو ناتج ضرب العدد في نفسه، ونسعى لمربع العدد الكليّ مربعاً كاملاً.

الجذور التربيعيّة للمربعات الكاملة (الدّرس 2)

أجد الجذر التربيعيّ لكلّ عددياً يأتي:

6 144

7 36

8 81

9 121

10 49

مثال: أجد الجذر التربيعيّ للعدد 100

أحلّ العدد 100 إلى عوامله الأولية

أكتب 100 كحاصل ضرب عددين متساويين

تعريف الجذر التربيعيّ

$100 = 2 \times 5 \times 2 \times 5$

$= 10 \times 10$

$\sqrt{100} = 10$

الجذر التربيعيّ للمربع الكامل هو ذلك العدد الكليّ الذي مربعه يساوي المربع الكامل.

20

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علماً بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل الغرفة الصفية؛ فأنت أكثر علماً بأحوال الغرفة الصفية، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة. في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

تُسهِّم هذه الاستراتيجية في تعزيز مهارات التعلُّم الذاتي، واستثمار وقت الحصة الصفية بفاعلية، والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بصورة مُكثَّفة. وهي تتيح للمُعلِّم/ للمُعلِّمة إعداد الدروس، وإطلاع الطلبة عليها مُقدِّماً باستعمال التقنيات الحديثة وشبكة الإنترنت؛ إذ يُمكن بها إرسال ما هو مطلوب إلى الطلبة من مقاطع مرئية (فيديو)، وملفات صوتية، وغير ذلك من الوسائل المتوافرة لديهم، مثل: جهاز الحاسوب، والهاتف المحمول، والجهاز اللوحي. قبل وقت كافٍ من عرضها في غرفة الصف، عن طريق الوسائل المتوافرة لديهم، ثم الطلب إليهم الاطلاع عليها في المنزل. ومن ثَمَّ، يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة إعداد أنشطة مُتنوعة لتنفيذها في اللقاء الصفّي؛ تطبيقاً للمفاهيم التي اكتسبها الطلبة، ومناقشة المحتوى العام للدرس. وتشمل هذه الأنشطة التعلُّم النشط، والاستقصاء، والتجريب، وحلّ المسائل الرياضية؛ ما يُعزِّز مهارات العمل بروح الفريق، ويساعد على تقييم عملية التعلُّم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة. بعد ذلك يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستند إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمل لإدارة الصف. وفيه يتعيَّن على المُعلِّم/ المُعلِّمة رفع اليد، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشتهم فوراً. تُعدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع اليد يجب أن يُقابل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجاباتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلب المُعلِّم/ المُعلِّمة الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أن يُعرف زميله/ زميلتها، فيجب مَنْ يقع عليه/ عليها الاختيار عن السؤال، وقد يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أفكر، نحن نُفكر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولاً من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أفكر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكر). ثم يُمكن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتب في العمود الثاني، ويُمكن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمل للتقويم. وفيه يُمسك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكن أن يُصنَّع من قطعة كرتون مقوَّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتب عليها بالطباشير، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفاف يُكتب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يُمكن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة طرح سؤال يجب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكُّن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِّم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعاً في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِّم أيضاً في التقويم التكويني؛ إذ يُمكن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

المُتباينات الخطية

Linear Inequalities

الوحدة 1



مُخطّط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: المجموعات والفترات	- كتابة المجموعة بطريقة سرد جميع عناصرها، وبطريقة الصفة المميزة لعناصرها. - تعرف أنواع المجموعات. - التعبير عن مجموعة حل المتباينة باستعمال الصفة المميزة للمجموعة. - حل متباينات خطية بمتغير واحد، وتمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد. - تعرف الفترات وأنواعها. - التعبير عن المتباينات باستعمال الفترات.	- مجموعة. - عنصر. - سرد العناصر. - الصفة المميزة للمجموعة. - المجموعة الخالية. - المجموعة المفردة. - المجموعة المنتهية. - المجموعة غير المنتهية. - رمز الفترة. - المالانهاية. - الفترة غير المحدودة.	- أقلام لوح ملونة. - نماذج لخط الأعداد.	3
الدرس 2: حل المتباينات المركبة	- تعرف المتباينة المركبة. - كتابة متباينة مركبة تعبر عن عبارة لفظية. - تمثيل متباينات مركبة على خط الأعداد. - التعبير عن متباينات مركبة باستعمال الفترات. - حل متباينات مركبة، وتمثيل الحل على خط الأعداد. - حل مسائل حياتية على المتباينات المركبة.	- المتباينة البسيطة. - المتباينة المركبة. - التقاطع. - الاتحاد. - الفترة المحدودة.	- أقلام لوح ملونة. - نماذج لخط الأعداد.	4
الدرس 3: حل معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها	- حساب قيمة مقادير جبرية تتضمن قيمة مُطلقة. - حل معادلات قيمة مُطلقة على الصورة $ax + b = c$ - حل متباينات قيمة مُطلقة على الصورة $ax + b < c$ - حل متباينات قيمة مُطلقة على الصورة $ax + b > c$ - حل مسائل حياتية على معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها.	- معادلة قيمة مُطلقة. - متباينة قيمة مُطلقة.	- أقلام لوح ملونة. - نماذج لخط الأعداد.	4
الدرس 4: تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً	- تعرف المتباينة الخطية بمتغيرين ومجموعة حلها. - تمييز منطقة الحلول المُمكنة، والمستقيم الحدودي للتمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيرين. - تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي. - تمثيل المتباينة الخطية بمتغير واحد بيانياً في المستوى الإحداثي. - استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين في نمذجة مسائل حياتية، وتمثيلها بيانياً للمساعدة على اتخاذ القرار الأنسب المتعلق بتحديد القيم المُمكنة ضمن شروط محدّدة.	- المتباينة الخطية بمتغيرين. - المستقيم الحدودي. - منطقة الحلول المُمكنة.	- لوح رسم بياني للمستوى الإحداثي. - أقلام تلوين.	3
معمل برمجة جبر: تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً	تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي باستعمال برمجة جبر.	أدوات برمجة جبر.	- مختبر حاسوب. - برمجة جبر.	1
عرض نتائج مشروع الوحدة				
اختبار نهاية الوحدة				
المجموع:				
17 حصة				

ما أهميّة هذه الوحدة؟

تُستعمل المُتباينات في كثيرٍ من المواقف الحياتيّة والعلميّة للتعبير عن مقادير ذات قيمٍ مشروطة، مثل درجة الحرارة التي يمكن أن تعيش فيها أسماك الزينة، كما تُستعمل للتعبير عن التكلفة الممكنة لإنتاج سلعة ما أو الربح الذي يمكن تحقيقه عند بيعها.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- التعبير عن المُتباينات باستعمال المجموعات والفترات.
- حل مُتباينات مركّبة، وتمثيل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد.
- حلّ مُعادلات القيمة المطلقة ومُتبايناتها.
- تمثيل مُتباينة خطيّة بمتغيّرين بيانيًا.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ حلّ مُعادلات خطيّة بمتغيّر واحد.
- ✓ حلّ مُتباينة خطيّة بأكثر من خطوة، وتمثيل حلّها على خطّ الأعداد.
- ✓ تمثيل المُعادلة الخطيّة في المستوى الإحداثي.

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرف الطلبة في هذه الوحدة مفهوم المجموعة وطرائق التعبير عنها، وأنواع المجموعات، والتعبير عن المتباينات بفترات مناسبة.

وسيكملون ما تعلّموه في الصف الثامن الأساسي عن المتباينات الخطية البسيطة وحلّها، وتمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقية، بحل المتباينات المركّبة، وحل معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها.

إضافةً إلى ما سبق، سيتعرف الطلبة المتباينة الخطية بمتغيّرين وتمثيل منطقة حلّها في المستوى الإحداثي يدويًا، وباستعمال التكنولوجيا. وسيحلّون مسائل حياتية يمكن نمذجتها بمتباينات خطية بمتغيّر واحد وبتغيّرين.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف العاشر

- كتابة عناصر الفضاء العيني للتجارب العشوائية.
- كتابة عناصر حوادث موصوفة بالكلمات في تجارب عشوائية.
- تمثيل الحوادث بوصفها مجموعات بأشكال فن (Venn).
- تمثيل اتحاد حادثين، وتقاطعهما، والحدث المتمم، والفرق بين حادثين بأشكال فن.
- حساب احتمالات حوادث متنافية وغير متنافية، وحوادث مستقلة وغير مستقلة.

الصف التاسع

- تعرف المجموعات والفترات.
- حل متباينات خطية بسيطة بمتغيّر واحد، والتعبير عن مجموعة الحل باستعمال الصفة المميزة، وباستعمال الفترات، وتمثيلها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية مركبة وتمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد.
- حل معادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها، وتمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد.
- تعرف المتباينة الخطية بمتغيّرين، وتمثيلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.
- تمييز منطقة الحلول الممكنة، والمستقيم الحدودي للتمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيّرين.
- تمثيل متباينات خطية بمتغيّر واحد بيانيًا في المستوى الإحداثي.
- استعمال المتباينات الخطية بمتغيّرين في نمذجة مسائل حياتية، وتمثيلها بيانيًا للمساعدة على اتخاذ القرار الأنسب المتعلّق بتحديد القيم الممكنة ضمن شروط محدّدة.
- توظيف برمجة جوجرا لتمثيل متباينات خطية بمتغيّرين بيانيًا.

الصف الثامن

- تعرف مفهوم المتباينة، وتمثيلها على خط الأعداد الحقيقية.
- حل متباينات خطية بمتغيّر واحد بخطوة واحدة، وتمثيل حلّها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمتغيّر واحد بأكثر من خطوة، وتمثيل حلّها على خط الأعداد.
- حل مسائل حياتية يمكن نمذجتها بمتباينات خطية بمتغيّر واحد.
- تمثيل المعادلة الخطية بمتغيّرين بيانيًا في المستوى الإحداثي.

المُتباينات والعلوم

مشروع الوحدة

فكرة المشروع: توظيف المُتباينات الخطيّة في مواقف علميّة مختلفة.

الموادّ والأدوات: شبكة الإنترنت.

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أختار ثلاثة موضوعات ممّا يأتي، وأبحث في شبكة الإنترنت عن موقف في كلّ منها، وأعبّر عنه باستعمال طريقة سرد العناصر وطريقة الصّفة المميّزة:
 - جسم الإنسان.
 - الزراعة.
 - الآلات والأدوات.
 - الموادّ الكيميائيّة.
 - علوم الأرض والبيئة.
 - الرياضة.
- 2 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث عن موقف في كلّ منهما يمكن التعبير عنه باستعمال مُتباينة مركّبة.
- 3 أكتب مسألة حيائيّة على كلّ من الموقفين اللّذين اخترتهما في الخطوة السابقة، وأحلّ المسألتين باستعمال حلّ المُتباينات المركّبة، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد.
- 4 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث فيهما عن موقفين يُمكن التعبير عن أحدهما باستعمال مُعادلة القيمة المطلقة، وعن الآخر باستعمال مُتباينة القيمة المطلقة.
- 5 أكتب مسألة حيائيّة على كلّ من الموقفين اللّذين اخترتهما في الخطوة السابقة، وأحلّهما باستعمال حلّ مُعادلات مُتباينات القيمة المطلقة، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد.
- 6 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث عن موقف في كلّ منهما يمكن التعبير عنه باستعمال مُتباينة خطيّة بمتغيّرين، ثمّ أكتب مسألة حيائيّة مرتبطة بالموقف، وأمثّل حلّها في المستوى الإحداثي.

عرض النتائج:

- أعدّ عرضاً تقديميّاً لجميع المواقف العلميّة التي اخترتها، وأدعم كلّاً منها بصورة مناسبة، وأضيف إلى العرض المسائل الحيائيّة التي كتبتها وحلّوها.
- أقدم العرض التقديميّ الذي أعدّته أمام زملائي / زميلاتي.

7

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى توظيف المتباينات الخطية وما يتعلّمه الطلبة من مهارات خلال دراسة هذه الوحدة في مواقف علمية وعملية مختلفة.

ويهدف مشروع الوحدة أيضاً إلى تنمية مهاراتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولاً بأول، وتعزيزها بالصور.
- أذكر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبنّي للطلبة سلفاً معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبنّي للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحداً منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض المسائل التي كتبها أفراد المجموعة مع حلولها (تتمثّل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلّب عليها؛ تعزيزاً لمهاراتهم في حل المشكلات.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار ثلاثة موضوعات، وكتابة موقف لكل منها تُستعمل فيه المجموعات، والتعبير عنها بطريقة سرد العناصر، وطريقة الصّفة المميّزة.			
2	اختيار موضوعين، وكتابة مسألة حيائيّة على كلّ منهما يمكن حلّها باستعمال متباينة مركّبة.			
3	حل المسألتين السابقتين، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد.			
4	اختيار موضوعين، وكتابة مسألة حيائيّة على أحدهما يمكن التعبير عنها بمعادلة قيمة مُطلقة، ومسألة حيائيّة على الموضوع الآخر يمكن التعبير عنها بمتباينة قيمة مُطلقة.			
5	حل المسألتين السابقتين، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد.			
6	اختيار موضوعين، وكتابة مسألة حيائيّة على كلّ منهما يمكن التعبير عنها بمتباينة خطيّة بمتغيّرين.			
7	حل المسألتين السابقتين وتمثيل منطقة الحلّ في المستوى الإحداثي.			
8	إعداد المشروع في الوقت المحدّد، وعرضه بطريقة واضحة (مهارة التواصل).			
9	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

المجموعات والفترات Sets and Intervals

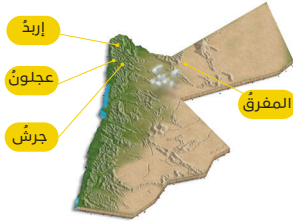
- كتابة المجموعات باستعمال طريقتي: سرد العناصر، والصفة المميزة للمجموعة.
- التعبير عن المتباينات باستعمال الفترات.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

مجموعة، عنصر، سرد العناصر، الصفة المميزة للمجموعة، المجموعة الخالية، المجموعة المفردة، المجموعة المنتهية، المجموعة غير المنتهية، رمز الفترة، المالا نهاية، الفترة غير المحدودة.



يُبين الشكل المجاور مواقع بعض المحافظات على خريطة المملكة الأردنية الهاشمية. ما الصفة التي تشترك فيها المحافظات التي تظهر على الخريطة؟

المجموعة وطرائق التعبير عنها

المجموعة (set) تجمع أشياء متمايزة تحمل صفة مشتركة، وتسمى كل من الأشياء التي تكون المجموعة **عنصرًا** (element)، ويمكن أن تكون عناصر المجموعة أحرفاً أو أعداداً أو كلمات غير مكررة. فمثلاً، يُعدُّ يوم الأحد عنصراً من عناصر مجموعة أيام الأسبوع.

تُستعمل الأحرف الكبيرة لتسمية المجموعات، مثل: $A, B, C, X, Y, \dots$ ، وتُستعمل الأحرف الصغيرة لتسمية عناصر المجموعة، مثل: $a, b, c, x, y, \dots$.

إذا كان a عنصراً من عناصر المجموعة A ، فإننا نقول إن a ينتمي إلى المجموعة A ، ونكتب ذلك على الصورة: $a \in A$ ؛ حيث يستعمل الرمز $(\in)$ للدلالة على (ينتمي إلى). ومن ناحية أخرى إذا كان b لا ينتمي إلى المجموعة A ، فإننا نكتب ذلك على الصورة: $b \notin A$ ؛ حيث يستعمل الرمز $(\notin)$ للدلالة على (لا ينتمي إلى).

نتائج الدرس

- كتابة المجموعة بطريقة سرد جميع عناصرها، وبطريقة الصفة المميزة لعناصرها.
- تعرّف أنواع المجموعات.
- التعبير عن مجموعة حل المتباينة باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.
- حل متباينات خطية بمتغير واحد، وتمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد.
- تعرّف الفترات وأنواعها.
- التعبير عن المتباينات باستعمال الفترات.

نتائج التعلّم القبلي:

- تحويل عبارات لفظية إلى متباينات.
- حل معادلات خطية بمتغير واحد.
- التعبير عن مسألة حياتية بمعادلة، ثم حلها.
- حل متباينات خطية بمتغير واحد، وتمثيل الحل على خط الأعداد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوّجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الفقرات الآتية:
- « أكتب متباينة تتضمن المتغير x وتعبر عن الجملة: (ثلاثة أمثال عدد أكبر من أو تساوي 24).
- « ما قيمة x التي تحقق المعادلة: $4x - 6 = x + 9$ ؟
- « ما حل المتباينة: $5x + 4 \leq 34$ ؟
- أتابع عمل المجموعات، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - « ما المقصود بـ (المحافظة) في التقسيمات الإدارية في المملكة الأردنية الهاشمية؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « ما عدد محافظات المملكة الأردنية الهاشمية؟ 12 محافظة.
 - « ما هي أقاليم المملكة الأردنية الهاشمية؟ إقليم الشمال، وإقليم الوسط، وإقليم الجنوب.
 - « ما المحافظات الواقعة في إقليم الجنوب؟ محافظة الكرك، ومحافظة الطفيلة، ومحافظة معان، ومحافظة العقبة.
 - « ما الصفة المشتركة بين المحافظات الظاهرة على الخريطة؟ أنها واقعة في إقليم الشمال.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟
 - « من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
 - « أعزز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألا أقول للطالب/ لل طالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرف الإجابة الصحيحة، وأعززه/ أعززها، ثم أطلب إلى الطالب الأول/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرة أخرى، وأعززه/ أعززها كما عززت من أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

زموذ رياضية

يرمز إلى مجموعة الأعداد الكليّة بالرمز W ، وهي: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ، وهو الحرف الأول من كلمة whole باللغة الإنجليزية، وتعني كلياً.

يمكن التعبير عن المجموعة بطريقة سرد العناصر (roster form)، بحيث تُكتب عناصر المجموعة داخل رمز المجموعة $\{ \}$ ، ويُفصل بين كل عنصر وآخر بفاصلة. فمثلاً، يُعبّر عن المجموعة A ، التي عناصرها الأعداد الكليّة التي تقل عن أو تساوي 3، بطريقة سرد العناصر على الصورة: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

يمكن أيضاً التعبير عن المجموعة باستعمال الصفة المُميّزة للمجموعة (set-builder notation). فمثلاً، يمكن التعبير عن المجموعة $A = \{0, 1, 2, 3\}$ بطريقة الصفة المُميّزة $A = \{x \mid x \leq 3, x \in W\}$ ، وتُقرأ: مجموعة الأعداد x ؛ حيث ينتمي x إلى مجموعة الأعداد الكليّة التي تقل عن أو تساوي 3.

مثال 1

أعبر عن كل من المجموعات الآتية باستعمال طريقة سرد العناصر، وطريقة الصفة المُميّزة:

1 مجموعة الأعداد الكليّة التي تقل عن 12

طريقة سرد العناصر: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

طريقة الصفة المُميّزة: $E = \{x \mid x < 12, x \in W\}$

2 مجموعة مضاعفات العدد 5 التي تقل عن أو تساوي 25

طريقة سرد العناصر: $C = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

طريقة الصفة المُميّزة: $C = \{x \mid x = 5k, k \in W, 0 < k \leq 5\}$

3 مجموعة حلّ المعادلة $2x - 8 = 0$

طريقة سرد العناصر: $S = \{4\}$

طريقة الصفة المُميّزة: $S = \{x \mid 2x - 8 = 0\}$

أتعلم

ترتيب العناصر غير مهم في طريقة سرد العناصر، ولا تُكرّر كتابة العنصر.

أنددّر

مضاعف العدد هو ناتج ضربه في أي عدد كلي ما عدا الصفر.

مثال 1

- أبين للطلبة مفهوم المجموعة ومفهوم عناصر المجموعة، وأطلب إليهم إعطاء أمثلة على المجموعات، وأعرّفهم طرق التعبير عن المجموعة.
- أذكر الطلبة بمفهوم المتباينة، وأكتب المتباينة $x > 4$ ، ثم أسألهم:

« ماذا يمثل المتغير x في هذه العبارة؟ عددًا مجهولاً.

« أي أعداد صحيحة تحقق هذه المتباينة؟ 5, 6, 7, 8, 9, ...

« ما المتباينة التي تعبر عن المجموعة:

$-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ؟ $x > -3$ أو $x \geq -2$.

حيث x عدد صحيح.

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى أن الرمز W يُستعمل لتسمية مجموعة الأعداد الكلية، وأبين لهم مصدر هذه التسمية بالاستعانة بصندوق (رموز رياضية).
- أحاور الطلبة في ما تتضمنه الصناديق الواردة في هامش المثال 1؛ لما لها من أهمية في مساعدتهم على حل فقرات السؤال وأسئلة أخرى.
- أطلب إلى الطلبة التعبير عن المجموعة في الفرع 2 من المثال 1 بالصفة المميزة بطريقة أخرى.

إجابة محتملة:

$$C = \{x | x = 5k, k \in W, 1 \leq k \leq 5\}$$

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكل من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

تحقق من فهمي

أعبر عن كلٍّ من المجموعات الآتية باستعمال طريقة سرد العناصر، وطريقة الصفة المميزة:

- (a) مجموعة الأعداد الكلية التي تقل عن 8 $A = \{x | x < 8, x \in W\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- (b) مجموعة مضاعفات العدد 3 التي تقل عن 18 $B = \{x | x = 3k, k \in W, 0 < x < 18\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
- (c) مجموعة حل المعادلة $3x - 2 = 0$ $C = \{\frac{2}{3}\}$, $C = \{x | 3x - 2 = 0\}$

أنواع المجموعات

توجد عدة أنواع للمجموعات تبعاً لعدد عناصرها، منها:

- **المجموعة الخالية** (empty set): هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ (ويقرأ فاي) أو الرمز $\{\}$ ، ومن أمثلتها مجموعة الأعداد الفردية التي تقبل القسمة على 2، فمن المعلوم أنه لا يوجد عدد فردي يقبل القسمة على 2
- **المجموعة المفردة** (singleton set): هي المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد فقط، ومن أمثلتها مجموعة حل المعادلة $x + 8 = 0$ ؛ فهي تحتوي على عنصر واحد فقط، هو -8
- **المجموعة المنتهية** (finite set): هي المجموعة التي تحتوي على عدد محدد من العناصر، مثل $H = \{4, 8, \dots, 24, 28, 32\}$ ؛ حيث تحتوي على 4 عناصر.
- **المجموعة غير المنتهية** (infinite set): هي المجموعة التي تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر، مثل مجموعة الأعداد الكلية التي تزيد على 7، وهي: $P = \{8, 9, 10, \dots\}$

أتعلم

تُستعمل النقاط الثلاث "... لل دلالة على أن المجموعة غير منتهية، وتُستعمل أيضاً للدلالة على اختصار عناصر مجموعة منتهية.

مثال 2

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة سرد العناصر، ثم أحدد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

1 $P = \{x | x > -3, x \in Z\}$

تمثل P مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيد على -3 ، وتكتب بطريقة سرد العناصر كما يأتي:

$$P = \{-2, -1, \dots\}$$

إذن، المجموعة P غير منتهية.

رموز رياضية

يُرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز Z ، وهي: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (تحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

- أوضح للطلبة أنواع المجموعات تبعاً لعدد عناصرها (مفردة، خالية، منتهية، غير منتهية)، ثم أقدم لهم مثالاً على كل نوع من هذه الأنواع.
- أطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة على كل نوع من أنواع المجموعات.
- ناقش الطلبة في حل أفرع المثال 2، وأبين لهم ضرورة تبرير إجاباتهم.

إرشادات:

- أوضح للطلبة دلالة استعمال النقاط الثلاث "... في المجموعات المنتهية وغير المنتهية مع تدعيم ذلك بأمثلة.
- ألقت انتباه الطلبة إلى أن الرمز Z يُستعمل لتسمية مجموعة الأعداد الصحيحة.
- عند مناقشة الفرع 2 من المثال 2 مع الطلبة أوضح لهم أن المقدار $(2k+1)$ يُستعمل للدلالة على الأعداد الفردية، حيث k عدد صحيح، ثم أقدم لهم مجموعة من الأمثلة على ذلك، ثم أسألهم عن المقدار الذي يمكن استعماله للتعبير عن الأعداد الزوجية، وأنوصل معهم عن طريق المناقشة إلى أنه يمكن التعبير عنها باستعمال المقدار $(2k)$ حيث k عدد صحيح.

مثال إضافي:

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة سرد العناصر، ثم أحدد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

- 1 $A = \{y \mid y = 4k, k \in W, 0 < k < 3\}$
؛ {4, 8} منتهية
- 2 $B = \{x \mid x = 5k, k \in W, 0 < k < 2\}$
؛ {5} مفردة
- 3 $C = \{(x, y) \mid y = 2x + 1, x \in W, x \leq 3\}$
؛ {(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)} منتهية
- 4 $D = \{x \mid x^2 = 5, x \in W\}$
؛ خالية

أتعلم

يُستعمل المقدار $2k+1$ للدلالة على الأعداد الفردية حيث k عدد صحيح. فمثلاً، العدد 7 عدد فردي، ويمكن كتابته على الصورة:
 $7 = 2(3) + 1$

$$2 \quad O = \{x \mid x = 2k + 1, k \in Z\}$$

تمثل O مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية، وتكتب بطريقة سرد العناصر كما يأتي:

$$O = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

إذن، المجموعة O غير منتهية.

$$3 \quad D = \{x \mid 3x - 12 = 0\}$$

تمثل D مجموعة حل المعادلة $3x - 12 = 0$ ، وتكتب بطريقة سرد العناصر كما يأتي:

$$D = \{4\}$$

إذن، المجموعة D مفردة.

$$4 \quad M = \{x \mid x = 3k, k \in W, 0 < x < 2\}$$

تمثل M مجموعة مضاعفات العدد 3، التي تقل عن 2. وبما أنه لا توجد أعداد تحقق هذه القاعدة، فالمجموعة M خالية، ويرمز إليها بالرمز $\emptyset$ أو الرمز $\{\}$.

$$5 \quad T = \{x \mid x = \frac{1}{k}, k \in W, 1 < k < 4\}$$

تمثل T مجموعة مقلوب الأعداد الكلية التي تقل عن 4 وتزيد على 1، وتكتب بطريقة سرد العناصر كما يأتي:

$$T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

إذن، المجموعة T منتهية.

أنتحقق من فهمي

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة سرد العناصر، ثم أحدد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

- | | |
|---|---|
| a) $P = \{x \mid x > 10, x \in W\}$
$P = \{11, 12, 13, \dots\}$ غير منتهية | b) $O = \{x \mid x = 2k, k \in Z\}$
$O = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ غير منتهية |
| c) $D = \{x \mid 0.5x + 10 = 0\}$
$D = \{-20\}$ مفردة | d) $D = \{x \mid x < 0, x \in W\}$
$\emptyset$ خالية |
| e) $T = \{x \mid x = k^2, k \in W, k < 5\}$ | $T = \{0, 1, 4, 9, 16\}$ منتهية |

- أذكر الطلبة بطريقة حل المتباينة الخطية بمتغير واحد باستعمال خصائص المتباينات، وأبين لهم أوجه الشبه مع طريقة حل المعادلات الخطية، وكيفية تمثيل الحل على خط الأعداد، بطرح المثال الآتي:

$$5x \geq 2x + 12$$

وأبين لهم أنه يمكن التعبير عن مجموعة الحل بطريقة الصفة المميزة هكذا: $\{x | x \geq 4\}$

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه عند التعبير عن حل المتباينات باستعمال الصفة المميزة، فإنه لا حاجة إلى الإشارة أن المتغير x ينتمي إلى الأعداد الحقيقية، وأن الدلالة على ذلك يكون ضمنيًا.
- عند مناقشة الفرع 2 من المثال 3، أذكر الطلبة بضرورة تغيير اتجاه رمز المتباينة بسبب قسمة طرفي المتباينة على عدد سالب، ثم أذكرهم أن هذه القاعدة تنطبق على ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب.

المتباينات والصفة المميزة للمجموعة

تعلمت سابقاً حل المتباينة الخطية، وكان من الصعب كتابة جميع القيم التي تحقق المتباينة؛ لذا لجأت إلى تمثيل تلك القيم على خط الأعداد، ولكن استعمال الصفة المميزة للمجموعة يوفر طريقة مختصرة للتعبير عن مجموعة حل المتباينة.

مثال 3

أكتب مجموعة حل كل متباينة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة:

1 $5x - 8 > 12$

$$5x - 8 > 12$$

المتباينة الأصلية

$$5x - 8 + 8 > 12 + 8$$

يجمع 8 لطرفي المتباينة

$$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$$

يقسم 5 طرفي المتباينة على 5

$$x > 4$$

بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي $\{x | x > 4\}$

2 $3x - 4 \geq 6x + 11$

$$3x - 4 \geq 6x + 11$$

المتباينة الأصلية

$$3x - 4 + 4 \geq 6x + 11 + 4$$

يجمع 4 لطرفي المتباينة

$$3x - 6x \geq 6x - 6x + 15$$

يطرح $6x$ من طرفي المتباينة

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3}$$

يقسم طرفي المتباينة على -3، وتغير اتجاه رمز المتباينة

$$x \leq -5$$

بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي $\{x | x \leq -5\}$

اتحقق من فهمي

أكتب مجموعة حل كل متباينة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة:

a) $2x + 10 \leq 14 \quad \{x | x \leq 2\}$

b) $3x + 3 < 4x - 5 \quad \{x | x > 8\}$

أتعلم

تدل المجموعة

$\{x | x > 4\}$ على أن

مجموعة الحل هي جميع

الأعداد الحقيقية الأكبر

من 4

أندكر

إذا قسم (أو ضرب) كل

من طرفي متباينة صحيحة

على عدد سالب فيجب

تغيير اتجاه رمز المتباينة

لجعل المتباينة الناتجة

صحيحة أيضاً.

مثال إضافي:

أكتب مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين باستعمال الصفة المميزة:

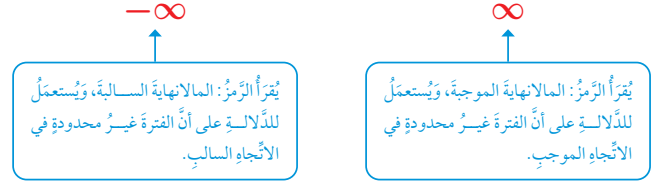
1 $6x - 7 < 2x + 13$ $\{x | x < 5\}$

2 $\frac{2x-5}{3} \geq \frac{x-1}{2}$ $\{x | x \geq 7\}$

المُتباينات والفترات

تعلّمت في المثال السابق كتابة مجموعة حل المُتباينة باستعمال الصّفة المُميّزة للمجموعة، ويمكن أيضًا استعمال رمز الفترة (interval notation) لكتابة مجموعة حل المُتباينة.

يُستعمل رمز المالا نهاية (infinity) أدناه للدلالة على أن الفترة غير محدودة (unbounded interval) في الاتجاه الموجب أو السالب.



يُستعمل الرمز $]$ أو الرمز $[$ عندما يكون رمز المُتباينة $\geq$ أو $\leq$ للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، ويُستعمل الرمز $)$ أو الرمز $<$ عندما يكون رمز المُتباينة $>$ أو $<$ للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها.

وفي ما يأتي تلخيص لأشكال الفترات غير المحدودة وكيفية تمثيل كل منها على خط الأعداد:

الفترات غير المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين، فيمكن التعبير عن كل من المُتباينات الآتية باستعمال فترة غير محدودة:

المُتباينة	رمز الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$x \geq a$	$[a, \infty)$	
$x > a$	(a, ∞)	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$x < b$	$(-\infty, b)$	
	$(-\infty, \infty)$	

أتعلّم

يُستعمل الرمز $]$ أو الرمز $[$ دائمًا مع المالا نهاية، إذ إنّ المالا نهاية ليست عددًا ولا يمكن احتواؤها في فترة.

مثال 4

أكتب كل متباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 $x \leq 3$

رمز الفترة: $(-\infty, 3]$

التمثيل على خط الأعداد:



2 $x \geq 5$

رمز الفترة: $[5, \infty)$

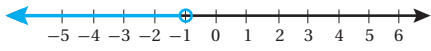
التمثيل على خط الأعداد:



3 $x < -1$

رمز الفترة: $(-\infty, -1)$

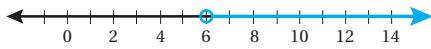
التمثيل على خط الأعداد:



4 $x > 6$

رمز الفترة: $(6, \infty)$

التمثيل على خط الأعداد:



أنذُر

تُستعمل الدائرة المفتوحة على خط الأعداد إذا كان رمز المتباينة $>$ أو $<$ ، أما الدائرة المغلقة فتُستعمل إذا كان رمز المتباينة $\leq$ أو $\geq$.

- أوضح للطلبة أنه يمكنهم التعبير عن مجموعة حل المتباينة بفترة من الأعداد الحقيقية، وأوضح لهم أنواع الفترات غير المحدودة ورموزها، وأنهم سيتعرفون الفترات المحدودة في الدرس الثاني من هذه الوحدة.
- ناقش الطلبة في حل أفرع المثال 4، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إليهم حل المتباينة $3x - 5 \leq 27 - 5x$ ، ثم كتابة مجموعة حلها على صورة فترة وتمثيلها على خط الأعداد.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بدلالة استعمال الدائرة المفتوحة والدائرة المغلقة عند تمثيل مجموعة حل متباينة على خط الأعداد وعلاقتها برموز المتباينات بالاستعانة بصندوق (أنذُر) الوارد في هامش الفرع 1 من المثال 4
- أستعمل الأقلام الملونة عند تمثيل المتباينات على خط الأعداد؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة.

مثال إضافي:

أكتب مجموعة حل المتباينة: $2(x-5)-7x \leq 14-3x$ باستعمال الصفة المميزة، وعلى صورة فترة، وأمثلها على خط الأعداد.

$\{x \mid x \geq -12\}, [-12, \infty)$



أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 19) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 - 26).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 25 (تحدّ)، أوجه الطلبة إلى البحث عن علاقة بين مقام كل كسر وبسطه.

أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترة، ثمَّ أمثلُها على خطِّ الأعداد: أنظر الهامش.

- a) $x \leq -2$ b) $x \geq 10$
c) $x < 8$ d) $x > -7$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

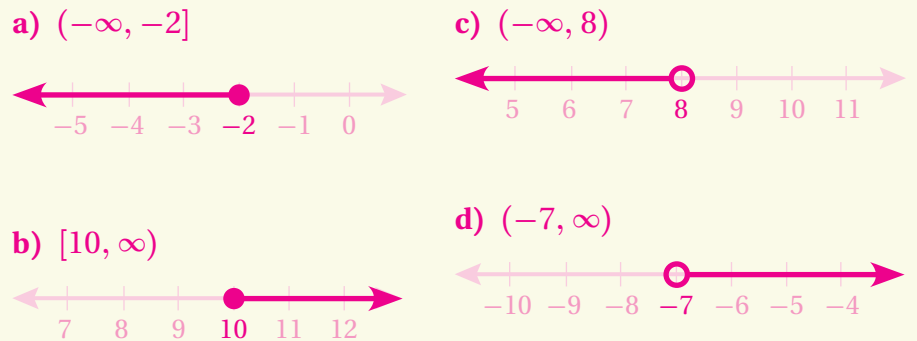
أعبرُ عن كلِّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصرِ، وطريقةِ الصَّفَةِ المُميَّزةِ:

- 1) مجموعة الأعداد الكليَّة التي تزيدُ على أو تُساوي 20
 $A = \{20, 21, 22, \dots\}, A = \{x | x \geq 20, x \in W\}$
2) مجموعة مُضاعفات العدد 4 التي تقلُّ عن 50
أنظر الهامش.
3) مجموعة الأعداد الفردية التي تزيدُ على أو تُساوي 11
 $C = \{11, 13, 15, \dots\}, C = \{x | x = 2k + 1, k \in W, k \geq 5\}$
4) مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقلُّ عن -4
 $D = \{\dots, -7, -6, -5\}, D = \{x | x < -4, x \in Z\}$
5) مجموعة الأعداد الزوجية التي تقلُّ عن أو تُساوي 100
 $E = \{\dots, 96, 98, 100\}, E = \{x | x = 2k, k \in Z, k \leq 50\}$
6) مجموعة حلِّ المعادلة $5x - 30 = 0$
 $F = \{6\}, F = \{x | 5x - 30 = 0\}$
7) مجموعة مُضاعفات العدد 5 التي تقلُّ عن 4
 $G = \emptyset, G = \{x | x = 5k, k \in W, 0 < x < 4\}$
8) مجموعة الأعداد الكليَّة التي لا تقلُّ عن 1 ولا تزيدُ على 15
 $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}, H = \{x | 1 \leq x \leq 15, x \in W\}$

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممَّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصرِ، ثمَّ أحدِّدُ ما إذا كانت خاليةً، أم مفردةً، أم منتهيةً، أم غير منتهية:

- 9) $A = \{x | x \in W, x \leq 1\}$ 10) $B = \{x | 3x + 1 = 0\}$
منتهية $A = \{0, 1\}$ مفردة $B = \{-\frac{1}{3}\}$
11) $C = \{x | x < 2, x \in Z\}$ 12) $D = \{x | x^2 = x, x \in Z\}$
غير منتهية $C = \{\dots, -1, 0, 1\}$ منتهية $D = \{0, 1\}$
13) $E = \{x | x = 6k, k \in W, 0 < x < 5\}$ 14) $T = \{x | x = k^3, k \in W, x < 80\}$
خالية $E = \emptyset$ منتهية $T = \{0, 1, 8, 27, 64\}$

إجابة التدريب في بند (أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي 4):



إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

- 2) $B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\},$
 $B = \{x | x = 4k, k \in W, 0 < x < 50\}$
OR $B = \{x | x = 4k, k \in W, 0 < k \leq 12\}$

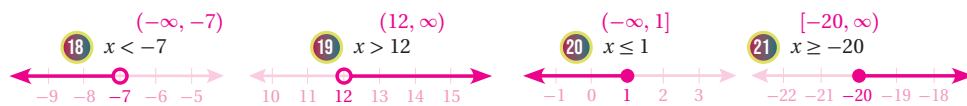
أكتب مجموعة حل كل متباينة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة:

15 $7 + 6x < 19$
 $\{x | x < 2\}$

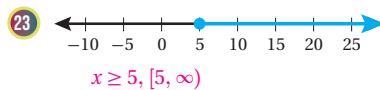
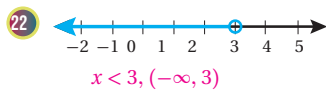
16 $2(y + 2) - 3y \geq -1$
 $\{y | y \leq 5\}$

17 $18x - 5 \leq 3(6x - 2)$
 $\emptyset$

أكتب كل متباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خط الأعداد:



أكتب المتباينة الممثلة على خط الأعداد في كل مما يأتي، ثم أعبر عنها باستعمال رمز الفترة:



مهارات التفكير العليا

24 أكتشف الخطأ: أعاد أحمد كتابة الفترة $(-\infty, -8]$ باستعمال الصفة المميزة، كما هو مبين أدناه:

الخطأ: حل أحمد لا يتضمن -8
وهو أحد عناصر الفترة.
الحل الصحيح: $\{x | x \leq -8\}$

$\{x | x < -8\}$

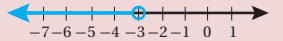
أبين الخطأ الذي وقع فيه أحمد، وأصححه.

25 تحد: أكتب المجموعة $D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50} \right\}$ باستعمال الصفة المميزة.

$\{x | x = \frac{k}{k^2 + 1}, k \in W, 1 \leq k \leq 7\}$

26 أكتشف المختلف: أي مما يأتي مختلف؟ أبرر إجابتي:

$x < -3$



$\{x | x < -3\}$

$\{\dots, -5, -4, -3\}$

المختلف هو: $\{\dots, -5, -4, -3\}$ ؛ لأنها مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي -3، بينما البقية مجموعات أعداد حقيقية تكافئ الفترة: $(-\infty, -3)$.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 20, 21, 24 كتاب التمارين: (1 - 9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 22, 23, 26 كتاب التمارين: (13 - 19), 5, 12
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (23 - 26) كتاب التمارين: (20 - 26), 10, 11

• أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الإثرائيين الآتين:

« لعب منتخبنا الوطني لكرة القدم 3 مباريات على 3 ملاعب مختلفة، حضر هذه المباريات أكثر من 250000 شخص. إذا حضر المباراة الأولى 95000 شخص، وأكتب متباينة وأحلها لأجد عدد الجمهور في الملعب الثالث، ثم أكتب مجموعة الحل باستعمال رمز الفترة، وأمثلها على خط الأعداد.

ليكن x يمثل عدد الجمهور في الملعب الثالث، إذن،

المتباينة: $165000 + x > 25000$

حل المتباينة: $x > 85000$ ، الحل باستعمال رمز الفترة:

$(85000, \infty)$ ، التمثيل على خط الأعداد:



« يوجد في حساب أحمد البنكي 960 دينارًا الآن،

ويوفر 45 دينارًا من راتبه في كل شهر. أكتب متباينة وأحلها لأجد عدد الأشهر التي يحتاج إليها أحمد ليصبح رصيده 1500 دينار على الأقل، ثم أكتب مجموعة الحل باستعمال رمز الفترة، وأمثلها على خط الأعداد.

ليكن x يمثل عدد الأشهر، إذن، المتباينة: $960 + 45x \geq 1500$

حل المتباينة: $x \geq 12$ ، الحل باستعمال رمز الفترة:

$[12, \infty)$ ، التمثيل على خط الأعداد:



تعليمات المشروع:

• أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة 1 من خطوات تنفيذ المشروع.

• أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤالين الآتين إليهم:

« ما طرائق التعبير عن المجموعات؟ عبارة لفظية،

سرد العناصر، الصفة المميزة.

« ما مجموعة حل المتباينة: $4 - 2x \geq 3x - 26$ ؟ أكتبها

على صورة فترة، وأمثلها على خط الأعداد الحقيقية.

مجموعة حل المتباينة باستعمال الصفة المميزة: $\{x | x \leq 6\}$

مجموعة حل المتباينة باستعمال رمز الفترة: $(-\infty, 6]$



نتائج الدرس



- تعرّف المتباينة المركّبة.
- كتابة متباينة مركّبة تعبّر عن عبارة لفظية.
- تمثيل متباينات مركّبة على خط الأعداد.
- التعبير عن متباينات مركّبة باستعمال الفترات.
- حل متباينات مركّبة، وتمثيل الحل على خط الأعداد.
- حل مسائل حياتية على المتباينات المركّبة.

نتائج التعلّم القبلي:

- تمثيل متباينات بسيطة على صورة $x > a$ ، أو $x < a$ ، أو $x \geq a$ ، أو $x \leq a$ على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحل على خط الأعداد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

حلّ المتباينات المركّبة
Solving Compound Inequalities

- حلّ متباينات مركّبة تحتوي على أداة الربط (و) أو (أو)، وتمثيل مجموعة حلّها على خط الأعداد.
- التعبير عن المتباينات المركّبة باستعمال الفترات.



متباينة بسيطة، متباينة مركّبة، تقاطع، اتحاد، فترة محدودة.
تعدّ سمكة (النيون تيترا) من أكثر أسماك الزينة شهرةً، وتعيش في مياه عذبة تتراوح درجة حرارتها من 20°C إلى 26°C . أكتب متباينة تمثّل درجات الحرارة الملائمة للسمكة.

المتباينة المركّبة

تُسمّى المتباينات التي تعلّمناها سابقاً **متباينات بسيطة** (simple inequalities)؛ لأنّها تحتوي على رمز متباينة واحد.

المتباينة المركّبة (compound inequality): هي عبارة ناتجة عن ربط متباينتين باستعمال أداة الربط (و) أو مرادفها باللغة الإنجليزية (and) أو باستعمال أداة الربط (أو) أو مرادفها باللغة الإنجليزية (or).

متباينة بسيطة

$$x \geq 5$$

متباينات مركّبة

$$x \geq 1 \text{ and } x \leq 4$$

$$x < 0 \text{ or } x \geq 3$$

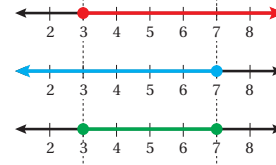
التمثيل البياني للمتباينة المركّبة التي تحتوي على أداة الربط (و) هو **نقاط** (intersection) التمثيل البياني للمتباينتين المكوّنتين للمتباينة المركّبة.

$$x \geq 3$$

$$x \leq 7$$

$$x \geq 3 \text{ and } x \leq 7$$

$$3 \leq x \leq 7$$



أتعلّم

يمكن التعبير عن تقاطع المتباينة $x \geq 3$ والمتباينة $x \leq 7$ بطريقتين؛ الأولى هي: $x \geq 3 \text{ and } x \leq 7$ ، والثانية هي: $3 \leq x \leq 7$.

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

« أمثل كلاً من المتباينات الآتية على خط الأعداد، وأعبر عنها باستعمال رمز الفترة:

a. $x > 1$ b. $x \leq -6$ c. $x \geq 9$

« أحلّ كلاً من المتباينات الآتية، وأكتب مجموعة الحل باستعمال الصفة المميزة، وأمثلها على خط الأعداد:

a. $4x \leq 12 + x$ b. $6 - 5x \leq 3(x + 2) - 16$

- أتابع عمل المجموعات، وأفدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

« ما الفائدة من تربية أسماك الزينة في المنزل؟ **ستختلف إجابات الطلبة.**

« من منكم تربّي عائلته في المنزل أسماك زينة؟ **ستختلف إجابات الطلبة.**

« أين تعيش أسماك النيون تترا؟ **في المياه العذبة.**

« ما أقل درجة حرارة للمياه التي تعيش فيها هذه الأسماك؟ **20**

« ما المتباينة التي تمثّل درجة الحرارة الدنيا للمياه التي تعيش فيها هذه الأسماك؟ **$x \geq 20$**

« ما المتباينة التي تمثّل درجة الحرارة العليا للمياه التي تعيش فيها هذه الأسماك؟ **$x \leq 26$**

« ما المتباينة التي تمثّل درجات الحرارة الملائمة لعيش هذه الأسماك؟

- أخبر الطلبة أنهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟

« من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أوضح للطلبة مفهوم المتباينة المركّبة الناتجة من ربط متباينتين بسيطتين باستعمال إحدى أدوات الربط (و، أو)، وأبين لهم أن التمثيل البياني للمتباينة المركّبة التي تحتوي أداة الربط (و) هو تقاطع التمثيلين البيانيين للمتباينتين البسيطتين، وأن التمثيل البياني للمتباينة المركّبة التي تحتوي أداة الربط (أو) هو اتحاد التمثيلين البيانيين للمتباينتين البسيطتين، وأناقشهم في المثال المعروض في صفحة 17 من كتاب الطالب.

« أَيْنَ للطلبة أنه يمكن التعبير عن المتباينة المركبة $x > a$ و $x < b$ ، حيث $a < b$ بصورة متباينة واحدة مركبة هي:

$a < x < b$ والتي تُقرأ: x أكبر من a وأقل من b ، وتعني أن العدد x محصور (واقع) بين العددين a و b . ويبقى الوضع صحيحاً أيضاً إذا وُجد الرمز $\leq$ ، و $\geq$ ، كما هو موضح في الجدول الآتي:

صورتها المختصرة	المتباينة المركبة
$a < x < b$	$x > a$ and $x < b$: $x < b$ و $x > a$
$a \leq x < b$	$x \geq a$ and $x < b$: $x < b$ و $x \geq a$
$a < x \leq b$	$x > a$ and $x \leq b$: $x \leq b$ و $x > a$
$a \leq x \leq b$	$x \geq a$ and $x \leq b$: $x \leq b$ و $x \geq a$

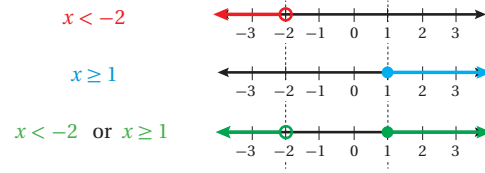
• أقدم الأمثلة الآتية على تمثيل المتباينات المركبة على خط الأعداد:

- $x < 8$ and $x > -1$
- $x < 12$ or $x < 5$
- $x > 4$ and $x > -3$
- $x < 8$ or $x < -1$

• أذكر الطلبة بما تعلموه سابقاً عن التعبير عن جملة لفظية باستعمال متباينة بسيطة، وأوضح لهم أنه يمكن أيضاً التعبير عن جملة لفظية بمتباينة مركبة، ثم ناقش معهم حل أفرع المثال 1 بوصفه تطبيقاً على هذه الفكرة.

• إن لزم الأمر، ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

التمثيل البياني للمتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) **اتحاد** (union) التمثيل البياني للمتباينتين المكونتين للمتباينة المركبة.



مثال 1

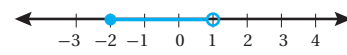
أكتب متباينة مركبة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 عدد أكبر من أو يساوي -2 وأقل من 1

أختار متغيراً: ليكن x ممثلاً للعدد.

أكتب المتباينة: $-2 \leq x < 1$

أمثل على خط الأعداد:

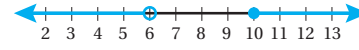


2 عدد أقل من 6 أو لا يقل عن 10

أختار متغيراً: ليكن y ممثلاً للعدد.

أكتب المتباينة: $y < 6$ or $y \geq 10$

أمثل على خط الأعداد:



تحقق من فهمي

أكتب متباينة مركبة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:



(a) عدد أكبر من -3 وأقل من 7

(b) عدد على الأكثر 0 أو على الأقل 2



اتذكر

تُشير عبارة "على الأكثر" إلى الرمز $\leq$ ، أما عبارة "على الأقل" فتشير إلى الرمز $\geq$

المتباينات المركبة والفترات

تعلمت في الدرس السابق كيفية التعبير عن المتباينة البسيطة باستعمال رمز الفترة، ويمكن أيضاً التعبير عن المتباينة المركبة باستعمال رمز الفترة.

يمكن التعبير عن بعض المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) باستعمال فترة **محدودة** (bounded interval)، وهي فترة لا يمتد أي من طرفيها إلى المالا نهاية، وفي ما يأتي أشكال الفترات المحدودة المختلفة التي تُعبر عن المتباينات المركبة:

الفترات المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين؛ حيث $a < b$ ، فيمكن التعبير عن كل من المتباينات المركبة الآتية باستعمال فترة محدودة:

المتباينة	رمز الفترة	التمثيل على خط الأعداد
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	

أما إذا احتوت المتباينة المركبة على أداة الربط (أو)، فيمكن التعبير عن كل من المتباينتين المكونتين لها، ثم الربط بين الفترتين باستعمال رمز الاتحاد $\cup$.

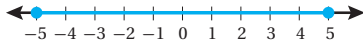
مثال 2

اكتب كل متباينة مركبة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 $-5 \leq x \leq 5$

رمز الفترة: $[-5, 5]$

التمثيل على خط الأعداد:



إرشادات:

- أذكر الطلبة بالدلالات اللفظية المختلفة لكل من الرموز $\leq, >, <, \geq$ التي تعلموها سابقاً في الصف الثامن الأساسي.
- أستعمل الأقلام الملونة عند تمثيل المتباينات على خط الأعداد؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن المتباينة المركبة، مثل $x \geq 1$ or $x < -2$ بالصورة $-2 > x \geq 1$ ، وهذا غير صحيح؛ لأنه لا يوجد عدد حقيقي أصغر من -2 وأكبر من أو يساوي 1 في آن معاً، وأوضح لهم أن هذه المتباينة تبقى كما هي، ومجموعة حلها هي الأعداد الأصغر من -2 أو الأعداد الأكبر من أو تساوي 1 وهي اتحاد مجموعتين منفصلتين.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكل من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال 2

- أوضح للطلبة كيف يمكن التعبير عن المتباينة المركبة التي تحوي الرابط (و) باستعمال فترة محدودة، وأوضح مضمون الجدول الوارد في صندوق (مفهوم أساسي) في صفحة 19 من كتاب الطالب، ثم أبين لهم أنه إذا احتوت المتباينة المركبة الرابط (أو) فلا يمكن التعبير عن المتباينة بفترة محدودة، وإنما يُعبّر عنها باتحاد فترتين تمثلان كل متباينة على حدة؛ وقد تكون الفترتان منفصلتين، أو واحدة منهما محتواة في الأخرى، وعندئذ يكون اتحاد الفترتين هو الفترة الأشمل.

- أعرض الأمثلة الآتية، وأناقش الطلبة في تمثيل حلها والتعبير عنها باستعمال الفترات:

$$x \geq 3 \text{ or } x < -1, x \geq 5 \text{ or } x > -2,$$

$$x < 8 \text{ or } x < 2, x \geq 5 \text{ and } x > 0$$

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 2، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

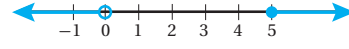
إرشاد:

أناقش الطلبة في مضمون صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الفرع 2 من المثال 2.

$$2 \quad x < 0 \text{ or } x \geq 5$$

اتحاد فترتين منفصلتين: $(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

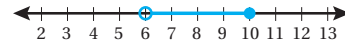
التمثيل على خط الأعداد:



$$3 \quad 6 < x \leq 10$$

رمز الفترة: $(6, 10]$

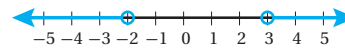
التمثيل على خط الأعداد:



$$4 \quad x < -2 \text{ or } x > 3$$

اتحاد فترتين منفصلتين: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

التمثيل على خط الأعداد:



تحقق من فهمي

أكتب كل متباينة مركبة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خط الأعداد: أنظر الهامش.

a) $-10 < x \leq 10$

b) $x > 1 \text{ or } x < -4$

c) $7 \leq x < 12$

d) $x \leq -8 \text{ or } x \geq 8$

حل المتباينات المركبة

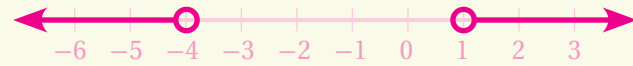
تعلمت سابقاً حل المتباينات البسيطة باستعمال خصائص جمع المتباينات وطرحها وضربها وقسمتها، ويمكن تطبيق الخصائص ذاتها لحل المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و).

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

a) $(-10, 10]$



b) $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$



c) $[7, 12)$



d) $(-\infty, -8] \cup [8, \infty)$



مثال 3

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 $-4 < x - 5 \leq -1$

$-4 < x - 5 \leq -1$

المتباينة المعطاة

$-4 + 5 < x - 5 + 5 \leq -1 + 5$

بإضافة 5 إلى كل طرف

$1 < x \leq 4$

بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي: $\{x | 1 < x \leq 4\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(1, 4]$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



2 $-3 < -2x + 1 < 9$

$-3 < -2x + 1 < 9$

المتباينة المعطاة

$-3 - 1 < -2x + 1 - 1 < 9 - 1$

بترج 1 من كل طرف

$-4 < -2x < 8$

بالتبسيط

$-\frac{4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{8}{-2}$

بقسمة كل طرف على -2، وتغيير اتجاه رمز المتباينة

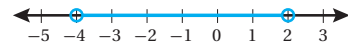
$2 > x > -4$

بالتبسيط

$-4 < x < 2$

بإعادة كتابة المتباينة

إذن، مجموعة الحل هي: $\{x | -4 < x < 2\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-4, 2)$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



أنتحقق من فهمي

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد: أنظر الهامش.

a) $-5 < x - 4 < 2$

b) $-2 < -3x - 8 \leq 10$

يمكن أيضاً حل المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) باستعمال خصائص المتباينات.

أتعلم

مجموعة حل المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و)، هي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينتين المكونتين للمتباينة المركبة معاً. فمثلاً، $1 < x \leq 4$ هي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينتين $1 < x$ و $x \leq 4$ معاً.

- أناقش الطلبة في طريقة حل المتباينة المركبة التي تحوي الرابط (و) باستعمال خصائص المتباينات، وأبين لهم أوجه الشبه مع طريقة حل المتباينات البسيطة، وكيفية تمثيل الحل على خط الأعداد، بطرح المثال الآتي:

$$14 \leq 2x + 6 < 26$$

وأبين لهم أنه يمكن حلها بطريقتين: إحداهما تقوم على فصل هذه المتباينة إلى المتباينتين: $2x + 6 \geq 14$ ، $2x + 6 < 26$ ، وحل كل متباينة على حدة، ثم دمج الحلين في متباينة واحدة. والطريقة الثانية تقوم على إجراء خطوات الحل من جمع أو طرح وضرب أو قسمة على حدود المتباينة الأصلية الثلاثة حتى الوصول إلى المتباينة المكافئة: $4 \leq x < 10$

وبذلك تكون مجموعة الحل: $\{x | 4 \leq x < 10\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $[4, 10)$

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أناقش الطلبة في مضمون صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الفرع 1 من المثال 3.
- عند مناقشة الفرع 2 من المثال 3، أذكر الطلبة بضرورة تغيير اتجاه رمز المتباينة بسبب قسمة كل طرف من أطراف المتباينة على عدد سالب.

إجابة التدريب في بند (أتتحقق من فهمي 3):

a) $\{x | -1 < x < 6\}$



b) $\{x | -6 \leq x < -2\}$



مثال 4

- أناقش الطلبة في طريقة حل المتباينة المركبة التي تحوي الرابط (أو) باستعمال خصائص المتباينات، وأبين أوجه الشبه مع طريقة حل المتباينات البسيطة، وكيفية تمثيل الحل على خط الأعداد، بطرح المثال الآتي:

$$3x + 4 > 19 \text{ or } 6 - 5x > 15 - 2x$$

- وأبين لهم أن حلها يكون بحل كل متباينة على حدة حتى الوصول إلى المتباينة المركبة المكافئة $x < -3 \text{ or } x > 5$

- وبذلك تكون مجموعة الحل:

$$\{x | x > 5 \text{ or } x < -3\}, \text{ وتكتب على صورة}$$

$$(-\infty, -3) \cup (5, \infty) \text{ هكذا:}$$

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 4، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.

إرشادات:

- أناقش الطلبة في مضمون صندوق (أتعلم) الواردين في هامش المثال 4 عند مناقشة كل فرع من أفرع المثال.
- ألقت انتباه الطلبة إلى أهمية رسم خطوط الأعداد التي تمثل كل متباينة من المتباينتين المكونتين لمتباينة مركبة مرتبة بشكل دقيق بعضها فوق بعض؛ وذلك لضمان تحديد مجموعة الحل بشكل دقيق.

مثال 4

أتعلم

تكون المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) صحيحة إذا كانت المتباينتان المكونتان لها صحيحتين، أما المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) فتكون صحيحة إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها على الأقل صحيحة.

$$1 \quad 2x + 3 < 5 \text{ or } x + 7 > 11$$

$$2x + 3 < 5 \quad \text{or} \quad x + 7 > 11$$

$$2x + 3 - 3 < 5 - 3 \quad x + 7 - 7 > 11 - 7$$

$$2x < 2 \quad x > 4$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{2}{2} \quad x > 4$$

$$x < 1 \quad \text{or} \quad x > 4$$

المتباينة المعطاة

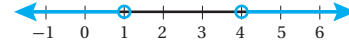
بالطرح

بالتبسيط

بالقسمة

بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي $\{x | x < 1 \text{ or } x > 4\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



$$2 \quad -3x + 4 < 19 \text{ or } 7x - 3 > 18$$

$$-3x + 4 < 19 \quad \text{or} \quad 7x - 3 > 18$$

$$-3x + 4 - 4 < 19 - 4 \quad 7x - 3 + 3 > 18 + 3$$

$$-3x < 15 \quad 7x > 21$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3} \quad \frac{7x}{7} > \frac{21}{7}$$

$$x > -5 \quad \text{or} \quad x > 3$$

المتباينة المعطاة

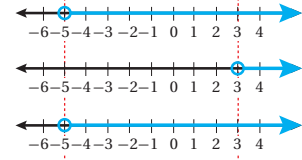
بالطرح أو الجمع

بالتبسيط

بالقسمة

بالتبسيط

مجموعة حل المتباينة هي اتحاد المتباينتين. إذن، أمثل كلاً من المتباينتين الآتيتين، ثم أجد اتحاد التمثيلين:



$$x > -5$$

$$x > 3$$

اتحاد المتباينتين

أتعلم

عند إيجاد مجموعة حل متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (أو)، يُفضل تمثيل كل متباينة على حدة، ثم إيجاد اتحاد التمثيلين البيانيين، لا سيما عند تغيير اتجاه رمز المتباينة، أو إذا كان للمتباينتين الأصليتين الاتجاه نفسه.

مثال إضافي

أجد مجموعة حل المتباينة الآتية، وأمثلها على خط الأعداد، وأكتبها على صورة فترة:

$$5 + 2x < 40 - 3x \text{ or } \frac{15-7x}{2} \leq x - 6$$

$$\{x | x \geq 3 \text{ or } x < 7\}$$



$$(-\infty, 7) \cup [3, \infty) = (-\infty, \infty) \text{ هي:}$$

أي أن مجموعة حل هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها.

الاحظ أن التمثيل البياني للمتباينة $x > -5$ يحتوي على جميع نقاط التمثيل البياني للمتباينة $x > 3$ ؛ لذا يكون الاتحاد هو التمثيل البياني للمتباينة $x > -5$ ، وتكون مجموعة الحل $\{x | x > -5\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-5, \infty)$.

اتحقق من فهمي

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد: أنظر الهامش.

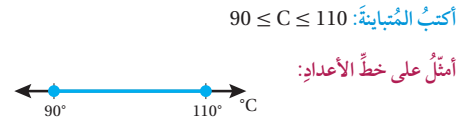
a) $x + 2 \leq 5$ or $x - 4 \geq 2$ b) $-2x + 7 \leq 13$ or $5x + 12 < 37$

يمكن استعمال المتباينات لحل كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



درجة الحرارة: تتراوح درجة حرارة محرك سيارة في أثناء تشغيله من 90°C إلى 110°C . أكتب متباينة مركبة تمثل درجة حرارة محرك السيارة في أثناء تشغيله وأمثلها على خط الأعداد، ثم أحول المتباينة إلى الدرجة فهرنهايت. علماً أن $^\circ\text{C} = \frac{5}{9} (^\circ\text{F} - 32)$



ليكن F ممثلاً لدرجة الحرارة بالفهرنهايت، ومنه:

المتباينة $90 \leq C \leq 110$

بالتعويض عن C بـ $\frac{5}{9} (F - 32)$ $90 \leq \frac{5}{9} (F - 32) \leq 110$

بضرب كل طرف بـ $\frac{9}{5}$ $162 \leq F - 32 \leq 198$

بجمع 32 لكل طرف $194 \leq F \leq 230$

إذن، تتراوح درجة حرارة المحرك في أثناء التشغيل من 194°F إلى 230°F .

معلومة



يتكون نظام تبريد محرك السيارة من مضخة تدفع الماء ذهاباً وإياباً بين المحرك والمشع (الرديتر)، الذي يظهر في الصورة أعلاه.

تنويع التعليم:

في المثال 5، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبرياً؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة بروية؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن كيفية تبريد محرك السيارة وكيفية حمايته من ارتفاع درجة الحرارة، ومشاركة المعلومات التي يحصلون عليها في اليوم التالي مع زملائهم / زميلاتهن في الصف.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4):

a) $\{x | x \leq 3 \text{ or } x \geq 6\}$



b) $\{x | x \geq -3 \text{ or } x < 5\} = (-\infty, 5) \cup [-3, \infty) = \mathbb{R}$



مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 5):

$36.1 \leq C \leq 37.2$



$96.98 \leq F \leq 98.96$



أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 16) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من زميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 - 26).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 24 (أكتشف الخطأ)، أذكر الطلبة بعملية تقريب الأعداد.

أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي



درجة الحرارة: إذا عُلِمْتُ أنَّ درجة حرارة الجسم الطبيعية للأشخاص البالغين تتراوح من 36.1°C إلى 37.2°C ، فأكتب مُتباينةً مُركَّبةً تمثل درجة حرارة الشخص البالغ وأمثلها على خطِّ الأعداد، ثم أحوِّل المُتباينة إلى الدرجة الفهرنهايتية. علماً أنَّ $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32)$

أنظر الهامش.

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

أكتب مُتباينةً مُركَّبةً تمثل كلَّ جملةٍ مما يأتي، ثم أمثلها على خطِّ الأعداد: (1-6) أنظر الهامش.

- 1 عدد أكبر من -7 وأقل من 2
- 2 عدد أقل من أو يساوي -5 أو أكبر من 12
- 3 عدد يقل عن 10 ويزيد على -10
- 4 عدد على الأكثر -2 أو على الأقل 9
- 5 ناتج ضرب عدد في -5 أكبر من 35 أو أقل من 10
- 6 عدد مطروح منه 8 لا يزيد على 4 ولا يقل عن 5

أكتب كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خطِّ الأعداد:

- 7 $x \geq 4$ or $x \leq -7$ $(-\infty, -7] \cup [4, \infty)$
- 8 $-2 < x < 4$ $(-2, 4)$
- 9 $x < 2$ or $x \geq 15$ $(-\infty, 2) \cup [15, \infty)$
- 10 $-5 \leq x \leq 10$ $[-5, 10]$

أكتب مُتباينةً مُركَّبةً تعبر عن كلِّ تمثيل على خطِّ الأعداد مما يأتي، ثم أعبر عنها برمز الفترة:

- 11 $-3 < x \leq 2$ $(-3, 2]$
- 12 $y < -2$ or $y \geq 1$ $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$
- 13 $-3 < y < 4$ $(-3, 4)$
- 14 $x \leq -7$ or $x \geq -4$ $(-\infty, -7] \cup [-4, \infty)$

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ):

- 1) $-7 < y < 2$
- 2) $x \leq -5$ or $x > 12$
- 3) $-10 < y < 10$
- 4) $x \leq -2$ or $x \geq 9$
- 5) $-5x > 35$ or $-5x < 10$
 $x < -7$ or $x > -2$
- 6) $x - 8 \leq 4$ and $x - 8 \geq 5$
 $x \leq 12$ and $x \geq 13$

لا يوجد أي عدد حقيقي يحقق هاتين المتباينتين في آن معاً. تمثيلها البياني خط أعداد خالٍ من أية إشارات.

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد: (15-20) أنظر الهامش.

15 $-5 < x + 1 < 4$

16 $\frac{1}{2} < \frac{3x-1}{4} \leq 5$

17 $-9 < 3x + 6 \leq 18$

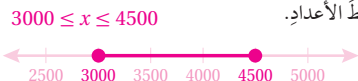
18 $x + 1 < -3$ or $x - 2 > 0$

19 $2r + 3 < 7$ or $-r + 9 \leq 2$

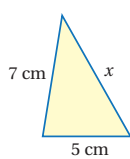
20 $2n + 11 \leq 13$ or $-3n \geq -12$



21 **سُحَرَاتٌ حَرَارِيَّةٌ:** إذا عَلِمْتُ أَنَّ حَاجَةَ الرِّيَاضِيِّ مِنَ الطَّاقَةِ تَعْتَمِدُ عَلَى عَوَامِلَ عِدَّةٍ، مِنْ أَهْمِهَا كَثَلَتُهُ وَسُرْعَةُ التَّمَرِينِ، وَكَانَ رِيَاضِيٌّ يَحْتَاجُ يَوْمِيًّا مِنْ 3000 إِلَى 4500 سَعْرَةً حَرَارِيَّةً، فَأَكْتُبُ مُتَبَايِنَةً تُمَثِّلُ السُّحَرَاتِ الحَرَارِيَّةَ الَّتِي يَحْتَاجُ إِلَيْهَا الرِّيَاضِيُّ، وَأُمَثِّلُهَا عَلَى خَطِّ الأَعْدَادِ.



مهارات التفكير العليا



تبرير: إذا كَانَ مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث، فاستعمل هذه الحقيقة للإجابة عَنِ السُّؤَالَيْنِ الآتِيَيْنِ تَبَاعًا:

22 هل يمكن أن تكون قيمة x في المثلث المُجَاوِرَ 1 cm؟ أبرر إجابتي.

لا؛ لأن $5 + 1 < 7$ ، يوجد ضلعان في المثلث مجموع طوليهما أقل من طول الضلع الثالث.

23 استعمل المثلث المُجَاوِرَ لكتابة مُتَبَايِنَةٍ تحدد قيم x المُمكنة، وأبرر إجابتي.

تتحقق هذه المتباينات معًا في المتباينة $2 < x < 12$

$5 + x > 7, x > 2$

$5 + 7 > x, x < 12$

$x + 7 > 5, x > -2$

24 **اكتشف الخطأ:** ناتج تقريب العدد x إلى أقرب 100 هو 400. تقول عبيد إن المُتَبَايِنَةَ $395 \leq x < 405$ تعبر عن جميع قيم x المُحتملة، وتقول لمياء إن المُتَبَايِنَةَ $350 \leq x < 450$ تعبر عن جميع قيم x المُحتملة. أيهما إجابتهما صحيحة؟ أبرر إجابتي.

صحيح أن الأعداد ضمن فترة عبيد تقرب إلى 400، لكنها لا تشمل جميع الأعداد التي يمكن تقريبها إلى 400، فهي تقتصر على الأعداد التي تُقَرَّبُ إلى 400 عند تقريب العدد إلى أقرب 10، في حين أن الفترة التي كتبتها لمياء تمثل جميع الأعداد التي تقرب إلى 400 عند التقريب لأقرب 100، فإجابة لمياء هي الصحيحة.

تبرير: أجد مجموعة حل كل مُتَبَايِنَةٍ مِمَّا يَأْتِي، وأبرر إجابتي:

25 $-1 + x < 3$ or $-x \geq -4$

مجموعة الحل هي:

$\{x | x < 4 \text{ or } x \leq 4\} = (-\infty, 4) \cup (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$

26 $3x - 7 \geq 5$ and $2x + 6 \leq 12$

$\{x | x \geq 4 \text{ and } x \leq 3\} = [4, \infty) \cap (-\infty, 3] = \emptyset$

لأنه لا توجد قيمة تحقق المتباينتين معًا؛ لأن مجموعتي حلها منفصلتان ولا يوجد بينهما عناصر مشتركة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, (17 - 20) كتاب التمارين: (1 - 8)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (20 - 23), 17 كتاب التمارين: (6 - 13)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (21 - 26) كتاب التمارين: (10 - 17)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤاليين الإثرائيين الآتيين:
« أجد مجموعة حل المتباينة:

$4(x+3) \geq 20$ and $1 < 2x + 7 < 19$
 $[2, 6]$

« أجد مجموعة حل المتباينة:

$3x + 10 \geq 7x - 2 > 5x - 10$ وأمثلها على خط الأعداد، وأكتبها على صورة فترة.

مجموعة الحل: $\{x | -4 < x \leq 3\}$

ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة:

$[-4, 3]$ ، التمثيل على خط الأعداد:



تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 2 و 3 من خطوات تنفيذ المشروع.

6 الختام

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤاليين الآتيين إليهم:

« ما هي المتباينة المركبة؟ وكيف يمكن حلها؟
أدعم إجابتي بمثال. أنظر إجابات الطلبة.

« أحل المتباينتين الآتيتين، وأمثل مجموعة الحل على خط الأعداد، وأكتبها على صورة فترة:

1 $18 < 5x + 53 \leq 83$ $-7 < x \leq 6$, $(-7, 6]$

2 $4x - 5 > 19$ or $3x - 1 > 5x + 7$

$x > 6$ or $x < -4$, $(-\infty, -4] \cup (6, \infty)$

إجابة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل):

15 $\{x | -6 < x < 3\}$



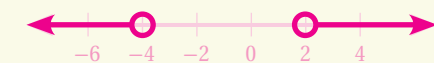
16 $\{x | 1 < x \leq 7\}$



17 $\{x | -5 < x \leq 4\}$



18 $\{x | x < -4 \text{ or } x > 2\}$



19 $\{r | r < 2 \text{ or } r \geq 7\}$



20 $\{n | n \leq 1 \text{ or } n \leq 4\}$



$= (-\infty, 1] \cup (-\infty, 4]$

$= (-\infty, 4]$

الدرس 3

نتائج الدرس



- حساب قيمة مقادير جبرية تتضمن قيمة مُطلقة.
- حل معادلات قيمة مُطلقة على الصورة: $|ax+b|=c$.
- حل متباينات قيمة مُطلقة على الصورة: $|ax+b|<c$.
- حل متباينات قيمة المُطلقة على الصورة: $|ax+b|>c$.
- حل مسائل حياتية على معادلات القيمة المُطلقة ومتبايناتها.

نتائج التعلّم القبلي:

- تعرّف مفهوم القيمة المُطلقة للعدد الحقيقي.
- حل معادلات خطية بمتغير واحد.
- حل متباينات خطية بمتغير واحد، وتمثيل الحل على خط الأعداد.
- حل متباينات مركبة بمتغير واحد، وتمثيل الحل على خط الأعداد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 3

حلّ مُعادلات القيمة المُطلقة ومتبايناتها Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

حلّ مُعادلات القيمة المُطلقة ومتبايناتها.

فكرة الدرس



مُعادلة القيمة المُطلقة، متباينة القيمة المُطلقة.

المصطلحات



مسألة اليوم



استعملت مريم 8 g من مادّة كيميائيّة في تجرّية علميّة. إذا كان الميزان المخبري الذي استعملته مريم يحدّد الكتلة بهامش خطأ لا يتجاوز ± 0.1 g، فأكتب متباينة قيمة مُطلقة تحدّد الكتلة الحقيقيّة للمادّة التي استعملتها.

مقادير القيمة المُطلقة

تعلّمت سابقاً أنّ المقدار الجبري هو عبارة تحتوي مُتغيّرات وأعداداً تفصل بينها عمليات. ويمكن أن يتضمّن المقدار الجبري قيمة مُطلقة. ولإيجاد قيمته، أعوّض قيمة المُتغيّر الذي يحتويه، ثم اتّبّع أولويات العمليات.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المُعطاة:

$$1 \quad |x+3|-8, x=2$$

$$\begin{aligned} |x+3|-8 &= |2+3|-8 \\ &= |5|-8 \\ &= 5-8 \\ &= -3 \end{aligned}$$

بتعويض $x=2$

$$2+3=5$$

$$|5|=5$$

بالتبسيط

أتعلّم

لإيجاد قيمة مقدار جبري يتضمّن قيمة مُطلقة أجري العمليات الحسابيّة داخل القيمة المُطلقة أوّلاً.

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

« ما تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي؟ »

« ما قيمة كل مما يأتي: »

a. $|5|$

b. $|-7|$

c. $3|-2| + 4|5| - 9$

d. $10 - |4-9| + |-7|$

« أكتب مجموعة حل كل مما يأتي: »

a. $4x - 9 = 13$

b. $2x - 7 < 5x - 25$

c. $12 < \frac{x}{2} + 7 \leq 22$

- أتابع عمل المجموعات، وأفدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

« ما سبب الخطأ في قراءة الكتلة التي يحددها الميزان؟ **ستختلف إجابات الطلبة.** »

« ما الحد الأعلى للكتلة الفعلية عندما تكون قراءة الميزان 8 g ؟ $8 + 0.1 = 8.1 \text{ g}$ »

« ما الحد الأدنى للكتلة الفعلية عندما تكون قراءة الميزان 8 g ؟ $8 - 0.1 = 7.9 \text{ g}$ »

« ما المتباينة المركبة التي تمثل الكتلة الفعلية للمادة التي استعملتها مريم؟ $7.9 \leq m \leq 8.1$ »

« ما متباينة القيمة المطلقة التي تمثل الكتلة الفعلية للمادة التي استعملتها مريم؟ »

- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟ »

« من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟ »

- أعزز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أذكر الطلبة بمفهوم القيمة المطلقة للعدد الحقيقي، ثم أذكرهم بمفهوم المقدار الجبري وكيفية حساب قيمته عندما تكون قيمة المتغيرات التي يحويها معلومة، وذلك عن طريق بعض الأمثلة البسيطة.
- أوضح للطلبة مفهوم مقادير القيمة المطلقة، وحساب قيمتها عندما تكون قيم المتغيرات التي تحويها معلومة عن طريق بعض الأمثلة البسيطة، مثل: إذا كان $x = -5$ ، فما قيمة $|2x + 4|$ ؟
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أناقش الطلبة في مضمون صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الفرع 1 من المثال 3؛ لما له من أهمية في مساعدتهم على حل أفرع المثال وأسئلة أخرى.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكل من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

2 $10 - |5 - 2x|, x = 7$

$$\begin{aligned} 10 - |5 - 2x| &= 10 - |5 - 2(7)| \\ &= 10 - |5 - 14| \\ &= 10 - |-9| \\ &= 10 - 9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

بتعويض $x = 7$

$$2(7) = 14$$

$$5 - 14 = -9$$

$$|-9| = 9$$

بالتبسيط

أنتحق من فهمي

أجد قيمة كل من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المُعطاة:

a) $|x - 2| + 10, x = -4$ 16

b) $-2|3x + 1|, x = -1$ -4

معادلات القيمة المطلقة

معادلة القيمة المطلقة (absolute value equation) هي معادلة تحتوي على قيمة مُطلقة. وبما أن القيمة المطلقة لكل من العدد ومعكوسه متساويتان، فيمكن تحويل معادلة القيمة المطلقة إلى معادلتين مُرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبة مرةً وسالبةً مرةً أخرى.

أندكر

القيمة المطلقة للعدد هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد.

حل معادلات القيمة المطلقة

مفهوم أساسي

لحل المعادلة $|ax + b| = c$ ؛ حيث $c \geq 0$ ، أحلّ المعادلتين المُرتبطتين بها، وهما:

$$ax + b = c \quad \text{or} \quad ax + b = -c$$

- أوضح للطلبة مفهوم معادلة القيمة المطلقة وأطرح لهم أمثلة عليه، مثل:

$$|x| = 4, |x-2| = 5, |x+1| - 3 = 7,$$

$$3|2x-5|+2=11$$

- أناقش الطلبة في كيفية حل مثل هذه المعادلات، وأستمع لإجاباتهم، وأعزز الصحيحة منها، وأطلب إليهم التحقق من الإجابة.

- أطلب إلى الطلبة أن يعمّموا طريقة الحل بخطوات متسلسلة، ويكتبوا الخلاصة على اللوح بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب صفحة 27.

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 2، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.

إرشادات:

- عند مناقشة المثال 2 أوضح للطلبة ما تعنيه كل معادلة من معادلات القيمة المطلقة في المثال بدلالة المسافة، وذلك تأسيساً على تعريف القيمة المطلقة للعدد والذي يعني المسافة بين ذلك العدد والصفر.

- في الفرع 2 من المثال، ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة كتابة القيمة المطلقة أولاً معزولة في أحد طرفي المعادلة، ثم حل المعادلة المكافئة الناتجة.

- في الفرع 3 من المثال، ألفت انتباه الطلبة إلى أنه لا يمكن أن يكون ناتج تعويض قيمة المتغير في القيمة المطلقة عدداً سالباً؛ لذا فإنه لا يوجد حل لهذه المعادلة.

مثال 2

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية، وأمثّل مجموعة الحل على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1 $|x-8|=2$

$$x-8=2 \quad \text{or} \quad x-8=-2$$

$$x=10$$

$$x=6$$

بكتابة المعادلتين المرتبطتين

بجمع 8 لكل طرف

إذن، مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{6, 10\}$ ، وتمثّلها على خطّ الأعداد على النحو الآتي:



2 $2|x-4|+10=16$

لحلّ هذه المعادلة، أكتب القيمة المطلقة أولاً معزولة في أحد طرفي المعادلة.

$$2|x-4|+10=16$$

$$2|x-4|=6$$

$$|x-4|=3$$

المعادلة المعطاة

يطرح 10 من طرفي المعادلة

يقسم طرفي المعادلة على 2

الآن، أكتب معادلتين مرتبطتين بالمعادلة $|x-4|=3$ ، ثم أحلّ كلا منهما.

$$x-4=3 \quad \text{or} \quad x-4=-3$$

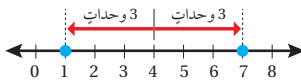
$$x=7$$

$$x=1$$

بكتابة المعادلتين المرتبطتين

بجمع 4 لكل طرف

إذن، مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{1, 7\}$ ، وتمثّلها على خطّ الأعداد على النحو الآتي:



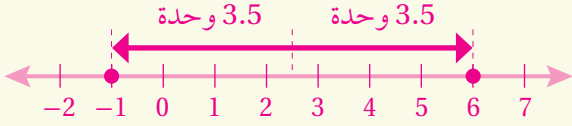
أتعلّم

تعني المعادلة $|x-8|=2$ أن المسافة بين x و 8 تُساوي 2 وحدة.

مثال إضافي

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وأمّثل مجموعة الحل على خط الأعداد:

1 $|2x - 5| + 3 = 10$ $\{-1, 6\}$

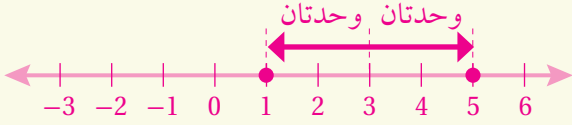


2 $4|x + 3| - 5 = 7$ $\{-6, 0\}$



3 $|x - 2| + 7 = 3$ ليس لها حل $\emptyset$

4 $|2x - 4| - 1 = x$ $\{1, 5\}$



3 $|3x + 1| = -5$

المعادلة $|3x + 1| = -5$ تعني أنّ المسافة بين $3x$ و -1 تساوي -5 وبما أنّه لا يمكن أن تكون المسافة سالبة، فإن مجموعة حل هذه المعادلة $\emptyset$ ؛ أي أنّه لا يوجد حل للمعادلة.

أنتحقّق من فهمي

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وأمّثل مجموعة الحل على خط الأعداد (إن أمكن): أنظر الهامش.

a) $|x - 7| = 5$

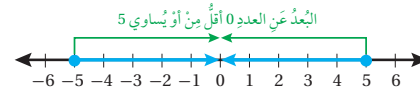
b) $4|2x + 7| = 16$

c) $|x + 4| = -10$

متباينات القيمة المطلقة

متباينة القيمة المطلقة (absolute value inequality) هي متباينة تحتوي على قيمة مطلقة.

فمثلاً، $|x| \leq 5$ هي متباينة قيمة مطلقة، وتعني أنّ المسافة بين x و 0 أقلّ من أو تساوي 5 ؛ لذا فإن $x \leq 5$ و $x \geq -5$.



وبذلك، فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي الفترة $[-5, 5]$.

وبشكل عام، يمكن تحويل متباينة القيمة المطلقة، التي تحتوي على الرمز $<$ ، إلى متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (و)، ثم حل المتباينة المركبة الناتجة.

حل متباينات القيمة المطلقة ($<$)

لحل المتباينة $|ax + b| < c$ ؛ حيث $c > 0$ ، أحلّ المتباينة المركبة المرتبطة بها، وهي:

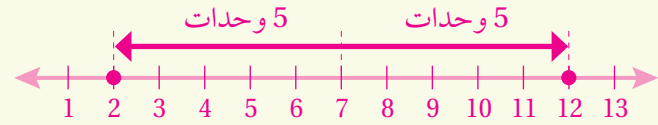
$$-c < ax + b < c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المتباينة على ($\leq$)

مفهوم أساسي

إجابة التدريب في بند (أنتحقّق من فهمي 2):

a) $\{2, 12\}$



b) $\{-\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\}$



c) $\emptyset$

لا يوجد حل لهذه المعادلة.

- أوضح للطلبة مفهوم متباينة القيمة المطلقة التي تحوي $<$ أو $\leq$ ، وأطرح أمثلة عليها، مثل:

$$|x| \leq 2, |x+1| \leq 5, 2|x-4|+3 < 7$$

ثم أناقشهم في ما تعنيه المتباينة مثل:

$$|x| \leq 2, |x-1| \leq 2$$

$$|ax+b| < c \text{ تعني أن:}$$

$$-c < ax+b < c$$

وأنه ينبغي أن نحل المتباينة المركبة السابقة لحل متباينة القيمة المطلقة $|ax+b| < c$.

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 3، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.

- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بضرورة تبسيط أي سؤال يتضمن متباينة قيمة مطلقة بحيث نعزل القيمة المطلقة وحدها في يسار المتباينة والعدد في الطرف الأيمن منها؛ أي نجعلها على الصورة $|ax+b| < c$ أو $|ax+b| \leq c$ أو $|ax+b| > c$ أو $|ax+b| \geq c$.
- أحاور الطلبة في ما تتضمنه الصناديق الواردة في هامش المثال 3؛ لما لها من أهمية في مساعدتهم على حل أفرع السؤال وأسئلة أخرى.

مثال 3

أحلّ كلاً من المتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

1 $|x+5| < 9$

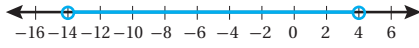
$$-9 < x+5 < 9$$

المتباينة المركبة المرتبطة

$$-14 < x < 4$$

بطرح 5 من كل طرف

إذن، مجموعة حلّ المتباينة هي $\{x | -14 < x < 4\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-14, 4)$ ، ويمكن تمثيلها على خطّ الأعداد على النحو الآتي:



أتعلم

المتباينة $|x+5| < 9$ تعني أنّ المسافة بين x و -5 أقل من 9 وحدات.

2 $-4|x+3| - 2 \geq 6$

لحلّ هذه المتباينة، أكتب أولاً مقدار القيمة المطلقة معزولاً في أحد طرفي المتباينة.

$$-4|x+3| - 2 \geq 6$$

المتباينة المعطاة

$$-4|x+3| \geq 8$$

بجمع 2 لطرفي المتباينة

$$|x+3| \leq -2$$

بقسمة طرفي المتباينة على -4، وتغيير اتجاه رمز المتباينة

بما أن $|x+3|$ لا يمكن أن تكون سالبة، فلا يمكن أن تكون $|x+3|$ أقل من -2، ومنه فإنّ مجموعة حلّ هذه المتباينة $\emptyset$ ؛ أي أنه لا يوجد حلّ للمتباينة المعطاة.

أتحقق من فهمي

أحلّ كلاً من المتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد (إن أمكن):

a) $|x-2| \leq 1$
 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}, [1, 3]$



b) $|x+7| + 10 < 2$ ∅

أندكر

يُستعمل الرمز $]$ أو الرمز $[$ للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، أما الرمز $)$ أو الرمز $($ فيستعمل للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها.

مثال إضافي

أكتب مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين، وأمثلها على خط الأعداد:

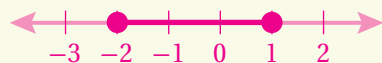
1 $2|x-5|+1 < 9$

$$\{x | 1 < x < 9\}$$



2 $3|2x+1|-7 \leq 2$

$$\{x | -2 \leq x \leq 1\}$$



• أناقش الطلبة في ما تعنيه المتباينة، مثل:

$|x| \geq 4$, $|x-3| > 2$ للوصول إلى أن المتباينة $|ax+b| > c$ تعني أن:

$$ax+b > c \text{ أو } ax+b < -c$$

وأنه ينبغي أن نحل المتباينة المركبة السابقة لحل متباينة القيمة المطلقة $|ax+b| > c$.

• أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 4، وأطلب إليهم تبرير خطوات الحل.

إرشاد: أدرج بالأمثلة حتى يستنتج الطلبة أن مجموعة حل المتباينة $|ax+b| < c$ إذا كان c عددًا سالبًا هي $\emptyset$ (المجموعة الخالية)؛ لأن القيمة المطلقة لا تكون سالبة أبدًا. وفي المقابل فإن مجموعة حل المتباينة $|ax+b| > c$ إذا كان c عددًا سالبًا هي مجموعة الأعداد الحقيقية كلها؛ لأن القيمة المطلقة لأي مقدار هي أكبر أو تساوي صفرًا فهي بذلك تكون أكبر من أي عدد سالب.

مثالان إضافيان

« أكتب مجموعة حل المتباينة: $3|x-5|+7>10$ على صورة فترة، وأمثلها على خط الأعداد.

$$(-\infty, 4) \cup (6, \infty)$$



« أكتب مجموعة حل المتباينة: $3+2|4x-7| \geq 13$ باستعمال الصفة المميزة، وعلى صورة فترة، وأمثلها على خط الأعداد.

مجموعة الحل باستعمال الصفة المميزة:

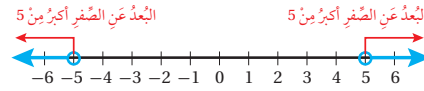
$$\{x|x \leq 0.5 \text{ or } x \geq 3\}$$

مجموعة الحل باستعمال رمز الفترة:

$$(-\infty, 0.5] \cup [3, \infty)$$



تعني متباينة القيمة المطلقة $|x| > 5$ أن المسافة بين x و 0 أكبر من 5؛ لذا فإن $x > 5$ أو $x < -5$



وبذلك، فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

وبشكل عام، يمكن تحويل متباينة القيمة المطلقة، التي تحتوي على الرمز $(>)$ ، إلى متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (أو)، ثم حل المتباينة المركبة الناتجة.

حل متباينات القيمة المطلقة (>)

مفهوم أساسي

لحل المتباينة $|ax+b| > c$ ؛ حيث $c > 0$ ، أخل المتباينة المركبة المرتبطة بها، وهي:

$$ax+b < -c \quad \text{or} \quad ax+b > c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المتباينة على $(\geq)$

مثال 4

أحل كلاً من المتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحل على خط الأعداد (إن أمكن):

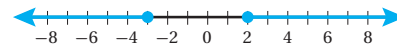
$$1 \quad |2x+1| \geq 5$$

$$2x+1 \leq -5 \quad \text{or} \quad 2x+1 \geq 5$$

$$2x \leq -6 \quad 2x \geq 4$$

$$x \leq -3 \quad \text{or} \quad x \geq 2$$

إذن، مجموعة الحل هي $\{x|x \leq -3 \text{ or } x \geq 2\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$ ، وتمثيلها البياني على النحو الآتي:



2 $|4x + 8| \geq -3$

يُضَعُ تعريفُ القيمة المُطلقة على أنَّ مقدارها يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا،
وَمِنْهُ فَإِنَّ $|4x + 8|$ دائماً أكبر من -3 لأيِّ من قيم المتغير x

إذن، مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-\infty, \infty)$.

تحقق من فهمي

أحلّ كلاً من المُتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة الحل على خطّ الأعداد (إن أمكن): أنظر الهامش.

a) $|x - 3| \geq 4$

b) $|10 - x| > -5$

يمكن استعمال المُتباينات في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



صناعة: يُنتج مصنع رؤوس مثاقب طول قطرها المثالي

0.625 cm ، ويُسمح أن يزيد طول هذا القطر أو يقل

بمقدار لا يتجاوز 0.005 cm ، أكتب مُتباينة قيمة مُطلقة

أجد بها المدى المسموح به لطول قطر رأس المثقب.

بالكلمات: الفرق بين طول القطر الحقيقي وطول القطر

المثالي لا يتجاوز 0.005

أختار مُتغيراً: ليكن x ممثلاً طول قطر رأس المثقب.

أكتب المُتباينة: $|x - 0.625| \leq 0.005$

$|x - 0.625| \leq 0.005$

المُتباينة

$-0.005 \leq x - 0.625 \leq 0.005$

المُتباينة المركبة المرتبطة

$0.62 \leq x \leq 0.63$

بجمع 0.625 لكل طرف

إذن، المدى المسموح به لطول قطر رأس المثقب هو $[0.62, 0.63]$ بوحدة cm

رموز رياضية

يُرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بالحرف R ، وهو الحرف الأول من كلمة Real باللغة الإنجليزية، وتعني "حقيقياً".

معلومة

توجد في بعض المثاقب خاصية الاهتزاز في أثناء الدوران؛ ما يساعد على ثقب الجدران الخرسانية بسهولة.

- أوضح للطلبة استعمال متباينات القيمة المطلقة في تطبيقات حياتية، مثل: تحديد مجال التغير في قياس مُنتج معين حيث توضع حدود لا يُسمح بتجاوزها، فعند تعبئة الأطعمة في عبوات مُعدة للبيع يُفترض أن تحتوي العبوة 1 kg يسمح بهامش $\pm 10 \text{ g}$ مثلاً. ومعروف أن متوسط درجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية هي 37°C ، ويمكن أن تزيد أو تنقص قليلاً تبعاً للنشاط أو الوقت والعمر، فيمكن كتابة متباينة قيمة مُطلقة تعبر عن درجة حرارة جسم إنسان سليم.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- ناقش الطلبة في خطوات حل المثال 5 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إجابة التدريب في بند (تحقق من فهمي 4):

a) $(-\infty, -1] \cup [7, \infty)$



b) $R, (-\infty, \infty)$



أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 20) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من زميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 - 28).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

أَتَدْرِبُ مِنْ فَهْمِي

$$|x - 90| \leq 0.008, [89.992, 90.008]$$

صناعة: إذا عُلِمَتْ أَنَّ طَوْلَ الْقَطْرِ الْمَثَالِيِّ لِأَحَدِ الْمَكَابِسِ الْأَسْطَوَانِيَّةِ فِي مُحَرَّكَاتِ السَّيَّارَاتِ 90 mm، وَيُسَمَّحُ أَنْ يَزِيدَ طَوْلُ هَذَا الْقَطْرِ أَوْ يَقِلَّ بِمَقْدَارٍ لَا يَتَجَاوَزُ 0.008 mm، فَكُتِبَتْ مُتَبَايِنَةٌ قِيَمَةٌ مُطْلَقَةً أُجِدَ بِهَا الْمَدَى الْمَسْمُوحُ بِهِ لَطَوْلِ قَطْرِ الْمَكْبَسِ.

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

أَجِدُ قِيَمَةً كُلِّ مِّنَ الْمَقَادِيرِ الْجَبْرِيَّةِ الْآتِيَةِ عِنْدَ الْقِيَمَةِ الْمُعْطَاةِ:

$$1 \quad |5x + 2| + 1, x = -3 \quad 14 \quad 2 \quad |14 - x| - 18, x = 1 \quad -5 \quad 3 \quad -3|3x + 8| + 5, x = -4 \quad -7$$

أَحُلُّ كُلًّا مِّنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحُلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ): (4-8) أَنْظِرْ مِلْحَقَ الْإِجَابَاتِ.

$$4 \quad |x + 3| = 7 \quad 5 \quad |x - 8| = 14 \quad 6 \quad |-3x| = 15 \quad 7 \quad |3x + 2| + 2 = 5 \quad 8 \quad |2x - 4| - 8 = 10 \quad 9 \quad -4|8 - 5x| = 16 \quad \times$$

أَحُلُّ كُلًّا مِّنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحُلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ): (10-18) أَنْظِرْ مِلْحَقَ الْإِجَابَاتِ.

$$10 \quad |x + 8| \leq 3 \quad 11 \quad |2x - 5| < 9 \quad 12 \quad |3x + 1| > 8 \quad 13 \quad |3x - 1| + 6 > 0 \quad 14 \quad 2|3x + 8| - 13 \leq -5 \quad 15 \quad -3|2 - 4x| + 5 < -13 \quad 16 \quad |6x + 2| < -4 \quad 17 \quad 3|5x - 7| - 6 < 24 \quad 18 \quad |5x + 3| - 4 \geq 9$$

أَكْتُبُ مُتَبَايِنَةً تُمَثِّلُ كُلَّ جُمْلَةٍ مِمَّا يَأْتِي، ثُمَّ أُمَثِّلُهَا عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ: (19, 20) أَنْظِرْ مِلْحَقَ الْإِجَابَاتِ.

$$19 \quad \text{المسافة بين عددي والصفر أكبر من 7} \quad 20 \quad \text{المسافة بين عددي 3 أقل من أو تساوي 4}$$

إرشاد:

في الأسئلة (23-26) (تبرير)، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في كتابة المعادلة أو المتباينة المناسبة للتمثيل البياني؛ لذا أوجههم إلى مراجعة إجابات الأسئلة 10, 5, 4، والمثالين 2، و3، وملاحظة العلاقة بين المعادلة أو المتباينة المعطاة وتمثيلها البياني على خط الأعداد؛ ليستنتجوا الطريقة التي تساعدكم على كتابة المعادلة أو المتباينة المناسبة لكل تمثيل بياني معطى، وأطلب إليهم تلخيص الإستراتيجية بلغتهم الخاصة.



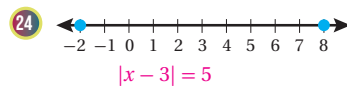
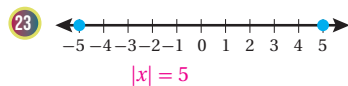
21 صناعة: إذا عَلِمْتُ أَنَّ مصنعاً يُنتِجُ علبَ بسكويتٍ كتلةُ العلبِ المثلثية 454 g، وكانَ مراقِبُ الجودةِ يَستَني العلبَ التي تَزيدُ على الكتلةِ المثلثية أو تنقصُ عنها بِوَقْدانٍ 5 g، فأَكتبُ مُتباينةَ قِيَمَةٍ مُطلَقةً أَجِدُ بِهَا المَدَى المَسموحُ بِهِ لِكَتَلِ عَلبِ البسكويتِ. $|x - 454| < 5$; (349, 459)



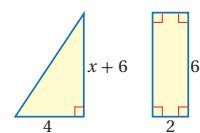
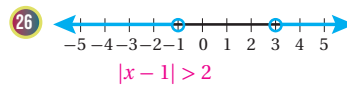
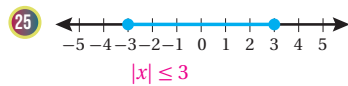
22 كرة قدم: إذا كانت الكتلة المثلثية الموصى بها لكرة القدم 430 g، وكانَ مَسموحاً أَنْ تَزيدَ على الكتلةِ المثلثية أو تنقصُ عنها بِوَقْدانٍ 20 g، فأَكتبُ مُعادلةَ قِيَمَةٍ مُطلَقةً لِإِيجادِ أَكْبَرِ وَأَقَلِّ كَتَلَةٍ مَسموحِ بِهَا لَكُرَةِ القَدَمِ، ثُمَّ أَحلُّها. $|x - 430| = 20$; {410, 450}

مهارات التفكير العليا

تبرير: أَكتبُ مُعادلةَ قِيَمَةٍ مُطلَقةً تُعبِّرُ عَن كُلِّ تَمثيلٍ على خَطِّ الأَعدادِ مِمَّا يَأْتِي:



تبرير: أَكتبُ مُتباينةَ قِيَمَةٍ مُطلَقةً تُعبِّرُ عَن كُلِّ تَمثيلٍ على خَطِّ الأَعدادِ مِمَّا يَأْتِي، وَأُبرِّزُ إجابتي:



27 تبرير: يُبينُ الشَّكْلُ المَجاوِزُ مِثْلًا وَمُستطِيلًا الفَرقَ بَينَ مَساسِطَهِمَا أَقلَّ مِنْ 2 وَحدَةٍ مُربَّعةٍ. أَكتبُ مُتباينةَ قِيَمَةٍ مُطلَقةً تَمثَلُ الجُمْلَةَ السَّابِقَةَ وَأَحلُّها، وَأُبرِّزُ إجابتي. $|2(x + 6) - 12| < 2 \Rightarrow |2x| < 2 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

مجموعة حل هذه المتباينة هي: $\{x | -1 < x < 1\} = (-1, 1)$

28 نَحْدُ: أَحلُّ المُتباينةِ المُركَّبةِ الآتية: $|x - 3| < 4$ and $|x + 2| > 8$

$-1 < x < 7$ and $x > 6$ or $x < -10$

مجموعة الحل هي فترة تقاطع هذين الحلين التي تتحقق فيها المتباينتان معاً، وهي الفترة: (6, 7)

34

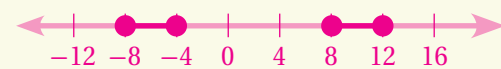
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (21 - 23) كتاب التمارين: 7, (1 - 4)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (22 - 25) كتاب التمارين: (5 - 9)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 22, (26 - 28) كتاب التمارين: (9 - 13)

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
- « أجد مجموعة حل المتباينة: $10 \leq |x - 2| \leq 6$ ، وأمثلها على خط الأعداد.

$$[8, 12] \cup [-8, -4]$$



نشاط التكنولوجيا:

- أوجه الطلبة إلى إمكانية حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة باستعمال برمجية جيو جبرا، فمثلاً: يمكن حل المعادلة: $|x - 5| + 2 = 8$ بتمثيل المنحنيين $y = |x - 5| + 2$, $y = 8$ ، وإيجاد إحداثيات نقاط تقاطعهما بالضغظ على أيقونة (intersect) ثم النقر بمؤشر الفأرة على المنحنيين لتظهر إحداثيات نقطتي التقاطع في الجانب الأيسر من الشاشة (8, 11), (8, -1)؛ أي أن مجموعة حل هذه المعادلة هي: $\{-1, 11\}$.
- وبالمثل فإنه يمكن حل المتباينة $|x - 5| + 2 > 8$ بتمثيل المنحنيين $y = |x - 5| + 2$, $y = 8$ ، وملاحظة قيم x على المحور الأفقي التي يقع مقابلها منحنى القيمة المطلقة فوق المستقيم $y = 8$.
- أكلف الطلبة حل بعض أسئلة الدرس باستعمال برمجية جيو جبرا على حواسيبهم أو هواتفهم الذكية، ومقارنة هذا الحل مع الحل اليدوي.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 4 و 5 من خطوات تنفيذ المشروع.

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤالين الآتيين إليهم:
- « أجد حل المعادلة: $|2x - 3| = 11$ $x = 7, x = -4$
- « أجد مجموعة حل المتباينتين الآتيتين، وأمثلها على خط الأعداد:

- 1 أنظر تمثيل الطلبة، $[-5, 11]$ $|x - 3| \leq 8$
- 2 أنظر تمثيل الطلبة، $(-\infty, -7) \cup (5, \infty)$ $2|x + 1| - 5 > 7$

تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً Graphing Linear Inequalities in Two Variables

فكرة الدرس

تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

المصطلحات

المتباينة الخطية بمتغيرين، منطقة الحلول الممكنة، المستقيم الحدودي.

مسألة اليوم



تعمل شركة على تجميع نوعين مختلفين من أجهزة المايكروويف. إذا كان تجميع الجهاز الواحد من النوع الأول يحتاج إلى ساعتين، وتجميع الجهاز الواحد من النوع الثاني يحتاج إلى 1.5 ساعة، وكان الحد الأقصى لعدد ساعات العمل أسبوعياً 80 ساعة، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد أجهزة المايكروويف التي يمكن للشركة تجميعها أسبوعياً من كل نوع.

المتباينات الخطية بمتغيرين

المتباينة الخطية بمتغيرين (linear inequality in two variables) هي متباينة يمكن كتابتها على إحدى الصور الآتية:

$$ax + by < c \quad ax + by \leq c \quad ax + by > c \quad ax + by \geq c$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفراً، وحل المتباينة الخطية بمتغيرين هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) ، التي تجعل المتباينة صحيحة عند تعويض إحداثياتها في المتباينة.

مثال 1

أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة $3x + y < 7$:

1 $(-3, 1)$

أعوض الزوج المرتب $(-3, 1)$ في المتباينة:

$$3x + y < 7$$

المتباينة المعطاة

$$3(-3) + 1 < 7$$

بتعويض $x = -3, y = 1$

$$-8 < 7 \quad \checkmark$$

الناتج صحيح

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج يكون صحيحاً. إذن، الزوج المرتب $(-3, 1)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

أتعلم

لكل متباينة خطية معادلة خطية مرتبطة بها. فمثلاً، $x + 2y > 1$ هي متباينة خطية، و $x + 2y = 1$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.

نتائج الدرس

- تعرف المتباينة الخطية بمتغيرين ومجموعة حلها.
- تميز منطقة الحلول الممكنة، والمستقيم الحدودي للتمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيرين.
- تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي.
- تمثيل المتباينة الخطية بمتغير واحد بيانياً في المستوى الإحداثي.
- استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين في نمذجة مسائل حياتية، وتمثيلها بيانياً للمساعدة على اتخاذ القرار الأنسب المتعلق بتحديد القيم الممكنة ضمن شروط محددة.

نتائج التعلم القبلي:

- معادلة الخط المستقيم.
- تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين بيانياً.
- كتابة معادلة مستقيم أعطي تمثيله البياني.

مراجعة التعلم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة الإجابة عن الأسئلة الآتية:

« أجد ميل المستقيم الذي معادلته $y = 3x - 5$.

« أجد المقطع x والمقطع y للمستقيم الذي معادلته $3x - 4y = 12$.

« أمثل بيانياً كلا من المستقيمين الآتين في المستوى نفسه:

$$l_1: 2x + 3y = 3, \quad l_2: y = 4x - 8$$

« أمثل بيانياً كل من المستقيمين الآتين في المستوى نفسه:

$$l_3: y = 3, \quad l_4: x = 4$$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

« كم ساعة عمل تلزم لتجميع 9 أجهزة مايكروويف من النوع الأول، و 12 جهازًا من النوع الثاني؟ 36 ساعة.

« كم ساعة عمل يلزم لتجميع x جهاز مايكروويف من النوع الأول، و y جهازًا من النوع الثاني؟ $2x + 1.5y$

« ما القيد المحدد لعدد ساعات العمل الأسبوعي في هذه الشركة؟ يجب ألا تتجاوز 80 ساعة عمل.

« كم جهازًا يمكن تجميعها في الأسبوع إذا اقتصر العمل على النوع الأول فقط؟ وإذا اقتصر العمل على النوع الثاني؟ 40 جهازًا من النوع الأول في الأسبوع، أو 53 جهازًا من النوع الثاني.

« هل يمكن أن يتم تجميع 20 جهازًا من النوع الأول، و 30 جهازًا من النوع الثاني في أسبوع؟ ولماذا؟ كلاً؛ لأن ذلك يحتاج إلى 85 ساعة عمل، أي أكثر من ساعات العمل المتاحة أسبوعياً.

« ما المتباينة الخطية التي تربط عدد الأجهزة المنتجة أسبوعياً وعدد ساعات العمل؟

- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

« ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟

« من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزز الإجابات الصحيحة.

2 (2, 4)

أعوّض الزوج المرتب (2, 4) في المتباينة:

$$3x + y < 7 \quad \text{المتباينة المعطاة}$$

$$3(2) + 4 \stackrel{?}{<} 7 \quad \text{بتعويض } x = 2, y = 4$$

$$10 < 7 \quad \times \quad \text{النتيجة غير صحيحة}$$

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج لا يكون صحيحاً. إذن، الزوج المرتب (2, 4) ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

3 (0, 2)

أعوّض الزوج المرتب (0, 2) في المتباينة:

$$3x + y < 7 \quad \text{المتباينة المعطاة}$$

$$3(0) + 2 \stackrel{?}{<} 7 \quad \text{بتعويض } x = 0, y = 2$$

$$2 < 7 \quad \checkmark \quad \text{النتيجة صحيحة}$$

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج يكون صحيحاً. إذن، الزوج المرتب (0, 2) هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

تحقق من فهمي

أحدد ما إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة $-2x + 3y \geq 3$:

- حل (0, 1) c) حل (-1, 2) b) ليس حلاً (4, 1) a)

مثال 1

- أوضح مفهوم المتباينة الخطية بمتغيرين، وصورها المختلفة، وأبين لهم أن الزوج المرتب الذي تنتج منه عبارة صحيحة عند تعويضه في المتباينة يُسمى حلاً للمتباينة، وأنه توجد مجموعة غير منتهية من الحلول لكل متباينة خطية، ثم أ طرح المثال الآتي:

« هل يمثل الزوج المرتب (0, 2) حلاً للمتباينة

$$y > 2x - 3 \text{؟ نعم؛ لأن } 2 > 2(0) - 3$$

$$2 > -3 \checkmark$$

« هل يمثل الزوج المرتب (3, 2) حلاً للمتباينة

$$y > 2x - 3 \text{؟ كلا؛ لأن } 2 > 2(3) - 3$$

$$2 > 3 \times$$

« أكتب زوجاً مرتباً آخر يمثل حلاً للمتباينة السابقة.

تعدد الإجابات ... (1, 2), (2, 3), (0, 0), ...

« أكتب زوجاً مرتباً آخر ليس حلاً للمتباينة السابقة.

تعدد الإجابات ... (4, 1), (2, -3), (-2, -10), ...

« إذا كانت $x = 2$ ، فما مجموعة قيم y الممكنة؟

$$\{y \mid y > 1\}$$

- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 1، وأطلب تبريراً لإجاباتهم.

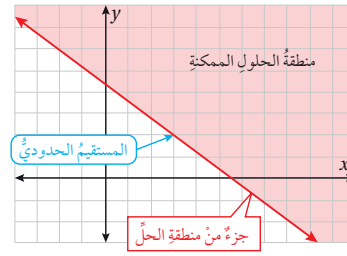
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

✓ **إرشاد:** أناقش الطلبة في مضمون صندوق (أتعلم) الوارد في فقرة الشرح التي تسبق المثال 1؛ لما له من أهمية في مساعدتهم على حل أفرع المثال وأسئلة أخرى.

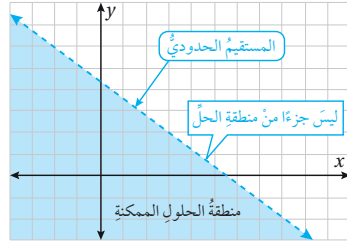
تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً

ألاحظ من المثال السابق أن مجموعة حل المتباينة الخطية بمتغيرين تتكوّن من عدّة أزواج مرتّبة تحقّق المتباينة، وعند تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي، فإنّ النقاط التي تمثّل جميع حلولها الممكنة تُسمى **منطقة الحلول الممكنة** (feasible region)، ويُسمّى المستقيم الذي يقسم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة، **المستقيم الحدودي** (boundary line).

وقد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمّنّت المتباينة الرّمز $\leq$ أو الرّمز $\geq$ ، وعندئذ يُرسم المستقيم الحدودي متصّلاً.



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمّنّت المتباينة الرّمز $<$ أو الرّمز $>$ ، عندئذ يُرسم المستقيم الحدودي متقطّعاً.



أتعلم

يُقسم المستقيم الحدودي للمتباينة المستوى الإحداثي قسمين؛ أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

تعزير اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

المثالان 2 و3

- أوضح للطلبة أن المستوى الإحداثي ينقسم إلى جزأين بالنسبة إلى أي متباينة، جزء تحقق نقاطه المتباينة؛ أي تمثل حلولاً لها، والجزء الآخر لا تحقق نقاطه المتباينة؛ أي ليست حلولاً لها، ويفصل بين الجزأين خط يُسمّى المستقيم الحدودي الذي يمثل المعادلة المرتبطة مع المتباينة الناتجة من تحويل رمز المتباينة ($<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$) إلى رمز المساواة ($=$).
- أوضح خطوات تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي، بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في الصفحة 38 من كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثالين 2 و3، وأطلب تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً

مفهوم أساسي

لتمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أرسم مُنحني المُعادلة المُرافقة للمتباينة بأن أستخدم رمز المساواة ($=$) بدلاً من الرمز ($<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$)؛ حيث تمثل المُعادلة الناتجة المُستقيمَ الحدودي.

الخطوة 2: أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أعرضها في المتباينة الخطية لتحديد ما إذا كانت تمثل حلاً للمتباينة أم لا.

الخطوة 3: إذا كانت النقطة تحقق المتباينة؛ أي تنجم عنها نتيجة صحيحة، فأظلل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإذا لم تكن كذلك فأظلل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

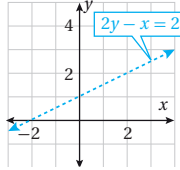
أمثل المتباينة الخطية $2y - x < 2$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أمثل المُستقيمَ الحدودي.

x	0	-2
y	1	0

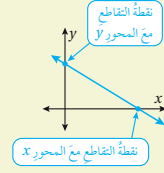
أمثل المُستقيمَ الحدودي $2y - x = 2$ ، وأنشئ جدول قيم يبين نقاط تقاطع المُستقيم مع المحورين.

أعين النقطتين $(0, 1)$ و $(-2, 0)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مُستقيماً يمرّ بهما. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فَيُرسَمُ المستقيم الحدودي متقطعاً، كما في الشكل الآتي:



أندكر

بما أنه يمكن تمثيل المُستقيم بقطعتين، فإن أسهل طريقة لتمثيل المُعادلة الخطية هي إيجاد نُقطتي تقاطع المُستقيم مع المحورين الإحداثيين، إن أمكن.



إرشادات:

- أوجه الطلبة إلى استعمال أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين لتمثيل المتباينات في المستوى الإحداثي.
- أذكر الطلبة بأنه يمكن تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين بعدة طرق، منها: استعمال المقطع x والمقطع y ، ولكن لا يمكن استعمال هذه الطريقة عند تمثيل المتباينة $y=2x$ ؛ لأن نقطة تقاطع هذه المعادلة مع المحورين الإحداثيين هي نقطة الأصل.
- أناقش الطلبة في إجابة المسألة في صندوق (أفكر) الوارد في هامش المثال 3 في الصفحة 40 من كتاب الطالب.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة باختيار النقطة $(0, 0)$ دائماً لفحص المتباينة؛ لذا أبين لهم أنه لا يمكن اختيارها إذا وقعت على المستقيم الحدودي.

أتعلم

لسهولة إجراء الحسابات، يُفضّل اختيار النقطة $(0, 0)$ لفحص المتباينة. ولكن، إذا وقعت على المستقيم الحدودي فيجب اختيار نقطة غيرها.

الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(0, 0)$ ، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$2y - x < 2$$

$$2(0) - 0 < 2$$

$$0 < 2 \quad \checkmark$$

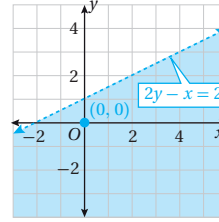
المتباينة الخطية

بتعويض $x = 0, y = 0$

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحلول الممكنة.

بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، فأظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي:



أتحقق من فهمي

أمثل المتباينة الخطية $-x + 2y > 2$ في المستوى الإحداثي. أنظر الهامش.

مثال 3

أمثل المتباينة الخطية $y \geq 2x$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

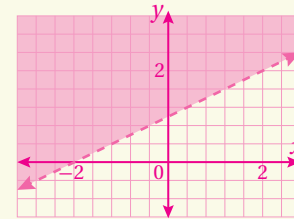
أمثل المستقيم الحدودي $y = 2x$ ، وأنشئ جدول قيم، وذلك باختيار قيم للمتغير x وتعويضها في المعادلة لإيجاد قيم المتغير y المقابلة لها.

x	0	1
y	0	2

أفكر

هل يمكن تمثيل المستقيم $y = 2x$ باستعمال نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين؟ أبرر إجابتي.

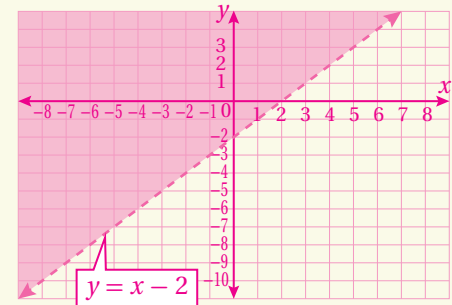
إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):



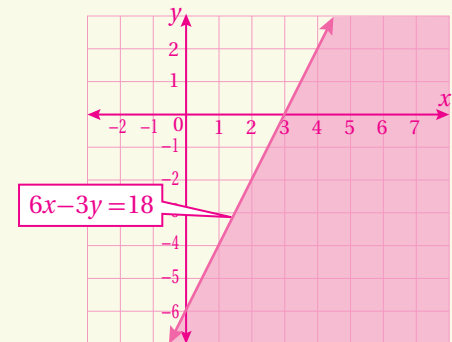
مثال إضافي

أمثل كلاً من المتباينات الآتية بيانياً:

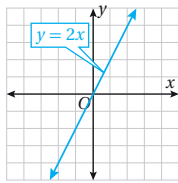
1 $y > x - 2$



2 $\frac{3x - 1.5}{3} \geq \frac{y + 5}{2}$



أعین النقطتين (0, 0) و (1, 2) في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يمر بهما. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فيرسم المستقيم الحدودي متصلاً، كما في الشكل الآتي:



الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل (2, 1)، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$y \geq 2x$$

$$1 \geq 2(2)$$

$$1 \geq 4 \quad \times$$

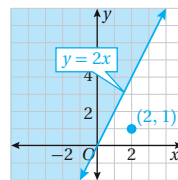
المتباينة الخطية

$$x = 2, y = 1$$

الناتج غير صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحلول الممكنة.

بما أن النقطة (2, 1) ليست إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، فأظلل الجزء من المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي:



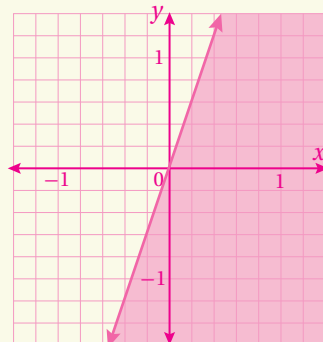
أتحقق من فهمي

أمثل المتباينة الخطية $y - 3x \leq 0$ في المستوى الإحداثي. أنظر الهامش.

أفكر

هل يمكن استعمال النقطة (0, 0) لفحص المتباينة؟ أبرز إجابتني.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

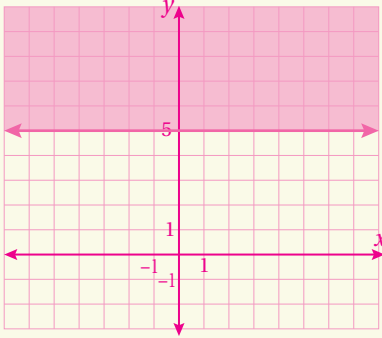


- أذكر الطلبة بمعادلة المستقيم الأفقي والمستقيم الرأسى، ومقطعيهما من المحورين الإحداثيين، وتمثيلهما البياني في المستوى الإحداثي.
- أناقش الطلبة في المتباينات الخطية بمتغير واحد التي يكون معامل أحد المتغيرين فيها صفرًا. فإذا كان $a = 0$ في المتباينة $ax + by > c$ تحولت إلى $by > c$ ، ويكون المستقيم الحدودي لها $by = c$ أو $y = \frac{c}{b}$. وهو مستقيم أفقي يوازي المحور x . وإذا كان $b = 0$ ، يكون المستقيم الحدودي $x = \frac{c}{a}$ ، وهو مستقيم رأسى يوازي المحور y .
- أناقش الطلبة في حل أفرع المثال 4، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.
- إن لزم الأمر، أعرض المزيد من الأمثلة على هذا النوع من المتباينات؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

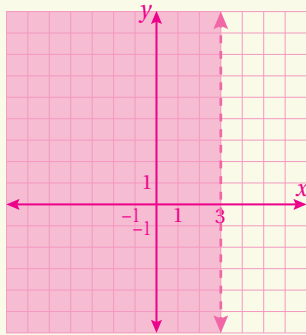
مثال إضافي

أمثل كلاً من المتباينات الآتية بيانياً:

1 $y \geq 5$



2 $x < 3$



تمثيل المتباينات الخطية بمتغير واحد بيانياً

تعلمت سابقاً تمثيل المتباينة الخطية بمتغير واحد على خط الأعداد، ويمكن أيضاً تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثال 4

أمثل كلاً من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

1 $x > -1$

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي $x = -1$ في المستوى الإحداثي. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فيرسم متقطعاً.

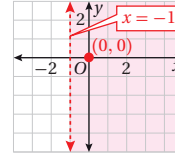
الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(0, 0)$ ، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$x > -1$	المتباينة الخطية
$0 > -1$	بتعويض $x = 0$
$0 > -1$ ✓	الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحلول الممكنة.

بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، فأظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي:



أنذُر

معادلة المستقيم الرأسى تكون دائماً على الصورة $x = a$

2 $y \leq 3$

الخطوة 1: أمثل المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أمثل المُستقيمَ الحُدوديَّ $y = 3$ في المُستوى الإحداثيَّ. وبما أنّه توجد مُساواة في رَمِزِ المُتباينة فَيُرَسَمُ متّصلاً.

الخطوة 2: أحدّد منطقةَ الحُلُولِ المُمكنة.

أختار نقطةً لا تقع على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثل $(0, 0)$ ، ثمّ أتحقّق إذا كانَ الناتجُ صحيحاً أم لا عند تعويضها في المُتباينة:

$$y \leq 3$$

المُتباينة الخطيّة

$$0 \leq 3$$

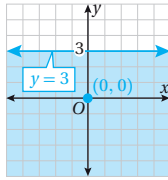
بتعويض $y = 0$

$$0 \leq 3 \quad \checkmark$$

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقةَ الحُلُولِ المُمكنة.

بما أنّ النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحُلُولِ المُمكنة للمُتباينة، فأظلل الجزء من المُستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في السّكّل الآتي.



أتحقّق من فهمي

أمثل كلاً من المُتباينات الآتية في المُستوى الإحداثيَّ: (a, b, c) أنظر الهامش.

a) $x \leq 4$

b) $y > -5$

c) $y \geq 0$

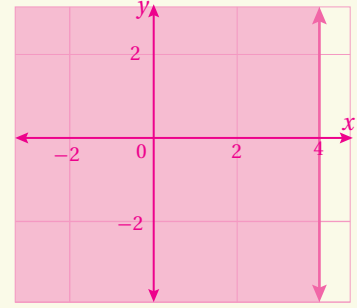
أتدخّر

معادلةُ المُستقيمِ الأفقيّ تكون دائماً على الصورة $y = a$

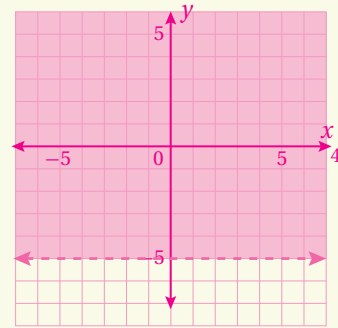
أتعلّم

عند تمثيل المُتباينة الخطيّة بِمُتغيّرٍ واحدٍ في المُستوى الإحداثيَّ، يكونُ المُستقيمُ الحُدوديُّ إمّا أفقيّاً أو عموديّاً.

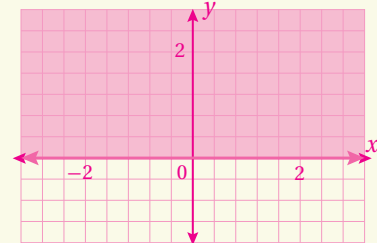
a)



b)



c)



مثال 5: من الحياة

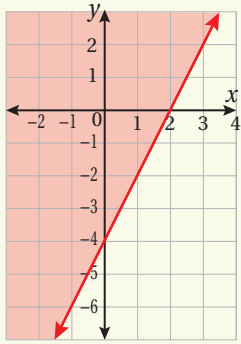
• أوضح للطلبة استعمالات تمثيل المتباينات الخطية في كثير من التطبيقات الحياتية لاتخاذ أفضل القرارات في الصناعة والتجارة والاستثمار فيما يُعرف بالبرمجة الخطية، وأبين لهم أن التمثيل البياني للمتباينات في المسائل الحياتية يقتصر على الربع الأول؛ لأن قيم x, y لا تكون سالبة.

• أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.

• ناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

توسعة

أناقش الطلبة في كتابة متباينة لتمثيل بياني معطى؛ لاستنتاج أنه يجب معرفة معادلة المستقيم الحدودي، وذلك بتحديد نقطتين عليه، ثم حساب ميله واستعمال صيغة معادلة المستقيم بدلالة الميل ونقطة، ثم تعويض إحداثيات أي نقطة من منطقة الحلول الممكنة في معادلة المستقيم، فإذا نتجت عبارة على الصورة $a < b$ استبدلنا المساواة برمز $<$ إذا كان الخط الحدودي متقطعاً، أو برمز $\leq$ إذا كان الخط الحدودي متصلًا. وإذا نتجت عبارة على الصورة $a > b$ استبدلنا المساواة برمز $>$ إذا كان الخط الحدودي متقطعاً، أو برمز $\geq$ إذا كان الخط الحدودي متصلًا. وأطرح المثال الآتي:



أكتب المتباينة الخطية في متغيرين المعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور. أسأل الطلبة:

« أكتب إحداثيات

نقطتين يمر بهما

المستقيم الحدودي. $(2, 0), (0, -4)$

« ما ميله؟ $m = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2$

« ما معادله؟ $y - 0 = 2(x - 2)$

$y = 2x - 4$

« ماذا ينتج إذا عوضنا النقطة $(0, 0)$ في هذه

المعادلة؟ $0 = 2(0) - 4$

$0 = -4$

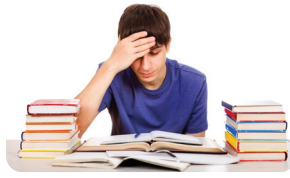
« كيف أجعل هذه الجملة صحيحة؟ $0 > -4$

« ما المتباينة التي يمثلها الشكل المعطى؟ $y \geq 2x - 4$

« لماذا استعمل الرمز $\geq$ لأن الخط الحدودي متصل.

للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تُساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلق بتحديد القيم المُمكنة ضمن شروط محددة.

مثال 5: من الحياة



دراسة: إذا عَلِمْتُ أَنَّ لَدَى عَمَّارٍ 60 دَقِيقَةً على الأكثر لإنهاء الواجب المنزليِّ لِمَادَّتِي الرياضيات والعلوم، فأكتبُ مُتباينةً خطيةً بمتغيرين تمثلُ عددَ الدقائق التي يمكنُ أَنْ يقضيها عَمَّارٌ في حلِّ كلِّ واجبٍ، ثُمَّ أمثلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

الخطوة 1: أكتبُ المُتباينة.

بالكلمات: عددُ الدقائق اللازمة لإنهاء الواجب المنزليِّ على الأكثر 60 دقيقة.

أختارُ مُتغيرًا: ليكنُ x ممثلًا لعددِ الدقائق اللازمة لإنهاء واجبِ الرياضيات، و y عددَ الدقائق اللازمة لإنهاء واجبِ العلوم.

أكتبُ المُتباينة: $x + y \leq 60$

الخطوة 2: أمثلُ المُتباينة بيانيًا.

أمثلُ المُستقيمَ الحدوديَّ $x + y = 60$ في المُستوى الإحداثيِّ. وبِمَا أَنَّهُ تَوْجَدُ مُساواةً في رَمَزِ المُتباينة فَيُرْسَمُ المُستقيمُ الحدوديُّ مُتصِلًا.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحدوديِّ، مثلُ $(0, 0)$ ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ إِذَا كَانَ النَّاتِجُ صَحِيحًا أَمْ لَا عِنْدَ تَعْوِضِهَا فِي المُتباينة:

$$x + y \leq 60$$

المُتباينة الخطية

$$0 + 0 \leq 60$$

بتعويض $x = 0, y = 0$

$$0 \leq 60$$

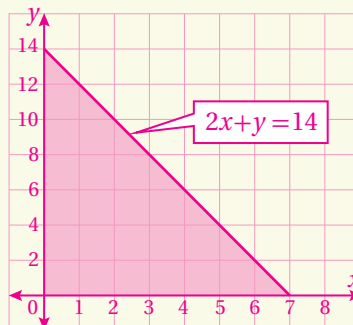
✓

الناتج صحيح

مثال إضافي

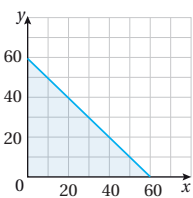
ثمن تذكرة رحلة في قارب 20 دينارًا للكبار، و10 دنائير للأطفال. إذا كانت حصيلة بيع التذاكر في إحدى الرحلات لا تزيد على 140 دينارًا، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكبار، وعدد الأطفال في هذه الرحلة، وأمثلها بيانيًا في المستوى الإحداثي. وإذا كان عدد الأطفال في هذه الرحلة 6، فماذا يمكن أن يكون عدد الكبار فيها؟ ليكن عدد الكبار يساوي x ، وعدد الأطفال يساوي y ، تكون المتباينة:

$$20x + 10y \leq 140 \quad \text{or} \quad 2x + y \leq 14$$



وعندما $y = 6$ ، ألاحظ من الرسم أن النقاط التي إحداثياتها أعداد صحيحة وتقع في منطقة الحلول الممكنة والإحداثي y لها 6 هي: $(0, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6)$ يمكن أن يكون عدد الكبار في الرحلة: 0 أو 1، أو 2، أو 3، أو 4

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ



بما أن النقطة (0, 0) هي إحدى الحلول المُمكنة للمتباينة، وبما أن قيم x و y يجب أن تكون موجبة؛ لأنها تمثل الزمن، فأظلل الجزء من المستوى الذي يقع في الربع الأول، كما في الشكل المُجاور.

ألاحظ أيضًا أن أي نقطة يقع إحداثيها على المستقيم الحُدودي، أو ضمن المنطقة المُظللة، فإنها تُعد حلاً. فمثلاً، النقطة (20, 40) تمثل حلاً للمتباينة، و (30, 30) تمثل أيضًا حلاً لها.

أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي

نجارة: إذا علمت أن نجارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على JD 72، ووجد أن ثمن المتر الطولي من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل كمية الخشب التي يمكن للنجار شراءها من كل نوع، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي. **أنظر الهامش.**



تُستعمل الحسابات الرياضية كثيرًا في مهنة النجارة؛ لاستغلال الألواح الخشبية بطريقة مثلى وتجنب الهدر.

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

أحدد إذا كان كل زوج مُرتَّب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة: $x + 3y < 6$

1. حل. (0, 1) 2. ليس حلاً. (-2, 4) 3. حل. (8, -1)

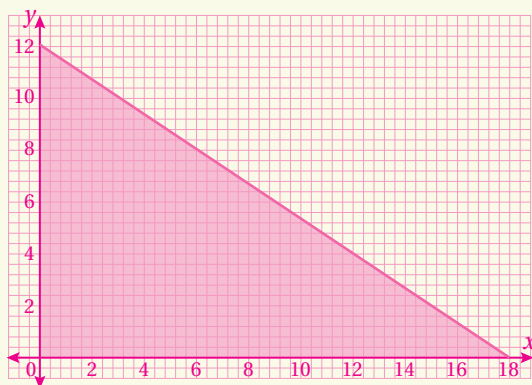
أحدد إذا كان كل زوج مُرتَّب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة: $-3x + 4y \geq 12$

4. حل. (-5, 3) 5. ليس حلاً. (0, 2) 6. حل. (3, 7)

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 5، أعزز وعي الطلبة بأهمية إدارة الذات والمثابرة على حل المسائل، فهي تغرس في أنفسهم الاعتماد على الذات وتحمل المسؤولية، ولها دور مهم في بناء الشخصية.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 5):



الكمية من النوع الأول x

الكمية من النوع الثاني y

$$4x + 6y \leq 72$$

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (21 - 23).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 22 (مسألة مفتوحة) أطلب إلى الطلبة شرح الإستراتيجية التي توصلوا بها إلى المتباينة المطلوبة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20 كتاب التمارين: 10, 11, (1 - 7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 20, 21 كتاب التمارين: (8 - 16)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 22, 23 كتاب التمارين: 8, 9, (14 - 20)

الإشراء

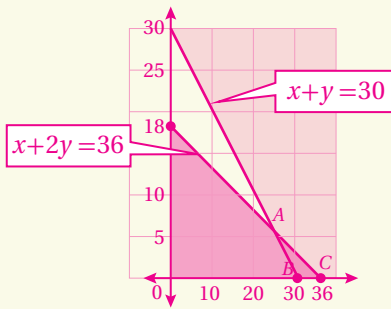
5

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« ثمن تذكرة دخول أحد المتاحف 10 دنانير للكبار، و5 دنانير للأطفال. إذا كان عدد الزائرين الأطفال في أحد الأيام x ، وعدد الكبار y ، وكان العدد الكلي لا يقل عن 30 زائراً، وإذا علمت أن حصيلة بيع التذاكر لذلك اليوم لم تتجاوز مبلغ 180 ديناراً، فأكتب متباينتين خطيتين بالمتغيرين x, y تعبّران عن الجملتين السابقتين. وأمثلة الحل بلونين مختلفين، ثم أحدّد المنطقة التي تحقق المتباينتين معاً.

$$x + y \geq 30; x + 2y \leq 36$$

المنطقة التي تتحقق فيه المتباينتان هي المثلث ABC . أي نقطة تقع داخل المثلث ABC أو على مستقيماته الحدودية وإحداثياتها عدداً صحيحاً موجبان تعدّ حلاً.



تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة 6 من خطوات تنفيذ المشروع.
- أذكر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكد أنّ عناصر المشروع كافة متوافرة يوم العرض.

أمثل كلاً من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي: (7-18) أنظر ملحق الإجابات.

7 $y \leq 3 - 2x$

8 $x + y < 11$

9 $x - 2y < 0$

10 $4y - 8 \geq 0$

11 $3x - y \leq 6$

12 $2x + 5y < -10$

13 $-4x + 6y > 24$

14 $y < 3x + 3$

15 $-2x \geq 10$

16 $x < 6$

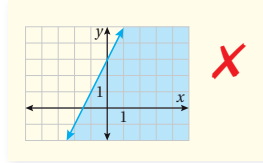
17 $y > -2$

18 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$



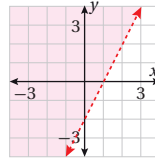
19 **حقائب:** يصنع جمال حقائب كبيرة وصغيرة للسيدات؛ لبيعها في معرض الحرف اليدوية. إذا كان يحتاج إلى 3 أيام لصنع الحقيبة الصغيرة، و5 أيام لصنع الحقيبة الكبيرة، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الحقائب التي يمكن له صنعها من كل نوع في 30 يوماً حداً أقصى قبل يوم افتتاح المعرض، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي. أنظر ملحق الإجابات.

20 **تسوق:** تريد سامية شراء العنب والتفاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمناً لـ 6 JD. إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب 1.5 JD، وثمان الكيلوغرام الواحد من التفاح 1 JD، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكيلوغرامات التي يمكن لسامية أن تشتريها من كل نوع، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي. أنظر ملحق الإجابات.



21 **أكتشف الخطأ:** مثلت رامي المتباينة $y < 2x + 3$ ، كما هو مبين في الشكل المجاور. أكتشف الخطأ الذي وقع فيه رامي، وأصحّحه. الخطأ رسم الخط الحدودي متصلاً، والصحيح: يجب أن يكون متقطعاً؛ لأن رمز المتباينة <

22 **مسألة مفتوحة:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تمثل النقطتان $(-1, 3)$ و $(1, 6)$ حلاً لها، في حين لا تمثل النقطة $(4, 0)$ حلاً. أنظر ملحق الإجابات.



23 **تبرير:** أكتب المتباينة الخطية المعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور، وأبرّر إجابتي. المستقيم الحدودي يمر بالنقطتين $(0, -2)$ و $(1, 0)$ ، فميله 2، ومعادلته $y = 2x - 2$ ، نعوض النقطة $(0, 0)$ بنج أن: $0 = -1$ ، لكن $0 > -1$ ، ولأن المستقيم الحدودي متقطع تكون المتباينة: $y > 2x - 2$

45

الختام

6

- أنتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:
- « أوضّح خطوات تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً. أنظر إجابات الطلبة.

« أمثل بيانياً المتباينة: $4x - 3y \leq 24$ أنظر تمثيل الطلبة.

« أي النقاط الآتية تحقق المتباينتين: $2x + y < 15$ ، $y \leq 2x + 1$ معاً؟

a. $A(0, 2)$

b. $B(5, 8)$

c. $C(8, -5)$

تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً Graphing Linear Inequalities in Two Variables

معمل
برمجية
جيو جبرا

يُمكنني استعمال برمجية جيو جبرا؛ لتمثيل متباينات خطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي.

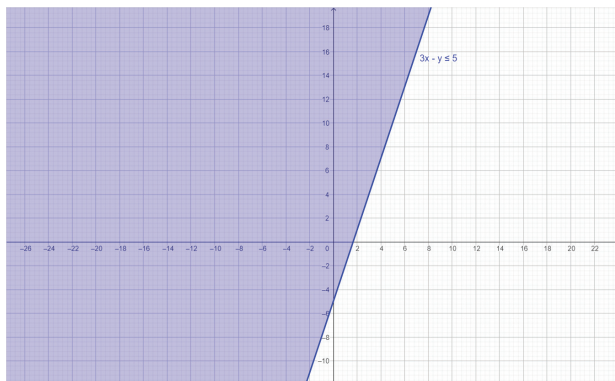
نشاط

أمثل كلاً من المتباينات الآتية بيانياً؛ باستعمال برمجية جيو جبرا:

1 $3x - y \leq 5$

أكتب المتباينة في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

3 x - y ≤ 5



2 $y + 2x > 4$

أكتب المتباينة في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

y + 2x > 4

46

توسعة

- أطلب إلى الطلبة تمثيل المتباينتين $x + y \leq 4$, $y > 2x - 1$ باستعمال برمجية جيو جبرا، ثم أسألهم عن ملاحظاتهم حول التمثيل البياني لهاتين المتباينتين.

نتائج الدرس

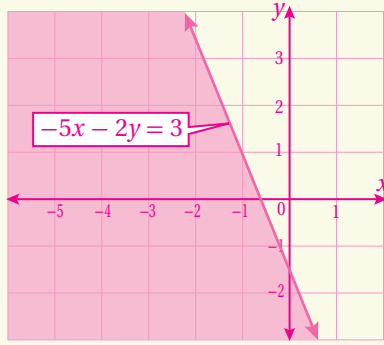


- تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي باستعمال برمجية جيو جبرا.

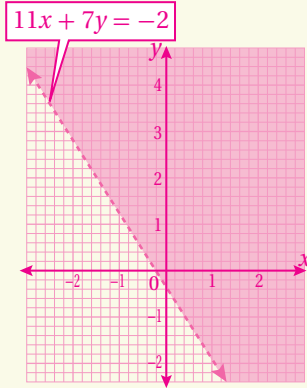
خطوات العمل:

- أرافق الطلبة إلى مختبر الحاسوب في المدرسة.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة فتح برمجية جيو جبرا من الموقع الآتي: <https://www.geogebra.org/classic>
- توفيراً للوقت، يمكنني تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجانية على الحواسيب قبل بدء الحصة.
- أطلب إلى الطلبة استكشاف أيقونات البرمجية، وعناصر القوائم المنسدلة منها.
- أسأل الطلبة عن أهم الأيقونات التي لاحظوها.
- أطلب إلى الطلبة اتباع الخطوات الواردة في الكتاب لتمثيل المتباينة في الفرع 1 من النشاط.
- أبين لهم كيف يمكنهم حفظ التمثيل البياني في ملف خاص بهم على الحاسوب بالنقر على أمر (print screen) في لوحة المفاتيح، ومن ثم لصق الصورة في المكان الذي يريدون حفظها فيه.
- أطلب إلى الطلبة اتباع الخطوات الواردة في الكتاب لتمثيل المتباينة في الفرع 2 من النشاط، بعد مسح المتباينة الأولى، وتغيير لون التظليل إلى لون آخر غير اللون الظاهر على الشاشة.
- أسألهم عن ملاحظاتهم حول التمثيل البياني للمتباينتين في الفرعين والفرق بينهما.
- أوجه الطلبة لحل الأسئلة في بند (أدرّب)، وأتابع أعمالهم.

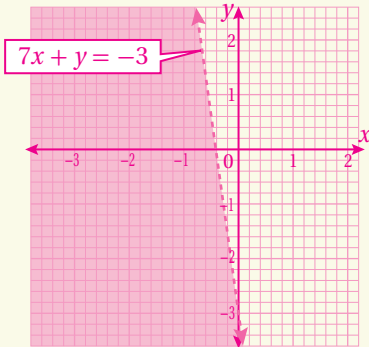
1)



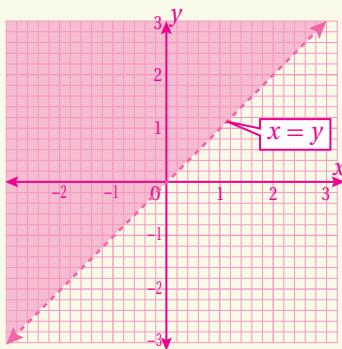
2)



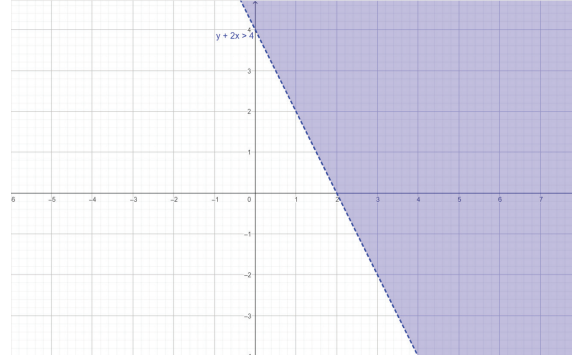
3)



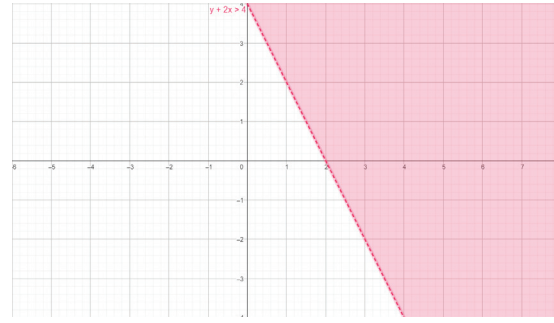
4)



الوحدة 1



يمكن تغيير اللون الأزرق الذي حدّدته برمجية جيو جيرا بالنقر على المُتباينة المراد تغيير لونها، ثمّ النقر على ، ثمّ النقر على ، ثمّ اختيار (color) من القائمة التي تظهر يمين الشاشة، ومنها اختيار لوناً آخر مثل اللون الزهريّ.



أَتَدَرِّبُ  (1-6) أنظر الهامش.

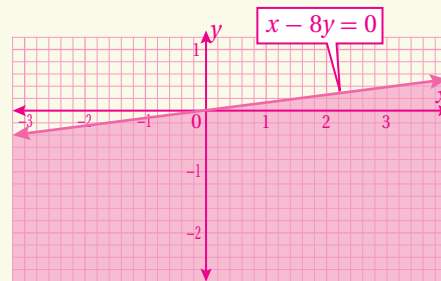
أمثلُ كلّاً من المُتباينات الآتية بياناً؛ باستعمال برمجية جيو جيرا:

- 1 $-5x - 2y \geq 3$
- 3 $7x + y < -3$
- 5 $x - 8y \geq 0$

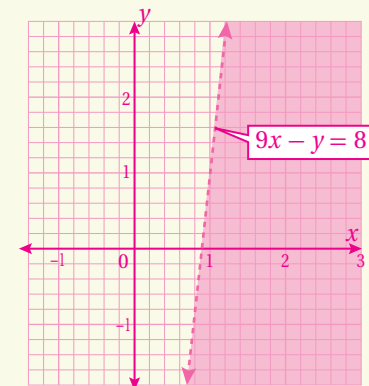
- 2 $11x + 7y > -2$
- 4 $x < y$
- 6 $9x - y > 8$

47

5)



6)



اختبار نهاية الوحدة

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة الصيغة المميزة:

- 6 $\{11, 12, 13, 14, \dots\} \quad A = \{x | x > 10, x \in W\}$
 7 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad B = \{x | x \in Z\}$
 8 $\{3, 6, 9, 12\} \quad C = \{x | x = 3k, k \in W, 1 \leq k < 5\}$
 9 $\{3, 2, 1\} \quad D = \{x | x \in W, 0 < x < 4\}$

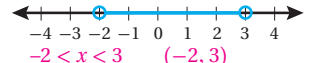
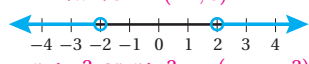
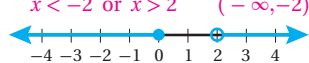
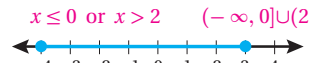
أعبر عن كل من المجموعات الآتية، باستعمال طريقة سرد العناصر وطريقة الصيغة المميزة: (10, 11) أنظر الهامش.

- 10 الأعداد الزوجية التي تزيد على 7 وتقل عن 20
 11 الأعداد الكلية التي تقل عن 4

أكتب متباينة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أمتثلها على خط الأعداد: (12-15) أنظر الهامش.

- 12 عدد على الأكثر -3 أو على الأقل 5
 13 عدد على الأقل 2 وعلى الأكثر 9
 14 عدد لا يزيد على 6 ولا يقل عن -4
 15 عدد أقل من 100 أو أكبر من 300

أكتب متباينة مركبة تعبر عن كل تمثيل مما يأتي، ثم أعبر عنها برمز الفترة:

- 16  $-2 < x < 3 \quad (-2, 3)$
 17  $x < -2 \text{ or } x > 2 \quad (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
 18  $x \leq 0 \text{ or } x > 2 \quad (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$
 19  $-4 \leq x \leq 3 \quad [-4, 3]$

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

- 1 حل المتباينة $-9x + 17 \geq -64$ ، هو:

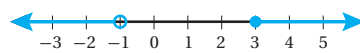
- a) $\{x | x \leq 9\}$ b) $\{x | x \geq 9\}$
 c) $\{x | x \leq -9\}$ d) $\{x | x \geq -9\}$

2 الفترة التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:



- a) $(4, \infty)$ b) $[4, \infty)$
 c) $(-\infty, 4)$ d) $(-\infty, 4]$

3 المتباينة المركبة التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:



- a) $-1 < x < 3$ b) $x \leq -1 \text{ or } x > 3$
 c) $x < -1 \text{ or } x \geq 3$ d) $x > -1 \text{ or } x \leq 3$

4 مجموعة حل المتباينة $-7 < x + 2 < 4$ ، هي:

- a) $(-5, 6)$ b) $(-9, 6)$
 c) $(-5, 2)$ d) $(-9, 2)$

5 مجموعة حل المعادلة $|x + 5| = 2$ ، هي:

- a) $\{-3, 3\}$ b) $\{-3, -7\}$
 c) $\{-2, 2\}$ d) $\{3, 7\}$

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-19) فردياً، وأتجول بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعاً في حل بعض المسائل على اللوح.
- أوزع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20-42)، وأتجول بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها؛ لمناقشتها على اللوح.

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

10) $H = \{8, 10, 12, 14, 16, 18\},$

$H = \{x | x = 2k, k \in W, 7 < x < 20\}$

OR $H = \{x | x = 2k, k \in W, 3 < k < 10\}$

11) $P = \{0, 1, 2, 3\}, P = \{x | x \in W, x < 4\}$

12) $x \leq -3 \text{ or } x \geq 5$



13) $2 \leq x \leq 9$



14) $-4 \leq x \leq 6$



15) $x < 100 \text{ or } x > 300$



اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبين لهم أهميتها، ثم أوجههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فردياً، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

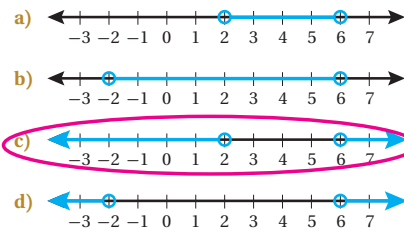
41 نقل: يمكن لشاحنة نقل 3500 kg من البضائع حداً أقصى. إذا كانت الشاحنة تنقل ثلثات كتلة الواحدة منها 125 kg، وغسالات تنقل ثلثات كتلة الواحدة منها 100 kg، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الثلاجات والغسالات التي يمكنها نقلها، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي. أنظر ملحق الإجابات.



42 كرة سلة: إذا كان المحيط المثالي لكرة السلة للسيدات 28.75 in، وكان مسموحاً أن يزيد على ذلك أو ينقص عنه بمقدار 0.25 in حداً أقصى، فأكتب متباينة قيمة مطلقة لإيجاد مدى محيط الكرة المسموح به، ثم أحلها.
 $|x - 28.75| \leq 0.25, 28.5 \leq x \leq 29$

تدريب على الاختبارات الدولية

43 التمثيل البياني الذي يمثل مجموعة حل المتباينة $|x - 4| > 2$ هو:



44 الزوج المرتب الذي لا يمثل حلاً للمتباينة $3x - 5y < 30$ هو:

- a) (1, -7) b) (-1, 7)
c) (0, 0) d) (-5, -5)

أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة:
 $2x + y > -3$

حل. (1, -3) 21 حل. (2, -2) 20

حل. (2, 0) 23 ليس حلاً. (-5, 4) 22

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد: (24-29) أنظر الهامش.

24 $-2 \leq x - 7 \leq 1$

25 $-2 < -2n + 1 < 7$

26 $-8 < \frac{2}{3}x - 4 < 10$

27 $3x + 2 < -10$ or $2x - 4 > -4$

28 $x - 1 \leq 5$ or $x + 3 \geq 10$

29 $4x - 3 > 11$ or $4x - 3 \leq -11$

أحل كلًا من المعادلات والمتباينات الآتية:

30 $3 - |5x + 3| > 3$ ∅

31 $7|x + 1| - 3 \leq 11$ [-3, 1]

32 $-4|8 - x| + 2 > -14$ (4, 12)

33 $|x + 5| = 6.5$ {1.5, -11.5}

34 $|7x + 3| + 2 = 33$ $\{-\frac{34}{7}, 4\}$

35 $|x - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2}$ {-2, 3}

أمثل كلًا من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

36 $y \leq -2x + 1$

37 $x < -4$

38 $y \geq x - 1$

39 $y > 5x - 5$

40 $4x - y < 2$ أنظر ملحق الإجابات. (36-40)

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

24) [5, 8]



25) $(-3, \frac{3}{2})$



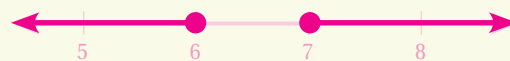
26) (-6, 21)



27) $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$



28) $(-\infty, 6] \cup [7, \infty)$



29) $(-\infty, -2] \cup (\frac{7}{2}, \infty)$



كتاب التمارين

الوحدة 1: المتباينات الخطية

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: أحل المتباينة: $6x - 5 \geq 2x + 11$ ، وأمثل الحل على خط الأعداد:

$$\begin{aligned} 6x - 5 &\geq 2x + 11 \\ 6x - 5 + 5 &\geq 2x + 11 + 5 \\ 6x - 2x &\geq 2x - 2x + 16 \\ \frac{4x}{4} &\geq \frac{16}{4} \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

إذن، الحل هو $x \geq 4$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:

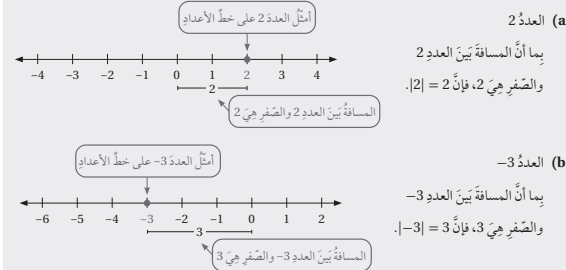


القيمة المطلقة (الدرس 3)

أجد قيمة كل من المقادير الآتية:

- 21 $|17|$ 17 22 $|-32| - 10$ 22 23 $4 + |12|$ 16
24 $3 + |-7|$ 10 25 $|-8| + |-22|$ 30 26 $|-9| - 2$ 7

مثال: أجد القيمة المطلقة لكل عدد مما يأتي:



الوحدة 1: المتباينات الخطية

أستعد لدراسة الوحدة

تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y (الدرس 4)

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y : (27-30) أنظر ملحق الإجابات.

- 27 $y = -1$ 28 $y - x = 8$ 29 $3x + 2y = 15$ 30 $x = 4$

مثال: أمثل المعادلة $3x - 2y = 6$ بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y :

الخطوة 1: أجد المقطع x والمقطع y .

لإيجاد المقطع x ، أعرض $y = 0$ ، ثم أحل المعادلة الناتجة لأجد قيمة x .

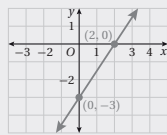
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ 3x - 2(0) &= 6 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

بمعنى $y = 0$ يقسم كلا الطرفين على 3 بالتبسيط

ولإيجاد المقطع y ، أعرض $x = 0$ ، ثم أحل المعادلة الناتجة

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ 3(0) - 2y &= 6 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{6}{-2} \\ y &= -3 \end{aligned}$$

بمعنى $x = 0$ يقسم كلا الطرفين على -2 بالتبسيط



إذن، المقطع x هو 2، والمقطع y هو -3.

الخطوة 2: أمثل نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بين النقطتين.

بما أن المقطع x هو 2، فإن المستقيم يقطع المحور x في النقطة (2, 0)، وبما أن المقطع y هو -3، فإن المستقيم يقطع المحور y في النقطة (0, -3). أمثل النقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بينهما.

10

الدرس 1

المجموعات والفترات Sets and Intervals

أعبر عن كل من المجموعات الآتية، باستعمال طريقة سرد العناصر، وطريقة الصفة المُميّزة:

- 1 مجموعة الأعداد الكليّة التي تقل عن 17 $A = \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ 2 مجموعة مُضاعفات العدد 10 التي تقل عن 12 $D = \{10\}$ 3 مجموعة حل المعادلة $0 = 28 + 7x$ $A = \{x \mid x < 17, x \in W\}$ 4 مجموعة الأعداد الكليّة التي تزيد على 200 $D = \{x \mid x = 10k, k \in W, 0 < x < 12\}$ 5 مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقل عن $-\frac{1}{2}$ $C = \{x \mid 7x + 28 = 0\}$ 6 مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $S = \{201, 202, 203, \dots\}$ 7 مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $N = \{x \mid x \in Z, x < 0\}$ 8 مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $M = \{x \mid x \in Z, x < -\frac{1}{2}\}$

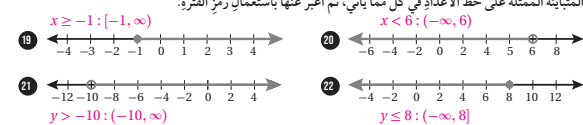
أكتب مجموعة حل كل متباينة مما يأتي باستعمال الصفة المُميّزة:

- 7 $6z - 15 > 4z + 11$ $\{z \mid z > 13\}$ 8 $3y + 6 < 2y - 8$ $\{y \mid y < -14\}$ 9 $\frac{x}{2} + 4 < 7$ $\{x \mid x < 6\}$ 10 $3(x - 2) \geq 15$ $\{x \mid x \geq 7\}$ 11 $-5 \leq 4x + 7$ $\{x \mid x \geq -3\}$ 12 $5x - 7 > 3x + 4$ $\{x \mid x > \frac{11}{2}\}$

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة سرد العناصر، ثم أحدى ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

- 13 $A = \{x \mid x \in Z, x < 5\}$ 14 $B = \{x \mid 5x - 1 = 0\}$ 15 $C = \{x \mid x < 7, x \in W\}$ 16 $D = \{x \mid x = k - 1, k \in W, k < 11\}$ 17 $E = \{x \mid x = 8k, k \in W, x > 20\}$ 18 $T = \{x \mid x = 2k, k \in Z, x > 10\}$ 19 $F = \{24, 32, 40, 48, \dots\}$ 20 $G = \{12, 14, 16, 18, \dots\}$

أكتب المتباينة الممثلة على خط الأعداد في كل مما يأتي، ثم أعبر عنها باستعمال رمز الفترة:



أكتب كل متباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خط الأعداد: (23-26) أنظر ملحق الإجابات.

- 23 $x < 15$ 24 $x > -5$ 25 $x \leq -10$ 26 $x \geq 30$

11

الدرس 2

حل المتباينات المركبة Solving Compound Inequalities

أصل المتباينة بتبسيطها على خط الأعداد في كل مما يأتي:

- 1 $x < -2$ or $x > 5$ 2 $-2 < x < 5$ 3 $x < -2$ or $x < 5$ 4 $x < -2$ and $x < 5$
-

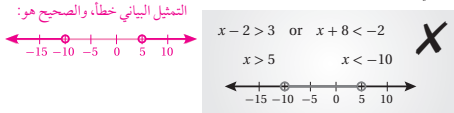
6 $-8 \leq 3x + 4 \leq 10$
 $-4 \leq x \leq 2$

- 5 عدد يقل عن 7 ويزيد على -5 $-5 < x < 7$ 6 مجموع 4 مع ثلاثة أمثال عدد لا يقل عن -8 ولا يزيد على 10 $0 < x \leq 2$ 7 نصف عدد أكبر من 0 وأقل من أو يساوي 1 $2 \leq y \leq 9$ 8 عدد على الأقل 2 وعلى الأكثر 9

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد: (9-16) أنظر ملحق الإجابات.

- 9 $3b - 1 < 7$ or $4b + 1 > 9$ 10 $4 + k > 3$ or $6k < -30$ 11 $7 - 3c \geq 1$ or $5c + 2 \geq 17$ 12 $6 - a < 1$ or $3a \leq 12$ 13 $7 \leq 3 - 2p < 11$ 14 $1.5 < w + 3 < 6.5$ 15 $-6 \leq 3x + 9 < 21$ 16 $-9 < -2s - 1 \leq -7$

17 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في حل المتباينة المركبة الآتية، وأصححها:



12

كتاب التمارين

الدرس 4

تمثيل المتباينات الخطية بمُتغيّرين بيانيًا

Graphing Linear Inequalities in Two Variables

أمثلُ كلاً من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

1 $y > x + 5$

2 $y \leq -\frac{1}{2}x + 1$

3 $y \geq -x - 5$

4 $y < 4$

5 $x > 3$

6 $x \leq -1$

7 $3y > 6 + 2x$

8 $y \geq -x + 1$

9 $x + 2y < 4$

الدرس 3

حلُّ مُعادلات القيمة المطلقة ومُتبايناتها

Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

أصلُ المتباينة بتمثيلها على خطِّ الأعداد في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $|x + 2| \geq 1$

2 $|x + 2| \leq 1$

3 $|x + 2| > 1$

أكتبُ مُتباينةً تمثِّل كلَّ جملةٍ ممَّا يأتي، ثمَّ أمثلُها على خطِّ الأعداد:

4 المسافة بين عددٍ و2 على الأكثر 13

5 المسافة بين عددٍ والصُّفر على الأقل 6

6 أصغفُ المُعادلات أدناه دونَّ حلِّها إلى واحدةٍ من الفئات الآتية:

ليس لها حلٌّ	لها حلٌّ واحدٌ	لها حلَّان
$ x - 2 + 6 = 0$ $ x - 6 - 5 = -9$	$ x - 1 + 4 = 4$ $ x + 5 - 8 = -8$	$ x + 3 - 1 = 0$ $ x + 8 + 2 = 7$
$ x - 2 + 6 = 0$ $ x - 1 + 4 = 4$	$ x + 3 - 1 = 0$ $ x - 6 - 5 = -9$	$ x + 8 + 2 = 7$ $ x + 5 - 8 = -8$

أحلُّ كلَّ من المُعادلات والمتباينات الآتية:

7 $|x - 8| = 5$ {3, 13}

8 $2|x + 3| = 8$ {1, -7}

9 $|5x - 8| + 14 = 12$ ليس لها حل

10 $|8 - (x - 1)| \leq 9$
 $\{x | 0 \leq x \leq 18\}$

11 $\left| \frac{2 - 3x}{5} \right| \geq 2$
 $\{x | x \leq -\frac{8}{3} \text{ or } x \geq 4\}$

12 $|x - 6| + 4 > 1$

كل الأعداد الحقيقية. R

13 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في حلِّ مُعادلة القيمة المطلقة الآتية، وأصحِّحهُ:

$|2x - 1| = -9$

$2x - 1 = -9$ or $2x - 1 = -(-9)$

$2x = -8$ $2x = 10$

$x = -4$ $x = 5$

الدرس 4

تمثيل المتباينات الخطية بمُتغيّرين بيانيًا

Graphing Linear Inequalities in Two Variables

أحدُ إذا كانَ الزوجُ المرتبُ يمثلُ حلًّا للمتباينة أم لا في كلِّ ممَّا يأتي:

10 $x + y < 7$, (2, 11) ليس حلًّا.

11 $x < 3y$, (-9, 2) حل.

12 $-4x - 8y \leq 15$, (-6, 3) حل.

13 $-x - 6y > 12$, (-1, 3) ليس حلًّا.

14 $5x + 7y \leq 10$, (-1, 2) حل.

15 $8x + y > -6$, (0, -8) ليس حلًّا.

أصلُ المتباينة بتمثيلها البياني في كلِّ ممَّا يأتي:

16 $2y + x \leq 6$

17 $\frac{1}{2}x - y > 4$

18 $y > 3 + \frac{1}{2}x$

19 $4y + 2x > 16$

20 بيِّع متجرٌ على شبكة الإنترنت كاميرات رقمية وهواتف محمولة. إذا كانَ المتجرُ يقدِّمُ خصمًا مقداره JD 5 عن كلِّ كاميرا يبيعه، و JD 10 عن كلِّ هاتف يبيعه، وكانَ يرغبُ في تقديمِ خصمٍ مقداره JD 30 على الأكثرِ على مبيعاتِهِ من الكاميرات والهواتف، فإذا باعَ x من الكاميرات، و y من الهواتف، أكتبُ مُتباينةً خطيةً بمُتغيّرين تمثِّل عدداً الكاميرات والهواتف التي يجبُ عليه بيعُها لتحقيقِ هدفِهِ، ثمَّ أمثلُها في المستوى الإحداثي المجاور.

$5x + 10y \leq 30$

$x + 2y \leq 6$

14) $[-4, -\frac{4}{3}]$



15) $\{x \mid x < -1 \text{ or } x > 2\}$

$$=(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$



16) $\emptyset$

17) $(-\frac{3}{5}, \frac{17}{5})$



18) $(-\infty, -\frac{16}{5}] \cup [2, \infty)$



19) $|x| > 7$

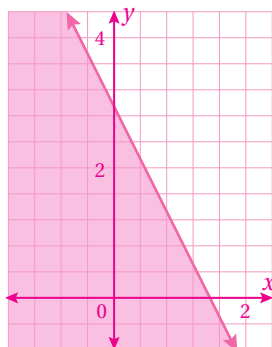


20) $|x - 3| \leq 4$



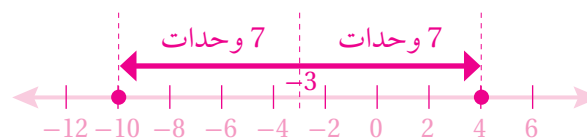
إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

7)

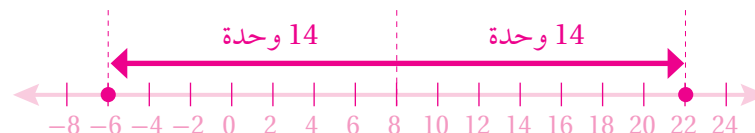


إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

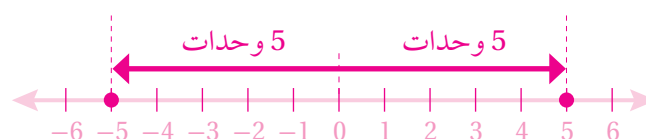
4) $\{-10, 4\}$



5) $\{-6, 22\}$



6) $\{-5, 5\}$



7) $\{-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\}$



8) $\{-7, 11\}$



10) $[-11, -5]$



11) $(-2, 7)$



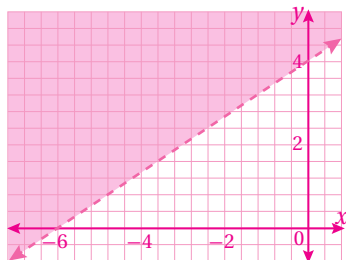
12) $(-\infty, -3) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$



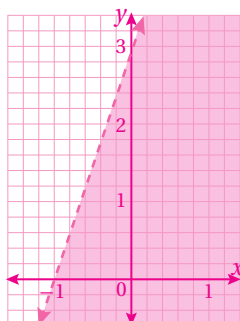
13) $\mathbb{R}, (-\infty, \infty)$



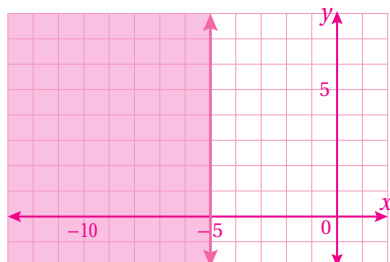
13)



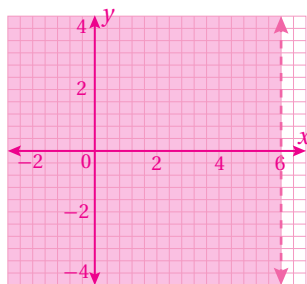
14)



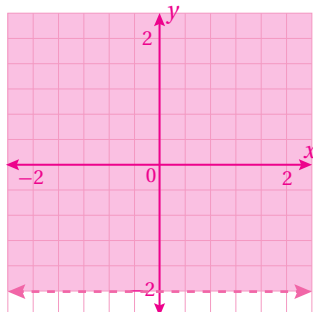
15)



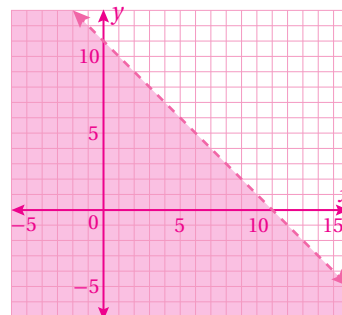
16)



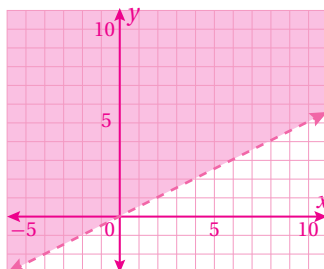
17)



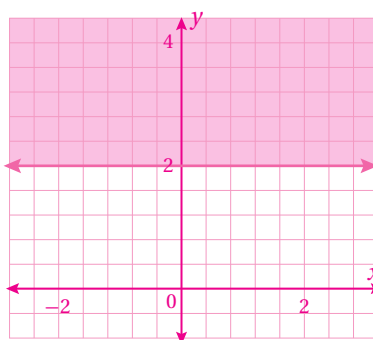
8)



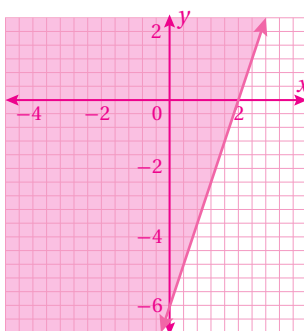
9)



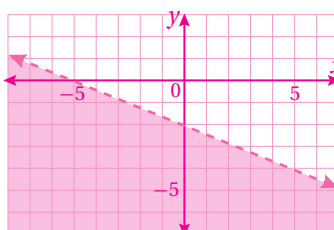
10)



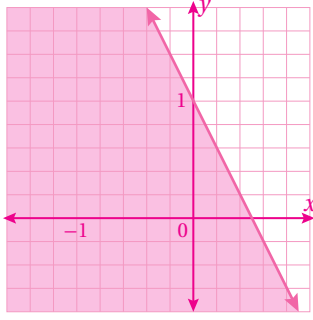
11)



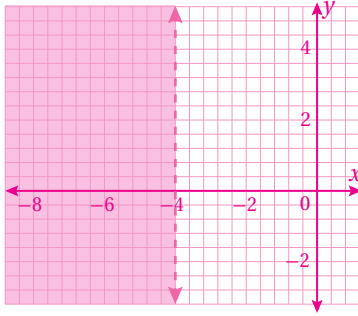
12)



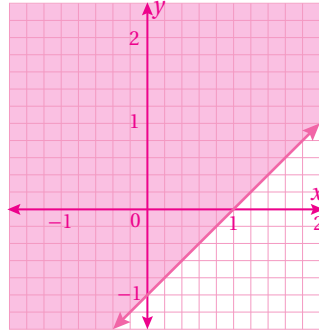
36)



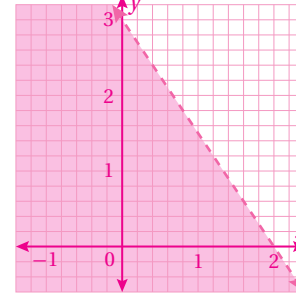
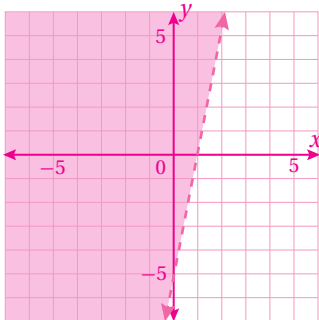
37)



38)

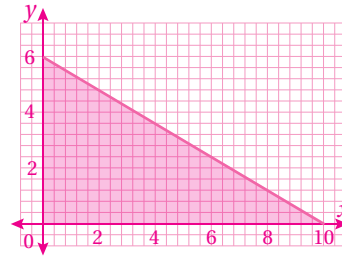


39)

(19) عدد الحقائق الصغيرة x ، عدد الحقائق الكبيرة y

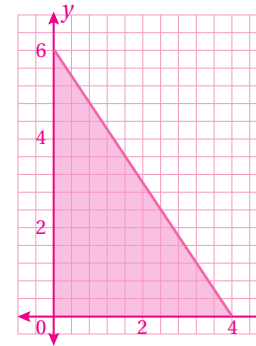
$$3x + 5y \leq 30$$

أي نقطة تقع داخل المنطقة المظللة أو على المستقيم الحدودي وإحداثياتها عدداً صحيحان موجبان تعدُّ حلاً.

(20) العنب x kg، التفاح y kg

$$1.5x + y \leq 6$$

أي نقطة تقع داخل المنطقة المظللة أو على المستقيم الحدودي وإحداثياتها عدداً صحيحان موجبان تعدُّ حلاً.

(22) إجابة ممكنة $y - 2x \geq 0$ ، توجد حلول أخرى كثيرة. تُعيّن

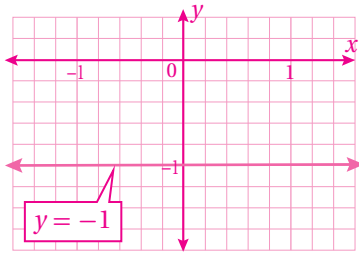
النقاط الثلاثة في المستوى الإحداثي، ثم يُرسم أي مستقيم مائل تقع النقطتان $(-1, 3)$ ، $(1, 6)$ في إحدى جهتيه وتقع النقطة $(4, 0)$ في الجهة المقابلة، وتكتب معادلته ويُعوض الزوج المرتب $(1, 6)$ فيها، ثم تُغيّر المساواة إلى $>$ أو $<$ تبعاً لنواتج التعويض للحصول على المتباينة المطلوبة.

20) $-4 > 1 \quad \times$

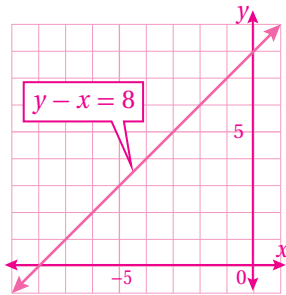


مجموعة الحل هي: $\emptyset$

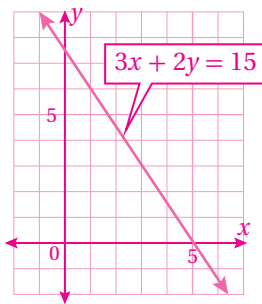
27)



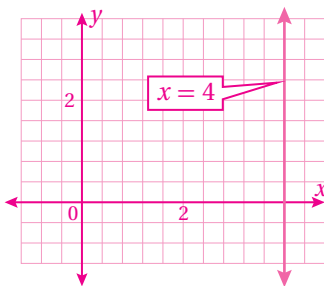
28)



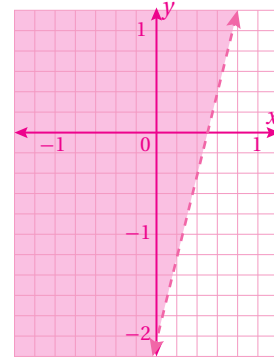
29)



30)

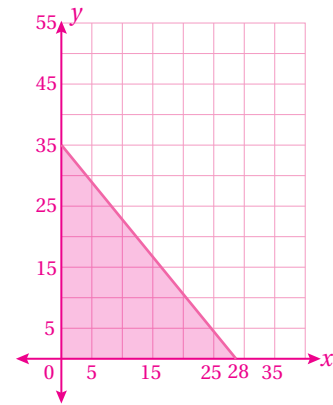


40)



(41) عدد الثلاثات x ، عدد الغسلات y .

$$5x + 4y \leq 140$$



إجابات أسئلة كتاب التمارين، (أستعد لدراسة الوحدة):

15) $y < 6$



16) $b \leq -4$



17) $x \geq -3$



18) $d > 12$



19) $x < 5$



12) $a > 5$ or $a \leq 4$



13) $-4 < p \leq -2$



14) $-1.5 < w < 3.5$



15) $-5 \leq x < 4$



16) $3 \leq s < 4$



إجابات أسئلة كتاب التمارين، (الدرس 1):

23) $(-\infty, 15)$



24) $(-5, \infty)$



25) $(-\infty, -10]$



26) $[30, \infty)$



إجابات أسئلة كتاب التمارين، (الدرس 2):

9) $b < \frac{8}{3}$ or $b > 2$

$$= (-\infty, 2.67) \cup (2, \infty) = R$$

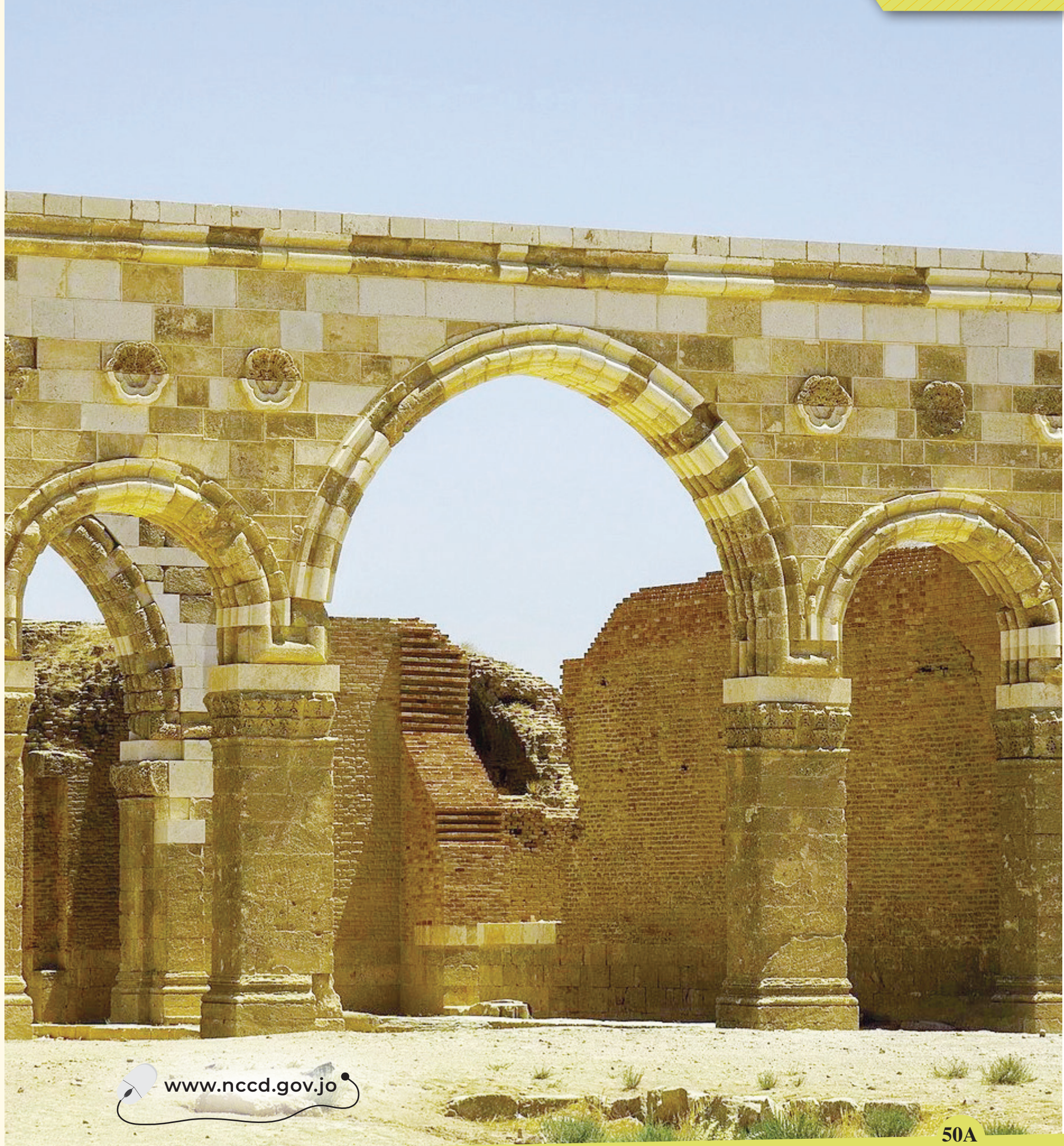


10) $k > -1$ or $k < -5$



11) $c \leq 2$ or $c \geq 3$





مُخطَّط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: الاقتران	- تعرف العلاقة. - تعرف الاقتران. - تحديد إذا كانت العلاقة تمثل اقتراناً أم لا. - تحديد مجال العلاقة / الاقتران ومداه. - تمييز الاقتران المنفصل والاقتران المتصل. - تحديد إذا كانت العلاقة الممثلة بيانياً تمثل اقتراناً أم لا باستعمال اختبار الخط الرأسي. - إيجاد قيم لاقتران خطية أو غير خطية عند قيم معطاة.	- العلاقة. - الاقتران. - المجال. - المدى. - الاقتران المنفصل. - الاقتران المتصل. - اختبار الخط الرأسي. - الاقتران الخطي. - الاقتران غير الخطي.	- ورقة المصادر 1 - ورقة المصادر 2 - أفلام لوح ملوثة. - لوح بياني.	5
الدرس 2: تفسير التمثيلات البيانية	- التحويل بين وحدات القياس باستعمال منحنيات التحويل. - قراءة مقياس الرسم والمفتاح بدقة في التمثيلات البيانية لمنحنى الموقع - الزمن. - تفسير حركة الأجسام باستعمال منحنى الموقع - الزمن. - المقارنة بين جسمين تحركاً معاً باستعمال منحنى الموقع - الزمن.	- منحنيات التحويل. - منحنى الموقع - الزمن	- ورقة المصادر 3 - ورقة المصادر 4 - أفلام لوح ملوثة. - لوح بياني.	3
الدرس 3: الاقتران التربيعي	- تعرف الاقتران التربيعي. - تعرف الصورة القياسية للاقتران التربيعي: $f(x) = ax^2 + bx + c$ - تعرف الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية. - تحديد خصائص الشكل العام الذي يتخذه القطع المكافئ. - إيجاد معادلة محور التماثل وإحداثيي رأس منحنى اقتران تربيعي. - إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتحة لمنحنى اقتران تربيعي عُلِّمت قاعدته. - إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتحة لمنحنى اقتران تربيعي ممثلاً بيانياً في المستوى الإحداثي. - تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً.	- الاقتران التربيعي. - الصورة القياسية. - الاقتران الرئيس. - القطع المكافئ. - محور التماثل. - الرأس. - نقطة القيمة الصغرى. - نقطة القيمة العظمى.	- ورقة المصادر 5 - أفلام لوح ملوثة. - لوح بياني.	5
معمل برمجة جيو جبرا:	استكشاف أثر التحويلات الهندسية على منحنى الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية باستعمال برمجة جيو جبرا.		- أجهزة حاسوب أو هواتف محمولة. - برمجة جيو جبرا.	1
الدرس 4: التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي	- وصف كيفية ارتباط منحنى الاقتران التربيعي من الصورة: $f(x) = x^2$ بمنحنى الاقتران الرئيس $g(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ - كتابة قاعدة الاقتران التربيعي من الصورة: $g(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ الناتج عن تحويلات هندسية أُجريت على منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ - إيجاد إحداثيي رأس القطع المكافئ، ومعادلة محور تماثله، والقيمة العظمى أو الصغرى له، باستعمال صيغة الرأس: $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$	- التحويل الهندسي. - الانسحاب. - الانسحاب الرأسي. - الانسحاب الأفقي. - التمدد. - الانعكاس. - صيغة الرأس.	- ورقة المصادر 6 - أفلام لوح ملوثة. - لوح بياني.	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				
اختبار نهاية الوحدة				
المجموع:				
20 حصة				

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرف الطلبة في هذه الوحدة مفهومي العلاقة والاقتران، ويميزون بينهما، ويحددون المجال والمدى لهما من خلال تمثيلات ونماذج متعددة، وسيحلل الطلبة التمثيلات البيانية للعلاقات ويفسرونها، وسيتعلمون قراءتها وإعطاء وصف لحركة الأجسام بطريقة سهلة في فترات زمنية محددة باستعمال منحنى الموقع - الزمن.

إضافة إلى ما سبق، سيتعرف الطلبة عائلة الاقترانات التربيعية ويمثلونها بيانياً في المستوى الإحداثي، عن طريق دراسة خصائصها، واستخلاص أثر التحويلات الهندسية في الاقتران التربيعي الرئيس.

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعدُّ الاقتران التربيعي أحد أكثر الاقترانات شهرةً واستخداماً في الرياضيات؛ ولذلك خُصِّصَتْ هذه الوحدة لتقديم خصائص هذا الاقتران الجبرية والبيانية وبعض استعمالاته الحياتية، مثل تصميم الجسور والمباني، كما يظهر في قصر المُسْتَى التاريخي.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- تحديد ما إذا كانت العلاقة اقتراناً أم لا.
- تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات.
- تعرف الاقتران التربيعي وخصائصه، وتمثيله بيانياً في المستوى الإحداثي.
- تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة من تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تمثيل الاقترانات الخطية بيانياً.
- ✓ حل المعادلات الخطية بمتغير واحد.
- ✓ إجراء تحويلات هندسية لأشكال ثنائية البعد في المستوى الإحداثي.
- ✓ نمذجة ظواهر ومواقف حياتية هندسياً على مفهوم الاقتران الخطي.

50

التربط الرأسي بين الصفوف

الصف العاشر

- تعرف الاقترانات كثيرات الحدود وخصائصها، وتمثيلها بيانياً.
- إجراء العمليات الأربع على الاقترانات كثيرات الحدود، وتركيبها.
- تحديد مجال الاقترانات كثيرات الحدود ومداها.
- تعرف الاقتران العكسي.
- إيجاد الاقتران العكسي لاقتران معطى، وإيجاد مجاله ومداها.
- اكتشاف قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية.

الصف التاسع

- تعرف العلاقة، وتحديد إذا كانت تمثل اقتراناً أم لا.
- تحديد مجال العلاقة ومداها.
- تحليل التمثيلات البيانية للعلاقات وتفسيرها ضمن سياقات متنوعة.
- تعرف الاقتران التربيعي وخصائصه.
- تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً في المستوى الإحداثي.
- استكشاف أثر التحويلات الهندسية على منحنى الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية باستعمال برمجة جيو جبرا.
- استخلاص أثر التحويلات الهندسية على منحنى الاقتران التربيعي الرئيس.

الصف الثامن

- كتابة متباينة بمتغير واحد تمثل جملة رياضية.
- كتابة متباينة أو فترة ممثلة على خط الأعداد.
- إيجاد قيمة مقدار جبري عند قيمة معطاة للمتغير.
- التحقق إذا كانت قيمة معينة تمثل أحد حلول المتباينة بمتغير واحد.
- تمثيل المتباينة بمتغير واحد على خط الأعداد.
- إيجاد ميل المستقيم المارّ بنقطتين.
- استعمال ميل المستقيم لتفسير معنى معدل التغير في المسائل الحياتية.
- تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي.
- إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير التمدد.

القطع المكافئ في حياتنا

مشروع الوحدة

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى نمذجة الطلبة القطع المكافئ الذي يُمكن أن يظهر في العديد من المشاهد والأشكال الحياتية باقتران تربيعي، عن طريق توظيف المهارات المتعلّمة في التقاط الصور أو البحث عنها وجمعها وتوثيق مصادرها، ثم توظيف برمجية جيو جبرا لإيجاد قاعدة الاقتران التربيعي الذي يُمثّل نموذجاً جبرياً للقطع المكافئ الذي رُصد في الصور التي يُمكن التحكم بها في هذه البرمجية.

كما يهدف مشروع الوحدة أيضاً إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أَعَرَفَ الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أَوْزَعَ الطلبة إلى مجموعات، وأؤكد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أَوْضَحَ للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولاً بأول، وتعزيزها بالصور والنشرات واللوحات وغيرها.
- أذكَرَ الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة، خصوصاً الدرسين الثالث والرابع؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أَبَيَّنَ للطلبة سلفاً معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أَيْبَنَ للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحداً منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض البيانات التي جمعتها مع أفراد مجموعته (تتمثل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلب عليها؛ تعزيزاً لمهاراتهم في حل المشكلات.

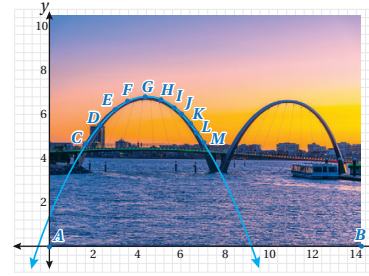
فكرة المشروع: البحث عن الاقتران التربيعي في نماذج حياتية.

المواد والأدوات: شبكة الإنترنت، برمجية جيو جبرا.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحثُ مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات على شكل قطع مكافئ، مثل: الجسور، ونوافير المياه، واجهات بعض المباني، أو ألتقطُ صورةً لذلك، ثم أحفظُها في ملف على جهاز الحاسوب.

2 أستعملُ برمجية جيو جبرا لإيجاد قاعدة الاقتران التربيعي، الذي يمثّل القطع المكافئ الظاهر في الصورة، باتباع الخطوات الآتية:



- أنقرُ على أيقونة **Image** من شريط الأدوات، ثم أختارُ الصورة التي حَفَظْتُها.
- أعدلُ موقع الصورة، وأختارُ مقياساً مناسباً لها بِتَحريكِ النقطتين A و B، اللّتين تظهران عليها.
- أأخذُ بعضَ النقاط على القطع المكافئ الظاهر في الصورة، باستعمال أيقونة **A** من شريط الأدوات.
- أكتبُ الصيغة FitPoly ({C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M}, n) في شريط الإدخال ليظهر مُنحني فوق الصورة، ومُعادلة في شريط الإدخال.
- أستعملُ المُنزلة التي تظهر في الصورة المجاورة وأغيّرُ قيمة n لضبط المُنحني الظاهر، بحيث ينطبق تماماً على المُنحني الظاهر في الصورة، وتظهر قاعدة الاقتران التربيعي المُمثّل للقطع المكافئ انطباقاً دقيقاً في شريط الإدخال.
- أجدُ مُعادلة محور التماثل، وإحداثيّ الرأس ومجال الاقتران التربيعي ومداه واتجاه فتحته، وقيمتَه العظمى أو الصغرى.
- أعدلُ موقع الصورة بِتَحريكها إلى اليمين وإلى اليسار وإلى الأعلى وإلى الأسفل، ثم أعيِدُ الخطوات السابقة لتحديد قاعدة الاقتران في كل مرّة، وأصفُ كيف يرتبط مُنحني كل اقتران منها بِمُنحني الاقتران الأصلي.

عرض النتائج:

أعدُ عرضاً تقديمياً أَيْبَنُ فيه:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحةً بالصور (أستعملُ خاصيّة طباعة الشاشة).
- معلومة عن الصورة التي اخترتها.

51

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	التقاط عدد كافٍ من الصور (لا يقل عن 3)، وتوثيق مصادرها، ويظهر في الصور شكل القطع المكافئ بوضوح تام.			
2	تعيين النقاط على منحنى القطع المكافئ بدقة، والتحكم بموضع الصور في جيو جبرا.			
3	تحديد قاعدة الاقتران التربيعي الممثّل لمنحنى القطع المكافئ، وتفسير دلالة n في الصيغة التي تم إدخالها في جيو جبرا، والتحكم بها من خلال منزلة مؤشرها.			
4	التعاون والعمل بروح الفريق.			
5	إعداد المشروع في الوقت المُحدّد.			
6	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارّة التواصل).			
7	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

الاقتدرات Functions

- تعرّف العلاقة، وتحديد ما إذا كانت العلاقة اقتراناً أم لا.
- تحديد مجال الاقتران ومداه.

فكرة الدرس



علاقة، مجال، مدى، الاقتران، اقتران متّصل، اقتران متّصل، اختبار الخطّ الرأسي، الاقتران الخطّي، الاقتران غير الخطّي.

المصطلحات



مسألة اليوم



يمثل الاقتران $d(t) = 300000t$ المسافة d بالكيلومتر، التي يقطعها الضوء بعد t ثانية تقريباً:

(1) أجد المسافة التي يقطعها الضوء بعد 15 s

(2) أجد عدد الثواني اللازمة ليقطع الضوء 12 مليون كيلومتر.



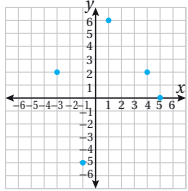
العلاقة والاقتران

تمثل أي مجموعة من الأزواج المرتبة **علاقة** (relation)، حيث الإحداثي x للأزواج المرتبة هو المُدخَلات، والإحداثي y هو المُخرجات، ويمكن التعبير عن العلاقة بطرائق مختلفة، منها: الأزواج المرتبة، والتمثيل البياني، وجدول المُدخَلات والمُخرجات، والمُخطط السهمي. فمثلاً، تمثل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية علاقة:

$\{(1, 6), (-3, 2), (5, 0), (-1, -5), (4, 2)\}$

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بطرائق مختلفة، كما يأتي:

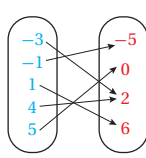
تمثيل بياني



جدول مُدخَلات ومُخرجات

x	y
1	6
-3	2
5	0
-1	-5
4	2

مُخطط سهمي



نتائج الدرس



- تعرّف العلاقة.
- تعرّف الاقتران.
- تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل اقتراناً أم لا.
- تحديد مجال العلاقة/ الاقتران ومداه.
- تمييز الاقتران المنفصل والاقتران المتصل.
- تحديد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بيانياً تمثل اقتراناً أم لا باستعمال اختبار الخط الرأسي.
- إيجاد قيم لاقترانات خطية أو غير خطية عند قيم معطاة.

نتائج التعلّم القبلي:

- استعمال ترتيب العمليات لإجراء عمليات حسابية بسيطة تحتوي قوى وجذوراً.
- التعبير عن الاقتران الخطي بطرق مختلفة، مثل: المخطط السهمي، وجدول القيم، وآلة الاقتران، والمعادلة الجبرية.
- تمثيل الاقتران الخطي بيانياً في المستوى الإحداثي.
- إيجاد قيمة مقدار جبري عند قيمة معطاة.
- حل المعادلة الخطية بمتغير واحد.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفقد

التعليمي:

- أوّجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

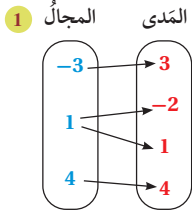
- أفسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأزوّد كل مجموعة بورقة المصادر 1: المدخلات والمخرجات.
- أطلب إلى كل مجموعة مناقشة الأسئلة في ورقة المصادر والإجابة عنها.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أطلب إلى كل مجموعة اختيار أحد أفرادها والتعبير بلغته الخاصة عمّا توصلت إليه مجموعته/مجموعتها.
- أسأل الطلبة كافة عن رأيهم في الإجابة التي استمعوا إليها، وأختار بعضهم لإبداء رأيه.
- أتقبّل إجابات الطلبة جميعها، وأقدّم التغذية الراجعة المناسبة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - « ماذا تعرفون عن الضوء؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « ما مصدر الضوء الرئيس على كوكب الأرض؟ الشمس.
 - « ما تعريف السرعة؟ المسافة التي يقطعها الجسم في وحدة زمنية.
 - « اعتماداً على الاقتران المعطى، ما سرعة الضوء؟ 300000 km/s
 - « ما المسافة التي يقطعها الضوء بعد 15 s ؟
 - « بعد كم ثانية يقطع الضوء 12 مليون كيلومتر؟
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟
 - « من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
 - « أعزّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألا أقول للطالب/ لل طالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له/ لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره/ أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره/ غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه/ أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأول/ الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرّة أخرى، وأعزّزه/ أعزّزها كما عزّزت من أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

تُسمَّى مجموعة مدخلات العلاقة **المجال** (domain)، أما مجموعة مخرجات العلاقة فتُسمَّى **المدى** (range)، وتُسمَّى العلاقة التي تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط من المدى **اقتراناً** (function).

مثال 1

أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداهما، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تمثّل اقتراناً أم لا:



المجال: $\{-3, 1, 4\}$ المدى: $\{3, -2, 1, 4\}$

ألاحظ ارتباط العنصر 1 في المجال بالعنصرين -2 و 1 في المدى. إذن، لا تمثّل هذه العلاقة اقتراناً.

2

x	5	3	2	0	-4	-6
y	1	3	1	3	-2	2

المجال: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ المدى: $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى. إذن، تمثّل هذه العلاقة اقتراناً.

3 $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجال: $\{0, 2, 3, 5\}$ المدى: $\{1, 4, 7\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى. إذن، تمثّل هذه العلاقة اقتراناً.

4 $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجال: $\{-4, 6, 0\}$ المدى: $\{2, -1, 0\}$

ألاحظ ارتباط العنصر -4 في المجال بالعنصرين 2 و 0 في المدى. إذن، لا تمثّل هذه العلاقة اقتراناً.

أتعلّم

يمكن أن يرتبط أكثر من عنصر في مجال الاقتران بعنصر واحد في مداه.

أتذكّر

عند كتابة المجموعة بطريقة سرد العناصر، أكتب العنصر المكرّر مرّة واحدة. علماً أنّ ترتيب العناصر ليس مهمّاً.

مثال 1

- أوضح للطلبة أن العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين تُسمّى الأولى مجال العلاقة وتُسمى الثانية مدى العلاقة، وأن هذا الارتباط يُمكن التعبير عنه بعدة طرق، منها: كتابة مجموعة من الأزواج المرتبة:

$\{(1, 6), (-3, 2), (5, 0), (-1, -5), (4, 2)\}$

- أوضح للطلبة الطرق الأخرى لتمثيل العلاقة أعلاه بكتابتها على اللوح، ثم أسألهم:

« حسب رأيكم / رأيكن، أي هذه الأشكال تفضّلون / تفضّلن؟ **ستختلف إجابات الطلبة.** »

- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، ثم أوكد مفهوم العلاقة وأخبرهم أن جميع الأشكال السابقة يُمكن بها تمثيل العلاقة دون تفضيل طريقة على أخرى، وأبين لهم أن لكل علاقة مدخلات ومخرجات، وإذا كانت العلاقة معروضة على شكل أزواج مرتبة (x, y) ، فإن مدخلات العلاقة هي الإحداثي x وتسمى مجال العلاقة، وأن مخرجات العلاقة هي الإحداثي y وتسمى مدى العلاقة.

- أوضح للطلبة الحالة التي تُعدّ فيها العلاقة اقتراناً، وأؤكد ضرورة ارتباط كل عنصر من مجموعة المجال بعنصر واحد فقط من مجموعة المدى.

- أناقش مع الطلبة الفرعين 1 و 2 من المثال 1 لتأكيد آلية تحديد مجال العلاقة ومداهما والحالة التي تسمى بها العلاقة اقتراناً.

- أختار طالبين / طالبتين لمناقشة الفرعين 3 و 4 من المثال 1 على اللوح أمام بقية طلبة الصف، وأقدّم التغذية الراجعة اللازمة لحلّهما.

- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام الملوّنة عند كتابة المجال والمدى وتمثيل العلاقات؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

إرشادات:

- ألقت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلّم) الوارد في هامش الفرع 3 من المثال 1، وأناقشه معهم؛ لما له من أهمية في توضيح إمكانية ارتباط أكثر من عنصر في مجال الاقتران بعنصر واحد في مداه.
- ألقت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتذكّر) الوارد في هامش الفرع 4 من المثال 1؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بخصائص كتابة المجموعة.
- يميل الطلبة عادةً إلى طريقة المخطط السهمي لتمثيل العلاقة، وهذا ربما يكون مرتبطاً بنمط التعلّم البصري؛ لأنّ الأسهم تسهّل تحديد ما إذا كان عنصر في المجال قد ارتبط بعنصر واحد أو أكثر في المدى.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند عدّ العلاقة اقتراناً، إذا كان أكثر من عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد في المدى، فيقررون أنها ليست اقتراناً؛ لذا أوكد وبشكل مستمر ما ورد في صندوق (أتعلم) السابق، وأؤكد أن العلاقة لا تكون اقتراناً إذا كان عنصر واحد في المجال يرتبط بأكثر من عنصر في المدى وليس العكس.

مثال إضافي:

1 أحدد مجال العلاقة

$\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
ومداها، ثم أحدد ما إذا كانت تمثل اقتراناً أم لا.

المجال: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، والمدى: $\{0, 1, 4\}$ ،
ولأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر وحيد في المدى؛
فالعلاقة تمثل اقتراناً.

2 أمثل العلاقة المعطاة بطريقة مختلفة. أنظر إجابات الطلبة.

تعزيز اللغة ودعمها:

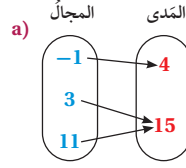
أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

أتحقّق من فهمي أنظر الهامش.

أحدّد مجال كلّ علاقة ممّا يأتي ومداها، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تمثل اقتراناً أم لا:



b)

x	5	2	-7	2	5
y	4	8	9	12	14

c) $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$ d) $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

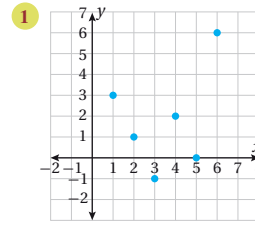
الاقتران المتصل والاقتران المنفصل

يُسمّى الاقتران الذي يُمثّل في المستوى الإحداثي بنقاط غير مُتصلة **اقتراناً منفصلاً** (discrete function)، أما الاقتران الذي يُمثّل بخطّ أو منحنيّ دون انقطاع فيسمّى **اقتراناً متصلاً** (continuous function).

يمكن تحديد مجال الاقترانات المتصلة والمتصلة ومداها بتمثيلها بيانياً، كما في المثال الآتي:

مثال 2

أحدّد ما إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي مُتصلاً أم مُنفصلاً، ثمّ أحدّد مجاله ومداها:



الاقتران المُمثّل في الشكل المجاور مُنفصل؛ لأنّ تمثيله في المستوى الإحداثي على شكل نقاط غير مُتصلة.

لتحديد مجال الاقتران ومداها، أكتب الأزواج المُرتّبة وأحدّد منها المجال والمدى.

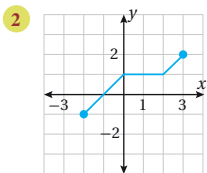
الأزواج المُرتّبة: $\{(1, 3), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, 0), (6, 6)\}$
المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ المدى: $\{3, 1, -1, 2, 0, 6\}$

أنذّر

تمثّل قيم x المجال، في حين تمثّل قيم y المدى.

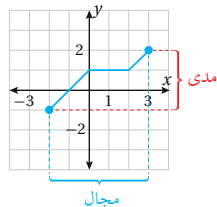
إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 1):

اقتران / ليس اقتراناً	المدى	المجال
اقتران	$\{4, 15\}$	a) $\{-1, 3, 11\}$
ليس اقتراناً، 5 من المجال ارتبط مع 4 و 14 من المدى. يوجد تبرير آخر.	$\{4, 8, 9, 12, 14\}$	b) $\{-7, 2, 5\}$
اقتران	$\{2, 5, 6\}$	c) $\{-2, 0, 4, 5\}$
ليس اقتراناً، 6 من المجال ارتبط مع 4 و 5 من المدى.	$\{3, 4, 5, 8\}$	d) $\{4, 5, 6\}$



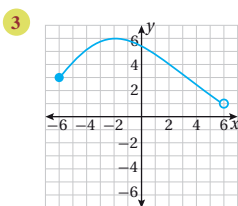
الاقتران المُمثل في الشكل المُجاور مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثي على شكل قطع مستقيمة دون انقطاع.

أستعمل التمثيل البياني لتحديد قيم x وقيم y ، التي تمثل المجال والمُدَى كالآتي:

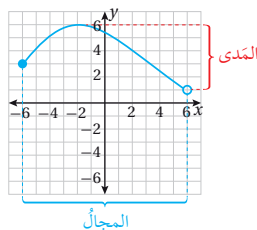


المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$ أو الفترة $[-2, 3]$.

المُدَى: $\{y | -1 \leq y \leq 2\}$ أو الفترة $[-1, 2]$.



الاقتران المُمثل في الشكل المُجاور مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثي على شكل منحنى ليس فيه انقطاع. أستعمل التمثيل البياني لتحديد قيم x وقيم y ، التي تمثل المجال والمُدَى كالآتي:



المجال: $\{x | -6 \leq x < 6\}$ أو الفترة $[-6, 6)$.

المُدَى: $\{y | 1 < y \leq 6\}$ أو الفترة $(1, 6]$.

أتعلّم

- يُكتَبُ مجالُ الاقتران المُنفصلِ ومُداهُ على شكل مجموعة من العناصر المُنفصلة.
- يُكتَبُ مجالُ الاقتران المُتَّصِلِ ومُداهُ على شكل فترات أو مجموعات بصيغة الصيغة المُميّزة للمجموعة التي فيها عدد لا نهائي من العناصر.

أتعلّم

تعني الدائرة المفتوحة في التمثيل البياني أنَّ الإحداثي x للزوج المُرتَّب لا ينتمي إلى مجال الاقتران، والإحداثي y لا ينتمي إلى مُدَى الاقتران بسبب قيمة x ، ويَعبّر عن ذلك عند كتابة الفترات باستعمال الرمز (أو الرمز).

إرشادات:

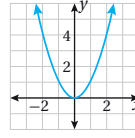
- يمكن توزيع الطلبة إلى ثماني مجموعات إذا كان عدد طلبة الصف كبيراً، وتكليف كل مجموعتين بحل واحد من أفرع المثال 2.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أُتذكّر) الوارد في هامش الفرع 1 من المثال 2، لتأكيد أن قيم x تُمثّل المجال، وقيم y تُمثّل المُدَى.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلّم) الواردين في هامش المثال 2؛ لما لهما من أهمية في تذكير الطلبة بطريقة كتابة المجموعات أو الفترات عندما تكون الأطراف ضمنها أو ليست ضمنها، وتأكيد معنى الدائرة المفتوحة، والدائرة المغلقة، في التمثيل البياني وعلاقتها بكتابة الفترات المفتوحة والمغلقة، وشكل الأقواس المستعملة لكتابتها.

أخطاء شائعة:

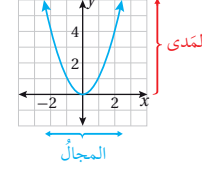
قد يُخطئ بعض الطلبة في تحديد مجال الاقتران ومداه باستعمال التمثيل البياني بأن يعكسهما؛ لذا أؤكد بشكل مستمر أن عناصر المجال هي قيم x وتُقرأ أفقيًا من التمثيل البياني المُعطى، وأن عناصر المدى هي قيم y وتُقرأ رأسيًا من التمثيل البياني المُعطى، وأذكرهم بأن وجود السهم عند طرف من منحنى الاقتران يعني امتداد ذلك الطرف إلى ما لانهاية، ومن ثم امتداد المجال والمدى إلى ما لانهاية.

إرشاد: أوجه الطلبة إلى أنه عند كتابة المجال والمدى للعلاقات أو للاقترانات المنفصلة نستعمل سرد جميع العناصر في المجموعات، في حين يمكن استعمال كتابة الصفة المميزة للمجموعات، أو استعمال الفترات عندما تكون العلاقات أو الاقترانات متصلة.

4



الاقتران المُمَثَّل في الشكل المُجاور مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثي على شكل منحنى ليس فيه انقطاع. استعمال التمثيل البياني لتحديد قيم x وقيم y التي تمثل المجال والمدى كالآتي:

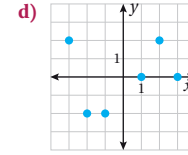
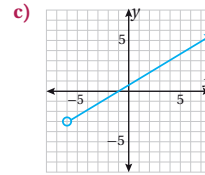
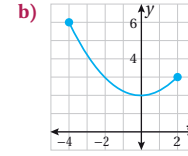
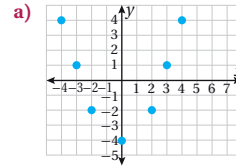


يُدلُّ وجود رأس السهم في التمثيل البياني أعلاه على أن المنحنى ممتد إلى ما لانهاية. وعليه، يمكن كتابة مجال الاقتران ومداه على النحو الآتي:

المجال: $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ أو الفترة $(-\infty, \infty)$
المدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أو الفترة $[0, \infty)$

أنتحَقِّقْ مِنْ فَهْمِي أنظر الهامش.

أحدِّد ما إذا كان كلُّ اقترانٍ ممَّا يأتي مُتَّصِلًا أم مُتَفَصِّلًا، ثمَّ أحدِّد مجاله ومداه:



إجابة التدريب في بند (أنتحَقِّقْ مِنْ فَهْمِي 2):

	المجال	المدى	متصل / منفصل
a)	$\{-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$	$\{-4, -2, 1, 4\}$	منفصل
b)	$\{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$ أو $[-4, 2]$	$\{y \mid 2 \leq y \leq 6\}$ أو $[2, 6]$	متصل
c)	$\{x \mid x > -6\}$ أو $(-6, \infty)$	$\{y \mid y > -3\}$ أو $(-3, \infty)$	متصل
d)	$\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$	$\{-2, 0, 2\}$	منفصل

أفكّر

هل يمكن التعبير عن المجال بطريقة أخرى؟
أبرز إجابتي.

اختبار الخط الرأسي

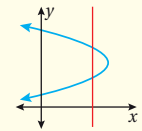
يُمكنني استعمال اختبار الخط الرأسي (vertical line test) لتحديد ما إذا كانت العلاقة المُمثلة بيانياً تمثل اقتراناً أم لا.

اختبار الخط الرأسي

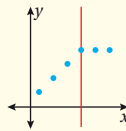
مفهوم أساسي

بالكلمات: تُعد العلاقة المُمثلة بيانياً اقتراناً إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة.

ليست اقتراناً



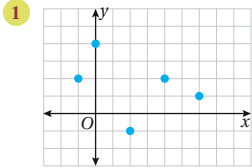
اقتران



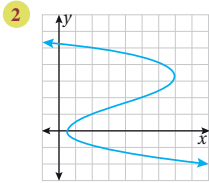
أمثلة:

مثال 3

أحد ما إذا كانت العلاقة المُمثلة بيانياً في كل مما يأتي تمثل اقتراناً أم لا، وأبرز إجابتي:



تمثل العلاقة المُمثلة في الشكل المجاور اقتراناً؛ لأنه لا يوجد خط رأسي يمر بأكثر من نقطة واحدة في تمثيلها البياني.

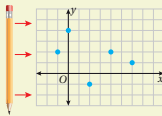


لا تمثل العلاقة المُمثلة تمثيلها البياني في الشكل المجاور اقتراناً؛ لأنها تفشل في اختبار الخط الرأسي. فمثلاً، يوجد مستقيم رأسي يقطع التمثيل البياني في ثلاث نقاط عندما $x = 2$.

وهذا يعني أن القيمة $x = 2$ في المجال ترتبط بثلاث قيم مختلفة لـ y في المدى.

أتعلم

يُمكنني استعمال قلبي لإجراء اختبار الخط الرأسي؛ إذ أضَعُ رأسي يسار التمثيل البياني، ثم أبدأ بتحريكه باتجاه اليمين، فإذا استمر القلم يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط فإن العلاقة تمثل اقتراناً.



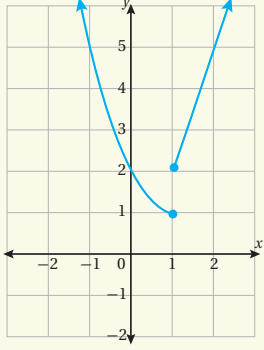
- أوضح للطلبة المفهوم الأساسي (اختبار الخط الرأسي) بالكلمات والأمثلة التوضيحية التي تعتمد التمثيل بيانياً على اللوح، ثم أناقش معهم كيف يساعد اختبار الخط الرأسي على تحديد ما إذا كانت العلاقة اقتراناً أم لا.
- أسأل الطلبة: لماذا لا تمثل العلاقة اقتراناً إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة؟ لوجود عنصر من المجال قد يرتبط بعنصرين أو أكثر من المدى.

- أستمع لإجابات الطلبة، ثم أناقش الصف كاملاً في تفسير معنى اختبار الخط الرأسي.
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 3 على اللوح البياني.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه في حال عدم وجود قيم عددية على المحورين x , y ، فإننا نفترض أنهما مقسمان من خلال شبكة فيها كل مربع صغير طوله وحدة واحدة وعرضه وحدة واحدة.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن الاستفادة من الخطوط الرأسية في شبكة الرسم البياني لاختبار الخط الرأسي.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش المثال 3؛ لما له من أثر في تسهيل إجراء اختبار الخط الرأسي بتمرير قلم على التمثيل البياني للعلاقة المُمثلة بيانياً، بعد القلم مستقيماً رأسيًا.

مثال إضافي:



أحدّد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور تمثل اقتراناً أم لا، وأبرّر إجابتي.

لا تُمثّل العلاقة الممثلة اقتراناً؛ لأنها تفشل في اختبار الخط الرأسي، حيث

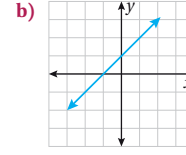
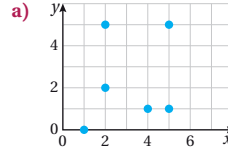
يقطع المستقيم الرأسي $x = 1$ التمثيل البياني في نقطتين.

مثال 4

- أذكر الطلبة بالتمثيل البياني للمعادلة الخطية، وطريقة كتابتها بصيغة الميل والمقطع $y = mx + b$ حيث m هو ميل المستقيم، و b هو المقطع y له.
- أوزّع الطلبة إلى أربع مجموعات، ثم أزوّد كل مجموعة بورقة المصادر 2: الاقتران الخطي.
- أطلب إلى كل مجموعة حل الفرع 1 من ورقة المصادر 2، وأتجوّل بينهم لتقديم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش مع الطلبة حل الفرع 1 من ورقة المصادر 2 على اللوح البياني، وأؤكد أن التمثيل البياني يُسمّى (اقتراناً خطياً).
- أبيّن للطلبة أنه يمكن تحويل صيغة كتابة معادلة المستقيم من صيغة الميل والمقطع إلى صيغة اقتران، وذلك بإدخال الرمز $f(x)$ بدلاً من y في الصيغة $y = mx + b$ ، وذلك لأن الرمز $f(x)$ هو الرمز المستخدم لكتابة الاقتران.
- أطلب إلى المجموعات حل الفرع 2 من ورقة المصادر 2، وأتجوّل بينهم لتقديم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الطلبة في حل الفرع 2 من ورقة المصادر 2 على اللوح.

أتحقّق من فهمي

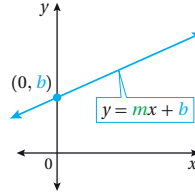
أحدّد ما إذا كانت العلاقة المُمثّلة بيانياً في كلٍّ ممّا يأتي تمثّل اقتراناً أم لا، وأبرّر إجابتي:



(a) ليس اقتراناً. الخط الرأسي عند كل من $x = 2$, $x = 5$ يقطع التمثيل البياني في نقطتين.

(b) اقتران، ينجح في اختبار الخط الرأسي.

رمز الاقتران والاقتران الخطي



يُبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمعادلة خطية بمتغيّرين، وقد تعلّمت سابقاً كتابتها باستعمال صيغة الميل والمقطع على الصورة: $y = mx + b$ ؛ حيث m هو ميل المستقيم و b المقطع y له. وبما أنّ التمثيل البياني لهذه المعادلة يجتاز اختبار الخط الرأسي فإنّها تُعدّ اقتراناً، ويُسمّى **اقتراناً خطياً** (linear function).

يمكن أيضاً كتابة قاعدة الاقتران الخطي باستعمال رمز الاقتران $f(x)$ على الصورة الآتية:

$$f(x) = mx + b$$

وتمثّل قيم x عناصر مجال الاقتران f ، أمّا قيم $f(x)$ فتمثّل عناصر مداه.

لغة الرياضيات

يقرأ الرمز $f(x)$:
 f of x

مثال 4

إذا كان $f(x) = 2x + 6$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

1 أجد $f(3)$

$$f(x) = 2x + 6$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 2(3) + 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

الاقتران المُعطى

بتعويض $x = 3$

بالتبسيط

2 أجد $f(-4) + 10$

$$\begin{aligned} f(-4) + 10 &= (2(-4) + 6) + 10 \\ &= -2 + 10 \\ &= 8 \end{aligned}$$

بتعويض $x = -4$
بالتبسيط
بالتبسيط

3 أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 6 \\ -10 &= 2x + 6 \\ -16 &= 2x \\ x &= -8 \end{aligned}$$

الاقتراء المعطى
بتعويض $f(x) = -10$
بطرح 6 من طرفي المعادلة
بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن، عندما $x = -8$ ، فإن $f(x) = -10$

أنتحقق من فهمي

إذا كان $x = 10 - g(x)$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(b) أجد $g(3) + 6$ 13

(a) أجد $g(-5)$ 15

(c) أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$ 45

للاقتراءات الخطية تطبيقات حياتية كثيرة.

مثال 5: من الحياة

درجات حرارة: يمثل الاقتراء $t(m) = 19m + 65$ درجة الحرارة t بالفهرنهايت لفرن في أحد الأيام بعد تسخينه لمدة m دقيقة.

1 أجد درجة حرارة الفرن بعد 10 دقائق.

أجد $t(10)$:

$$\begin{aligned} t(m) &= 19m + 65 \\ t(10) &= 19(10) + 65 \\ &= 255 \end{aligned}$$

الاقتراء المعطى
بتعويض $m = 10$
بالتبسيط

إذن، درجة حرارة الفرن بعد 10 دقائق من بدء تسخينه 255°F

أتعلم

يمكن استعمال حروف أخرى للدلالة على الاقتراء غير حرف f ، مثل: g أو h .

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام الملونة عند تعويض قيمة عديدة للمتغير x في الاقتراء؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.

مثال 5: من الحياة

أطلب إلى أحد الطلبة قراءة مسألة (درجات حرارة) الواردة في المثال 5، وأذكرهم بوحدة قياس الحرارة بالفهرنهايت وعلاقتها بالسيلسيوس.

أطلب إلى أحد الطلبة حل الفرع 1 من المثال 5 على اللوح، ثم أناقش حله مع الصف كاملاً.

« أسأل الطلبة: ما الرمز الذي يمثل قيم المجال في الاقتراء المعطى لدرجة حرارة الفرن؟ m »

أستمع لإجابات الطلبة، ثم أوضح أن الرمز m هو ما يدل على المجال، وأن قيمته تمثل زمن تسخين الفرن بالدقائق، وأن قيم $t(m)$ هي ما يدل على المدى، وأن قيمته تمثل درجات الحرارة بالفهرنهايت، وعليه فإن الاقتراء المعطى يمثل أو يُنمذج علاقة بين درجة حرارة الفرن ومدة تسخينه.

أناقش حل الفرع 2 من المثال 5 مع الصف كاملاً على اللوح، مع مناقشة صندوق (أتعلم) الواردين في هامشه، وتوضيح سبب بداية المجال بالعدد 0.

مثال إضافي:

1 إذا كان $f(x) = 2x - 5$ اقتراناً خطياً مجاله $[-2, 6]$ ، فأجد مدى الاقتران. $[-9, 7]$

2 إذا كان $g(x) = -2x + 9$ اقتراناً خطياً مداه $[0, 12]$ ، فأجد مجال الاقتران. $[-1.5, 4.5]$

2 إذا كانت أقصى درجة حرارة للفرن 350°F ، فأجد مجال الاقتران ومداه.

$$\begin{aligned} t(m) &= 19m + 65 && \text{الاقتران المعطى} \\ 350 &= 19m + 65 && \text{بتعويض } t(m) = 350 \\ 285 &= 19m && \text{بطرح 65 من طرفي المعادلة} \\ m &= 15 && \text{بقسمة طرفي المعادلة على 19} \end{aligned}$$

يصل الفرن إلى أقصى درجة حرارة عند تشغيله مدة 15 دقيقة؛ لذا فإن أكبر قيمة للزمن الذي يمثل المجال 15. وعليه، فإن مجال الاقتران هو $[0, 15]$.
لإيجاد مدى الاقتران أعوّض $m = 0$ في الاقتران لينتج $t(0) = 65$. وعليه، فإن مدى الاقتران هو $[65, 350]$.

تحقق من فهمي



يمثل الاقتران $d(x) = 12x$ المسافة d بالكيلومتر التي تقطعها سيارة باستعمال x لتر من الوقود. أجد مجال الاقتران ومداه إذا كان الحد الأقصى لسعة خزان السيارة من الوقود 40 L. المجال $[0, 40]$ ، المدى $[0, 480]$

أتعلم

بما أن m تمثل الزمن، فإن أقل قيمة له هي 0

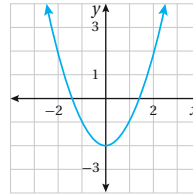
أتعلم

يمكن إيجاد مدى الاقتران الخطي بتعويض أقل قيمة وأعلى قيمة في المجال.

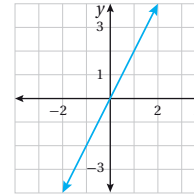
الاقترانات غير الخطية

الاقتران غير الخطي (nonlinear function) اقتران لا يمكن كتابته على الصورة $f(x) = mx + b$ ، وتمثيله البياني ليس خطاً مستقيماً.

اقتران غير خطي



اقتران خطي



أتعلم

إذا احتوى الاقتران $f(x)$ على أي أس غير الواحد والصفر للمقدار x ، فإن الاقتران غير خطي.

ويمكن إيجاد قيمة الاقتران غير الخطي عند قيمة معينة بالتعويض، ثم اتباع أولويات العمليات.

أولويات العمليات الحسابية

مراجعة المفهوم

أولويات العمليات الحسابية، هي:

- (1) أجد قيمة المقدار داخل الأقواس.
- (2) أجد قيم المقادير الأسية والجذور جميعها.
- (3) أضرب أو أقسم من اليسار إلى اليمين (أيهما أسبق).
- (4) أجمع أو أطرح من اليسار إلى اليمين (أيهما أسبق).

مثال 6

إذا كان $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 $g(-1)$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

الاقتراح المعطى

$$g(-1) = 2(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

بتعويض $x = -1$

$$= -3$$

بالتبسيط

2 $3g(0) + g(2)$

$$3g(0) + g(2) = 3(2(0)^2 + 2(0) - 3) + (2(2)^2 + 2(2) - 3)$$

بتعويض $x = 0, x = 2$

$$= 3(-3) + 9$$

بالتبسيط

$$= 0$$

بالتبسيط

أنتحقق من فهمي

إذا كان $h(x) = x^3 - 2x + 1$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $h(-2)$ -3

b) $h(1) - 4h(0)$ -4

أنتعلم

ألاحظ أن أس المتغير في الاقتران $g(x)$ هو 2، لذا فهو ليس اقتراناً خطياً.

- أذكر الطلبة بصيغة الاقتران الخطي $f(x) = mx + b$ وأن m هو ميل المستقيم و b هو المقطع y ، ثم أسأل الطلبة:

« ما قيمة الأس للمتغير x ؟ 1

« هل يوجد أس للمتغير غير الواحد؟ لا

- أخبر الطلبة أن الاقتران الخطي هو اقتران لا يكون لمتغيره أس غير الواحد أو الصفر، ويمكن كتابته على الصورة $f(x) = mx + b$ ، وأن أي اقتران لا يمكن كتابته بهذه الصورة لا يعد خطياً.
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 6 على اللوح، وأؤكد أهمية التزام أولويات العمليات الحسابية عند إيجاد قيم للاقتران المعطى بتعويض قيم المتغير x في قاعدة الاقتران.

مثال إضافي:

أكمل الجدول الآتي بتحديد ما إذا كان الاقتران المعطى خطياً أم غير خطي:

الاقتران	خطي	غير خطي	التبرير
$f(x) = 3 + 10x$	✓		يمكن كتابته بالصيغة $f(x) = mx + b$
$g(x) = 2x - 7^2$	✓		يمكن كتابته بالصيغة $f(x) = mx + b$ ، $b = -49$
$d(x) = 2x + 5 - x^3$		✓	لا يمكن كتابته بالصيغة $f(x) = mx + b$
$r(x) = 5$	✓		يمكن كتابته بالصيغة $f(x) = mx + b$ ، $m = 0$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

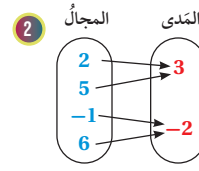
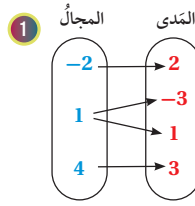
- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (21 - 25).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في الأسئلة (22-24) (تبرير)، أوجه الطلبة إلى تدعيم تبريرهم ببعض الأمثلة.
- في السؤال 25 (تبرير)، أذكر الطلبة برموز مجموعات الأعداد، مثل: W للأعداد الكلية، Z للأعداد الصحيحة.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أحدّد مجال كلّ علاقةٍ ممّا يأتي ومداها، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تمثّل اقتراناً أم لا: (1-6) أنظر الهامش.



3

x	4	2	-3	4	-4
y	0	-1	0	-1	0

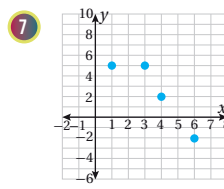
4

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-3	-3	-3	-3

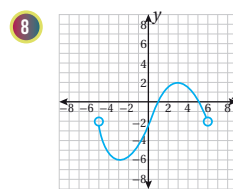
5 $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 4), (1, -9)\}$

6 $\{(4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1), (4, -2)\}$

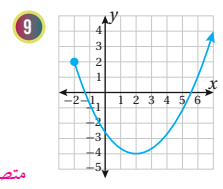
أحدّد ما إذا كان كلّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفصلاً أم مُتصلاً، ثمّ أحدّد مجاله ومداها:



المجال $\{1, 3, 4, 6\}$
المدى $\{-2, 2, 5\}$

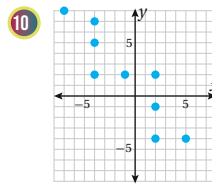


المجال $(-5, 6)$
المدى $[-6, 2]$

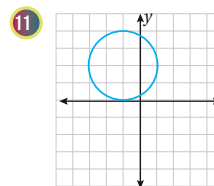


المجال $[-2, \infty)$
المدى $[-4, \infty)$

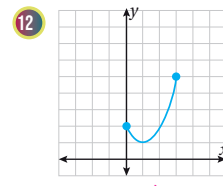
أحدّد ما إذا كانت العلاقة المُعطى تمثيلها البياني في كلّ ممّا يأتي تمثّل اقتراناً أم لا، وأبرّر إجابتي:



ليس اقتراناً، -4 من المجال ارتبط مع 2 و 5 و 7 من المدى. توجد تبريرات أخرى.



ليس اقتراناً، كل من -2 و -1 و 0 من المجال ارتبط بعنصرين من المدى. توجد تبريرات أخرى.



اقتران؛ لأنه ينجح في اختبار الخط الرأسي.

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

اقتران/ ليس اقتراناً	المدى	المجال
ليس اقتراناً، 1 من المجال ارتبط مع -3 و 1 من المدى.	$\{-3, 1, 2, 3\}$	$\{-2, 1, 4\}$
اقتران	$\{-2, 3\}$	$\{-1, 2, 5, 6\}$
ليس اقتراناً، 4 من المجال ارتبط مع -1 و 0 من المدى.	$\{0, -1\}$	$\{-4, -3, 2, 4\}$
اقتران	$\{-3\}$	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
اقتران	$\{-9, 2, 4, 5\}$	$\{-2, -1, 0, 1\}$
ليس اقتراناً، 4 من المجال ارتبط مع -2 و 2 من المدى. يوجد تبرير آخر.	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 4\}$

إذا كان $8 - 3x = f(x)$ ، فأجِد:

- 13 $f(-3) = -17$ 14 $2f(5) - 11 = 3$ 15 قيمة x ، التي تجعل $f(x) = 19$ 9

إذا كان $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، فأجِد كلاً ممّا يأتي:

- 16 $h(2) = 3$ 17 $h(3) = 2$ 18 $2h(0) - h(-2) = -2\frac{1}{3}$

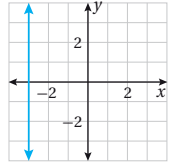


تغذية: يمثل الاقتران $V(c) = 98c$ عدد وحدات فيتامين د، التي يمكن للإنسان أن يحصل عليها عند شربه c كوباً من الحليب:

- 19 أجِد عدد وحدات فيتامين د، التي يمكن للإنسان أن يحصل عليها عند شرب 8 أكواب من الحليب. 784

- 20 إذا كان الحد الأقصى لعدد أكواب الحليب التي يوصي الأطباء المرأة الحامل أن تشربها 4 أكواب، فأجِد مجال الاقتران ومداه. المجال $[0, 4]$ ، المدى $[0, 392]$

مهارات التفكير العليا



- 21 **اكتشف الخطأ:** تقول هديل إن التمثيل البياني المُجاوَر يمثل اقتراناً خطياً؛ لأنه على شكل مُستقيم. اكتشف الخطأ في قول هديل، وأصححه.

الخطأ: التمثيل البياني لا يشكّل اقتراناً؛ لأن العدد -3 هو العنصر الوحيد في المجال، ويرتبط بعدد لا نهائي من عناصر المدى الذي هو: $(-\infty, \infty)$.
تبرير: أخذُ الجملة الصحيحة والجملة الخطأ ممّا يأتي، وأبرزُ إجابتي:

- 22 كُـلُّ اقترانٍ هو علاقة. صحيحة، من تعريف الاقتران.

- 23 كُـلُّ علاقةٍ هي اقتران. خطأ، في العلاقة قد يرتبط عنصر من المجال بأكثر من عنصر من المدى.

وهذا لا يوافق تعريف الاقتران.

- 24 إذا كان مجال الاقتران $(-\infty, \infty)$ ، فإن مداه أيضاً سيكون $(-\infty, \infty)$.

خطأ، مثلاً $f(x) = x^2$ مجاله: $(-\infty, \infty)$ ، ومداه: $[0, \infty)$.

- 25 تبرير: أجِد مجموعة قيم x ، التي تجعل العلاقة $\{(1, 5), (x, 8), (-7, 9)\}$ اقتراناً؛ حيث $x \in Z$ ، وأبرزُ إجابتي.

$\{1, -7\} / Z$ (مجموعة الأعداد الصحيحة ما عدا 1 و -7)؛ لأنه إذا كان $x = 1$ أو $x = -7$ يكون قد ارتبط عنصر من المجال بعنصرين من المدى. ما عدا ذلك يكون لكل عنصر من المجال صورة واحدة من المدى.

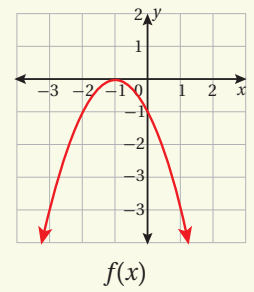
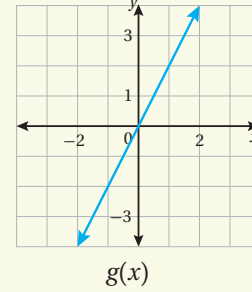
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17, 21 كتاب التمارين: (1 - 7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (19 - 21) كتاب التمارين: (8 - 13)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20, (22 - 25) كتاب التمارين: (12 - 14)

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« أكمل الجدول الآتي بالاعتماد على التمثيل البياني للاقتارين: $f(x)$, $g(x)$ »



الاقتران	منفصل، متصل	خطي، غير خطي	مجال الاقتران	مدى الاقتران
$f(x)$	متصل	غير خطي	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, 0]$
$g(x)$	متصل	خطي	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

تعليمات المشروع:

- أصطحب الطلبة إلى مختبر الحاسوب، وأدربهم على كيفية استيراد صورة في برمجية جيو جبرا وكيفية التحكم بأبعادها وموقعها في المستوى الإحداثي (Graphics View).

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

« أكمل الجدول الآتي:

الاقتران	خطي، غير خطي	قيمة الاقتران عند $x = 4$
$f(x) = 3 + 10x$	خطي	$f(4) = 43$
$d(x) = \frac{2x + 5 - x^3}{x - 1}$	غير خطي	$d(4) = -17$
$r(x) = 5x + \sqrt{x} + 3$	غير خطي	$r(4) = 25$

الدرس 2

نتائج الدرس



- التحويل بين وحدات القياس باستعمال منحنيات التحويل.
- قراءة مقياس الرسم والمفتاح بدقة في التمثيلات البيانية لمنحنى الموقع - الزمن.
- تفسير حركة الأجسام باستعمال منحنى الموقع - الزمن.
- المقارنة بين جسمين تحركاً معاً باستعمال منحنى الموقع - الزمن.

نتائج التعلم القبلي:

- تحديد الزوج المرتب لنقطة ممثلة بيانياً في المستوى الإحداثي.
- إيجاد ميل المستقيم المارّ بنقطتين.
- استعمال ميل المستقيم لتفسير معنى معدل التغير في المسائل الحياتية.

مراجعة التعلم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 2

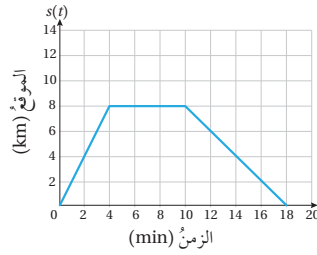
تفسير التمثيلات البيانية Interpreting Graphs

تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



منحنيات التحويل، منحنى الموقع - الزمن.

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لموقع سيارة أثناء حركتها بالنسبة إلى نقطة انطلاقها.

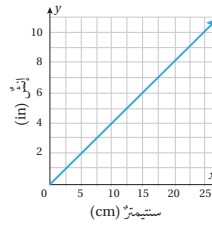
(1) كم دقيقة استمرت رحلة السيارة؟

(2) ما المدة الزمنية التي توقفتها السيارة أثناء الرحلة؟

التحويل بين وحدات القياس باستعمال منحنيات التحويل

تعلمت سابقاً التحويل بين وحدات القياس المختلفة باستعمال علاقات خطية تربط بينها، وسأتعلم اليوم كيفية قراءة منحنيات التحويل (conversion graphs) وتفسيرها، وهي منحنيات تستعمل لتمثيل العلاقات بين وحدات القياس المختلفة والتحويل بينها.

مثال 1



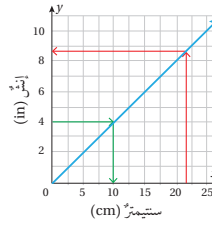
يبيّن منحنى التحويل المجاور العلاقة بين السنتيمتر (cm) والإنش (in). أستعمل المنحنى للإجابة عن كلّ ممّا يأتي:

1 أحول 4 in إلى وحدة السنتيمتر.

ألاحظ من التمثيل البياني أنّ 4 in على المحور y تقابل 10 cm على المحور x.

2 أحول 22 cm إلى وحدة الإنش.

ألاحظ من التمثيل البياني أنّ 22 cm على المحور x تقابل 8.7 in تقريباً على المحور y.

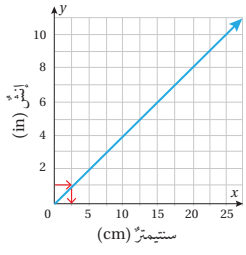


أتعلم

الإنش (inch) وحدة قياسي طول تُستخدم في بعض دول العالم.

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأزود كل مجموعة بورقة المصادر 3: تفسير التمثيلات البيانية.
- أطلب إلى كل مجموعة حل الأسئلة (4 - 1) في ورقة المصادر 3، وأتجوّل بينهم لتقديم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقش الحل مع الصف كاملاً.
- أطلب إلى كل مجموعة حل الأسئلة (7 - 5) في ورقة المصادر 3، وأتجوّل بينهم لتقديم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقش الحل مع الصف كاملاً.
- أطلب إلى كل مجموعة حل الأسئلة (11 - 8) من ورقة المصادر 3، وأتجوّل بينهم لتقديم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً مع توضيح الاستنتاج اللازم، وهو: (عند تزايد قيم y في فترة ما يكون ميل القطعة المستقيمة موجباً، وعند تناقص قيم y في فترة ما يكون ميل القطعة المستقيمة سالباً، وعند ثبات قيم y في فترة ما يكون ميل القطعة المستقيمة صفراً).

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
- « ما وحدات قياس المسافة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- « ما الوحدة المناسبة لقياس المسافة التي تقطعها السيارة عند التنقل بين مدينتين؟ km
- « ماذا نسوّي معدل المسافة التي تقطعها السيارة في فترة زمنية محددة؟ سرعة السيارة.
- « ما موقع السيارة عند الدقيقة 4؟ $8 km$
- « ما موقع السيارة عند الدقيقة 10؟ $8 km$
- « كم دقيقة استمرت رحلة السيارة؟
- « ما المدة الزمنية التي توقفتها السيارة أثناء الرحلة؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
- « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟
- « من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزز الإجابات الصحيحة.



3 أُبَيِّنْ كَيْفَ اسْتَعْمَلُ الْمُنْحَنِي الْمَجَاوِرَ لِتَحْوِيلِ 18 in إلى سنتيمتراتٍ.

بما أن 18 in غير موجودة على التمثيل البياني، أتبع الخطوات الآتية للتحويل:

الخطوة 1: أجد كم سنتيمتراً في الإنش الواحد.

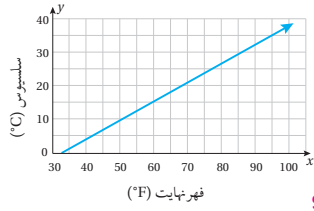
ألاحظ من التمثيل البياني أن كل 1 in على المحور y يقابل 2.5 cm تقريباً على المحور x .

الخطوة 2: أضرب 18 in في 2.5

$$18 \times 2.5 = 45$$

إذن، 18 in تساوي 45 cm تقريباً.

أتحقق من فهمي



يُبَيِّنُ مُنْحَنِي التَّحْوِيلِ الْمَجَاوِرُ الْعَلَاقَةَ بَيْنَ وَحَدَّتَيْ قِيَاسِ درجَاتِ الحرارة الفهرنهايت والسلسيوس. اسْتَغْمَلُ الْمُنْحَنِي لِلْإِجَابَةِ عَنْ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

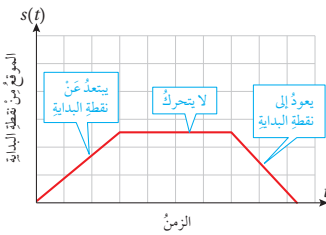
(a) أَحْوَلْ $35^\circ C$ إِلَى وَحْدَةِ الْفَهْرَنْهَايتِ. $95^\circ F$

(b) أَحْوَلْ $50^\circ F$ إِلَى وَحْدَةِ السِّلْسِيُوسِ. $10^\circ C$

(c) إِذَا كَانَتْ دَرَجَةُ حَرَارَةِ تَجَمُّدِ الْمَاءِ $0^\circ C$ ، فَمَا دَرَجَةُ الْحَرَارَةِ الْمَقَابِلَةُ لَهَا بِالْفَهْرَنْهَايتِ؟ $32^\circ C$ تقريباً

تفسير حركة الأجسام باستعمال منحنى الموقع-الزمن

يكون من الصعب في بعض الأحيان وصف حركة جسم خلال مدة زمنية محددة بالكلمات؛ لذلك نستخدم المنحنيات لتمثيل تلك الحركة بوضوح. يُستعمل منحنى الموقع-الزمن (position-time graph) لتمثيل التغير في موقع جسم متحرك خلال مدة زمنية معينة (بين نقطتين زمنيّتين) كما يوضح الشكل المجاور، إذ يظهر الموقع من نقطة البداية على المحور الرأسي، والزمن على المحور الأفقي.



مثال 1

- أذكر الطلبة بالتحويل بين وحدات قياس الطول المختلفة، مثل: mm, cm, m, dm, km، عن طريق مناقشة حل المثال الآتي على اللوح:

مثال: أكمل الفراغات الآتية لتكون العبارة صحيحة:

$$5 \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ mm}$$

$$120 \text{ m} = \dots\dots\dots \text{ cm}$$

$$200 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{ m}$$

$$50 \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ dm}$$

- أبين للطلبة أنه يمكن استعمال التمثيل البياني في التحويل بين وحدات القياس المختلفة، وذلك بمناقشة حل الفرعين 1 و 2 من المثال 1 مع الصف كاملاً على اللوح البياني.
- أخبر الطلبة أن مثل هذه التمثيلات البيانية تسمى (منحنيات التحويل).
- في الفرع 3 من المثال، أوضح للطلبة خطوات الحل عندما يكون المطلوب تحويل وحدات لا يظهرها التمثيل البياني.
- إن لزم الأمر، ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

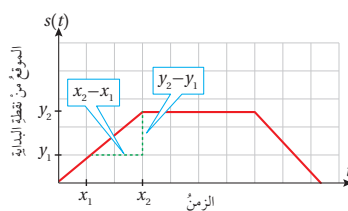
إرشاد: إذا توفّر جهاز Data Show أستعمله لعرض الأشكال المعطاة في أمثلة الدرس؛ توفيراً للوقت الذي أحتاج إليه في رسمها على اللوح.

مثال إضافي

أستعمل منحنى التحويل المعطى في المثال 1 لتحويل 30 cm إلى وحدة الإنش. 12 in

تعلمت سابقاً في مبحث العلوم أنه يمكن إيجاد السرعة المتوسطة ($\bar{v}_s$) بقسمة المسافة الكلية المقطوعة (S) على الزمن الكلي المستغرق للحركة (Δt)، ويمكن التعبير عن ذلك بالرموز عن طريق الصيغة الآتية:

$$\bar{v}_s = \frac{S}{\Delta t}$$



يمكن استعمال منحنيات الموقع - الزمن لإيجاد السرعة المتوسطة لجسم، وذلك بقسمة التغير في موقع الجسم ($y_2 - y_1$) على التغير في الزمن ($x_2 - x_1$)، والتي يمكن التعبير عنها بالرموز كالآتي:

$$\bar{v}_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

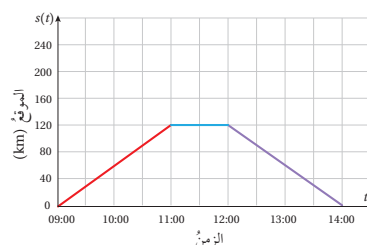
ألاحظ أن صيغة السرعة المتوسطة تشبه صيغة الميل، إذن، سرعة الجسم المتوسطة تساوي ميل منحنى الموقع - الزمن.

اتذكر

يمكن إيجاد الميل (m) للمستقيم غير الرأسّي المارّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحو الآتي:

$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 2: من الحياة



يُبين التمثيل البياني المجاور رحلة أحمد بسيارته من منزله إلى مطار الملكة علياء الدولي ليستقبل أخاه العائد من السفر، حيث مكث بعض الوقت في المطار مُتظّراً وصول أخيه، ثم عاداً معاً إلى المنزل.

1 في أي ساعة غادر أحمد منزله؟

غادر أحمد منزله الساعة 9:00 عندما بدأ التمثيل البياني الحركة من المستوى الأفقي.

اتذكر

الوقت بصيغة الـ 24 ساعة هو نظام يبدأ فيه اليوم من منتصف الليل إلى منتصف الليل الذي يليه خلال دورة واحدة مكونة من الـ 24 ساعة اليومية.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.



- أَيْسَنَ للطلبة أن التمثيل البياني في كثير من الأحيان يُستخدم للتحويل بين الوحدات كما في المثال 1، أو لقراءة البيانات ووصفها وتسهيل تفسيرها.
- أَيْسَنَ للطلبة أن من أكثر التمثيلات المستعملة لوصف البيانات وقراءتها هي التمثيلات التي تصف حركة جسم في فترة زمنية، وتسمى هذه التمثيلات (منحنيات الموقع - الزمن).
- أخبر الطلبة أنه في منحنيات الموقع - الزمن يُمثَّل المحور x الزمن، ويمثَّل المحور y الموقع دائماً.
- أقسِّم الطلبة إلى أربع مجموعات، ثم أزوِّد كل مجموعة بورقة المصادر 4: منحنيات الموقع - الزمن.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدِّم التغذية الراجعة اللازمة لهم.
- أوضح للطلبة الاستنتاج الذي ينبغي التوصل إليه من خلال إجابة أسئلة ورقة المصادر 4، والذي مفاده أن سرعة الجسم المتوسطة تساوي ميل منحنى الموقع - الزمن ضمن فترة محددة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح البياني.

2 ما البُعد بين منزل أحمد ومطار الملكة علياء الدولي؟

أصبح مُنحني الموقع - الزمن بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 أفقيًا، ما يعني أن موقع أحمد بالنسبة إلى منزله لم يتغيَّر في هذه المدة، إذن يكون أحمد عندها قد وصل إلى المطار، وهذا يدلُّ على أن المطار يبعد عن منزل أحمد 120 km

3 كم أمضى أحمد من الوقت في المطار؟

تقع القطعة الأفقية من المُنحني بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 وطولها يساوي الزمن الذي أمضاه أحمد في المطار. إذن، أمضى أحمد ساعة واحدة في المطار.

4 أجد السرعة المتوسطة للسيارة في المدة الزمنية: 9:00-11:00

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة السرعة المتوسطة} \\ &= \frac{120 - 0}{11 - 9} && \text{أعوِّض عن } (x_1, y_1) = (9, 0) \\ &&& \text{وعن } (x_2, y_2) = (11, 120) \\ &= \frac{120}{2} = 60 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن السرعة المتوسطة للسيارة في المدة الزمنية 9:00 - 11:00 تساوي 60 km/h.

5 أجد السرعة المتوسطة للسيارة في المدة الزمنية 12:00-14:00، ثم أبين ماذا تمثل.

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة السرعة المتوسطة} \\ &= \frac{0 - 120}{14 - 12} && \text{أعوِّض عن } (x_1, y_1) = (12, 120) \\ &&& \text{وعن } (x_2, y_2) = (14, 0) \\ &= \frac{-120}{2} = -60 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

بما أن السرعة المتوسطة للسيارة سالبة في المدة الزمنية 12:00-14:00 فإن ذلك يعني أن أحمد بدأ بالعودة إلى المنزل الساعة 12:00 بسرعة ثابتة مقدارها 60 km/h، ووصل إلى منزله الساعة 14:00

أنذُر

أنشاء رحلة أحمد من منزله إلى المطار وعودته إلى المنزل مرة أخرى قد يُسرِّع أحياناً ويبطئ أحياناً أخرى؛ نتيجة الازدحام، أو التعب أو حالة الطقس؛ أي إنَّ سرعته تتغيَّر باستمرار، وهذا يعني أن حركته غير مُنظمة؛ لذا فإننا نحسب سرعته المتوسطة.

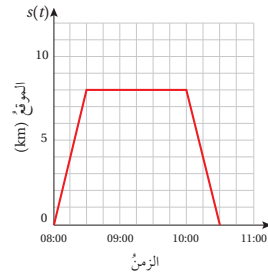
إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أذكر) الوارد في هامش فقرة الشرح التي تسبق المثال 2 في الصفحة 66؛ لما له من أهمية في توضيح سبب حساب السرعة المتوسطة وليس السرعة الفعلية أو الحقيقية، وأوضح الفرق بينهما.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أذكر) الوارد في هامش المثال 2 في الصفحة 66؛ لما له من أهمية في تذكير الطلبة بالوقت بصيغة 24 ساعة.
- ألفت انتباه الطلبة إلى كيفية تفسير الإشارات السالبة والموجبة عند قراءة البيانات في منحنيات الموقع- الزمن، وأؤكد باستمرار أن الإشارة السالبة تعني التناقص أو الاقتراب من نقطة محددة، والإشارة الموجبة تعني التزايد أو الابتعاد عن نقطة محددة.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة في قراءة البيانات بحيث يبدأ من يمين التمثيل البياني متجهًا إلى يساره؛ لذا أنبه الطلبة على أن جميع التمثيلات البيانية تُقرأ من اليسار إلى اليمين دائمًا.

أتحقق من فهمي



يُبين التمثيل البياني المجاور رحلة خالد على دراجته من منزله إلى المكتبة، حيث أمضى بعض الوقت فيها، ثم عاد بدراجته إلى المنزل.

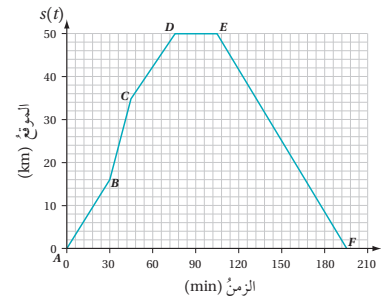
(a) في أي ساعة غادر خالد منزله؟ **الثامنة**

(b) ما البعد بين منزل خالد والمكتبة؟ **8 km**

(c) كم أمضى خالد من الوقت في المكتبة؟ **$1\frac{1}{2}$ h**

(d) أجد السرعة المتوسطة لخالد في المدة الزمنية 10:00-10:30، ثم أبين ماذا تمثل. **أنظر الهامش.**

يُظهر مُنحنى الموقع - الزمن في المثال السابق موقع جسم مُتحرك بين أوقات مختلفة من ساعات اليوم. ويوجد أيضًا نوع آخر من المنحنيات يبين موقع الجسم المُتحرك بعد مرور مدة زمنية محددة من لحظة انطلاقه كما هو موضح في المثال الآتي.



يمثل مُنحنى الموقع - الزمن المجاور رحلة حافلة نقلت ركابًا من مدينة إربد إلى مدينة المفرق؛ حيث توقف سائق الحافلة في الموقف مدة من الزمن لتحميل الركاب، ثم عاد إلى مدينة إربد.

1 ما البعد بين إربد والمفرق؟

أصبح مُنحنى الموقع - الزمن بعد ما يقارب 75 دقيقة أفقيًا، إذن تكون الحافلة عندها قد وصلت إلى مدينة المفرق وتوقفت بعض الوقت، وهذا يدل على أن مدينة إربد تبعد عن مدينة المفرق 50 km

أتعلم

إذا احتوى مُنحنى الموقع - الزمن على أكثر من قطعة مستقيمة، فإن ذلك يعني أن السرعة المتوسطة للجسم تغيرت أكثر من مرة أثناء حركته، مع حدوث توقف في الحركة عند النقاط الفاصلة بين هذه القطع المستقيمة.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

(d) $\bar{v}_s = \frac{0-8}{10.5-10} = \frac{-8}{0.5} = -16 \text{ km/h}$ وبما أنها سالبة، فإنها سرعة متوسطة لخالد وهو عائد من المكتبة إلى منزله، حيث غادر المكتبة عند الساعة العاشرة ووصل إلى بيته عند الساعة العاشرة والنصف.

2 ما المدة الزمنية التي انتظرها سائق الحافلة في الموقف لتحميل الركاب؟

بما أن المنحنى أفقي بين 75 دقيقة و105 دقائق من انطلاق الحافلة من إربد إلى المفرق، فهذا يعني أن الحافلة توقفت 30 دقيقة في المفرق لتحميل الركاب.

3 ما زمن الرحلة كلها؟

ألاحظ من المنحنى أن زمن الرحلة كلها 195 دقيقة تقريباً؛ أي 3 ساعات و15 دقيقة.

4 ماذا يمكننا القول عما يتعلق برحلة الحافلة من النقطة E إلى النقطة F؟

بدأت الحافلة بالعودة من مدينة المفرق إلى مدينة إربد بين هاتين النقطتين، واستغرقت رحلة العودة 90 دقيقة.

5 أحسب السرعة المتوسطة للحافلة بوحدة km/h بين النقطتين C و D.

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة السرعة المتوسطة} \\ &= \frac{50 - 35}{75 - 45} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (45, 35) \\ &= \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} && \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (75, 50) \\ &= \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} && \text{أبسط} \end{aligned}$$

وبما أن الحافلة قطعت 15 km في 30 min، إذن يمكننا إيجاد السرعة المتوسطة للحافلة في الساعة الواحدة.

$$\begin{aligned} \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} &&& \text{السرعة المتوسطة للحافلة بوحدة km/min} \\ &&& \text{أضرب في 2 لتحويل السرعة المتوسطة للحافلة} \\ &&& \text{بوحدة الكيلومتر لكل ساعة} \\ &&& \text{أبسط} \\ &&& \text{كل 60 min تساوي 1 ساعة} \end{aligned}$$

إذن، السرعة المتوسطة للحافلة من C إلى D تساوي 30 km/h

أتعلم

ألاحظ أن ميل المنحنى ثابت خلال هذه المدة، مما يعني أن السرعة المتوسطة للحافلة كانت ثابتة خلال رحلة العودة.

- أوضح للطلبة وجود نوعين مختلفين من منحنيات الموقع - الزمن، أحدهما المنحنى الذي يظهر موقع جسم متحرك بين أوقات مختلفة من ساعات اليوم، ومثال هذا النوع المنحنى الوارد في المثال 2، أما الآخر فهو منحنى يبين موقع الجسم المتحرك بعد مرور مدة زمنية محددة من لحظة انطلاقه، ومثال هذا النوع المنحنى الوارد في المثال 3.
- ناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش نص المثال 3؛ لما له من أثر في توضيح أن السرعة المتوسطة يمكن أن تتغير خلال الفترة الزمنية المعطاة، ولأكثر من مرة، ويُستدل على ذلك من وجود أكثر من قطعة مستقيمة في المنحنى.
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الفرع 4 من المثال 3؛ لتوضيح معنى ثبات السرعة المتوسطة الذي يُستدل عليه من ثبات الميل في فترة زمنية محددة.

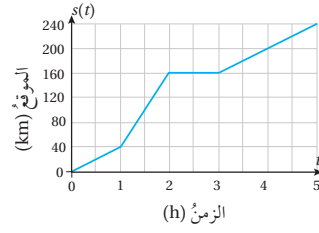
مثال 4

- أَيْسَرُ للطلبة أنه يمكن رسم منحنى الموقع - الزمن لحركة جسمين تحركاً معاً في المستوى الإحداثي نفسه، وذلك لإجراء مقارنات بين الجسمين من حيث الموقع والزمن والسرعة المتوسطة لكل منهما.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة مناقشة حل المثال 4.
- أطلب إلى إحدى المجموعات عرض ما تتوصل إليه على اللوح البياني، ثم أناقشهم في الحل وأزودهم بالتغذية الراجعة اللازمة.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الفرع 2 من المثال 4؛ لما له من أهمية وتأثير في قراءة البيانات بصورة صحيحة.
- أؤكد للطلبة الاستنتاج الوارد في الفرع 4 من المثال 4، والمتعلق بتفسير معنى نقطة تقاطع المنحنيين.

اتحقق من فهمي



يبيّن التمثيل البياني المجاور رحلة بهاء بسيارته من مدينة الكرك متجهاً إلى عمله في مدينة العقبة عبر طريق الغور الأردني.

(a) ما البعد بين مدينة الكرك ومدينة العقبة؟ **240 km**

(b) ما المدة الزمنية التي استغرقها بهاء لأخذ استراحة أثناء الرحلة؟ **1 h**

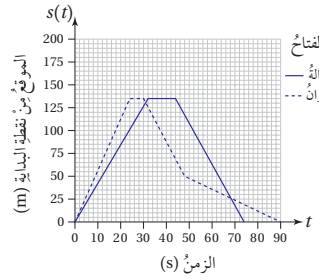
(c) أحسب السرعة المتوسطة للسيارة منذ تحرك بهاء بعد الاستراحة وحتى وصوله إلى مدينة العقبة. **40 km/h**

(d) إذا وصل بهاء مدينة العقبة الساعة 1 p.m، ففي أي ساعة انطلق من مدينة الكرك؟ **8 a.m.**

المقارنة بين جسمين تحركاً معاً باستعمال منحنى الموقع - الزمن

يمكن رسم منحنى الموقع - الزمن لجسمين متحركين معاً على المستوى نفسه، وذلك بهدف إجراء مقارنات بين الجسمين من حيث الموقع، والزمن، والسرعة المتوسطة.

مثال 4



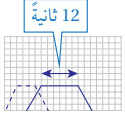
يبيّن التمثيل البياني المجاور سباقاً بين روان وهالة، حيث ركّبتا إلى نهاية الطريق المُحاذي لمنزلهما، وأخذت كل منهما استراحة قصيرة، ثم عادتا ركضاً إلى نقطة البداية، وفي طريق العودة التوى كاحل روان.

1 أيهما أنهت السباق بوقت أقصر: روان أم هالة؟ ولماذا؟

أنهت هالة السباق أولاً، حيث يظهر من التمثيل البياني أنّ منحنى هالة عاد إلى المحور x قبل منحنى روان، حيث أنهت هالة السباق في 75 ثانية تقريباً، في حين أنهت روان السباق في 90 ثانية.

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام الملونة عند رسم منحنيين على المستوى البياني نفسه؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.



2 ما مقدار الوقت الذي استراحت فيه هالة؟

ألاحظ أن كل خطوة أفقية في المستوى الإحداثي تمثل ثانيتين؛ لذا استراحت هالة مدة 12 ثانية كما يظهر في الشكل المجاور.

3 بعد كم ثانية من بدء السباق التوى كاحل روان؟

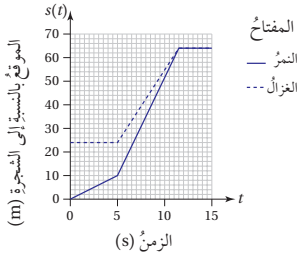
التوى كاحل روان بعد 48 ثانية؛ لأن سرعتها قلت فجأة عند الثانية 48، ويظهر ذلك في التمثيل البياني، إذ قل ميل المنحنى بعد الثانية 48.

4 ماذا حدث بعد 68 ثانية من بدء السباق؟

ألاحظ أن المنحنيين تقاطعا في الثانية 68، وهذا يدل على أن هالة وروان كانتا على البعد نفسه من نقطة البداية/ النهاية في تلك اللحظة.

أنتحقق من فهمي

رصد نمر غزالاً عندما كان أسفل شجرة، ثم بدأ بمطاردة الغزال حتى اصطاده. يبين التمثيل البياني الآتي المطاردة بين النمر والغزال.



(a) كم كان البعد بين الغزال والنمر عند بدء المطاردة؟ 24 m تقريباً.

(b) ماذا فعل الغزال بين الثانية 0 والثانية 5؟ بقي في مكانه.

(c) كم ثانية ركض الغزال قبل أن يصطاده النمر؟ 6.5 s تقريباً.

(d) كيف استدل من التمثيل البياني على أن النمر أسرع من الغزال؟

أتعلم

أقرأ مقياس الرسم للتمثيل البياني جيداً، وألاحظ أن كل مربع صغير يمثل ثانيتين.

(d) المسافة التي قطعها النمر في 6.5 ثانية (أثناء المطاردة) أكبر من المسافة التي قطعها الغزال في 6.5 ثانية.

أترّب وأحل المسائل

- أوجه الطلبة إلى بند (أترّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (8 - 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تستعمل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أترّب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

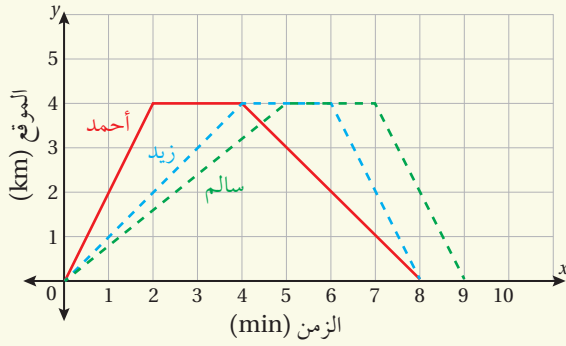
- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل 15 و 16
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 15 (تبرير)، أوجه الطلبة إلى التفكير بحساب السرعة بين أي نقطتين تقعان على الجزء الراسي.
- في السؤال 16 (تبرير)، أوجه الطلبة إلى الانتباه لكيفية اختلاف سرعة ارتفاع الماء في الأوعية تبعاً للتغير في عرض كل وعاء.

• أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

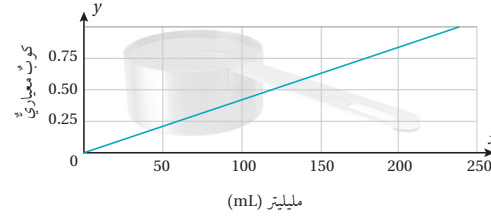
« انطلق أحمد وزيد وسالم كل بسيارته من الموقع نفسه باتجاه محطة الوقود لتزويد سياراتهم بالوقود، ثم العودة إلى نقطة الانطلاق. يُبين التمثيل البياني الآتي موقع كل منهم في رحلة الذهاب والعودة.



- 1 كم تبعد محطة الوقود عن موقع انطلاقهم؟ 4 km
- 2 أيهم وصل محطة الوقود أولاً؟ وما تفسير ذلك؟ أحمد؛ لأنه قطع المسافة إلى محطة الوقود بزمّن أقل فكانت سرعته أكبر.
- 3 كم كانت مدة مكوث كل منهم في محطة الوقود؟ كل منهم مكث في المحطة مدة دقيقتين.
- 4 كم كانت السرعة المتوسطة لأحمد في رحلة عودته إلى نقطة الانطلاق؟ -1 km/min ، وإشارة السالب تدلّ على أنه عائد إلى موقع انطلاقه.
- 5 أيهم كان آخر من عاد إلى موقع الانطلاق؟ سالم.
- 6 كم كانت السرعة المتوسطة لكل من زيد وسالم في رحلة العودة إلى موقع الانطلاق؟ كل منهما سرعته المتوسطة كانت -2 km/min
- 7 كيف أفسّر وصول زيد قبل سالم في رحلة العودة إلى موقع الانطلاق؟ بأن زيداً انطلق من محطة الوقود قبل سالم بدقيقة واحدة، رغم أن لكل منهما السرعة نفسها.
- 8 كيف أفسّر وصول أحمد وزيد معاً في الوقت نفسه في رحلة العودة إلى موقع الانطلاق؟ سرعة زيد كانت أكبر من سرعة أحمد رغم انطلاق أحمد قبل زيد من المحطة.

أندرب وأحل المسائل

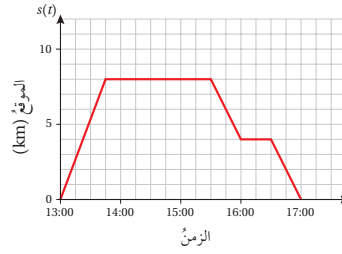
يبيّن منحني التحويل الآتي العلاقة بين المليتر ووحدة الكوب المعياري الذي يُستعمل لقياس الكميات في الطبخ.



1 كمّ ميلترًا من السائل يقابل الكوب المعياري الواحد؟ 240 mL تقريبًا.

2 كمّ كوبًا معياريًا يقابل 150 mL؟ 0.625 تقريبًا.

3 كمّ ميلترًا من السائل تحتاج إليه وصفة تتطلب كوبًا ونصفًا. 360 mL



يبيّن التمثيل البياني المجاور رحلة زيد على دراجته من منزله إلى المركز الثقافي، وفي طريق عودته إلى المنزل توقف عند أحد المحال التجارية.

4 في أي ساعة غادر زيد المنزل؟ 1 p.m.

5 كم كيلومترًا يبعد المركز الثقافي عن منزل زيد؟ 8 km

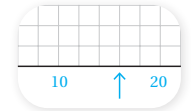
6 كم كيلومترًا يبعد المحل التجاري عن منزل زيد؟ 4 km

7 كم أمضى زيد من الوقت في المركز الثقافي؟ $1 \frac{3}{4} \text{ h}$

8 أجد السرعة المتوسطة لزيد في المدة الزمنية 15:30–16:00 -8 km/h

اتعلّم

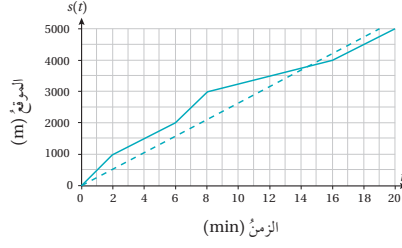
عندما أقرأ التمثيل البياني أخذت مقياس الرسم أولاً، لمعرفة ما يمثله كل مربع في المستوى الإحداثي، ويمكن التحقق من ذلك بالعدد. فمثلاً يشير السهم في الشكل أدناه إلى العدد 16



الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 11) كتاب التمارين: (1 – 8)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (12 – 13) كتاب التمارين: (9 – 14)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 15, 16 كتاب التمارين: (15 – 18)



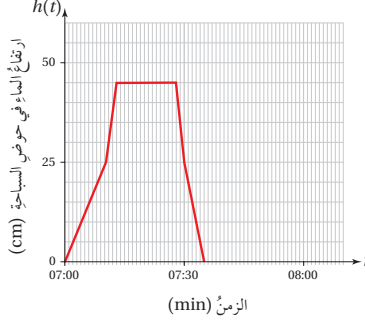
شارك تميم وريان في سباق الجري لمسافة 5000 m، ويبيّن الشكل المجاور موقع كلّ منهما بالنسبة إلى نقطة البداية.

9 أيهما ركض بسرعة متوسطة ثابتة؟ تميم أم ريان؟ أبرّر إجابتي.

10 أجد السرعة المتوسطة لريان خلال السباق كاملاً.

11 من فاز بالسباق؟ ريان أم تميم؟ أبرّر إجابتي.

ريان؛ لأنه وصل أولاً. زمن وصول ريان 19 min، زمن وصول تميم 20 min



ملاً كمال حوض استحمام بالماء، وعندما أصبحت فيه كمية مناسبة من الماء نزل فيه سلة زمنية معينة، ثم خرج وأفرغ الحوض من الماء. يبيّن التمثيل البياني المجاور ارتفاع الماء في الحوض خلال هذه المدة.

12 ما ارتفاع الماء في الحوض قبل نزول كمال فيه؟ 25 cm

13 ما ارتفاع الماء في الحوض عندما نزل كمال فيه؟ 45 cm

14 كم دقيقة أمضى كمال في الحوض؟ 18 min تقريباً.

مهارات التفكير العليا

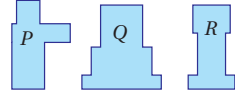
15 تبرير: لماذا لا يمكن أن يكون أي جزء من منحنى الموقع - الزمن رأسياً كما هو مبين في الشكل المجاور؟ أبرّر إجابتي.

لا يمكن أن تزيد المسافة ويبقى الزمن ثابتاً؛ لأن السرعة ستكون غير معرفة.

16 تبرير: يتدفق الماء بمعدل ثابت ومتساوٍ في ثلاثة أنابيب تتصل بالأوعية P و Q و R المبيّنة أدناه لملئها، ويوضح التمثيل البياني المجاور ارتفاع

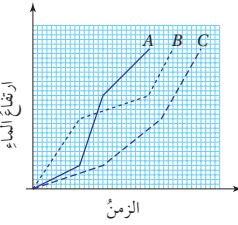
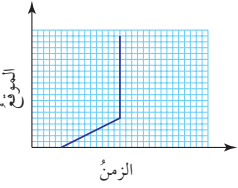
الماء في كلّ وعاء مع مرور الزمن.

أصل المنحنيات A و B و C بالوعاء المناسب لكلّ منها، وأبرّر إجابتي.



$A \rightarrow R, B \rightarrow P, C \rightarrow Q$

أنظر تبريرات الطلبة.



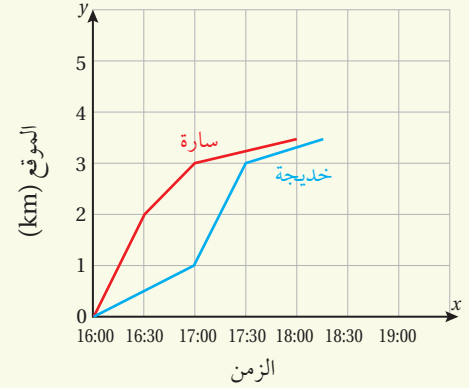
تعليمات المشروع:

- أوزع الطلبة في مجموعات رباعية، وأطلب إليهم جمع صور لمبانٍ أو جسور أو أي معالم أخرى يظهر فيها شكل القوس، ثم حفظ الصور المناسبة في مجلد خاص بالمشروع.

6 الختام

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

« انطلقت سارة وصديقتها خديجة كلّ منهما على دراجتها الهوائية معاً من الموقع نفسه باتجاه السوق، وعندما وصلتا إلى السوق، ربطت كل منهما دراجتها بسلسلة حديدية في الموقف المخصّص. يُبيّن التمثيل البياني الآتي موقع كل منهما أثناء الرحلة من نقطة انطلاقهما إلى السوق.



- 1 كم كانت الساعة عندما انطلقت سارة وخديجة معاً إلى السوق؟ 16:00؛ أي عند الساعة الرابعة بعد الظهر.
- 2 كم يبعد السوق عن موقع انطلاقهما؟ 3.5 km تقريباً.
- 3 أيهما وصلت إلى السوق قبل الأخرى؟ سارة.
- 4 إلى كم دقيقة احتاجت كل منهما للوصول إلى السوق؟ سارة: 120 min، وخديجة: 135 min تقريباً.
- 5 ما المسافة التي قطعتها سارة بعد انطلاقها على دراجتها لمدة ساعة واحدة؟ 3 km
- 6 إلى كم دقيقة احتاجت خديجة لقطع مسافة 3 km على دراجتها؟ 90 min

الاقتران التربيعي Quadratic Function

فكرة الدرس

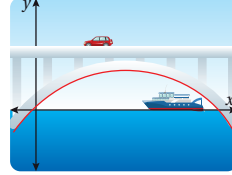
تعرف الاقتران التربيعي وخصائصه.

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً في المستوى الإحداثي.

المصطلحات

الاقتران التربيعي، الصورة القياسية، الاقتران الرئيس، قطع مكافئ، محور التماثل، الرأس، نقطة القيمة الصغرى، نقطة القيمة العظمى.

مسألة اليوم



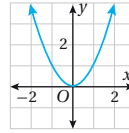
يمثل الاقتران $f(x) = -0.007x^2 + 0.51x + 0.8$ ارتفاع دعامة جسر على شكل قوس عن سطح الماء بالأمتار؛ حيث x المسافة الأفقية من نقطة التقاء الدعامة اليسرى مع سطح الماء. هل يمكن أن تمر سفينة ارتفاعها 8 m أسفل الجسر؟ أبرر إجابتي.

خصائص الاقتران التربيعي

الاقتران التربيعي (quadratic function) اقتران يمكن كتابته على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية، و $a \neq 0$ ، التي تسمى **الصورة القياسية** (standard form) للاقتران التربيعي، ومن أمثله:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \quad g(x) = x^2 - 2x \quad h(x) = 3x^2$$

يُعد الاقتران $f(x) = x^2$ أبسط صور الاقتران التربيعي؛ لذا يُسمى **الاقتران الرئيس** (parent function) لعائلة الاقتران التربيعية.

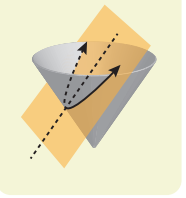


يأخذ التمثيل البياني للاقتران التربيعي شكل الحرف الإنجليزي U، ويُسمى **قطعاً مكافئاً** (parabola)، كما في الشكل المجاور، الذي يُظهر التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x^2$.

محور التماثل (axis of symmetry) هو المستقيم الرأسي الذي يقسم القطع المكافئ إلى جزأين متطابقتين، ويقطعه في نقطة واحدة تُسمى **الرأس** (vertex).

أتعلم

يشق القطع المكافئ من تقاطع مستوي مائل ومخروط.



نتائج الدرس

- تعرف الاقتران التربيعي.
- تعرف الصورة القياسية للاقتران التربيعي:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
- تعرف الاقتران الرئيس لعائلة الاقتران التربيعية.
- تحديد خصائص الشكل العام الذي يتخذه القطع المكافئ.
- إيجاد معادلة محور التماثل وإحداثي رأس منحنى اقتران تربيعي.
- إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتحة لمنحنى اقتران تربيعي علمت قاعدته.
- إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتحة لمنحنى اقتران تربيعي ممثل بيانياً في المستوى الإحداثي.
- تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً.

نتائج التعلم القبلي:

- إيجاد قيمة مقدار جبري عند قيمة معطاة للمتغير.
- تمثيل الاقتران الخطي بيانياً في المستوى الإحداثي.
- إيجاد ميل المستقيم المار بنقطتين.

مراجعة التعلم القبلي ومعالجة الفاقد

التعليمي:

- أوجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأوزّع على كل مجموعة ورقة المصادر 5: لعبة التوصيل.
- أخبر الطلبة أن لديهم 5 دقائق للإجابة عن أكبر عدد ممكن من الأسئلة التي في الورقة.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أطلب كتابة اسمي الطالبين/ الطالبتين عند نهاية الدقائق الخمس في نهاية الورقة، وتبادل الأوراق بين المجموعات.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً، وأطلب إلى المجموعات تصحيح الحلول في الورقة التي بين أيديهم.
- أجمع الأوراق من المجموعات، ثم أعلن فوز ثلاث من المجموعات حصلت على أكبر عدد من الإجابات الصحيحة.
- أعزّز المجموعات الفائزة، وأثني على جهود الطلبة جميعاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، وتأمل الصورة المرفقة بها، ثم أسألهم:
- « ما الأشكال الهندسية التي تظهر في الصورة؟ إجابات محتملة: قوس، مستقيم، قطع مستقيمة، ... »
- « ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع الجسر في المسألة فوق سطح الماء؟ $f(x) = -0.007x^2 + 0.51x + 0.8$ »
- « ما الذي يمثله المتغير x في الاقتران f ؟ المسافة الأفقية على سطح الماء بين أي نقطة على سطح الماء ونقطة التقاء الدعامة اليسرى مع سطح الماء. »
- « هل يبدو القوس الذي يظهر في الصورة متماثلاً حول محور يمكن تحديده؟ نعم. »
- « كيف يُمكن معرفة ما إذا كان بالإمكان مرور سفينة ترتفع عن سطح الماء 8 m أسفل هذا الجسر؟ ستختلف إجابات الطلبة. »
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
- « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟ »
- « من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟ »
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أوضح للطلبة الصورة القياسية للاقتران التربيعي، ثم أسألهم:

« ما أكبر أس للمتغير x في هذه الصورة؟ 2 »

- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، ثم أدون على اللوح مجموعة من الأمثلة واللامثلة للاقتران التربيعي، مثل:

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 1, \quad g(x) = 3x^2 - 2,$$

$$h(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad p(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

- وأؤكد أن أكبر أس للمتغير x في الاقترانات التربيعية يجب أن يكون 2 وأن يظهر الاقتران بالصورة القياسية.

- أوضح للطلبة أن الاقتران $f(x) = -x^2$ هو اقتران تربيعي بالصورة القياسية، حيث $a = -1, b = 0, c = 0$ ، وأؤكد أن معامل x^2 هو المعامل الوحيد الذي لا يمكن أن يساوي صفراً ($a \neq 0$) في الصورة القياسية للاقتران التربيعي؛ لأنه إن ساوى الصفر فإن الاقتران لا يكون تربيعياً، بل يصبح خطياً، أي $f(x) = 0$ ، ويُمثل المحور الأفقي x .

- أطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة للاقتران التربيعي، وفي كل مرة أدون ما يذكره الطلبة على اللوح وأطلب إليهم تحديد قيمة كل من a, b, c ثم كتابة الاقتران المُعطى بالصورة القياسية، مثلاً: إذا ذكر أحد الطلبة الاقتران $f(x) = 7 - 2x - 3x^2$. أوضح للطلبة أن الصورة القياسية لهذا الاقتران التربيعي هي: $f(x) = -3x^2 - 2x + 7$ ، وأنّه بترتيب الحدود تنازلياً حسب الأسس.

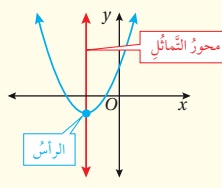
- أوضح للطلبة أن الاقتران $f(x) = x^2$ هو أبسط صور الاقترانات التربيعية، ويسمى الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية، ثم أسألهم:

« ما قيمة المعامل a في الاقتران التربيعي الرئيس؟ 1 »

- أستمع بمجسم لمخروط مصنوع من الورق المقوى لتوضيح كيف ينتج الشكل العام للاقتران التربيعي الذي يشبه الحرف U (يسمى القطع المكافئ) من تقاطع مُستوى مائل ومخروط.

مفهوم أساسي

محور تماثل الاقتران التربيعي ورأسه



معادلة محور التماثل لمنحنى الاقتران التربيعي

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ حيث } a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ وإحداثيّا رأسيه هما:}$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

مثال 1

أجد معادلة محور التماثل، وإحداثيّي رأس الاقتران التربيعي $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بما أن $a = 5$ و $b = -10$ ، فيمكن إيجاد معادلة محور التماثل كالآتي:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

معادلة محور التماثل

$$= -\frac{-10}{2(5)}$$

بتعويض $a = 5, b = -10$

$$= 1$$

بالتبسيط

إذن، معادلة محور التماثل هي: $x = 1$

لإيجاد إحداثيّي الرأس، أعد القيمة الناتجة عن معادلة محور التماثل هي الإحداثي x لرأس القطع المكافئ، ثم أعوضها في قاعدة الاقتران لإيجاد الإحداثي y .

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 4$$

الاقتران المُعطى

$$f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 4$$

بتعويض $x = 1$

$$= -1$$

بالتبسيط

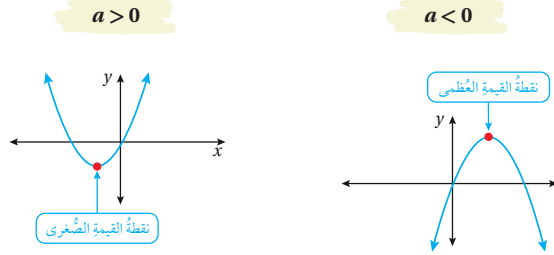
إذن، إحداثيّا الرأس $(1, -1)$

معادلة محور التماثل $x = -1$ ، الرأس $(-1, -2)$

أنتحقق من فهمي

أجد معادلة محور التماثل، وإحداثيّي رأس الاقتران التربيعي $f(x) = x^2 + 2x - 1$

يكون التمثيل البياني للاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ ، مفتوحاً للأعلى إذا كان $a > 0$ ، وتُسمى أدنى نقطة فيه **نقطة القيمة الصغرى** (minimum point)، ويكون مفتوحاً للأسفل إذا كان $a < 0$ ، وتُسمى أعلى نقطة فيه **نقطة القيمة العظمى** (maximum point)، وتمثل نقطة القيمة الصغرى أو نقطة القيمة العظمى رأس القطع المكافئ.



مجال الاقتران التربيعي ومداة

مجال الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ ، هو جميع الأعداد الحقيقية، أما مداة فيكون:

- مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد على القيمة الصغرى أو تساويها إذا كان $a > 0$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن القيمة العظمى أو تساويها إذا كان $a < 0$.

مفهوم أساسي

لغة الرياضيات

يُشير مُصطلح نقطة القيمة العظمى إلى النقطة (x, y) ، أما مُصطلح القيمة العظمى فيشير إلى الإحداثي y لنقطة القيمة العظمى، وكذلك الأمر بالنسبة إلى نقطة القيمة الصغرى.

مثال 2

أجد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى وأتجاه الفتحة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 6x + 9$

في الاقتران $f(x) = x^2 + 6x + 9$ ، $a = 1$ ، $b = 6$

بما أن $a > 0$ فالتمثيل البياني للاقتران التربيعي يكون مفتوحاً للأعلى، ويكون للاقتران قيمة صغرى يمكن إيجادها كالآتي:

- أناقش مع الطلبة المفهوم الأساسي (محور تماثل الاقتران التربيعي ورأسه)، وأوضح ذلك برسم مناسب على اللوح.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

سؤال إضافي:

أجد معادلة محور التماثل، وإحداثيي رأس الاقتران التربيعي $f(x) = 4x^2 + 3$

محور التماثل $x = 0$ ، الرأس $(0, 3)$

إرشاد: إذا توقّر في المدرسة جهاز Data Show، فيمكن استعماله للمساعدة في عرض الصور والتمثيلات البيانية عن طريق نسخة إلكترونية من كتاب الطالب، ما يسهم في توفير الوقت والجهد في رسمها ولو بشكل تقريبي على اللوح.

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام الملونة عند مناقشة المفهوم الأساسي (محور تماثل الاقتران التربيعي ورأسه)؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يمتنعون بذكاء بصري.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة بالخلط بين مفهوم الاقتران ومفهوم المعادلة؛ لذا أؤكد لهم أن كل اقتران هو معادلة، ولكن ليست كل معادلة اقتراناً، فعلى سبيل المثال: المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ هي علاقة وليست اقتراناً.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدریب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

مثال 2

- أرسم منحنيي اقترانين تربيعيين على اللوح البياني، أحدهما مفتوح للأعلى والآخر مفتوح للأسفل، وأعيّن نقطة الرأس لكل من المنحنيين، وأوضح باستعمال الصيغة القياسية علاقة إشارة المعامل a باتجاه فتحة القطع المكافئ، ثم أسأل الطلبة:
- « أي الاقترانين الممثلين له نقطة قيمة عظمى، وأيها له نقطة قيمة صغرى؟ المفتوح للأعلى له نقطة قيمة صغرى، والمفتوح للأسفل له نقطة قيمة عظمى.

- أناقش إجابات الطلبة عن السؤال السابق لتوضيح هذين المفهومين، ثم أستعمل المفهوم الأساسي (مجال الاقتران التربيعي ومداه) لتوضيح علاقة المجال والمدى باتجاه الفتحة ونقطة القيمة العظمى أو نقطة القيمة الصغرى (رأس القطع المكافئ).
- أنتقل إلى مناقشة فرعي المثال 2، وأتبع التسلسل الوارد في كتاب الطالب، مع ذكر التبرير في كل خطوة.

إرشاد: ألقت انتباه الطلبة إلى صندوق (لغة الرياضيات) و(الدعم البياني) عند مناقشة الأفكار التي يتناولها المثال 2 وتوضيحها.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x للرأس.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثي x للرأس

$$= -\frac{6}{2(1)}$$

بتعويض $a = 1, b = 6$

$$= -3$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد الإحداثي y للرأس.

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

الاقتران المُعطى

$$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9$$

بتعويض $x = -3$

$$= 0$$

بالتبسيط

إذن، القيمة الصغرى للاقتران هي 0

المجال: جميع الأعداد الحقيقية أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أو الفترة $[0, \infty)$.

$$2 \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

في الاقتران $f(x)$: $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للاقتران التربيعي يكون مفتوحاً للأسفل، ويكون للاقتران قيمة عظمى يمكن إيجادها كالآتي:

الخطوة 1: أجد الإحداثي x للرأس.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثي x للرأس

$$= -\frac{1}{2(-\frac{1}{2})}$$

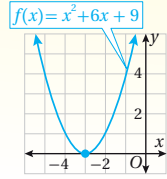
بتعويض $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

$$= 1$$

بالتبسيط

الدعم البياني

يُظهر التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x^2 + 6x + 9$ أنّه مفتوح للأعلى ورأسه النقطة $(-3, 0)$.



- أوضح للطلبة أن للاقتارات التربيعية تطبيقات حياتية عدّة، وأذكر لهم بعضها، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة أخرى.

- أنتقل إلى مناقشة خطوات الحل في المثال 3 الذي يوضح أحد التطبيقات الحياتية للاقتار التربيعي، وأوضح أن متغير الاقتار التربيعي في مثل هذه الحالة هو الزمن t ، وأن وحدة قياسه يمكن أن تكون الثانية أو الدقيقة أو الساعة (في بعض التطبيقات تشمل وحدات قياس الزمن أجزاء من الثانية).

إرشاد: عند مناقشة الفرع 2 من المثال 3 مع الطلبة، أؤكد أن أقصى ارتفاع تصل إليه نجمة الألعاب النارية يتحدد عند رأس القطع المكافئ.

الخطوة 2: أجد الإحداثي y للرأس.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

الاقتار المعطى

$$f(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + 1 + 4$$

بتعويض $x = 1$

$$= 4\frac{1}{2}$$

بالتبسيط

إذن، القيمة العظمى للاقتار هي $4\frac{1}{2}$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \leq 4\frac{1}{2}\}$ أو الفترة $(-\infty, 4\frac{1}{2}]$.

أنظر الهامش

أجد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتح لكل قطع مكافئ مما يأتي:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 8$

b) $f(x) = -3x^2 + 12x + 9$

للاقتارات التربيعية تطبيقات حياتية كثيرة، منها الألعاب النارية، التي تتكوّن من أنبوب يحتوي على البارود ومجموعة من الأغلفة الصغيرة تُسمى كل منها نجمة، وعند إشعال الفتيل تنطلق النجوم إلى الأعلى لينفجر كل نجم عند ارتفاع مُعيّن، ويرسُم الضوء الناتج عن انفجار النجم في الجوّ قطعاً مكافئاً.



ألعاب نارية: يمثل الاقتار $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$ ارتفاع نجمة ألعاب نارية عن سطح الأرض بالمتار، بعد t ثانية من انفجارها.

مثال 3: من الحياة

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

(a) اتجاه فتحة القطع: للأعلى.

القيمة الصغرى: $7\frac{1}{2}$

المجال: $(-\infty, \infty)$ أو $\mathbb{R}$

المدى: $[7\frac{1}{2}, \infty)$

(b) اتجاه فتحة القطع: للأسفل.

القيمة العظمى: 21

المجال: $(-\infty, \infty)$ أو $\mathbb{R}$

المدى: $(-\infty, 21]$

تنويع التعليم:

- ألفت انتباه الطلبة إلى المعلومة المتعلقة بمحتويات اللعبة النارية والواردة في هامش المثال 3، وفي حالة توفر جهاز Data Show وجهاز حاسوب مرتبط بالإنترنت، يُمكن عرض مقطع مرئي (فيديو) قصير يوضح إطلاق ألعاب نارية، أو عن طريق مسح الرمز المجاور الذي يحتوي على مقطع مرئي (فيديو) عن إطلاق ألعاب نارية بمناسبة عيد استقلال المملكة الأردنية الهاشمية 76



- في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في فهم المسألة اللفظية؛ لذا أُنصحهم بعض الوقت، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة بَروية؛ لتحديد معطيات المسألة والمطلوب فيها، ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة. وفي مثل هذا النوع من المسائل يُمكن استعمال استراتيجية رسم شكل تقريبي لنمذجة المسألة بطريقة بصرية.

معلومة

تحتوي اللعبة النارية على فتيل يُشعل البارود، وعندما تسخن المواد الكيميائية تمتص ذراتها الطاقة فتنتج الأضواء، لتفقد الذرات طاقتها الزائدة. وتختلف كميات الطاقة والألوان تبعاً لاختلاف المواد الكيميائية المستخدمة.

1 أجد الارتفاع الذي انفجرت عنده النجمة في الجو.

الزمن الذي تنفجر عنده النجمة في الجو هو $t = 0$

$$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$$

الافتراض المعطى

$$h(0) = -16(0)^2 + 72(0) + 520$$

بتعويض $t = 0$

$$= 520$$

بالتبسيط

إذن، انفجرت النجمة على ارتفاع 520 m من سطح الأرض.

2 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه النجمة.

يصل النجم إلى أقصى ارتفاع له عند رأس القطع المكافئ؛ لذا أجد القيمة العظمى للقطع.

الخطوة 1: أجد الإحداثي t للرأس.

$$t = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثي t للرأس

$$= -\frac{72}{2(-16)}$$

بتعويض $a = -16, b = 72$

$$= 2.25$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد الإحداثي y للرأس.

$$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$$

الافتراض المعطى

$$h(2.25) = -16(2.25)^2 + 72(2.25) + 520$$

بتعويض $t = 2.25$

$$= 601$$

بالتبسيط

إذن، أقصى ارتفاع تصل إليه النجمة 601 m

تحقق من فهمي

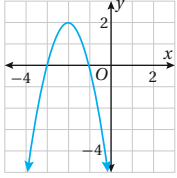
كرة قدم: يمثل الافتراض $h(t) = -16t^2 + 64t$ ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض بالأقدام، بعد t ثانية من ركلها.

(a) أجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها. (b) أجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة. 64 ft

تحديد خصائص الاقتران التربيعي من تمثيله البياني

تعلمت في المثالين السابقين تحديد خصائص الاقتران التربيعي من قاعدته، وسأتعلم في هذا المثال تحديد خصائصه من تمثيله البياني.

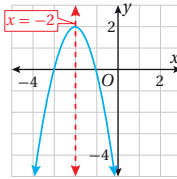
مثال 4



أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى للقطع المكافئ الممثل بيانياً في المستوى الإحداثي المجاور:

الخطوة 1: أجد إحداثي الرأس.

بما أن القطع مفتوح للأسفل فالرأس يمثل نقطة العظمى، وهي $(-2, 2)$.



الخطوة 2: أجد معادلة محور التماثل.

بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يقسم القطع المكافئ إلى جزأين متطابقتين، ويقطع القطع المكافئ في الرأس، فإن معادلة محور التماثل هي $x = -2$.

الخطوة 3: أجد القيمة العظمى.

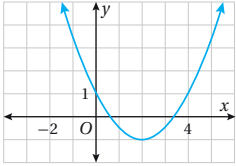
بما أن القيمة العظمى هي الإحداثي y لنقطة الرأس، فإن القيمة العظمى للاقتران هي 2.

الخطوة 4: أجد المجال والمدى.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \leq 2\}$ أو الفترة $(-\infty, 2]$.

تحقق من فهمي



أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى للقطع المكافئ الممثل بيانياً في المستوى الإحداثي المجاور: أنظر الهامش.

اتذكر

الإحداثي x للرأس هو نفسه العدد الذي يظهر في معادلة محور التماثل.

إرشادات

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتذكر) الوارد في هامش الخطوة 2 من خطوات حل المثال 4، وأوضح لهم أن هدفه التذكير بمعلومة مهمة سبق تعلمها.
- يمكن استعمال اللوح البياني ورسم منحنيات تقريبية مشابهة للتمثيلات البيانية المعطاة، مع مراعاة الدقة في تعيين إحداثي رأس القطع المكافئ كما هو مظهر على شبكة المربعات في المستوى الإحداثي.
- أوجه الطلبة إلى أهمية القراءة الصحيحة لكيفية تقسيم المحاورين الأفقي والرأسي في المستوى الإحداثي.

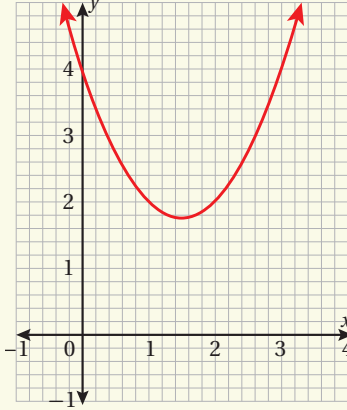
إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4):

معادلة محور التماثل $x = 2$ ، القيمة الصغرى $f(2) = -1$ ، الرأس $(2, -1)$ ، المجال $(-\infty, \infty)$ أو $\mathbb{R}$ ، المدى $[-1, \infty)$.

مثال إضافي:

أجد إحداثيي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى للقطع المكافئ الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

1



إحداثيا الرأس: $(1.5, 1.8)$

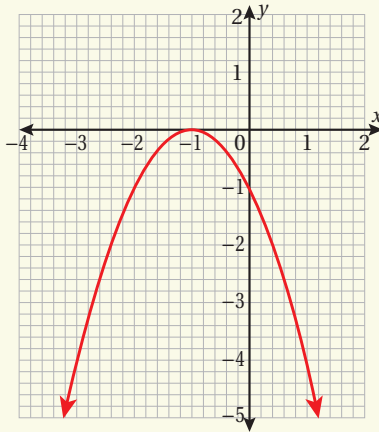
محور التماثل: $x = 1.5$

القيمة الصغرى هي: 1.8

المجال هو: R أو $(-\infty, \infty)$

المدى هو: $\{y \mid y \geq 1.8\}$

2



إحداثيا الرأس: $(-1, 0)$

محور التماثل: $x = -1$

القيمة العظمى هي: 0

المجال هو: R أو $(-\infty, \infty)$

المدى هو: $\{y \mid y \leq 0\}$

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

يمكن استعمال خصائص الاقتران التربيعي لتمثيله بيانياً.

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

مفهوم أساسي

لتمثيل الاقتران التربيعي بيانياً، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أحدّد اتجاه فتحة القطع المكافئ، وأجد معادلة محور التماثل وإحداثيي الرأس، وأحدّد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة 2: أجد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y .

الخطوة 3: أجد نقطة أخرى باختبار قيمة x تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y يمين محور التماثل أو يساره.

الخطوة 4: أمثل رأس القطع والنقطتين اللتين أوجدتهما من الخطوات 2 و 3، ثم أستعمل التماثل لأعكس النقطتين من الخطوات 2 و 3 حول محور التماثل؛ لإيجاد نقطتين أخريين على التمثيل البياني.

الخطوة 5: أصل بين النقاط بمُنحنى أملس.

إرشاد

يمكن أخذ أي نقطتين في أي جهة من محور التماثل وإيجاد انعكاس لكل منهما.

مثال 5

أمثل الاقتران: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانياً.

الخطوة 1: أحدّد اتجاه فتحة القطع المكافئ، وأجد معادلة محور التماثل وإحداثيي الرأس، وأحدّد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

في الاقتران $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ ، $a = -3$ ، $b = 6$

بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحاً للأسفل، ويمثل الرأس نقطته العظمى.

- أوضح للطلبة أنه يمكن استعمال خصائص الاقتران التربيعي آنفة الذكر لتمثيله بيانياً، ثم أدون في زاوية اللوح ملخصاً للخطوات الواردة في المفهوم الأساسي (تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً)، نحو: الخطوة 1: تحديد الخصائص، الخطوة 2: تحديد المقطع y ، ... وهكذا.

- أناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأؤكد أن من السهل تحديد نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y ، ولتحديد نقاط أخرى يمر بها منحنى الاقتران التربيعي يمكن اختيار أي قيمة صحيحة للمتغير x تقع يمين محور التماثل أو يساره، وإيجاد صورتها في الاقتران التربيعي ثم إيجاد انعكاس لهذه النقطة حول محور التماثل لتعين نقطة أخرى يمر بها المنحنى، ويمكن تكرار ما سبق مع نقاط أخرى، كما في الخطوات 3 و 4.

- أذكر الطلبة بمفهوم الانعكاس لنقطة حول محور رأسي، عند تناول الخطوة 4 بالشرح والتوضيح على اللوح البياني.

إرشادات:

- أستعمل اللوح البياني لرسم منحنيات دقيقة في المستوى الإحداثي.
- أوجه الطلبة إلى استعمال أوراق الرسم البياني المرفقة في كتاب التمارين عند تمثيل الاقترانات التربيعية في المستوى الإحداثي.
- أؤكد للطلبة أنه كلما زاد عدد النقاط التي تُحدد بحيث يمر بها منحنى الاقتران التربيعي، زادت دقة التمثيل البياني.

أجد مُعادلة محور التماثل.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

مُعادلة محور التماثل

$$= -\frac{6}{2(-3)}$$

بتعويض $a = -3, b = 6$

$$= 1$$

بالتبسيط

إذن، مُعادلة محور التماثل هي $x = 1$.

أجد إحداثي الرأس.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

الاقتران المُعطى

$$f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$$

بتعويض $x = 1$

$$= 8$$

بالتبسيط

إذن، إحداثي الرأس $(1, 8)$.

الخطوة 2: أجد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y .

لإيجاد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، أعوض $x = 0$ في قاعدة الاقتران.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

الاقتران المُعطى

$$f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$$

بتعويض $x = 0$

$$= 5$$

بالتبسيط

إذن، نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y هي $(0, 5)$.

الخطوة 3: أجد نقطة أخرى باختيار قيمة لـ x تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y يمين محور التماثل أو يساره.

أختار $x = -1$

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

الاقتران المُعطى

$$f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$$

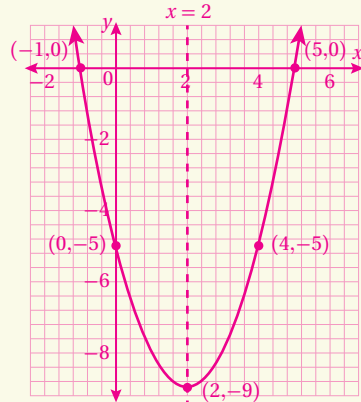
بتعويض $x = -1$

$$= -4$$

بالتبسيط

إذن، النقطة الأخرى هي $(-1, -4)$.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 5):



أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (22 - 24).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

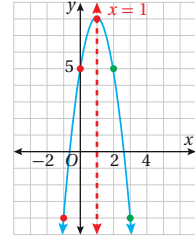
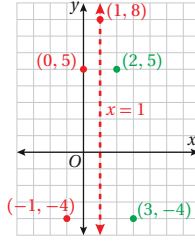
- في السؤال 22 (مسألة مفتوحة)، ألفت انتباه الطلبة إلى وجود عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة.
- في السؤال 24 (تحدٍّ)، أوجه الطلبة إلى الانتباه لاتجاه فتحة القطع المكافئ، والمقطعين من المحور x .

أَتَعَلَّمُ

بما أنَّ محور التماثل يقسم القطع المكافئ جزأين متطابقتين، فإنَّ لكل نقطة على يسار هذا المحور نقطة تناظرها على يمينه وتبعد عنه المسافة نفسها، ويكون للنقطتين الإحداثي y نفسه.

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.



الخطوة 4: أمثل النقاط في المستوى الإحداثي.

أمثل رأس القطع والنقطتين اللتين أوجدتهما من الخطوتين 2 و 3، وهما (0, 5) و (-1, -4)، ثم أستعمل التماثل لأعكس النقطتين (0, 5) و (-1, -4) حول محور التماثل؛ لإيجاد نقطتين أخريين على التمثيل البياني.

الخطوة 5: أصِل بين النقاط بمنحنى أملس.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أمثل الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x - 5$ أنظر الهامش.

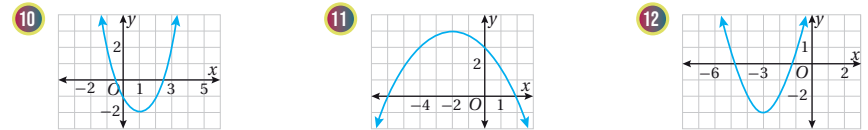
(1-12) أنظر ملحق الإجابات.

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال كلٍّ من الاقترانات التربيعية الآتية ومداها:

- 1 $f(x) = 3x^2$
- 2 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
- 3 $f(x) = -x^2 + 5$
- 4 $f(x) = x^2 + 3$
- 5 $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$
- 6 $f(x) = -8x + 2x^2$
- 7 $f(x) = -2x^2 - 6x + 4$
- 8 $f(x) = 5 + 16x - 2x^2$
- 9 $f(x) = -2(x-4)^2 - 3$

أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال كلٍّ من القطوع المُكافئة الآتية ومداها:



الواجب المنزلي:

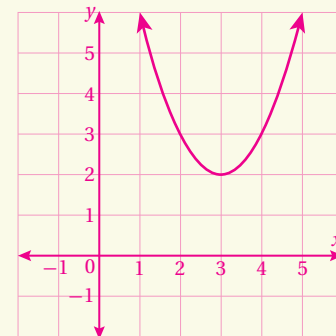
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 18, 19 كتاب التمارين: (1 - 6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 23, (17 - 21) كتاب التمارين: (5 - 9)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (20 - 24) كتاب التمارين: (6 - 12)

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« أكتب الاقتران التربيعي $f(x) = x^2 - 6x + 11$ بالصورة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ، حيث a, h, k أعداد حقيقية، و $a \neq 0$ ، بحيث تكون النقطة (h, k) رأساً للقطع المكافئ f ، وأمثلة بيانياً في المستوى الإحداثي.

$$f(x) = (x-3)^2 + 2$$



نشاط التكنولوجيا:

- يمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل الاقتران التربيعي وتحديد نقطة القيمة العظمى أو الصغرى له باتباع الخطوات الآتية:

« إدخال قاعدة الاقتران التربيعي الذي يُراد تمثيله في شريط الإدخال Input باستعمال أزرار الآلة الحاسبة الموجودة أسفل الشاشة، ثم ضغط Enter.

- « اختيار  من شريط الأدوات ، ثم اختيار  من القائمة المنسدلة، ثم النقر مرة واحدة على منحنى الاقتران التربيعي المُمثل، ويمكن استبدال هذه الخطوة بإدخال الأمر الآتي في شريط الإدخال Input، ثم ضغط Enter:

[أكتب بين القوسين اسم الاقتران بحرف واحد] Extremum

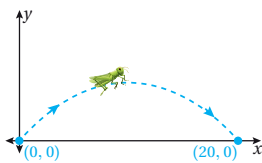
مثال: Input: Extremum [f]

- أطلب إلى الطلبة تمثيل مجموعة من الاقترانات التربيعية الواردة في الدرس باستعمال برمجية جيو جبرا، وتحديد نقطة القيمة العظمى أو الصغرى لها باستعمال البرمجية ومقارنتها مع الإجابات التي حصلوا عليها من خلال الحل الجبري.

(13-18) أنظر ملحق الإجابات.

أمثل كلاً من الاقترانات الآتية بيانياً: إرشاد: أَسْمَلُ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

- 13 $f(x) = x^2 + 6x - 2$ 14 $f(x) = 2x^2 - 10x + 1$ 15 $f(x) = -3x^2 + 18x + 6$
16 $f(x) = -4x^2 - 8x + 7$ 17 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ 18 $f(x) = 5x^2 - 20$



- 19 **حشرات:** يمثل الاقتران $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$ ارتفاع جُنْدُبٍ بالسنتيمتر فوق سطح الأرض عند قفزِهِ؛ حيث x المسافة الأفقية من نقطة القفز. أجد أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجُنْدُب.
 $f(10) = 5 \text{ cm}$

رياضة: يمثل الاقتران $h(t) = -4.9t^2 + 3.8t + 0.5$ ارتفاع كرة مضرب بالامتار فوق سطح الأرض، بعد t ثانية من ضرب سميّر لها.

20 أجد ارتفاع الكرة لحظة ضرب سميّر لها. $h(0) = 0.5 \text{ m}$

21 أجد أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه الكرة. $f(0.4) \approx 1.24 \text{ m}$



مهارات التفكير العليا

- 22 **مسألة مفتوحة:** أكتب قاعدة اقتران تربيعي مُعادلة محور تماثله $x = -2$. إجابة ممكنة: $f(x) = x^2 + 4x - 1$.
23 **اكتشف الخطأ:** حاول هشام ومَلِك إيجاد مُعادلة محور التماثل للقطع المكافئ $f(x) = -2x^2 - 16x + 7$ فكانت إجابتهما كالآتي. أيهما إجابته صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

مَلِكُ
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-2)}$$

$$x = -4$$

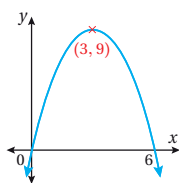
هشامُ
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)}$$

$$x = 4$$

إجابة ملك صحيحة. عدّ هشام $b = 16$ ، والصحيح أنها -16 .

24 **تحدّ:** أجد قاعدة الاقتران المُمثل بيانياً في الشكل المُجاور.

$$f(x) = -x^2 + 6x$$



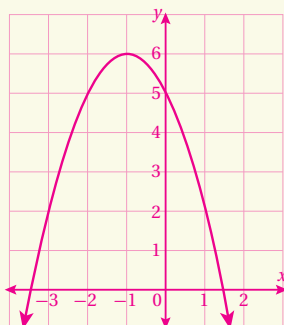
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة 2 من خطوات تنفيذ المشروع.

الختام

6

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:
« أجد إحداثيي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى للاقتران التربيعي $f(x) = 5 - 2x - x^2$ ، ثم أمثله بيانياً.



الرأس: $(-1, 6)$ ، معادلة محور التماثل: $x = -1$

القيمة العظمى: 6 ، المجال: $(-\infty, \infty)$ ،

المدى: $\{y | y \leq 6\}$

استكشاف التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي Exploring Transformations of Quadratic Function

يمكنني استعمال برمجية جيوجبرا؛ لاستكشاف أثر التحويلات الهندسية في منحنى الاقتران
الرئيس $f(x) = x^2$.

نشاط

الخطوة 1: أكتب قاعدة الاقتران $f(x) = x^2$ في شريط الإدخال، ثم أضغط $\leftarrow$ ، ليظهر التمثيل البياني للاقتران.

الخطوة 2: أنقر على أيقونة $a=2$ Slider من شريط الأدوات، ثم أنقر على الموقع الذي أريد في الشاشة، ليظهر مربع حوار أجدد فيه أعلى قيمة وأقل قيمة لـ a (مثلاً، أقل قيمة -10 وأعلى قيمة 10)، وأضبط الأيقونة على العدد 1

الخطوة 3: أكرر الخطوة السابقة لإدراج مؤشرين للتحكم، وأسمي أحدهما h ، والآخر k ، وأضبط المؤشرين على العدد 0

الخطوة 4: أكتب القاعدة $g(x) = a(x-h)^2 + k$ في شريط الإدخال، ثم أضغط $\leftarrow$ ، ليظهر التمثيل البياني للاقتران.

الخطوة 5: أحرك المؤشر a لتصبح قيمته مرة أكبر من 1، ومرة بين 0 و 1، ومرة أقل من 1، ثم أجيب عن الأسئلة الآتية:

- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون أكبر من 1 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ إذا كان $a > 1$ يكون منحنى الاقتران g مفتوحاً للأعلى مثل منحنى f ، ويقل انفتاح منحنى g عن منحنى f .
- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون بين 0 و 1 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ إذا كان $0 < a < 1$ يكون منحنى الاقتران g مفتوحاً للأعلى مثل منحنى f ، ويزيد انفتاح منحنى g عن منحنى f .
- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون أصغر من 0 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ إذا كان $a < 0$ يكون منحنى الاقتران g مفتوحاً للأسفل عكس منحنى f . إذا كان $|a| > 1$ يقل انفتاح منحنى g عن منحنى f ، وإذا كان $|a| < 1$ يزيد انفتاح منحنى g عن منحنى f .

85

هدف النشاط



استعمال برمجية جيوجبرا لاستكشاف أثر التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد) في منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، وتحديد كيف يتغير شكل المنحنى عند تغيير القيم a, h, k في الصيغة:
 $g(x) = a(x-h)^2 + k$

خطوات العمل:

- أرافق الطلبة إلى مختبر الحاسوب، ثم أجلسهم في مجموعات صغيرة أمام أجهزة الحاسوب.
- أطلب إلى الطلبة فتح برمجية جيوجبرا إذا كانت مثبتة على الأجهزة، أو فتحها من شبكة الإنترنت باستعمال الرابط الآتي:

<https://www.geogebra.org/classic?lang=ar>

- أراجع الطلبة في أبرز أوامر البرمجية ومهارات استعمالها، مثل: إدخال الاقترانات في شريط الإدخال، وكيفية عمل مؤشر (منزلة) للتحكم بتغيير بعض القيم التي يراود دراسة أثر تغييرها في شكل منحنيات الاقترانات.

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ خطوات النشاط معاً، والإجابة في دفاترهم عن الأسئلة التي تلي الخطوات 5 و 6 و 7 من خطوات النشاط، ثم أتجول بينهم، وأقدم المساعدة لمن يحتاج إليها.
- أصحح إجابات الطلبة في دفاترهم، وأقدم لكل منهم التغذية الراجعة المناسبة.

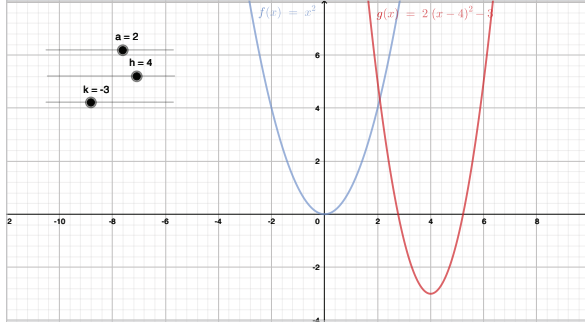
أتعلم

يمكنني تغيير مواقع المؤشرات في الشاشة وترتيبها فوق بعضها باستعمال خاصية النقر والسحب.

الخطوة 6: أحرّك المؤشّر h بحيث تصبح قيمته مرةً أكبر من 0، ومرةً أقل من 0، ثمّ أجب عن الأسئلة الآتية:

- في أيّ الاتجاهات يتحرّك الاقتران g عند تحريك المؤشّر h ؟ **إلى اليمين أو اليسار (أفقي).**
- ما تأثير تغيير قيمة h عندما تكون أكبر من 0 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ **يتحرك لليمين.**
- ما تأثير تغيير قيمة h عندما تكون أصغر من 0 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ **يتحرك لليسار.**

الخطوة 7: أحرّك المؤشّر k بحيث تصبح قيمته مرةً أكبر من 0، ومرةً أقل من 0، ثمّ أجب عن الأسئلة الآتية:



أتعلّم

يمكنني تغيير لون الاقتران، بالتّقر على مُنحناه واختيار (settings) ثمّ (color) من القائمة التي تظهر يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا.

- في أيّ الاتجاهات يتحرّك الاقتران g عند تحريك المؤشّر k ؟ **إلى الأعلى أو الأسفل (رأسي).**
- ما تأثير تغيير قيمة k عندما تكون أكبر من 0 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ **يتحرك للأعلى.**
- ما تأثير تغيير قيمة k عندما تكون أصغر من 0 في منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟ **يتحرك للأسفل.**

الخطوة 8: أضبط المؤشرات الثلاثة على أعدادٍ أختارها، ثمّ أصفُ علاقةً مُنحني الاقتران g بِمنحني الاقتران الرئيس f . **أنظر إجابات الطلبة.**

إرشادات:

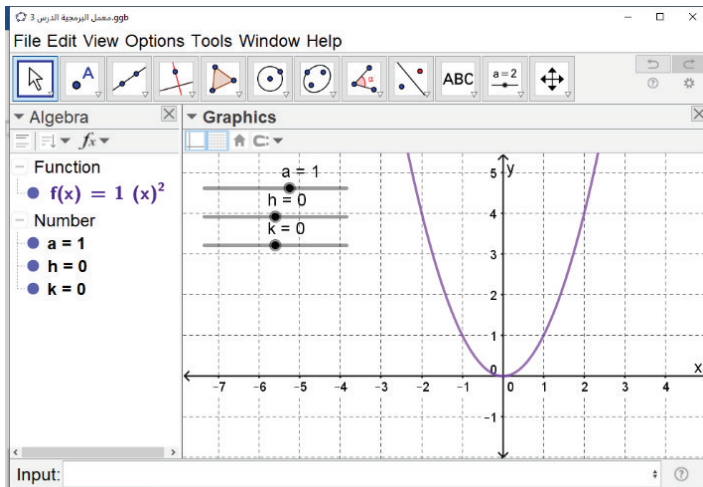
• توفيرًا للوقت، يُمكن تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجّانية على أجهزة الحاسوب قبل بدء الحصة.

• يُمكن إجراء الآتي لتنفيذ النشاط باستعمال برمجية جيو جبرا:

« إدخال $a = 1$ ، ثم Enter في شريط الإدخال، ثم إدخال $h = 0$ ، ثم Enter، ثم إدخال $k = 0$ ، ثم Enter

« إدخال الصيغة: $f(x) = a(x-h)^2 + k$ في شريط الإدخال، ثم Enter

« في نافذة Algebra، يمكن إظهار المؤشرات (المنزلة) بتفعيل اللون الأزرق بجانب كل من a ، h ، k كما في الصورة المجاورة، ثم تحريك المؤشر وملاحظة كيف يتغيّر شكل المنحني.



التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي Transformations of Quadratic Function

فكرة الدرس

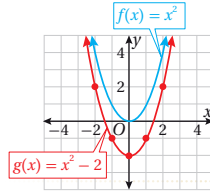
تمثيل منحنيات الاقترانات التربيعية الناتجة عن تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس.

المصطلحات

التحويل الهندسي، الانسحاب، الانسحاب الرأسي، الانسحاب الأفقي، التمدد، الانعكاس، صيغة الرأس.

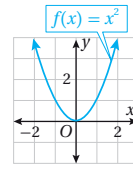
مسألة اليوم

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنَي الاقترانين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 - 2$.
ما العلاقة بين منحنَي الاقترانين f و g ؟



الانسحاب

تعلمت سابقاً أنّ الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية هو $f(x) = x^2$ ، الذي يأخذ منحناء شكل القطع المكافئ، كما في الشكل المجاور.



أمّا منحنيات الاقترانات التربيعية الأخرى فهي ناتجة من تطبيق **تحويل هندسي** (transformation) أو أكثر على منحنى الاقتران الرئيس، بحيث تُغيّر هذه التحويلات الهندسية موقع الاقتران الرئيس أو شكله.

يُعدّ **الانسحاب** (translation) أحد التحويلات الهندسية التي تؤثر في موقع الاقتران الرئيس وتنقله إما إلى الأعلى أو إلى الأسفل أو إلى اليمين أو إلى اليسار دون تغيير في أبعاده.

عند إضافة الثابت الموجب k إلى قاعدة الاقتران الرئيس $f(x)$ أو طرحه منها، فإنّ منحنى الاقتران $f(x) \pm k$ هو منحنى الاقتران الرئيس مُزاحاً إلى الأعلى أو إلى الأسفل بمقدار k وحدة، ويُسمّى هذا التحويل **الانسحاب الرأسي** (vertical translation).

نتائج الدرس

- وصف كيفية ارتباط منحنى الاقتران التربيعي من الصورة: $g(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ ، بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$.
- كتابة قاعدة الاقتران التربيعي من الصورة: $g(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ الناتج من تحويلات هندسية أُجريت على منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$.
- إيجاد إحداثيي رأس القطع المكافئ، ومعادلة محور تماثله، والقيمة العظمى أو الصغرى له، باستعمال صيغة الرأس: $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.

نتائج التعلّم القبلي:

- إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير الانسحاب.
- إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير انعكاس حول المحور x .
- إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير انعكاس حول المحور y .

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأوزع على كل مجموعة ورقة المصادر 6: التحويلات الهندسية.
- أوجه الطلبة إلى أن لديهم 5 دقائق للقيام بما هو مطلوب في ورقة المصادر.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أطلب كتابة اسمي الطالبين / الطالبتين عند نهاية الدقائق الخمس في نهاية الورقة، وتبادل الأوراق بين المجموعات.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً، وأطلب إلى المجموعات تصحيح الحلول في الورقة التي بين أيديهم.
- أجمع الأوراق من المجموعات، وأعزز الطلبة في جميع المجموعات وأثني على جهودهم.

الاستكشاف

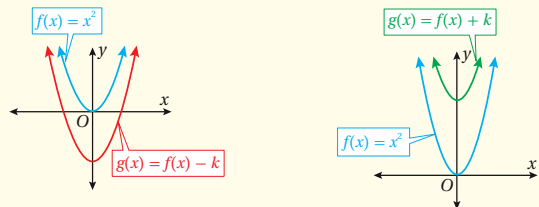
- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) وتأمل الشكل المرفق بها، ثم أسألهم:
 - « ما إحداثي رأس منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ ؟ $(0, 0)$ »
 - « ما إحداثي رأس منحنى الاقتران $g(x) = x^2 - 2$ ؟ $(0, -2)$ »
 - « كيف أصف التحويل الهندسي الذي ينقل النقطة $(0, 0)$ إلى موقع النقطة $(0, -2)$ ؟ **انسحاب وحدتين إلى أسفل.** »
 - « هل يمكن تطبيق هذا التحويل الهندسي على أي نقطة أخرى تقع على منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ ؟ **نعم.** »
 - « كيف يمكن وصف العلاقة بين منحنىي الاقترانين f, g ؟ **ستختلف إجابات الطلبة.** »
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟ »
 - « من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟ »
- أعزز الإجابات الصحيحة.

الانسحاب الرأسى للاقتران التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان k عدداً حقيقياً موجباً، فإن:

- منحنى $g(x) = x^2 + k$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحاً إلى الأعلى k وحدة.
- منحنى $g(x) = x^2 - k$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحاً إلى الأسفل k وحدة.



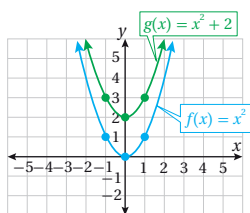
مثال 1

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً:

1 $g(x) = x^2 + 2$

منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مُزاحاً وحدتين إلى الأعلى. لتمثيل منحنى $g(x)$ بيانياً اتبع الإجراءات الآتية:

- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أضيف 2 للإحداثي y للنقاط التي اخترتها.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.



أتعلم

عند اختيار مجموعة من النقاط على منحنى الاقتران الرئيس يُفضل أن تتوسط نقطة الرأس هذه النقاط. فمثلاً، يمكن اختيار النقاط الآتية:
 $(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

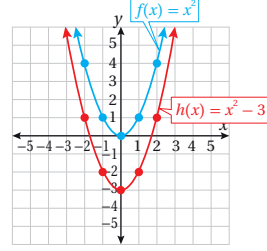
مثال 1

- أمثل الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ على المستوى الإحداثي، ثم أسألهم: « ما موقع رأس الاقتران الرئيس؟ $(0, 0)$ »
- أدون على اللوح الاقتران التربيعي $g(x) = x^2 + 1$ وأمثله على المستوى الإحداثي نفسه، ثم أوضح للطلبة أنه لا فرق بين التمثيلين الأول والثاني سوى أن جميع النقاط الواقعة على المنحنى الخاص بالاقتران الرئيس سُجِّبت إلى أعلى بمقدار وحدة واحدة، ثم أسألهم: « هل تغيرت سمات الاقتران الرئيس (شكله العام، اتجاه فتحته، ... إلخ)؟ لا »
- ما الذي تغير إذن؟ إجابة ممكنة: موقعه في المستوى الإحداثي، حيث انتقل (انسحب) وحدة واحدة إلى أعلى.
- أناقش مع الطلبة المفهوم الأساسي (الانسحاب الرأسي للاقتران التربيعي) وأوضح أثر جمع قيمة العدد الحقيقي k وطرحها، مع تدعيم ذلك بالتمثيلات البيانية المناسبة.
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 1 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية المعلومات الواردة في صندوق (أتعلم).
- أوجه الطلبة إلى الانتباه للإرشاد المتعلق باستعمال أوراق الرسم البياني الموجودة في كتاب التمارين.

2 $h(x) = x^2 - 3$

منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحدات إلى الأسفل.

لتمثيل منحنى $h(x)$ بيانيًا أتبع الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أطرح 3 من الإحداثي y للنقاط التي اخترتها.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصِل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المُجاور.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانيًا:

a) $p(x) = x^2 + 3$

b) $t(x) = x^2 - 4$

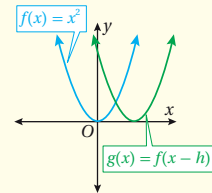
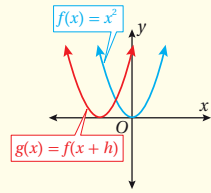
عند إضافة الثابت الموجب h إلى قيم x جميعها في مجال الاقتران $f(x)$ أو طرحه منها، فإن منحنى الاقتران $f(x \pm h)$ هو منحنى الاقتران الرئيس مُزاحًا إلى اليمين أو إلى اليسار بمقدار h وحدة، ويُسمى هذا التحويل **الانسحاب الأفقي** (horizontal translation).

الانسحاب الأفقي للاقتران التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان h عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن:

- منحنى $g(x) = (x - h)^2$ ، هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليمين h وحدة.
- منحنى $g(x) = (x + h)^2$ ، هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليسار h وحدة.



إرشاد

استعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

افكر

لماذا يُعبّر عن الإزاحة إلى اليمين بالطرح $(x - h)$ ، وإلى اليسار بالجمع $(x + h)$ ؟

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

(a) منحنى $p(x)$ هو منحنى

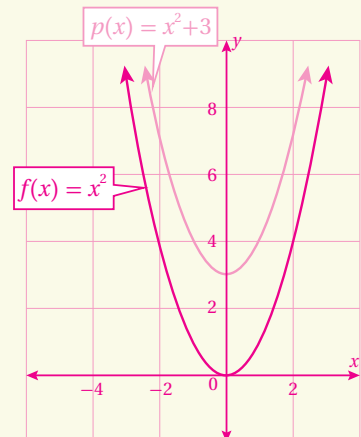
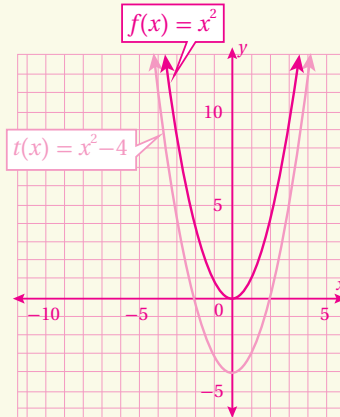
(b) منحنى $t(x)$ هو منحنى

$f(x) = x^2$ مُزاحًا 4 وحدات إلى

$f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحدات إلى

الأسفل.

الأعلى.



إرشادات:

- يساعد استعمال لوح متنقل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي، ويوفر الوقت المستنفد في رسم المحورين الإحداثيين وتقسيمهما، ويمكن إعداده بسهولة برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المقوّى، ثمّ تغطيته بلاصق شفاف.
- أوجّه الطلبة إلى استعمال أوراق الرسم البياني المرفقة في كتاب التمارين عند تمثيل الاقترانات التربيعية في المستوى الإحداثي.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

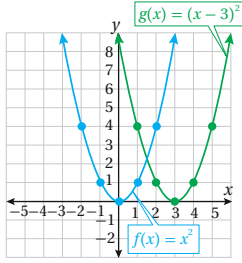
أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

مثال 2

أصِفْ كيف يرتبط مُنحني كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحني الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثمّ أمثلهُ بيانيًا:

1 $g(x) = (x-3)^2$

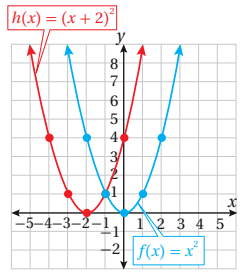
مُنحني $g(x)$ هو مُنحني $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحداتٍ إلى اليمين. لتمثيل مُنحني $g(x)$ بيانيًا اتَّبِعْ الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعةً من النقاط تقع على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أضيفُ 3 إلى الإحداثي x للنقاط التي اخترتها.
- أمثّل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثمّ أصِل بينها بِمُنحني أملَس، كما يظهر في الشكل المُجاور.

2 $h(x) = (x+2)^2$

مُنحني $h(x)$ هو مُنحني $f(x) = x^2$ مُزاحًا وَحدتين إلى اليسار. لتمثيل مُنحني $h(x)$ بيانيًا اتَّبِعْ الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعةً من النقاط التي تقع على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 2 من الإحداثي x للنقاط التي اخترتها.
- أمثّل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثمّ أصِل بينها بِمُنحني أملَس، كما يظهر في الشكل المُجاور.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أصِفْ كيف يرتبط مُنحني كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحني الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثمّ أمثلهُ بيانيًا:

a $p(x) = (x-4)^2$

b $t(x) = (x+3)^2$

إرشاد

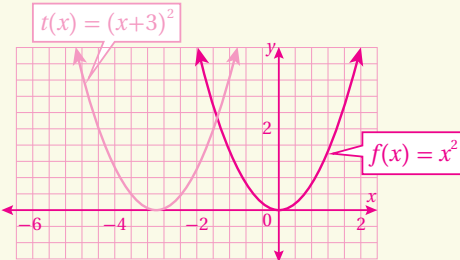
استعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 2):

(b) منحنى $t(x)$ هو منحنى

$f(x) = x^2$ مزاحًا 3 وحدات إلى

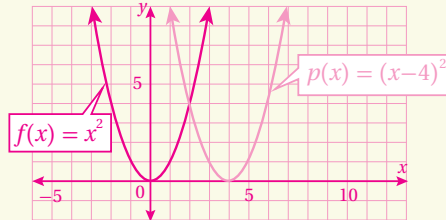
اليسار.



(a) منحنى $p(x)$ هو منحنى

$f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى

اليمين.



مثال 2

- أناقش الطلبة بالمفهوم الأساسي (الانسحاب الأفقي للاقتران التربيعي) وأوضح أثر قيمة العدد الحقيقي h وطرحها، مع تدعيم ذلك بالتمثيلات البيانية المناسبة.
- أوجّه الطلبة للإجابة عن السؤال المطروح في صندوق (أفكر)، وأناقش بعض الإجابات مع تأكيد أهمية ملاحظة إشارة العدد h في الاقتران التربيعي المُعطى، وأنبّه على التحرك في الإزاحة الأفقية بعكس إشارة h (+ ← تحرك لليسار و - → تحرك لليمين).
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 2 على اللوح، وأذكرهم بأن الانسحاب بوصفه تحويلًا هندسيًا لا يُغير من شكل منحنى الاقتران التربيعي وسماته.

تنويع التعليم:

- أستمع الأعلام الملونة عند مناقشة المفهومين الأساسيين (الانسحاب الرأسي والأفقي للاقتران التربيعي)؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.

أخطاء شائعة:

- قد يُخطئ بعض الطلبة بالخلط بين الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي؛ لذا أوكد لهم أن الانسحاب الرأسي مرتبط بالعدد المضاف خارج القوس الذي يظهر له الأس 2، سواء كان عدداً موجباً أو عدداً سالباً، فيما يكون الانسحاب الأفقي مرتبطاً بالعدد المضاف داخل القوس الذي يظهر له الأس 2، سواء كان عدداً موجباً أو عدداً سالباً.

التمدد

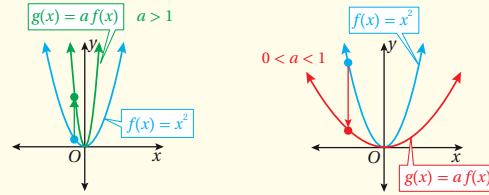
التمدد (dilation) هو تحويل هندسي يؤدي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضيقه، فعند ضرب الاقتران الرئيس $f(x)$ بالثابت a ؛ حيث a عدد حقيقي موجب، فإن منحنى الاقتران $a f(x)$ هو توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $f(x)$.

تمدد الاقتران التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان a عدداً حقيقياً موجباً، فإن منحنى $g(x) = ax^2$ هو:

- توسيع رأسي بمعامل مقداره a لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي بمعامل مقداره a لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.

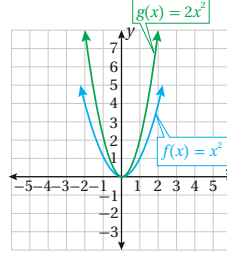


مثال 3

أصِف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً:

1 $g(x) = 2x^2$

منحنى $g(x)$ هو توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره 2 لتمثيل منحنى $g(x)$ بيانياً اتبع الإجراءات الآتية:



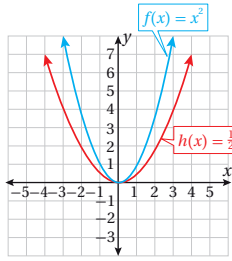
- أختار مجموعة من النقاط تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في 2.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.

أتعلم

ألاحظ أن منحنى الاقتران التربيعي عندما يتوسع رأسيًا، فإنه يبدو أضيق أفقياً من الاقتران الرئيس.

2 $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

منحنى $h(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$. لتمثيل منحنى $h(x)$ بيانياً أتبع الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في $\frac{1}{2}$.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصِل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

أتعلم

ألاحظ أن منحنى الاقتران التربيعي عندما يضيق رأسيًا، فإنه يبدو أوسع أفقيًا من الاقتران الرئيس.

إرشاد

استعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

الانعكاس

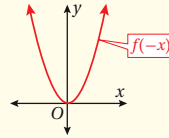
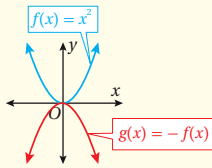
الانعكاس (reflection) هو تحويل هندسي يعكس منحنى الاقتران حول مستقيم محدد.

الانعكاس

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ فإن:

- منحنى $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x .
- منحنى $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y .

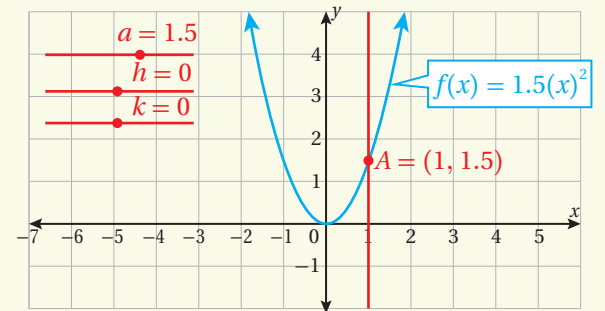


أتعلم

انعكاس الاقتران $f(x) = x^2$ حول المحور y يعطي الاقتران نفسه، لأن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

تنويع التعليم:

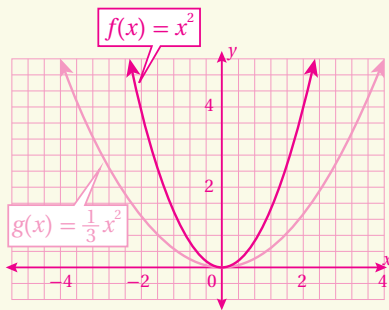
يمكن توظيف برمجة جيو جبر التوضيح سبب تسمية التغير الذي تحدثه a في منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ توسعاً أو تضيقاً رأسيًا، بتثبيت نقطة مثل $A(x_1, y_1)$ على منحناه في أي موقع على المنحنى باستثناء نقطة الرأس، ومتابعة حركة النقطة A عند تغيير قيمة a بتحريك مؤشر المنزلقة، حيث يلاحظ أنها تتحرك على المستقيم الرأسي الذي معادلته $x = x_1$ ، كما يظهر في الشكل أدناه، ما يسهل على الطلبة فهم معنى التوسع أو التضيق الرأسي.



إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

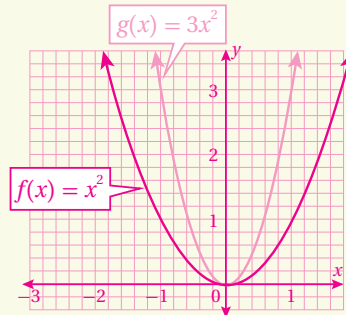
(b) منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي

لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$



(a) منحنى $g(x)$ هو توسيع رأسي

لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره 3



- أذكر الطلبة بمفهوم الانعكاس حول مستقيم معين بوصفه تحويلًا هندسيًا يكون فيه المستقيم كأنه مرآة تُظهر صورة منعكسة للشكل الهندسي أو المنحنى الواقع على إحدى جهتي المستقيم.
- أناقش الطلبة في المفهوم الأساسي (الانعكاس) للاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ حول المحور x ، وحول المحور y ، مع تدعيم ذلك بالتمثيلات البيانية المناسبة.
- أناقش الطلبة في حل فرعي المثال 4، وأؤكد أهمية البدء بالتمدد أو الانعكاس، وأخيرًا الانسحاب.

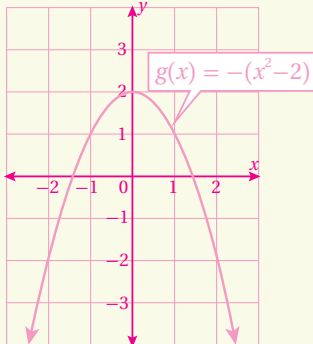
إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) المرافق للمفهوم الأساسي (الانعكاس)، مع تأكيد أن انعكاس الاقتران التربيعي الرئيس حول المحور y يُنتج الاقتران التربيعي الرئيس نفسه.
- أوجه الطلبة إلى أهمية توخي الدقة عند اختيار النقاط في المستوى الإحداثي وتعيينها، وعند رسم المنحنى الناتج من إجراء تحويلات هندسية على الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$.

مثال إضافي

أصف كيف يرتبط منحنى الاقتران $q(x) = -(x^2 - 2)$ بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانيًا.

انعكاس حول المحور x ، ثم انسحاب إلى أعلى بمقدار وحدتين، أو انسحاب إلى أسفل بمقدار وحدتين، ثم انعكاس حول المحور x .



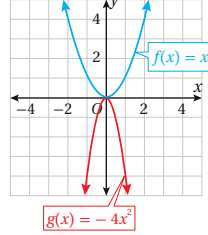
مثال 4

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانيًا:

1 $g(x) = -4x^2$

منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم توسيع رأسي بمعامل مقدار 4

لتمثيل منحنى $g(x)$ بيانيًا اتبع الإجراءات الآتية:

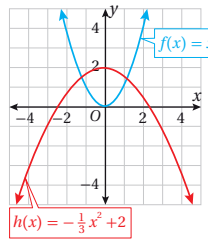


- أختار مجموعة من النقاط تقع على منحنى $f(x) = x^2$
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في -4
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.

2 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

منحنى $h(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم تضيق رأسي بمعامل $\frac{1}{3}$ ، ثم انسحاب وحدتين إلى الأعلى.

لتمثيل منحنى $h(x)$ بيانيًا اتبع الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في $-\frac{1}{3}$
- أضف 2 إلى الإحداثي y للنقاط الناتجة من الخطوة السابقة.
- أمثل النقاط من الخطوة السابقة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.

- أدون على اللوح الصيغة: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$ ، وأوضح للطلبة أنها تُسمى صيغة الرأس؛ لأن رأس الاقتران التربيعي في هذه الصيغة هو النقطة (h, k) .
- أوضح للطلبة نوع التحويل الهندسي الذي تُحدثه كل من a, h, k على منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$.
- ناقش الطلبة في حل أفرع المثال 5، مع توضيح كيفية كتابة قاعدة لاقتران تربيعي بصيغة الرأس عند إعطاء وصف بالكلمات للتحويلات الهندسية المُراد إجراؤها على منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ويمكن اتباع الآتي:

(1) كتابة صيغة الرأس: $f(x) = a(x-h)^2 + k$

(2) تحديد قيمة كل من a, h, k عن طريق وصف التحويلات الهندسية المُعطى.

(3) تعويض القيم الثلاث في صيغة الرأس.

(4) تبسيط الصورة النهائية للاقتران التربيعي بصيغة الرأس.

- أوضح للطلبة كيف يُستفاد من صيغة الرأس لتمثيل الصورة النهائية للاقتران التربيعي، بتحديد رأس القطع، ومحور تماثله، واتجاه فتحته، وتحديد نقطتين (غير نقطة الرأس) على الأقل تقعان على جهتين من محور التماثل (يمينه نقطة ويساره نقطة)، ثم رسم منحنى متصل أملس يمر بجميع النقاط التي حُدّدت.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

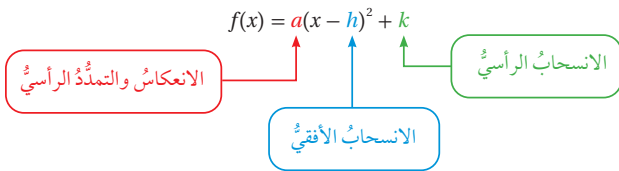
أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً:

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

b) $g(x) = -x^2 - 4$

كتابة التحويل الهندسي للاقتران التربيعي

تُسمى الصيغة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ صيغة الرأس (vertex form) للاقتران التربيعي؛ حيث $a \neq 0$ و (h, k) هو رأس القطع المكافئ، ويمكن استعمالها لكتابة قاعدة الاقتران التربيعي الناتج من تطبيق تحويل هندسي أو أكثر على الاقتران التربيعي الرئيس، بحيث يمثل h الانسحاب الأفقي، ويمثل k الانسحاب الرأسي، أما قيمة a فتُمثل التمدد الرأسي، وتمثل إشارة a الانعكاس.



أتعلم

سميت الصيغة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ بصيغة الرأس للاقتران التربيعي؛ لأنه يمكن بها تحديد الرأس بسهولة.

مثال 5

إذا كان منحنى الاقتران $g(x)$ ناتجاً من انعكاس منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم توسيع رأسي بمعامل مقداره 2، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار وحدتين، ثم انسحاب إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات، فأجب عن الأسئلة الآتية:

1 أكتب قاعدة الاقتران $g(x)$ باستعمال صيغة الرأس.

- بما أن الانعكاس حول المحور x ، ومعامل التوسيع الرأسي 2، فإن: $a = -2$
- بما أن الانسحاب الأفقي إلى اليسار بمقدار 2، فإن: $h = -2$
- بما أن الانسحاب الرأسي إلى الأعلى بمقدار 3، فإن: $k = 3$

أتعلم

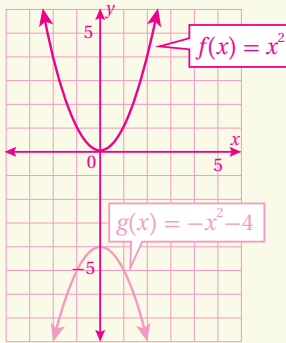
أستعمل الإشارة السالبة للدلالة على الانعكاس حول المحور x ، والانسحاب إلى اليسار وإلى الأسفل.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4):

(b) منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى

$f(x) = x^2$ حول المحور x ثم

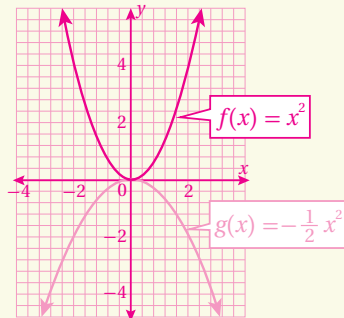
انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل.



(a) منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى

$f(x) = x^2$ حول المحور x ثم

تضييق رأسي لمنحنى بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$



إرشادات:

- أوجه الطلبة للانتباه للمعلومات في صندوق (أتعلم) وصندوق (أندكر)، وأؤكد أهمية الاستفادة من هذه المعلومات.
- أذكر الطلبة أنه كلما زاد عدد النقاط المحددة بحيث يمر بها منحنى الاقتران التربيعي، زادت دقة التمثيل البياني.
- أوجه الطلبة إلى استعمال أوراق الرسم البياني المرفقة في كتاب التمارين عند تمثيل الاقترانات التربيعية في المستوى الإحداثي.

التدريب

4

أدرب وأحل المسائل

- أوجه الطلبة إلى بند (أدرب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (12 - 1) والمسائل (18 - 16) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أدرب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

$$g(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$= -2(x - (-2))^2 + 3$$

$$= -2(x + 2)^2 + 3$$

صيغة الرأس للاقتران التربيعي

بتعويض $a = -2, h = -2, k = 3$ بالتبسيط

2 أجد إحداثيي رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقتران $g(x)$.

بما أن $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$ ، فإن:

• رأس القطع $(-2, 3)$

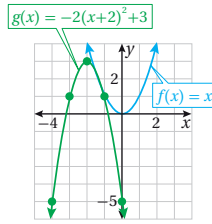
• معادلة محور التماثل $x = -2$

• القيمة العظمى 3

أندكر

بما أن $a < 0$ ، فإن رأس القطع المكافئ يمثل نقطة القيمة العظمى.

3 أمثل الاقتران $g(x)$ بيانياً.



يمكنني استعمال التحويلات الهندسية لتمثيل منحنى الاقتران، كما في الشكل المجاور.

أنتحق من فهمي أنظر الهامش.

إذا كان منحنى الاقتران $g(x)$ ناتجاً من انعكاس منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم تضيق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ ، ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات، ثم انسحاب إلى الأسفل بمقدار 5 وحدات، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

- (a) أكتب قاعدة الاقتران $g(x)$ باستعمال صيغة الرأس.
- (b) أجد إحداثيي رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقتران $g(x)$.
- (c) أمثل الاقتران $g(x)$ بيانياً.

إرشاد

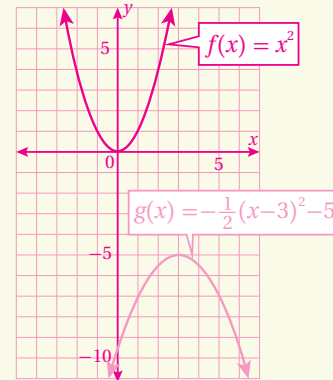
أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

إجابة التدريب في بند (أنتحق من فهمي 5):

a) $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 5$

(b) الرأس $(3, -5)$ ، معادلة محور التماثل $x = 3$ ، القيمة العظمى -5

c)





- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24 - 22).
- أرسد آية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 24 (تحدّ)، أوجه الطلبة إلى الانتباه لاتجاه فتحة القطع المكافئ، والمقطع من المحور y .

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (13 - 15) كتاب التمارين: 7, (1 - 3)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (13 - 18) كتاب التمارين: (4 - 7)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 - 24) كتاب التمارين: (4 - 10)

(1-12) أنظر ملحق الإجابات.

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ المسائل

أصفُ كيف يرتبطُ مُنحني كلِّ اقترانٍ ممَّا يأتي بمُنحني الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ ، ثمَّ أمثلهُ بيانيًا:

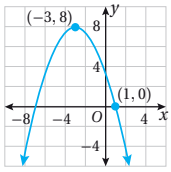
- 1 $h(x) = x^2 + 5$
- 2 $g(x) = x^2 - 6$
- 3 $h(x) = (x - 2)^2$
- 4 $g(x) = (x + 1)^2$
- 5 $v(x) = (x - 1)^2 + 3$
- 6 $u(x) = (x + 2)^2 - 4$
- 7 $l(x) = \frac{1}{4}x^2$
- 8 $m(x) = 2x^2 - 3$
- 9 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$
- 10 $g(x) = -4(x + 2)^2 + 3$
- 11 $p(x) = (x - 7)^2 + 1$
- 12 $t(x) = 2(x - 3)^2 - 10$

إرشاد: أستمعُ أوراقِ الرسمِ البيانيِّ الموجودةِ في نهايةِ كتابِ التمارين.

أصلُ الاقترانِ بتمثيله البيانيِّ في كلِّ ممَّا يأتي:

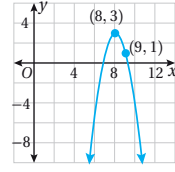
التمثيل على اليمين.

13 $a(x) = 4(x + 8)^2 - 3$



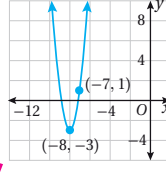
التمثيل الأوسط.

14 $b(x) = -2(x - 8)^2 + 3$



التمثيل على اليسار.

15 $c(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 8$



إذا كان مُنحني الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا من انعكاس مُنحني الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثمَّ توسيع رأسيِّ بمعاملٍ مقداره 4، ثمَّ انسحابٍ إلى الأعلى بِمقدارٍ وَحدتين، فأجيبُ عن الأسئلة الآتية:

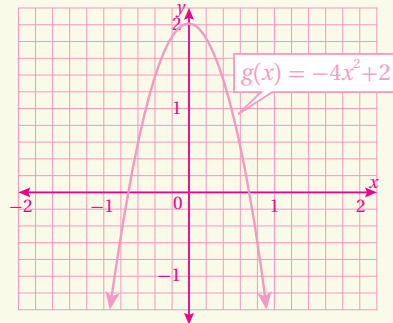
16 أكتبُ قاعدة الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغة الرأس. $g(x) = -4(x - 0)^2 + 2 = -4x^2 + 2$

17 أجدُ إحداثيَّي رأسِ القطع، ومُعادلةَ محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقترانِ $g(x)$.
محور التماثل $x = 0$ ، الرأس $(0, 2)$ ، القيمة العظمى 2

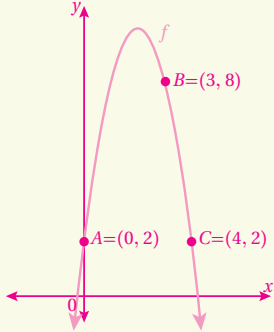
18 أمثُلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًا. أنظر الهامش.

إجابة التدريب في بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ المسائل):

18)



- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
- « أكتب قاعدة الاقتران التربيعي f المُمثل بيانياً في الشكل المجاور بالصورة القياسية، ثم أكتبه بصيغة الرأس.



الصورة القياسية:

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 2$$

صيغة الرأس:

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 10$$

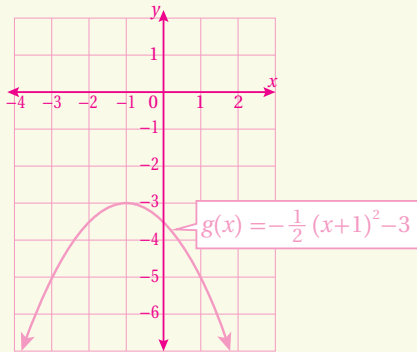
تعليمات المشروع:

- أذكر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعين عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكد أن عناصر المشروع كافة متوافرة يوم العرض.

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

« أصف كيف يرتبط منحنى الاقتران التربيعي $g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً.

منحنى g هو انعكاس حول المحور x وتضييق رأسي معاملته $\frac{1}{2}$ للاقتران f ، ثم انسحاب أفقي نحو اليسار بمقدار وحدة واحدة، وانسحاب رأسي إلى أسفل بمقدار 3 وحدات.



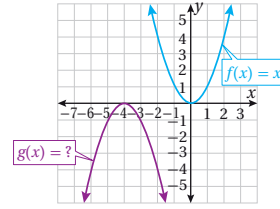
آليات ثقيلة: يمثل الاقتران $I(t) = -10t^2 + 200$ العلاقة بين عدد لترات الوقود $I(t)$ المتبقية في خزان آلية ثقيلة والزمن t بالساعات خلال مدة عملها؛ حيث $t \geq 0$.



- 19 ماذا تمثل نقطة رأس القطع المكافئ في سياق المسألة؟ أبرر إجابتي.
- 20 عدد لترات الوقود في الخزان قبل البدء بالعمل؛ لأن $f(0)$ تمثل كمية الوقود الموجودة في الخزان قبل بدء العمل. هل يمكن أن يكون معامل t^2 موجباً في مواقف حياتية مشابهة؟ أبرر إجابتي.
- 21 لا؛ لأنه إذا كان المعامل موجباً فإن الوقود المتبقي في الخزان يزداد خلال ساعات العمل، وهذا يناقض الواقع. أصف العلاقة بين منحنى الاقتران $I(t)$ ، ومنحنى الاقتران الأصلي $f(t) = t^2$.
- 22 انعكاس حول المحور t وإزاحة إلى الأعلى بمقدار 200 وحدة، وتوسيع رأسي مقداره 10.

مهارات التفكير العليا

تبرير: في الشكل الآتي، إذا كان منحنى الاقتران g ناتجاً من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقتران f ، فأجب عن السؤالين الآتيين:

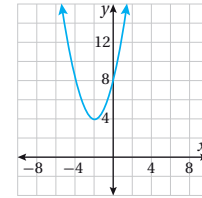


- 22 انعكاس حول المحور x ؛ لأن منحنى g مفتوح للأسفل، وإزاحة إلى اليسار بمقدار 4 وحدات؛ لأن رأس القطع f تحرك 4 وحدات إلى اليسار.

22 أصف التحويلات الهندسية التي مرّ بها منحنى الاقتران f لينتج الاقتران g ، وأبرر إجابتي.

23 أكتب قاعدة الاقتران g بصيغة الرأس. $g(x) = -(x+4)^2$

24 تحدّ: أكتب بصيغة الرأس قاعدة الاقتران المُمثل بيانياً في الشكل الآتي:



$$h(x) = (x+2)^2 + 4$$

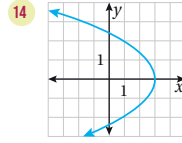
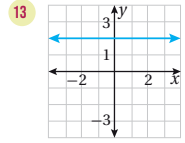
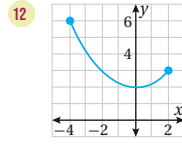
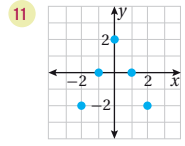
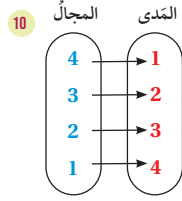
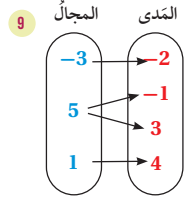
اختبار نهاية الوحدة

أحدّد مجال كلّ علاقةٍ ممّا يأتي ومداها، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تمثّل اقتراناً أم لا: (6-14) أنظر الهامش.

6 $\{(-1, 6), (4, 2), (2, 36), (1, 6)\}$

7 $\{(5, -4), (-2, 3), (5, -1), (2, 3)\}$

8	x	-4	-2	0	3
	y	-2	1	2	1



15 **كرة:** رُكِّلَ خليلٌ كرةً عن سطح الأرض. إذا كانت العلاقة بين ارتفاع الكرة عن سطح الأرض h بالمتري والزمن t بالثواني مُعطاةً بالاقتران $h = -5t^2 + 17t$ ، فأجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة والزمن الذي تحتاج إليه حتى تصل إلى أقصى ارتفاع.
الزمن $t = 1.7$ s، أقصى ارتفاع 14.45 m

أختارُ رمزَ الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يأتي:

1 مجال العلاقة:

$\{(3, 5), (2, -2), (1, 5), (0, -2), (1, 2)\}$ هو:

a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{-2, 2, 5\}$

c) $\{0, 2, 3\}$ d) $\{-2, 0, 1\}$

2 إذا كان $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ، فإنّ $f(1)$ تُساوي:

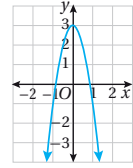
a) -3 b) -1 c) 0 d) 3

3 مُعادلة محور التماثل للاقتران $f(x) = x^2 - 10x + 1$:

a) $y = 5$ b) $x = 10$

c) $x = 5$ d) $x = -5$

4 أيّ الاقترانات الآتية يعبر عن المنحنى المُمثّل بيانياً؟



a) $f(x) = -4x^2$ b) $f(x) = -4x^2 + 3$

c) $f(x) = x^2 + 3$ d) $f(x) = 1 - 4x^2$

5 إحداثيّات نقطة رأس القطع المكافئ للاقتران التربيعي هما $y = x^2 + 2x + 3$:

a) (0, 3) b) (2, 11)

c) (1, 6) d) (-1, 2)

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (1-5) فردياً، وأنجّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أناقشهم جميعاً في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أطلب إليهم حلّ المسائل (6-29)، وأنجّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثمّ أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

- 6 المجال $\{-1, 4, 2, 1\}$ ، المدى $\{6, 2, 36\}$ ، اقتران.
- 7 المجال $\{5, -2, 2\}$ ، المدى $\{-4, 3, -1\}$ ، ليس اقتراناً؛ لأن 5 من المجال ارتبط مع -1 و -4.
- 8 المجال $\{-4, -2, 0, 3\}$ ، المدى $\{-2, 1, 2\}$ ، اقتران.
- 9 المجال $\{-3, 5, 1\}$ ، المدى $\{-2, -1, 3, 4\}$ ، ليس اقتراناً؛ لأن 5 ارتبط بالعنصرين -1 و 3.
- 10 المجال $\{4, 3, 2, 1\}$ ، المدى $\{1, 2, 3, 4\}$ ، اقتران.
- 11 المجال $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، المدى $\{-2, 0, 2\}$ ، اقتران.
- 12 المجال $[-4, 2]$ ، المدى $[2, 6]$ ، اقتران.
- 13 المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $\{2\}$ ، اقتران.
- 14 المجال $(-\infty, 3]$ ، المدى $(-\infty, \infty)$ ، ليس اقتراناً.

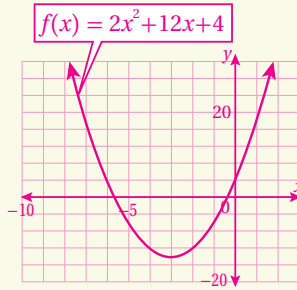
اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية:

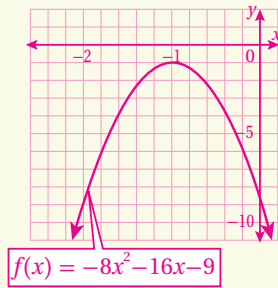
- أعرف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبين لهم أهميتها، ثم أوجههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فردياً، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

إجابات الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

- (16) محور التماثل $x = -3$ ، الرأس $(-3, -14)$ ، القيمة الصغرى -14 ، المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $[-14, \infty)$



- (17) محور التماثل $x = -1$ ، الرأس $(-1, -1)$ ، القيمة العظمى -1 ، المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $(-\infty, -1]$



قذيفة: يمثل الاقتران $h(t) = -16(t-6)^2 + 576$ ارتفاع قذيفة عن سطح الأرض بالأمتر، بعد t ثانية من قذفها.

27 أجد ارتفاع القذيفة بعد 4 ثوانٍ من قذفها. 512 m

28 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة. 576 m

29 أصف علاقة منحنى الاقتران $h(t)$ بمنحنى الاقتران $f(t) = t^2$. أنظر ملحق الإجابات.

تدريب على الاختبارات الدولية

30 التحويلاين اللذان أثارا في منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ للحصول على منحنى الاقتران $h(x) = 2(x-3)^2$ ، هما:

(a) تضيق رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليمين.

(b) تضيق رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليسار.

(c) توسيع رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليسار.

(d) توسيع رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليمين.

31 مدى الاقتران التربيعي $f(x) = 12x - 3x^2 + 3$

(a) $\{y | y \leq 15\}$ (b) $\{y | y \geq 15\}$

(c) $\{y | y \leq 3\}$ (d) $\{y | y \geq 3\}$

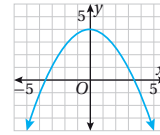
32 أي الاقترانات الآتية تمثل القطع المكافئ في الشكل الآتي؟

(a) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4$

(b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$

(c) $y = -3x^2 - 4$

(d) $y = 3x^2 + 4$



أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى، ومجال كل من الاقترانات التربيعية الآتية ومداها، ثم أمثلها بيانياً:

16 $f(x) = 2x^2 + 12x + 4$ (16-19) أنظر الهامش.

17 $f(x) = -8x^2 - 16x - 9$

18 $f(x) = 3x^2 - 18x + 15$

19 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 11x + 6$

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثلها بيانياً:

20 $p(x) = 4(x-6)^2 - 9$ (20-24) أنظر ملحق

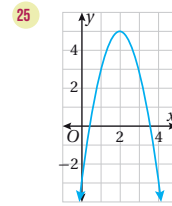
21 $p(x) = \frac{1}{2}(x+8)^2$

22 $t(x) = -3x^2 + 5$

23 $h(x) = (x+5)^2$

24 $g(x) = -(x+4)^2 - 3$

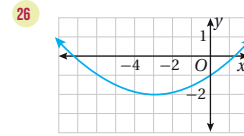
أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى، ومجال كل من القطوع المكافئة الآتية ومداها:



25 محور التماثل $x = 2$ ، الرأس

(2, 5)، القيمة العظمى 5، المجال

$(-\infty, \infty)$ ، المدى $(-\infty, 5]$.

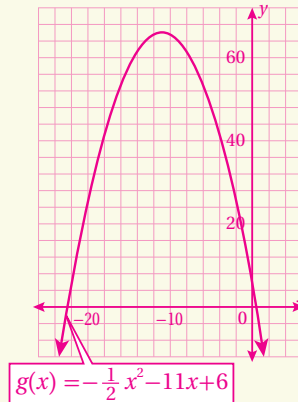


26 محور التماثل $x = -3$ ، الرأس

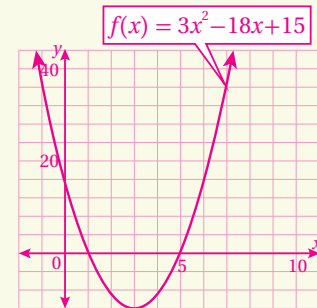
$(-3, -2)$ ، القيمة الصغرى

$(-\infty, \infty)$ ، المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $[-2, \infty)$.

- (19) محور التماثل $x = -11$ ، الرأس $(-11, 66.5)$ ، القيمة العظمى 66.5، المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $(-\infty, 66.5]$



- (18) محور التماثل $x = 3$ ، الرأس $(3, -12)$ ، القيمة الصغرى -12 ، المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $[-12, \infty)$



كتاب التمارين

الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة

مثال: أجد قيمة كلٍّ من المقادير الآتية:

a) $x^2 - (8 + x)$, $x = 5$

أعوّض $x = 5$ ثمّ أجد قيمة ما داخل القوس

$$5^2 - (8 + 5) = 5^2 - 13$$

أجد المقدار الأسّي

$$= 25 - 13$$

أطرح

$$= 12$$

b) $y^2 + 4y$, $y = -6$

أعوّض $y = -6$ ثمّ أجد قيمة القوّ، ثمّ أضرب

$$(-6)^2 + 4 \times (-6) = 36 + (-24)$$

أطرح

$$= 36 - 24$$

$$= 12$$

c) $(p^2 - 4p) - 5 \div d$, $p = 3$, $d = -1$

أعوّض قيمتي $d = -1$ و $p = 3$ ثمّ أجد قيمة الأس، ثمّ قيمة الضرب داخل القوس

$$(3^2 - 4 \times 3) - 5 \div (-1) = (9 - 12) - 5 \div (-1)$$

أجد ما داخل القوس

$$= (-3) - 5 \div (-1)$$

أقسم

$$= (-3) - (-5)$$

أطرح، ثمّ أجمع

$$= -3 + 5 = 2$$

إيجاد ميل الخطّ المستقيم المارّ بنقطتين (الدرس 2)

أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي:

11 (3, 3), (5, 7) **2**

12 (6, 1), (4, 3) **-1**

13 (-2, -6), (-2, 6) **غير معرّف**

14 (5, -7), (0, -7) **0**

15 (-1, 0), (0, -5) **-5**

16 (4, 1), (12, 8) **$\frac{7}{8}$**

17 (-1, 2), (3, 5) **$\frac{3}{4}$**

18 (-1, -2), (-4, 1) **-1**

19 (1, 2), (-3, 2) **0**

20 (1, 5), (1, -4) **غير معرّف**

الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة

أختر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حالٍ عدم تأكّدي من الإجابة، أستعين بالمثال المُعطى.

تمثيل الاقتران الخطّي بيانيًا (الدرس 1)

أمثل كلّ اقتران ممّا يأتي بيانيًا: (1-4) أنظر ملحق الإجابات.

1 $y = x + 4$ 2 $y = 3x - 1$ 3 $3y = 9 - 6x$ 4 $5x - 2y = 10$

مثال: أمثل الاقتران $y = 3x + 1$ بيانيًا.

الملاحظة 1: أختار بعض قيم المُدخلات (قيم x)، ولتكن: -1, 0, 1, 2.

الملاحظة 2: أنشئ جدولًا لإيجاد قيم المُخرجات المقابلة لهذه المُدخلات:

x	3x + 1	y	(x, y)
-1	3(-1) + 1	-2	(-1, -2)
0	3(0) + 1	1	(0, 1)
1	3(1) + 1	4	(1, 4)
2	3(2) + 1	7	(2, 7)

الملاحظة 3: أمثل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، ثمّ أرسم مُستقيمًا يمرّ بها جميعًا.

إيجاد قيمة مقدارٍ جبريٍّ عند قيمة معطاة (الدرس 1)

أجد قيمة كلٍّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

5 $y^2 + (4 - 2y)$, $y = 5$ **19**

6 $8d - d^2 + 1$, $d = 3$ **16**

7 $(2b - b^2) - d \div 4$, $b = 6$, $d = 8$ **-26**

8 $12 \times d \div d^2 - 1$, $d = -6$ **-3**

9 $(3n + n^2) + 12 \div m$, $n = 5$, $m = 4$ **43**

10 $(3n - 1)^2 + 12 - m$, $n = 2$, $m = -1$ **38**

الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة

مثال: أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي:

a) (1, 2), (4, 5)

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 2) وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5)

$$= \frac{5 - 2}{4 - 1}$$

أبسط

$$= \frac{3}{3} = 1$$

إذن، ميل المستقيم هو 1

b) (1, 2), (4, 5)

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (0, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (3, -3)

$$= \frac{-3 - 1}{3 - 0}$$

أبسط

$$= -\frac{4}{3}$$

إذن، ميل المستقيم هو $-\frac{4}{3}$

c) (1, 3), (4, 3)

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 3) وعن (x_2, y_2) بـ (4, 3)

$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$

أبسط

$$= \frac{0}{3} = 0$$

إذن، ميل المستقيم هو 0

d) (2, 3), (2, -1)

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 3) وعن (x_2, y_2) بـ (2, -1)

$$= \frac{-1 - 3}{2 - 2}$$

أبسط

$$= \frac{-4}{0}$$

إذن، ميل هذا المستقيم غير مُعرّف.

كتاب التمارين

الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

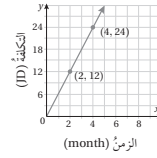
أستعدّ لدراسة الوحدة

تفسير التمثيلات البيانية (الدرس 2)

يبيّن التمثيل البياني المجاور متوسط تكلفة تشغيل ثلاجة (بالدينار) أشهرًا عدة.

21 أجدُ تكلفة تشغيل الثلاجة مدة 3 أشهر. **JD 18**

22 أجدُ معدلَ تغيرِ تكلفة تشغيل الثلاجة بالنسبة إلى الزمن، ثمّ أوضحُ ماذا يمثل. **أي أن معدلَ تغيرِ التكلفة هو 6، ويعني أن تكلفة تشغيل الثلاجة يزداد بمقدار 6 JD لكل شهر.**



مثال: يبيّن التمثيل البياني المجاور طول زنبرك I بالستيمترات، عند تعليق جسم كتلته m غرام به.

(a) أجدُ طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به.

طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به 5 cm، وهي القيمة التي تقابل الكتلة 0 g في التمثيل.

(b) أجدُ معدلَ تغيرِ طول الزنبرك بالنسبة إلى كتلته، ثمّ أبينُ ماذا يمثل.

لايجاد معدل التغير أجد ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين الكتلة وطول الزنبرك.

أستعمل النقطتين (0, 5) و (80, 15) لإيجاد ميل المستقيم.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{15 - 5}{80 - 0} \\ &= \frac{10}{80} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

إذن، ميل المستقيم هو $\frac{1}{8}$ ، وهو يمثل معدل التغير في طول الزنبرك لكل غرام من الكتلة، حيث إن طول الزنبرك يزداد بمقدار $\frac{1}{8}$ cm لكل غرام يُضاف إليه.

19

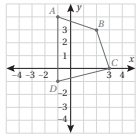
الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة

إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير الانسحاب (الدرس 4)

23 أنسخُ الشّكلَ المجاورَ على ورقةٍ مرتعاب، ثمّ أجدُ إحداثيات رؤوسه تحت تأثير انسحابٍ مقداره وُحداتٍ إلى اليسار، و4 وُحداتٍ إلى الأسفل.

(23-24) أنظر ملحق الإجابات.



24 أرسمُ المربعَ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$, $D(0, 2)$ في المستوى الإحداثي، ثمّ أجدُ إحداثيات رؤوسه تحت تأثير انسحابٍ 5 وُحداتٍ إلى اليمين، وُحدتين إلى الأعلى.

مثال: أرسمُ $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 4)$, $B(0, 1)$, $C(3, 2)$ تحت تأثير انسحابٍ 4 وُحداتٍ إلى اليمين، و3 وُحداتٍ إلى الأعلى.

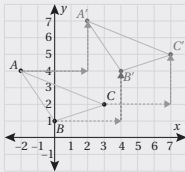
خطوة 1 أكتب إحداثيات الرؤوس.

$$(x, y) \longrightarrow (x+4, y+3)$$

$$A(-2, 4) \longrightarrow A'(2, 7)$$

$$B(0, 1) \longrightarrow B'(4, 4)$$

$$C(3, 2) \longrightarrow C'(7, 5)$$

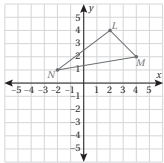


خطوة 2 أرسمُ الشّكلَ و صورته.

إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير انعكاس حول المحور x (الدرس 4)

25 أرسمُ صورةَ الشّكلِ بالانعكاس حولَ المحور x، ثمّ أجدُ إحداثيات رؤوسها:

(25-26) أنظر ملحق الإجابات.



26 ABC مثلثٌ إحداثيات رؤوسه: $A(-4, -3)$, $B(-4, -1)$, $C(-1, -1)$. أكتبُ إحداثيات صُورِ رؤوسه بالانعكاس حولَ المحور x، ثمّ أرسمُ المثلثَ وصورته.

20

الوحدة 2: العلاقات والاقترانات

أستعدّ لدراسة الوحدة

مثال: شكلٌ رباعيٌ $LMNK$ إحداثيات رؤوسه هي: $L(5, 5)$, $M(6, 2)$, $N(3, 1)$, $K(2, 5)$. أكتبُ إحداثيات صُورِ رؤوسه بالانعكاس حولَ المحور x، ثمّ أرسمُ الشّكلَ وصورته.

خطوة 1 أكتبُ إحداثيات الرؤوس.

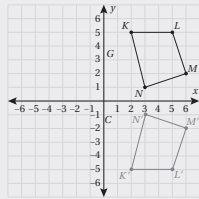
$$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

$$L(5, 5) \longrightarrow L'(5, -5)$$

$$M(6, 2) \longrightarrow M'(6, -2)$$

$$N(3, 1) \longrightarrow N'(3, -1)$$

$$K(2, 5) \longrightarrow K'(2, -5)$$



إذن، إحداثيات صُورِ الرؤوس هي: $L'(5, -5)$, $M'(6, -2)$, $N'(3, -1)$, $K'(2, -5)$

إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير انعكاس حولَ المحور y (الدرس 4)

أكتبُ إحداثيات صُورِ رؤوس كلِّ شكلٍ ممّا يأتي بالانعكاس حولَ المحور y، ثمّ أمثلُ الشّكلَ وصورته:

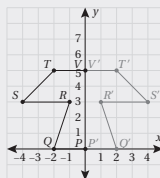
(27-28) أنظر ملحق الإجابات.

27 $Q(-4, 2)$, $R(-2, 4)$, $S(-1, 1)$

28 $W(2, -1)$, $X(5, -2)$, $Y(5, -5)$, $Z(2, -4)$

مثال: شكلٌ سداسيٌ $PQRSTV$ إحداثيات رؤوسه هي: $P(0, 0)$, $Q(-2, 0)$, $R(-1, 3)$, $S(-4, 3)$, $T(2, 5)$, $V(0, 5)$. أجدُ إحداثيات رؤوس الصورة، ثمّ أمثلُ تصميمَ الشّكلِ السداسيِّ وصورته في المستوى الإحداثي.

أعملُ انعكاسًا للأزواج المرتبة التي تمثل رؤوسَ الشّكلِ السداسيِّ حولَ المحور y عكسَ إشارة الإحداثي x لكلٍّ منها:



$$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

$$P(0, 0) \longrightarrow P'(0, 0)$$

$$Q(-2, 0) \longrightarrow Q'(2, 0)$$

$$R(-1, 3) \longrightarrow R'(1, 3)$$

$$S(-4, 3) \longrightarrow S'(4, 3)$$

$$T(2, 5) \longrightarrow T'(-2, 5)$$

$$V(0, 5) \longrightarrow V'(0, 5)$$

أي إنَّ إحداثيات الصُورة بالانعكاس حولَ المحور y هي: $P'(0, 0)$, $Q'(2, 0)$, $R'(1, 3)$, $S'(4, 3)$, $T'(-2, 5)$, $V'(0, 5)$

21

كتاب التمارين

الدرس 1

الاقترانات Functions

أحد المجال والمدى لكل علاقة مما يأتي، ثم أحد ما إذا كانت تمثل اقتراناً أم لا: (1-10) أنظر ملحق الإجابات.

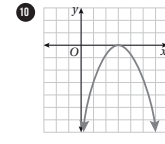
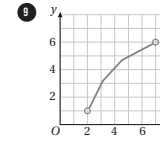
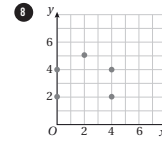
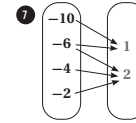
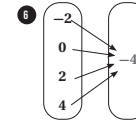
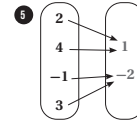
- 1 $\{(13, 5), (-4, 12), (6, 0), (13, 10)\}$ 2 $\{(9, 2, 7), (9, 4, 11), (9, 5, 9, 5), (9, 8, 8)\}$

3

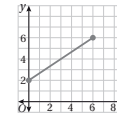
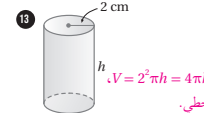
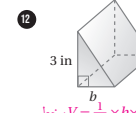
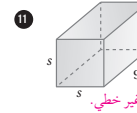
x	-3	-1	0	1	2
y	3	-4	5	-2	3

4

x	5	2	-7	2	5
y	4	8	9	12	14



اكتب اقتراناً يمثل حجم كلٍّ من الأشكال بدلالة البعد المفقود، ثم أحد ما إذا كان الاقتران خطياً أم لا:



أكتشف الخطأ: يقول زياد: يمثل التمثيل البياني المجاور اقتراناً منفصلاً لأنه بدأ بنقطة وانتهى بنقطة. أكتشف خطأ زياد، وأصححه.

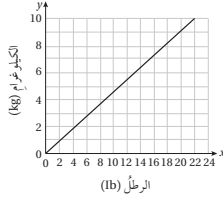
الخطأ في قول زياد أن الاقتران منفصل والصحيح أنه متصل.

ليكون الاقتران منفصلاً يجب أن يكون على شكل نقاط غير متصلة.

الدرس 2

تفسير التمثيلات البيانية Interpreting Graphs

الوحدة 2:
العلاقات والاقترانات



يبين منحنى التحويل المجاور العلاقة بين وحدتي قياس الكتلة: الرطل (lb)، والكيلوغرام (kg). استعمل المنحنى التحويلي لأجد تحويلاً تقريبياً لكل مما يأتي:

- 1 18 lb إلى الكيلوغرام. 8.25

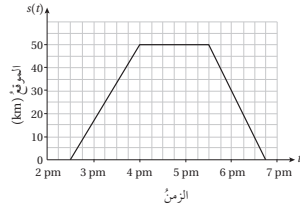
- 2 5 lb إلى الكيلوغرام. 2.5

- 3 4 kg إلى الرطل. 8.4

- 4 10 kg إلى الرطل. 22

- 5 أبت كيف يمكنني استعمال المنحنى التحويلي لتحويل 48 lb إلى الكيلوغرام.

أحد ما يقابل (16 lb) من التمثيل البياني المعطى، ثم أضرب الناتج في 3 16 رطلاً تعادل 7.3 kg تقريباً. إذن، 48 رطلاً تعادل 21.9 kg تقريباً.



يبين التمثيل البياني المجاور رحلة هشام من منزله لزيارة أخته سمى ثم عودته إلى المنزل:

- 6 كم كيلومتراً بعد منزل هشام عن منزل سمى؟ 50 km

- 7 في أي ساعة وصل هشام إلى منزل سمى؟ وفي أي ساعة غادر؟

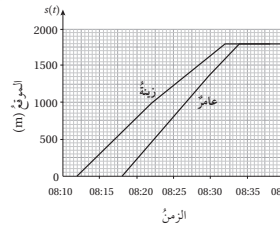
- 8 وصل الساعة 4 pm، غادر 5:30 pm

- 9 أجد السرعة المتوسطة لهشام في طريق عودته إلى المنزل. 33.3 km/h (تقريباً)

الدرس 2

تفسير التمثيلات البيانية Interpreting Graphs

يتبع



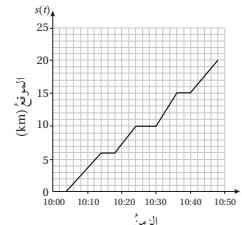
يبين التمثيل البياني المجاور رحلة الأخوين زينة وعامر من منزلهم إلى المدرسة:

- 9 كم دقيقة تحتاج زينة للوصول إلى منزلها إلى المدرسة؟ 20 min (تقريباً)

- 10 هل غادر كل من عامر وزينة المنزل في الوقت نفسه؟ أبتز إجابتي. لا، غادرت زينة الساعة 8:12 تقريباً، وغادر عامر الساعة 8:18 تقريباً.

- 11 ما بعد زينة عن المنزل الساعة 8:20؟ 760 m (تقريباً)

- 12 ما بعد عامر عن المدرسة في اللحظة التي وصلت فيها زينة إلى المدرسة؟ 200 m (تقريباً)

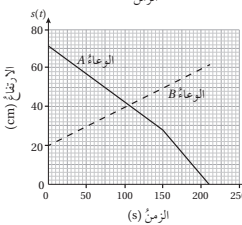


يبين التمثيل البياني المجاور رحلة حافلة مسافة 20 km:

- 13 كم مسرة توقفت الحافلة في أثناء رحلتها بعد انطلاقها وقبل الوصول إلى وجهتها النهائية؟ أبتز إجابتي.

- 3 مرات؛ لأن المسافة المقطوعة لم تزد في 3 فترات زمنية مختلفة.

- 14 في أي فترة زمنية كانت سرعة الحافلة أكبر؟ 10:30 - 10:36 (تقريباً)



يبين التمثيل البياني المجاور ارتفاع الماء في الوعاءين A و B، حيث يتدفق الماء من الوعاء A إلى الوعاء B:

- 15 أجد ارتفاع الماء الابتدائي في الوعاءين. A: 71 cm, B: 20 cm

- 16 أجد مقدار نقصان في ارتفاع الماء في الوعاء A خلال أول دقيقة.

- 17 كم من الوقت استغرق ارتفاع الماء في الوعاء B ليصبح ضعف الارتفاع الابتدائي؟ 100 ثانية.

- 18 كم من الوقت استغرق تفرغ الوعاء A كاملاً من الماء؟ 210 ثوان.

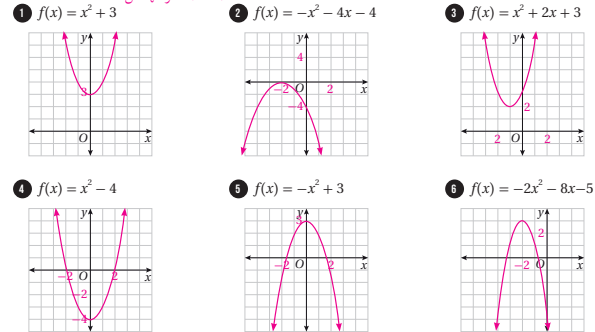
كتاب التمارين

الدرس 3

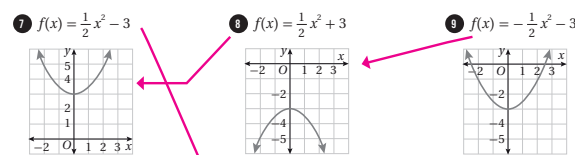
الاقتتران التربيعي Quadratic Function

أجد إحداثي الرأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ونجدل وندي كل من الاقتترانات التربيعية الآتية، ثم أمثلها بيانيًا:

(1-6) أنظر الهامش.



أصل الاقتتران تمثيله البياني في كل مما يأتي:



رياضة: يمثل الاقتتران $h = -5t^2 + 20t + 2$ ارتفاع رمح بالمتر عن سطح الأرض، بعد t ثانية من رميه.

10 أجد مقطع المنحنى من محور y ، وأفسر معناه في سياق المسألة. المقطع $y = 2$ ، يعني أنه الرمح لم يزل من ارتفاع 2m عن سطح الأرض.

11 أجد القيمة العظمى للاقتتران، وأفسر معناها في سياق المسألة. القيمة العظمى 22m، ويمثل أقصى ارتفاع عن سطح الأرض وصل إليه الرمح.

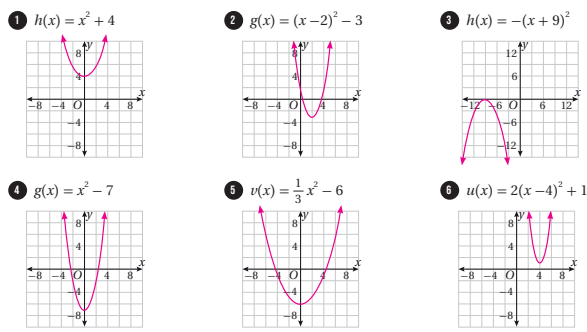
12 أمثل الاقتتران h بيانيًا. أنظر الهامش.

25

الدرس 4

التحويلات الهندسية للاقتترانات التربيعية Transformations of Quadratic Functions

أصِف كيف يرتبط منحنى كل اقتتران مما يأتي بمنحنى الاقتتران الرئيسي $f(x) = x^2$ ، ثم أمثلها بيانيًا: (1-6) أنظر الهامش.



7 بيسبول: رمى لاعب كرة البيسبول في الهواء، فكان ارتفاعها بالقدم h مُعطى بالاقتتران $h(t) = -16(t-1)^2 + 20$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد إفلات الكرة من يد اللاعب.

أصِف العلاقة بين منحنى الاقتتران h ومنحنى الاقتتران $f(t) = t^2$.

منحنى $h(t)$ هو منحنى $f(t) = t^2$ بإزاحة إلى الأعلى بمقدار 20 ft، وإزاحة إلى اليمين

بمقدار 1 ft، وانعكاس حول المحور وتوسيع رأسي معامله 16

إذا كان منحنى الاقتتران $g(x)$ ناتجًا من تضيق رأسي لمنحنى الاقتتران الرئيسي $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$ ، ثم انسحاب إلى الأسفل بمقدار 3 وحدات، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار وحدتين، فأجب عن الأسئلة الآتية:

8 أكتب قاعدة الاقتتران $g(x)$ باستعمال صيغة الرأس.

9 أجد إحداثي رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقتتران $g(x)$.

10 أمثل الاقتتران $g(x)$ بيانيًا. أنظر ملحق الإجابات.

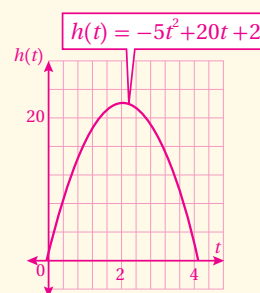
الرأس $(-2, -3)$ ، معادلة محور التماثل $x = -2$ ، القيمة الصغرى -3

26

إجابات أسئلة كتاب التمارين، (الدرس 3):

المدى	المجال	القيمة: عظمى/صغرى	الرأس	محور التماثل
$[3, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	3 : صغرى	$(0, 3)$	$x=0$
$(-\infty, 0]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	0 : عظمى	$(-2, 0)$	$x=-2$
$[2, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	2 : صغرى	$(-1, 2)$	$x=-1$
$[-4, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-4 : صغرى	$(0, -4)$	$x=0$
$(-\infty, 3]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	3 : عظمى	$(0, 3)$	$x=0$
$(-\infty, 3]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	3 : عظمى	$(-2, 3)$	$x=-2$

12)



إجابة الأسئلة في كتاب التمارين (الدرس 4):

1 منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 4 وحدات إلى الأعلى.

2 منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين و 3 وحدات إلى الأسفل.

3 منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 9 وحدات لليسار وانعكاس حول محور x .

4 منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 7 وحدات إلى الأسفل.

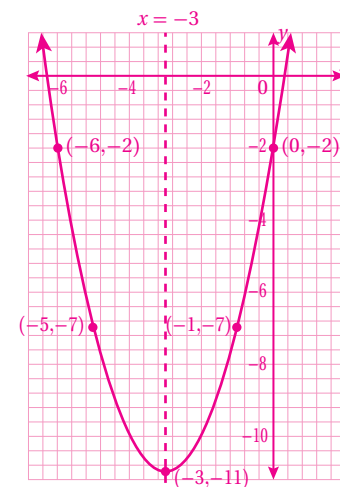
5 منحنى $v(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا 6 وحدات إلى الأسفل وتضيق رأسي معامله $\frac{1}{3}$

6 منحنى $u(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا وحدة واحدة إلى الأعلى وإزاحة إلى اليمين 4 وحدات وتوسيع رأسي معامله 2

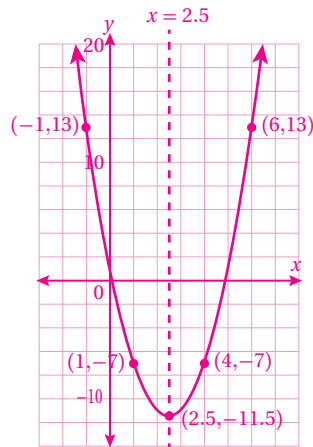
إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

المدى	المجال	القيمة: عظمى/ صغرى	الرأس	محور التماثل	
$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	0 : صغرى	$(0, 0)$	$x = 0$	1)
$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	0 : صغرى	$(0, 0)$	$x = 0$	2)
$(-\infty, 5]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	5 : عظمى	$(0, 5)$	$x = 0$	3)
$[3, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	3 : صغرى	$(0, 3)$	$x = 0$	4)
$[-5, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-5 : صغرى	$(-1, -5)$	$x = -1$	5)
$[-8, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-8 : صغرى	$(2, -8)$	$x = 2$	6)
$(-\infty, \frac{17}{2}]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	$\frac{17}{2}$: عظمى	$(-\frac{3}{2}, \frac{17}{2})$	$x = -\frac{3}{2}$	7)
$(-\infty, 37]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	37 : عظمى	$(4, 37)$	$x = 4$	8)
$(-\infty, -3]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-3 : عظمى	$(4, -3)$	$x = 4$	9)
$[-2, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-2 : صغرى	$(1, -2)$	$x = 1$	10)
$(-\infty, 4]$	$(-\infty, \infty)$ أو R	4 : عظمى	$(-2, 4)$	$x = -2$	11)
$[-3, \infty)$	$(-\infty, \infty)$ أو R	-3 : صغرى	$(-3, -3)$	$x = -3$	12)

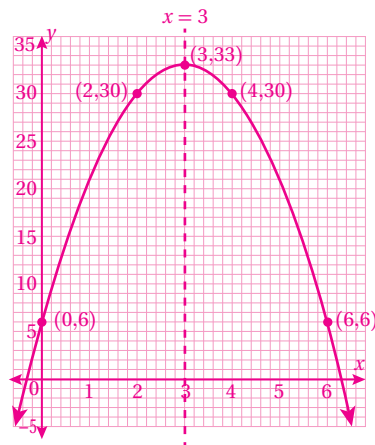
13)



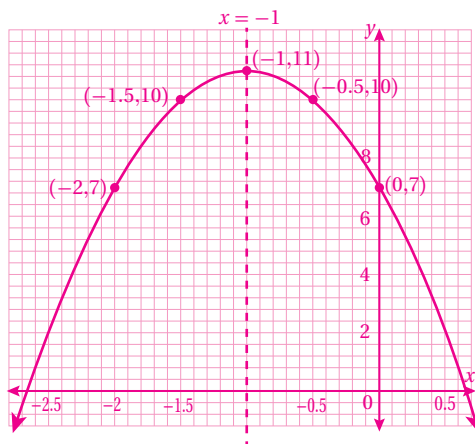
14)



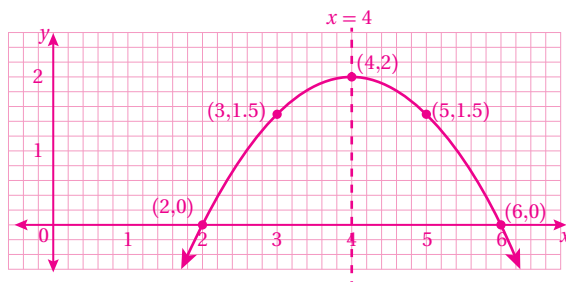
15)



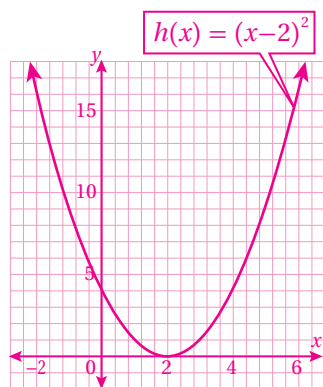
16)



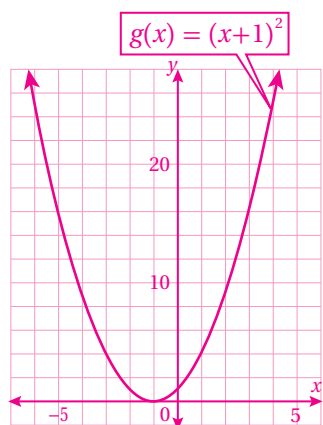
17)



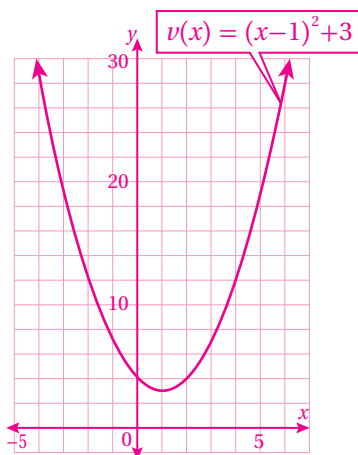
(3) منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا بمقدار وحدتين إلى اليمين.



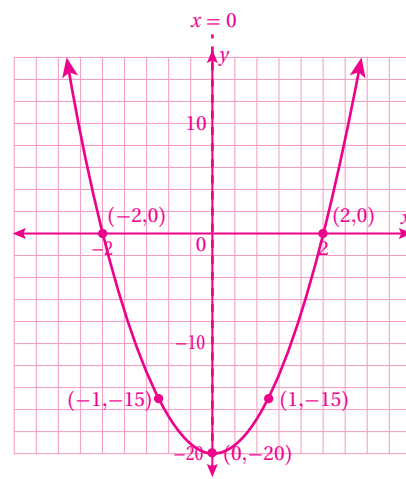
(4) منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار.



(5) منحنى $v(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات وإلى اليمين بمقدار وحدة واحدة.

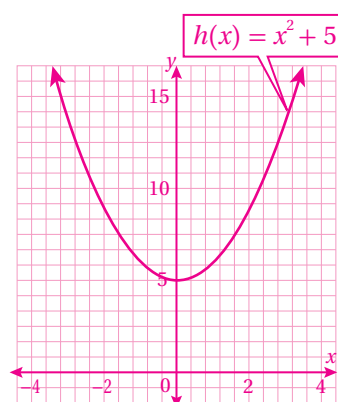


(18)

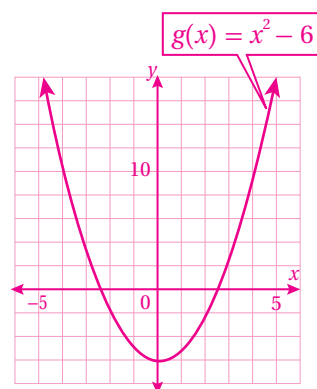


إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 4:

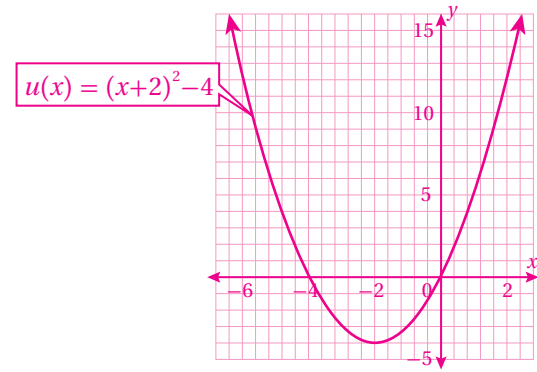
(1) منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى.



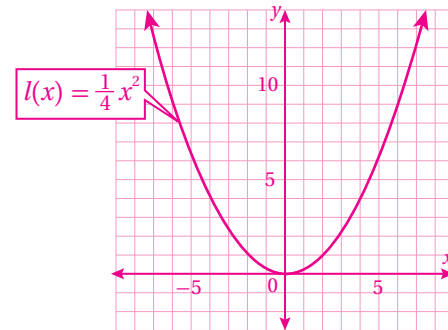
(2) منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا بمقدار 6 وحدات إلى الأسفل.



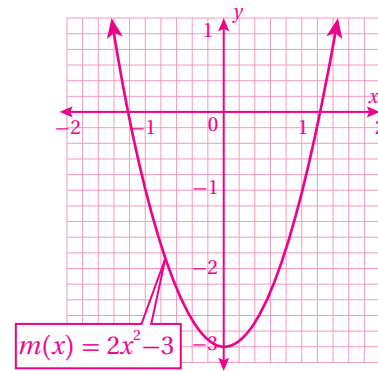
- (6) منحنى $u(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات وإلى اليسار بمقدار وحدتين.



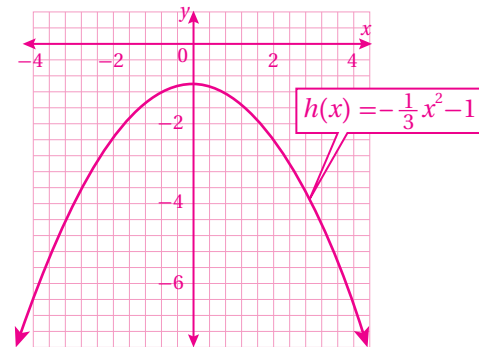
- (7) منحنى $l(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بتضييق رأسي معاملته $\frac{1}{4}$.



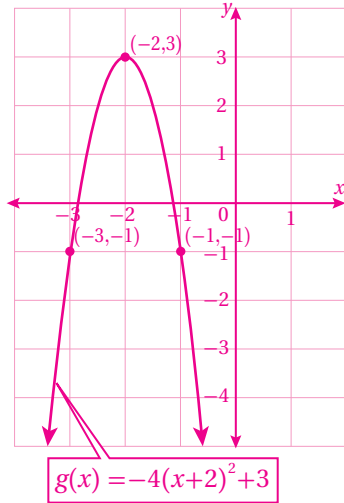
- (8) منحنى $m(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بتوسيع رأسي معاملته 2 وإزاحة للأسفل بمقدار 3 وحدات.



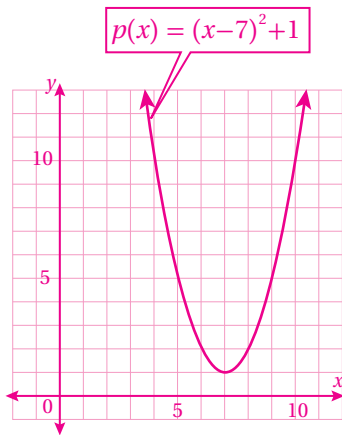
- (9) منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بانعكاس حول المحور x وتضييق رأسي معاملته $\frac{1}{3}$ وإزاحة إلى الأسفل بمقدار وحدة واحدة.



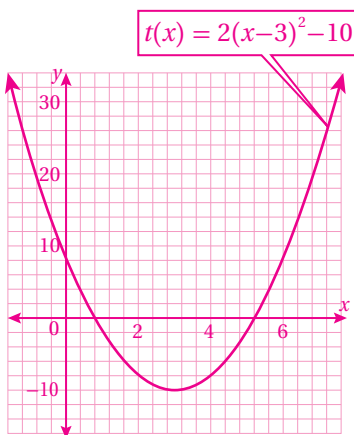
- (10) منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بانعكاس حول المحور x وتوسيع رأسي معاملته 4 وإزاحة إلى الأعلى 3 وحدات وإزاحة إلى اليسار وحدتين.



- (11) منحنى $p(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مزاحًا إلى اليمين بمقدار 7 وحدات وإلى الأعلى بمقدار وحدة واحدة.

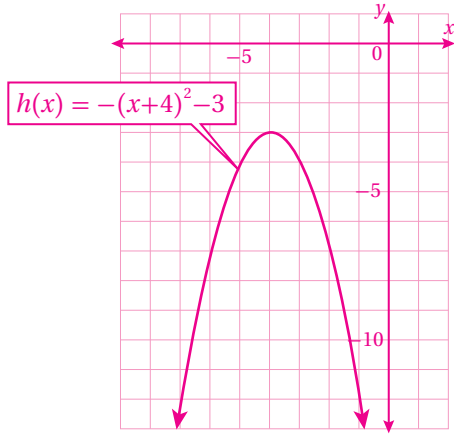


- (12) منحنى $t(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بتوسيع رأسي معاملته 2 وإزاحة إلى اليمين بمقدار 3 وحدات وإزاحة إلى الأسفل بمقدار 10 وحدات.



(24) منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بانعكاس حول المحور x

وإزاحة إلى اليسار 4 وحدات، وإزاحة إلى الأسفل 3 وحدات

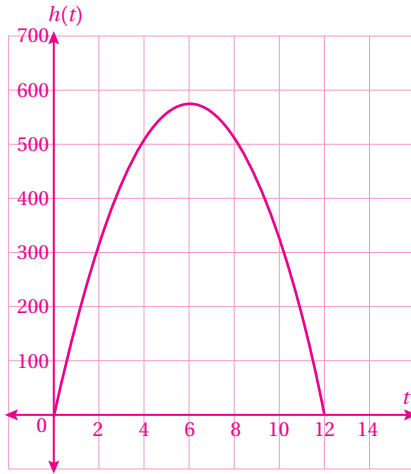


(29) منحنى $h(t)$ هو منحنى $f(t) = t^2$ وقد أُجريَ عليه انعكاس حول

المحور x ، وتوسيع رأسي معاملته 16، وانسحاب أفقي إلى اليمين

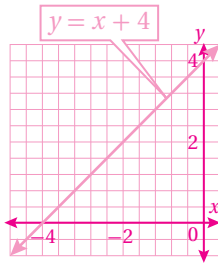
بمقدار 6 وحدات، وانسحاب رأسي إلى الأعلى بمقدار 576

وحدة، وهذا هو تمثيله البياني:



إجابات أسئلة كتاب التمارين، (أستعد لدراسة الوحدة):

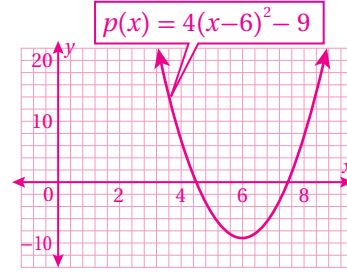
1)



إجابات أسئلة كتاب الطالب، (اختبار نهاية الوحدة):

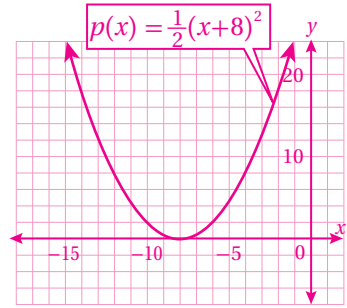
(20) منحنى $p(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بتوسيع رأسي معاملته 4،

وإزاحة إلى اليمين 6 وحدات وإزاحة إلى الأسفل 9 وحدات.



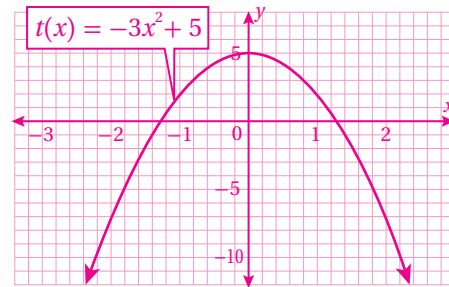
(21) منحنى $p(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بتضييق رأسي معاملته $\frac{1}{2}$ ،

وإزاحة على اليسار 8 وحدات.

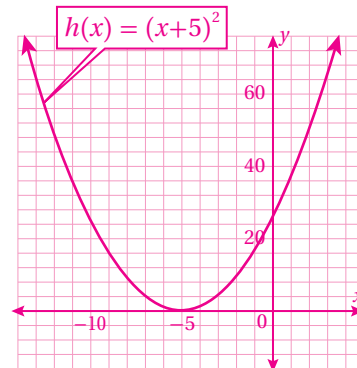


(22) منحنى $t(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بانعكاس حول المحور x

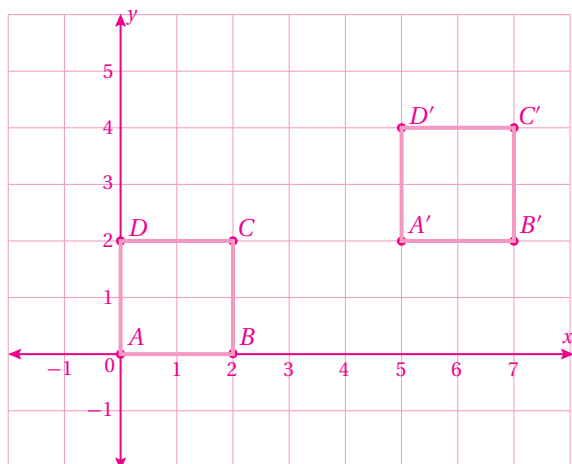
وتوسيع رأسي معاملته 3 وإزاحة إلى الأعلى 5 وحدات.



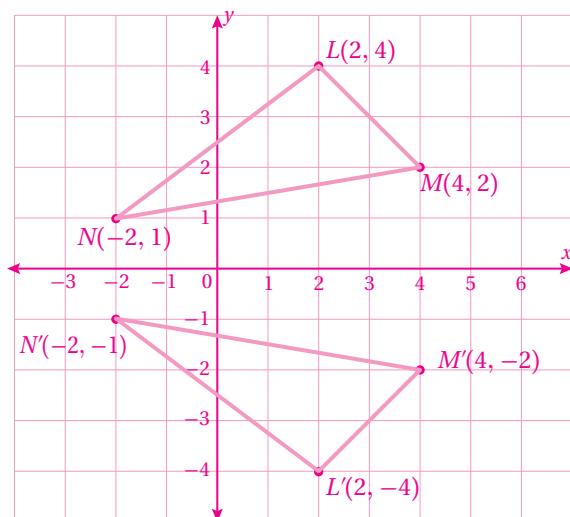
(23) منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ بإزاحة لليسار 5 وحدات.



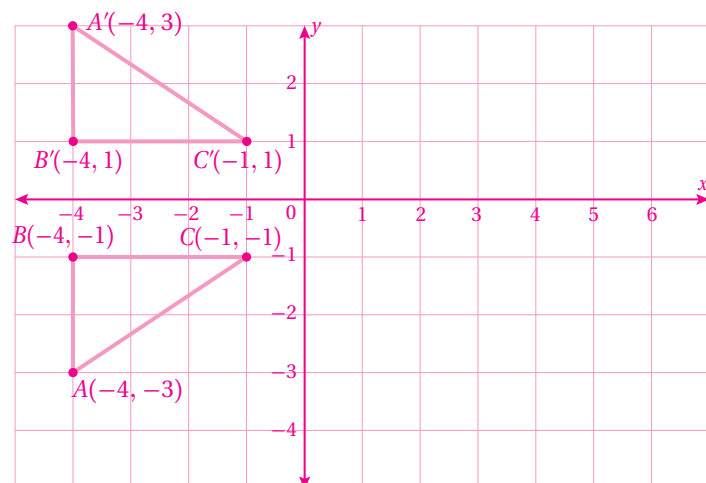
24) $A'(5, 2), B'(7, 2), C'(7, 4), D'(5, 4)$



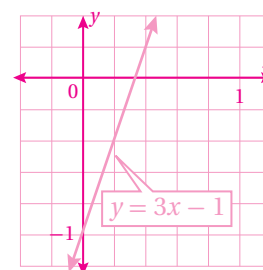
25) $L'(2, -4), M'(4, -2), N'(-2, -1)$



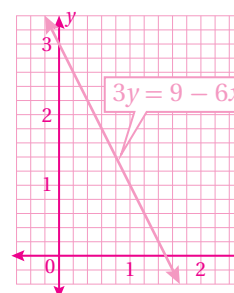
26) $A'(-4, 3), B'(-4, 1), C'(-1, 1)$



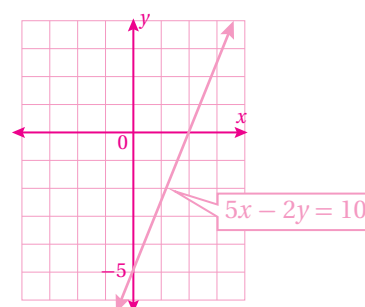
2)



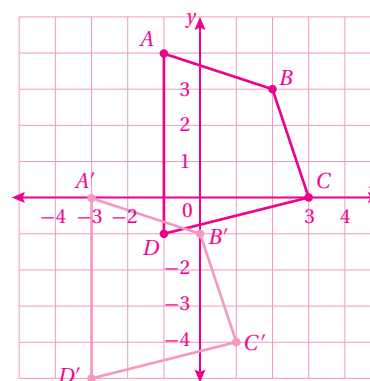
3)



4)



23) $A'(-3, 0), B'(0, -1), C'(1, -4), D'(-3, -5)$

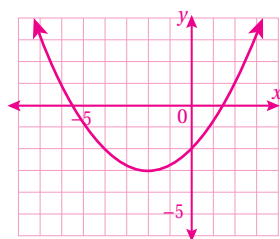
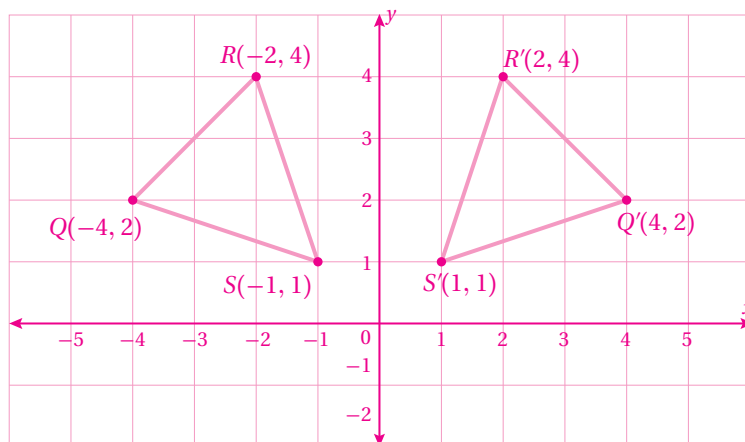
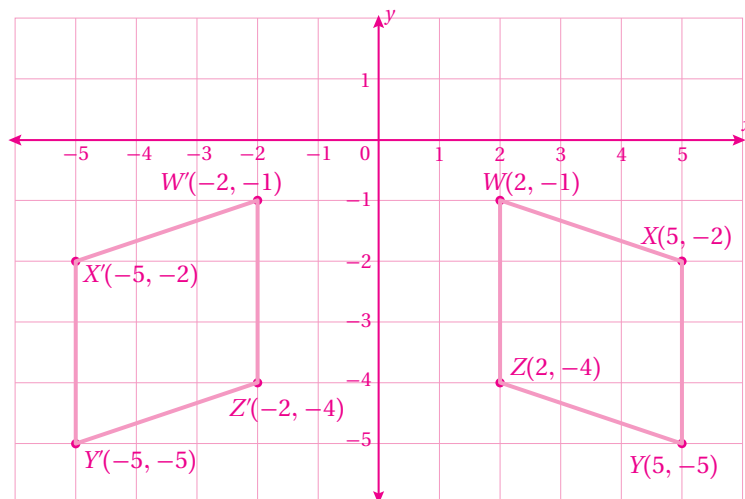


إجابات أسئلة كتاب التمارين، (الدرس 1):

	المجال	المدى	اقتران / ليس اقتراً
1)	$\{13, -4, 6\}$	$\{5, 12, 0, 10\}$	ليس اقتراً
2)	$\{9.2, 9.4, 9.5, 9.8\}$	$\{7, 11, 9.5, 8\}$	اقتران
3)	$\{-3, -1, 0, 1, 2\}$	$\{3, -4, 5, -2\}$	اقتران
4)	$\{5, 2, -7\}$	$\{4, 8, 9, 12, 14\}$	ليس اقتراً
5)	$\{2, 4, -1, 3\}$	$\{1, -2\}$	اقتران
6)	$\{-2, 0, 2, 4\}$	$\{-4\}$	اقتران
7)	$\{-10, -6, -4, -2\}$	$\{1, 2\}$	ليس اقتراً
8)	$\{0, 2, 4\}$	$\{2, 4, 5\}$	ليس اقتراً
9)	$(2, 7)$	$(1, 6)$	اقتران
10)	R	$(-\infty, 0]$	اقتران

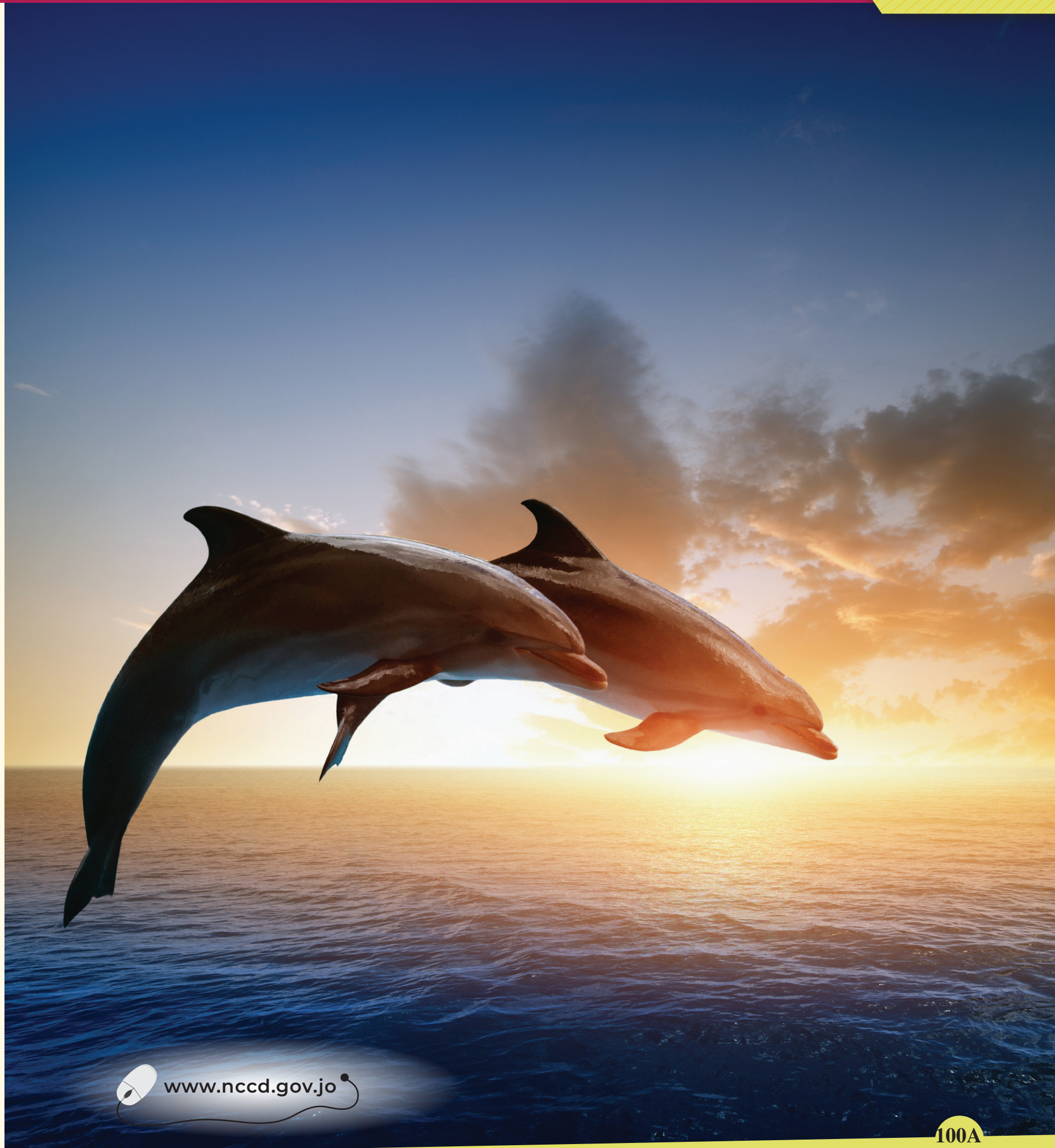
إجابات أسئلة كتاب التمارين، (الدرس 4):

10)

27) $Q'(4, 2), R'(2, 4), S'(1, 1)$ 28) $W'(-2, -1), X'(-5, -2), Y'(-5, -5), Z'(-2, -4)$ 

حل المعادلات
Solving Equations

الوحدة
3



مُخطّط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: حل المعادلات التربيعية بيانيًا.	- تعرف الصورة القياسية للمعادلة التربيعية. - تعرف جذور المعادلة التربيعية وعلاقتها بأصفار الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة. - تعرف أن للمعادلة التربيعية حلين حقيقيين مختلفين، أو حلًا حقيقيًا واحدًا، أو ليس لها حلول حقيقية. - حل المعادلات التربيعية بيانيًا.	- المعادلة التربيعية. - جذور المعادلة. - أصفار الاقتران.	- أقلام لوح ملونة. - لوح بياني.	4
الدرس 2: حل المعادلات التربيعية بالتحليل (1)	- تعرف خاصية الضرب الصفري، واستعمالها في حل المعادلات. - حل معادلات تربيعية بإخراج العامل المشترك الأكبر. - حل معادلات على صورة $x^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل. - حل معادلات تربيعية تتضمن فرقًا بين مربعين. - حل معادلات تربيعية تحوي مربعًا كاملاً في أحد طرفيها، وتحتوي في الطرف الآخر صفرًا. - حل معادلات تربيعية باستعمال الجذر التربيعي. - حل مسائل حياتية تتطلب استخدام الاقتران التربيعي وإيجاد أصفاره التي هي حلول معادلة تربيعية، وتفسير الظاهرة.	خاصية الضرب الصفري.	- ورقة المصادر 7 - مشابك ورقية.	4
الدرس 3: حل المعادلات التربيعية بالتحليل (2)	- تحليل ثلاثي الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل. - حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل.			4
الدرس 4: حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع	- تحويل المقدار التربيعي الذي على صورة $x^2 + bx + c$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود باستعمال عملية إكمال المربع. - حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.	إكمال المربع.	- ورقة المصادر 8 - ورقة المصادر 9 - مشابك ورقية.	3
الدرس 5: حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام	- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام. - حساب المميز لمعادلة تربيعية. - تحديد عدد الحلول الحقيقية لمعادلة تربيعية باستعمال إشارة المميز. - اختيار الطريقة الأنسب لحل المعادلة التربيعية.	- القانون العام. - المميز.		3
الدرس 6: حل معادلات خاصة	- حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 بإخراج العامل المشترك. - حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 بالتجميع. - حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 تؤول إلى الصورة التربيعية. - حل معادلات من الدرجة الثالثة تؤول إلى مجموع مكعبين. - حل معادلات من الدرجة الثالثة تؤول إلى فرق بين مكعبين.	الصورة التربيعية.	- ورقة المصادر 10 - مشابك ورقية.	4
عرض نتائج مشروع الوحدة				
اختبار نهاية الوحدة				
المجموع:				
24 حصة				

ما أهميّة هذه الوحدة؟

تُستعمل المُعادلات كثيرًا لنمذجة حركة الأجسام في
المواقف الحياتيّة والعمليّة، ويمكنُ عن طريق حلّ تلك
المُعادلات تحديد قيم مهمّة في هذه المواقف، مثل:
تحديد زمن تحليق الجسم المقذوف قبل ارتطامه
بالأرض، أو المسافة الأفقيّة التي تقطّعها
الدلافين عند قفزها خارج الماء.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- حلّ المُعادلة التربيعة بيانيًا.
- حلّ المُعادلة التربيعة بالتحليل.
- حلّ المُعادلة التربيعة بإكمال المربع.
- حلّ المُعادلة التربيعة باستعمال القانون العام.
- حلّ مُعادلات خاصّة.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تحليل المقادير الجبريّة بإخراج العامل
المُشترك الأكبر، وتجميع الحدود.
- ✓ تحليل الفرق بين مُربّعي حدّين، وتحليل
ثلاثي الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$
- ✓ التمثيل البياني لمُنحنى الاقتران التربيعة.

100

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرف الطلبة في هذه الوحدة مفهوم المعادلة التربيعة،
وعلاقة جذورها بأصفار الاقتران التربيعة المرتبط بها،
وسيتعلّمون حل المعادلة التربيعة بيانيًا.

سيتعرف الطلبة أيضًا طرائق جبرية مختلفة لحل المعادلات
التربيعة، وهي: إخراج العامل المشترك، والتحليل إلى
العوامل، واستعمال الجذر التربيعة، وإكمال المربع،
والقانون العام.

إضافة إلى ما سبق، سيتعرف الطلبة كيفية حل معادلات
خاصة أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2
باستعمال طرائق جبرية متنوعة، منها: إخراج العامل
المشترك، والتجميع، وتحليل مجموع مكعبين، والفرق
بينهما.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف العاشر

- حل نظام مكوّن من معادلتين
بمتغيرين؛ إحداهما خطية،
والأخرى تربيعة، بيانيًا.
- حل نظام مكوّن من معادلتين
بمتغيرين؛ إحداهما خطية،
والأخرى تربيعة، جبريًا.
- حل نظام مكوّن من معادلتين
تربيعتين بمتغيرين بيانيًا.
- حل نظام مكوّن من معادلتين
تربيعتين بمتغيرين جبريًا.

الصف التاسع

- تعرّف الصورة القياسية للمعادلة التربيعة، وجذورها.
- حل المعادلات التربيعة بيانيًا.
- حل معادلات تربيعة بإخراج العامل المشترك الأكبر، والتحليل إلى
العوامل، واستعمال الجذر التربيعة.
- تحليل ثلاثي الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل.
- تحليل المقادير الجبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى
العوامل، وإكمال المربع، والقانون العام.
- حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 بإخراج
العامل المشترك، والتجميع.
- حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 تؤول
إلى الصورة التربيعة.
- حل معادلات من الدرجة الثالثة تؤول إلى مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين.

الصف الثامن

- تحليل مقادير جبرية باستعمال القطع
الجبرية.
- تحليل مقادير جبرية بإخراج عامل
مشترك من حد واحد.
- إيجاد العامل المشترك الأكبر لحددين
جبريين.
- تحليل مقادير جبرية تحتوي أربعة
حدود جبرية أو أكثر باستعمال تجميع
الحدود.
- تحليل الفرق بين مربعين جبريًا.
- تحليل مربع كامل ثلاثي الحدود.
- تحليل ثلاثي الحدود على الصورة
 $x^2 + bx + c$

أبني منجنيقًا

مشروع الوحدة



فكرة المشروع: بناء منجنيق، وكتابة الاقتران الممثل لحركة الكرة المقذوفة منه، وحل المعادلة التربيعية المرتبطة بالاقتران.

المواد والأدوات: أعواد آيس كريم، سيليكون لاصق، مطاطات، غطاء بلاستيكي، كرة مطاطية، ساعة مؤقتة.

خطوات تنفيذ المشروع:



1 أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الزمن المجاور.

2 أنفذ خطوات صناعة المنجنيق من أعواد الآيس كريم، كما في المقطع المرئي.

3 باستعمال المنجنيق، أطلق كرة مطاطية بجانب حائط، وأحد أقصى ارتفاع تصل إليه، واستعمل الساعة المؤقتة لأحدد بعد كم ثانية وصلت إلى سطح الأرض.

4 استعمل المعلومات من الخطوة السابقة لكتابة قاعدة الاقتران التربيعي الممثل لمنحنى القطع المكافئ، الذي يمثل ارتفاع الكرة المطاطية بالنسبة إلى الزمن، واستعين بالصيغة: $f(t) = -5t^2 + vt$ ؛ حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الكرة بالأمتار، و v السرعة الابتدائية.

5 أبحث في شبكة الإنترنت عن تصميمين آخرين للمنجنيق من أعواد الآيس كريم باستعمال الكلمات المفتاحية: catapult with popsicle sticks، وأتبع الخطوات اللازمة لتنفيذ التصميمين.

6 أطلق الكرة المطاطية باستعمال كل من التصميمين، وأنفذ الخطوات 3 و 4 مرة أخرى، وأقارن بين الاقترانات الناتجة من حيث أقصى ارتفاع، والمدّة التي بقيت فيها الكرة في الهواء.

7 أكتب المعادلة التربيعية الخاصة بكل تصميم من التصميم الثلاثة، وأحلها باستعمال الطرائق الآتية (إن أمكن): التمثيل البياني، والتحليل، وإكمال المربع، والقانون العام، وأبين أي الطرائق لا يمكن حل المعادلات التربيعية بها.

عرض النتائج:

أعد عرضًا تقديميًا أبين فيه خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور، وبعض الصعوبات التي واجهتها في أثناء العمل.

101

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى بناء منجنيق، وكتابة الاقتران الممثل لحركة الكرة المقذوفة منه، وتوظيف طرائق حل المعادلات التربيعية التي سيتعلمها الطلبة في هذه الوحدة في حل المعادلة التربيعية المرتبطة باقتران الحركة.

يهدف مشروع الوحدة أيضًا إلى تنمية مهاراتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلّم موضوعات الوحدة.
- أوزع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولاً بأول، وتعزيزها بالصور.
- أذكر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبين للطلبة سلفًا معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبين للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجية العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة أحد أفرادها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض البيانات التي جمعها مع أفراد مجموعته (تتمثل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلب عليها؛ تعزيزًا لمهاراتهم في حل المشكلات.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	بناء 3 تصاميم مختلفة للمنجنيق باستعمال أعواد الآيس كريم.			
2	كتابة قاعدة الاقتران التربيعي الممثل لمنحنى القطع المكافئ الذي يمثل ارتفاع الكرة بالنسبة إلى الزمن في كل نموذج.			
3	حل المعادلات التربيعية المرتبطة بقاعدة كل اقتران تربيعي بيانيًا.			
4	حل المعادلات التربيعية المرتبطة بقاعدة كل اقتران تربيعي جبريًا.			
5	التعاون والعمل بروح الفريق.			
6	إعداد المشروع في الوقت المحدد.			
7	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
8	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًا Solving Quadratic Equations by Graphing



حلُّ المُعادلةِ التربيعيةِ بيانيًا.
المُعادلةُ التربيعيةُ، جذورُ المُعادلةِ، أصغارُ الاقترانِ.
يمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 10t$ ارتفاعَ دولفينٍ
بالمتر فوق سطح الماء بعد t ثانية من ظهوره فوق هذا
السطح. كم ثانية يبقى الدولفينُ خارج الماء؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



حلُّ المُعادلةِ التربيعيةِ بيانيًا

المُعادلةُ التربيعيةُ (quadratic equation) مُعادلةٌ يمكنُ كتابتها على الصورة:
 $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، والتي تُسمَّى الصورة القياسية للمُعادلة التربيعية، ولكلِّ
مُعادلةٍ تربيعيةٍ اقترانٌ تربيعيٌّ مُرتبطٌ بها يمكنُ الحصولُ عليه بوضع $f(x)$ بدلًا من العدد 0

المُعادلةُ التربيعيةُ

$$2x^2 - 3x + 8 = 0$$

الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$$

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيةِ بتحديدِ قيم x التي يقطعُ عندها منحني الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ
بالمُعادلةِ المحورَ x ، وتُسمَّى تلكَ القيمُ **جذورُ المُعادلةِ** (roots of the equation) أو
أصغارُ الاقترانِ (zeros of the function).

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيةِ بيانيًا باتباعِ الخطواتِ الآتية:

أتعلَّم

يمكنُ أن يكونَ للمُعادلةِ
التربيعيةِ حلَّانِ حقيقيَّان
مختلفان، أو حلٌّ حقيقيٌّ
واحد، أو ألا يكونَ لها
حلولٌ حقيقيةٌ.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيةِ بيانيًا

مفهومٌ أساسيٌّ

لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًا اتَّبِعِ الخطواتِ الآتية:

الخطوة 1: أكتب المُعادلة بالصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

الخطوة 2: اُمثل بيانيًا الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلة وهو: $f(x) = ax^2 + bx + c$

الخطوة 3: أجد قيم x التي يقطعُ عندها منحني الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x ، إنْ
وُجِدَتْ، وهي أصغارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعدُّ حلولَ المُعادلة.

نتائج الدرس



- تعرف الصورة القياسية للمعادلة التربيعية.
- تعرف جذور المعادلة التربيعية وعلاقتها بأصغار الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة.
- تعرف أن للمعادلة التربيعية حلين حقيقيين مختلفين، أو حلًا حقيقيًا واحدًا، أو ليس لها حلول حقيقية.
- حل المعادلات التربيعية بيانيًا.

نتائج التعلُّم القبلي:

- تعرف الاقتران التربيعي، وخصائصه.
- تمثيل الاقتران التربيعي بيانيًا في المستوى الإحداثي.

مراجعة التعلُّم القبلي ومعالجة الفاقدة التعليمي:

- أوجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأطلب إلى كل مجموعة تمثيل كل اقتران من الاقترانات التربيعية الآتية بيانيًا، وتحديد مجاله ومداه، ومعادلة محور تماثله، وإحداثيي رأسه.

$$f(x) = x^2 + 4x + 7$$

$$f(x) = -3x^2 + 18x - 20$$

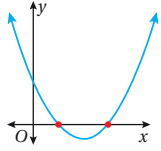
$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
« ماذا تعرفون عن الدولفين؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- « ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع الدولفين في المسألة بعد t ثانية من ظهوره فوق سطح الماء؟
$$h(t) = -5t^2 + 10t$$
- « كيف يمكن إيجاد الزمن الذي بقيه الدولفين خارج الماء؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟
- « من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟
- « أعزز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألا أقول للطالب / لل طالبة:
(إجابتك خطأ)، بل أقول له / لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره / أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره / غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرف الإجابة الصحيحة، وأعززها / أعززها، ثم أطلب إلى الطالب الأول / الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرة أخرى، وأعززها / أعززها كما عززت من أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

- أذكر الطلبة بمفهوم المعادلة، ثم أسألهم:
« برأيكم / برأيكن ما المقصود بالمعادلة التربيعية؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، ثم أوضح لهم مفهوم المعادلة التربيعية، والصورة القياسية لها، وأبين لهم أن لكل معادلة تربيعية اقتراناً تربيعياً مرتبطاً بها.
- أوضح للطلبة كيفية إيجاد الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة التربيعية، ثم أكتب مجموعة من المعادلات التربيعية على اللوح، وأطلب إلى الطلبة كتابة الاقتران المرتبط بكل معادلة.
- أذكر الطلبة بمفهوم حل المعادلة، ثم أوضح لهم أن حل المعادلة التربيعية هو قيم x التي تقطع عندها منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة المحور x ، وأبين لهم أن هذه القيم تُسمى جذور المعادلة أو أصفار الاقتران، وانطلاقاً من ذلك أبين لهم أنه يمكن حل المعادلة التربيعية بيانياً بتمثيل منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بها، ثم أبين لهم خطوات ذلك بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي).
- أسأل الطلبة:
« برأيكم / برأيكن ما عدد حلول المعادلة التربيعية؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أستمع لإجابات الطلبة عن السؤال السابق، وأطلب إليهم تبريرها، ثم أستنتج معهم أنه يمكن أن يكون للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان مختلفان، أو حل حقيقي واحد، أو ألا يكون لها حلول حقيقية.

الوحدة 3



حلّ المعادلة التربيعية بيانياً: حلّان حقيقيان مختلفان

يكون للمعادلة التربيعية حلّان حقيقيان، إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي المُربط المحور x في نقطتين مختلفتين، كما في الشكل المُجاور.

مثال 1

أحلّ المعادلة $x^2 + 2x = 3$ بيانياً.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية، ثم أكتب الاقتران التربيعي المُربط بالمعادلة.

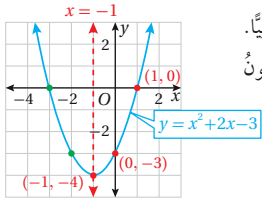
$$x^2 + 2x = 3$$

المعادلة المُعطاة

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

بسط 3 من طرفي المعادلة

إذن، الاقتران التربيعي المُربط بالمعادلة: $f(x) = x^2 + 2x - 3$



الخطوة 2: أمثل الاقتران التربيعي المُربط بالمعادلة بيانياً.

بما أن $a > 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحاً للأعلى.

معادلة محور التماثل: $x = -1$

إحداثيات الرأس: $(-1, -4)$

نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y هي: $(0, -3)$ ، ونقطة أخرى تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل وهي مثلاً: $(1, 0)$.

أمثل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أستعمل التماثل لأعكسهما.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

يقطع المنحنى المحور x عند 1 ، -3

إذن، للمعادلة جذران، هما: $x = 1$ ، $x = -3$

التحقق: أتتحقق من صحة كلٍّ من الحلين بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 + 2x = 3 \quad \text{المعادلة المُعطاة} \quad x^2 + 2x = 3$$

$$(-3)^2 + 2(-3) \stackrel{?}{=} 3 \quad \text{بالتعويض} \quad (1)^2 + 2(1) \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 = 3 \quad \checkmark \quad \text{بالتبسيط} \quad 3 = 3 \quad \checkmark$$

أنذُر

القطع المكافئ مفتوح للأعلى إذا كانت $a > 0$ ومفتوح للأسفل إذا كانت $a < 0$.

أنذُر

معادلة محور التماثل لمنحنى الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ هي $x = -\frac{b}{2a}$ رأسه $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

إرشادات:

ألفت انتباه الطلبة إلى صندوقي (أنذُر) المجاورين للمثال 1؛ لما لهما من أهمية في تذكير الطلبة بخصائص الاقتران التربيعي التي يمكن الحصول عليها من معادلته والتي تسهل عملية تمثيله بيانياً.

أذكر الطلبة بأن التحقق من صحة الحل يكون بتعويض قيمة x في المعادلة الأصلية، فإذا تساوى طرفا المعادلة فإن قيمة x تُعدّ حلاً للمعادلة، وإلا فإنها لا تُعدّ كذلك.

أوجّه الطلبة إلى استعمال أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين في حل المعادلات التربيعية الواردة في الدرس بيانياً.

تنويع التعليم:

أستعمل الأقلام الملونة عند حل المعادلات التربيعية بيانياً؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتّعون بذكاء بصري.

أخطاء شائعة:

قد يخطئ بعض الطلبة عند حل المعادلة التربيعية بيانياً، بتمثيل منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بها بصورة غير صحيحة، ما يؤثر في حلول المعادلة؛ لذا أوكد وبشكل مستمر ضرورة التحقق من صحة التمثيل البياني.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكثّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال 2

- أنتقل إلى مناقشة الحالة الثانية مع الطلبة، وهي أن يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد، وذلك برسم منحنى تقريبي لقطع مكافئ وتوضيح كيف يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط.
- ناقش الطلبة في حل المثال 2 باتباع الإجراءات الآتية:
 - « توزيع الطلبة في مجموعات رباعية، ثم الطلب إلى أفراد كل مجموعة كتابة الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة الواردة في المثال، ثم تمثيله بيانياً.
 - « تحديد قيم x التي يقطع عندها المحور x .
 - « التحقق من صحة الحل.
- أتابع أفراد المجموعات أثناء العمل، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- ناقش أفراد المجموعات في حل المثال، ثم أسألهم:
 - « ما الإحداثي x لرأس قطع منحنى الاقتران؟ $x = -2$
 - « ما حل المعادلة؟ $x = -2$
 - « ماذا نستنتج؟ إجابة ممكنة: عندما يكون للمعادلة حل وحيد؛ فإن الإحداثي x لرأس القطع يمثل الحل الوحيد للمعادلة.
- إن لزم الأمر، ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: يساعد استعمال لوح متنقل خاص بالمستوى الإحداثي على تمثيل المعادلات بسهولة، ويوفر الوقت المستفاد في رسم المحاورين الإحداثيين وتقسيمهما، ويمكن إعدادة بسهولة برسم المستوى الإحداثي على طبق من الكرتون المقوى، ثم تغطيته بلاصق شفاف.

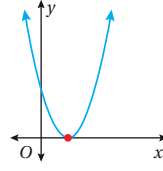
اتحقق من فهمي

أحل المعادلة $2x^2 - 2 = 0$ بيانياً. أنظر الهامش.

إرشاد

استعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

حل المعادلة التربيعية بيانياً: حل حقيقي واحد.



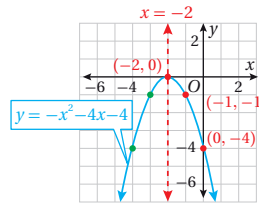
يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي واحد إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي المرتبط المحور x في نقطة واحدة فقط، كما في الشكل المجاور.

مثال 2

أحل المعادلة $-x^2 - 4x - 4 = 0$ بيانياً.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية، ثم أكتب الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة. ألاحظ أن المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية. إذن، الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$



الخطوة 2: أمثل الاقتران المرتبط بالمعادلة بيانياً.

- بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحاً للأسفل.
- معادلة محور التماثل: $x = -2$
- إحداثي الرأس: $(-2, 0)$
- نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، هي: $(0, -4)$ ، ونقطة أخرى تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل وهي مثلاً: $(-1, -1)$.
- أمثل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أستعمل التماثل لأعكسهما.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

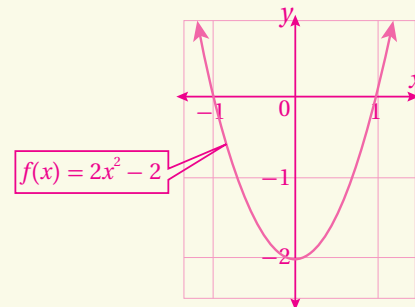
يقطع المنحنى المحور x عند -2 إذن، للمعادلة جذرٌ وحيدٌ، هو: $x = -2$ فقط.

أتعلم

ألاحظ أن الإحداثي x لرأس القطع هو حل المعادلة الوحيد، عندما يكون للمعادلة حل واحد فقط.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 1):

للمعادلة جذران، هما: $1, -1$



التحقق: أتأكد من صحة الحل الوحيد بالتعويض في المعادلة الأصلية.

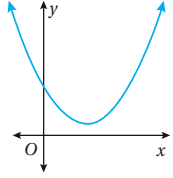
$$-x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \text{المعادلة المُعطاة}$$

$$-(-2)^2 - 4(-2) - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{بالتعويض } x = -2$$

$$0 = 0 \quad \checkmark \quad \text{بالتبسيط}$$

أتأكد من فهمي

أحل المعادلة $x^2 - 8x = -16$ بيانيًا. أنظر الهامش.



حل المعادلة التربيعية بيانيًا: لا توجد حلول حقيقية.

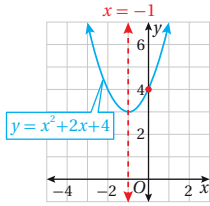
لا يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي إذا لم يقطع منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة التربيعية المحور x ، كما في الشكل المُجاور.

مثال 3

أحل المعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ بيانيًا.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية، ثم أكتب الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة. ألاحظ أن المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية. إذن، الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$



الخطوة 2: أمثل الاقتران المرتبط بالمعادلة بيانيًا.

• بما أن $a > 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحًا للأعلى.

• معادلة محور التماثل: $x = -1$

• إحداثيات الرأس: $(-1, 3)$

• نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، هي: $(0, 4)$ ، ونقطة أخرى تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل وهي مثلاً: $(1, 7)$.

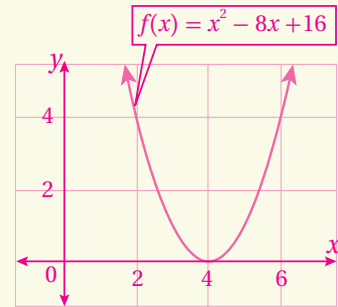
• أمثل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أستعمل التماثل لأعكسهما.

- أنتقل إلى مناقشة الحالة الثالثة مع الطلبة، وهي ألا يكون للمعادلة التربيعية حل حقيقي، وذلك برسم منحنى تقريبي لقطع مكافئ وتوضيح كيف أنه لا يقطع المحور x .
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، وألفت انتباههم إلى أن منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة الواردة في المثال لا يقطع المحور x ، وإنما يقع بالكامل فوق المحور x .
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى أن منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بمعادلة تربيعية لا يقطع المحور x في حالتين؛ الحالة الأولى: أن يكون منحنى الاقتران التربيعي مفتوحًا للأعلى ويقع بأكمله فوق المحور x ، أما الحالة الثانية: فهي أن يكون منحنى الاقتران التربيعي مفتوحًا للأسفل ويقع بأكمله أسفل المحور x .

إجابة التدريب في بند (أتأكد من فهمي 2):

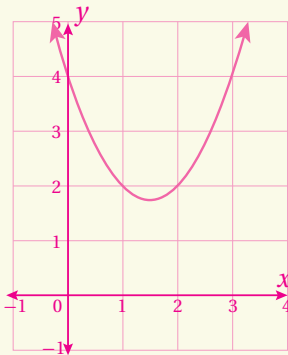
للمعادلة جذر وحيد، هو: 4



مثال إضافي:

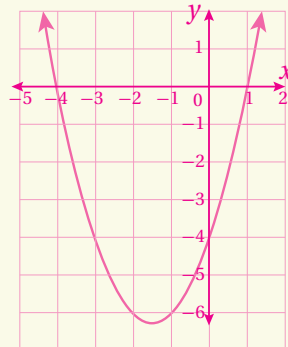
أحل كل معادلة من المعادلات الآتية بيانيًا:

1 $x^2 - 3x + 4 = 0$



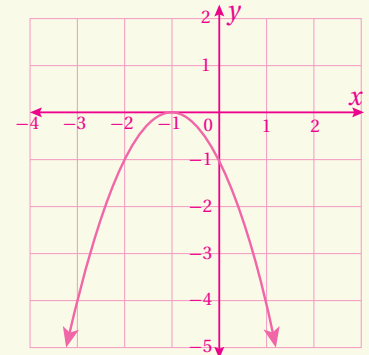
لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة

2 $x^2 + 3x - 4 = 0$



جذرا المعادلة هما: $x = -4$, $x = 1$

3 $-x^2 - 2x - 1 = 0$



جذر المعادلة $x = -1$

مثال 4: من الحياة

- أوضح للطلبة أن حل المعادلات التربيعية يستعمل في كثير من التطبيقات الحياتية، وأعطى لهم أمثلة على ذلك، منها: تحديد زمن بقاء المقذوف في الهواء، والمسافة الأفقية التي يقطعها.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أدير نقاشاً مع الطلبة حول إجابة السؤال الموجود في صندوق (أفكر) المجاور للمثال 4، وأتوصل معهم إلى أنه اكتفي بتمثيل الاقتران المرتبط بالمعادلة التربيعية فوق المحور x ؛ لأن الاقتران في المسألة يُعدّ نموذجاً لموقف حياتي يربط بين ارتفاع قطرة ماء وبُعدها عن فوهة النافورة، ولا يمكن أن يكون الارتفاع والبعد سالبين.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتران المرتبط لا يقطع المحور x . إذن، لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة.

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أحل المعادلة $x^2 + 5 = 4x$ بيانياً.

إرشاد

استعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

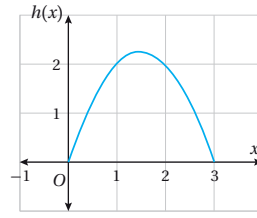
بأخذ مسار بعض المقذوفات شكل القطع المكافئ؛ لذا يمكن استعمال خصائص الاقترانات التربيعية لتحديد زمن بقاء المقذوف في الهواء والمسافة الأفقية التي يقطعها.

مثال 4: من الحياة

نوافير: يمثل الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ ارتفاع قطرة ماء مُندفّسة من فوهة نافورة بالأمطار عندما تكون على بُعد x مترًا من الفوهة. استعمل التمثيل البياني لأجد بُعد نقطة أفقية تصل إليها قطرة الماء.

يكون ارتفاع قطرة الماء عند خروجها من فوهة النافورة 0 m، ويكون ارتفاعها 0 m عند عودتها إلى سطح الأرض؛ لذا فإن بُعد نقطة أفقية تصلها قطرة الماء تكون عندما يقطع الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ المحور x .

إذن، أحل المعادلة $3x - x^2 = 0$ بيانياً لأحدد هاتين القيمتين.



الخطوة 1: أمثل الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ بيانياً.

الخطوة 2: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

بما أن المقطع x للاقتران هو 3، فإن بُعد نقطة تصل إليها قطرة الماء هي على بُعد 3 m من النافورة.

معلومة

برع المهندسون المسلمون في العصر الأندلسي في تصميم النوافير، وابتكروا لها طرائق ميكانيكية معقدة لصنع الماء من غير محركات.

أفكر

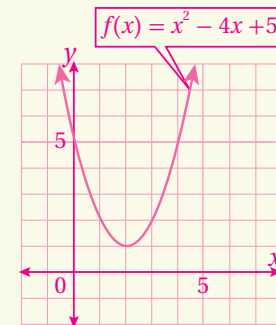
لماذا اكتفي بتمثيل الاقتران فوق المحور x الموجب؟

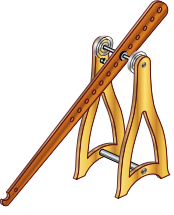
تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبرياً؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، وأنوّه بضرورة قراءة المسألة بروية؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة.





أتحقق من فهمي

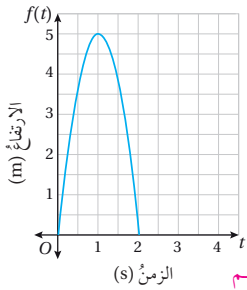
فيزياء: في تجربة فيزيائية، قذفت صفاً كتلة إلى الأعلى، فمُثل الاقتران $h(t) = -5t^2 + 20t$ ارتفاع هذه الكتلة بالأمتار، بعد t ثانية من قذفها. أستمعُ التمثيل البياني لإيجاد زمن بقاء الكتلة في الهواء. أنظر الهامش.

أندرب وأحل المسائل

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بيانياً: (1-12) أنظر ملحق الإجابات.

- | | | |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1 $x^2 - 9 = 0$ | 2 $x^2 - 5x = 0$ | 3 $-12x^2 = 16$ |
| 4 $-x^2 + 12x = 36$ | 5 $x^2 - 6x + 9 = 0$ | 6 $x^2 - 6x = 7$ |
| 7 $x^2 + x - 6 = 0$ | 8 $x^2 = 6x - 8$ | 9 $-x^2 + 4 = 3x$ |
| 10 $x^2 + 3x + 6 = 0$ | 11 $2x^2 - 5x = -6$ | 12 $2x^2 + 32 = -20x$ |

إرشاد: أستمعُ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.



رياضة: يبيّن الشكل المُجاوِز ارتفاع لاعب جُمباز $f(t)$ بالأمتار بعد t ثانية من وثبه عن سطح الأرض.

13 كم ثانية بقي اللاعب في الهواء؟ 2 s

14 ما أقصى ارتفاع وصل إليه اللاعب؟ 5 m

15 هل يمثّل الاقتران $f(t) = -5t^2 + 10t$ حركة لاعب الجُمباز؟ نعم، يمثّلها، رأس المنحنى الاقتران ورأس المنحنى في الرسم نفسه وهو (1, 5)، وصغرا الاقتران هما أنفسهما الإحداثيان t لنقطتي تقاطع المنحنى مع المحور t ، وهما: 0, 2

أندرب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (أندرب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكّنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدّمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أندرب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلّاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (17 - 21).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

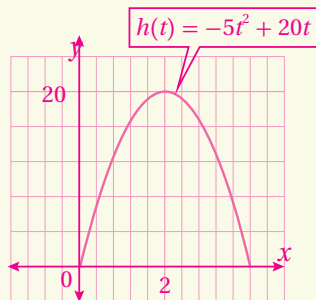
إرشادات:

- في السؤال 17 (أكتشف المختلف)، أوجّه الطلبة إلى حل المعادلات الأربع بيانياً لتحديد المعادلة المختلفة.
- في المسائل (19 - 21) (مسألة مفتوحة)، ألفت انتباه الطلبة إلى وجود أكثر من حل لكل مسألة من المسائل الثلاث؛ لذا صُنّفت ضمن المسائل المفتوحة.

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 4):

للمعادلة جذران: هما: 0, 4

وهذا يعني أن مدة بقاء الكتلة في الهواء 4 sec



تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة المتميزين إعطاء أكثر من حل لكل مسألة من المسائل (19 – 21).

الواجب المنزلي:

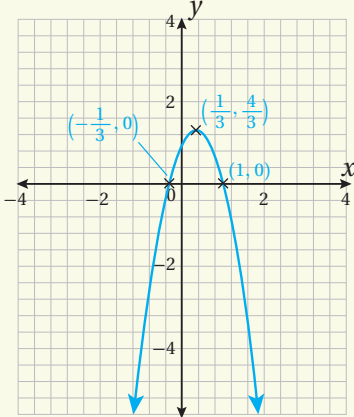
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 16, 17 كتاب التمارين: (1 – 6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 16, 18 كتاب التمارين: (4, (6 – 8)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (18 – 21) كتاب التمارين: (7 – 9)

الإثراء

5

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
- « أكتب معادلة تربيعية مرتبطة بمنحني الاقتران التربيعي الممثل في الشكل الآتي:



$$-3x^2 + 2x + 1 = 0$$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (1-4) من خطوات تنفيذ المشروع.

إرشاد: في سؤال بند (أتحقق من فهمي) التابع للمثال 4، ألقت انتباه الطلبة إلى نموذج المنجنيق الوارد في المسألة، وأوضح أنه يمكنهم اعتماد هذا النموذج بوصفه أحد تصاميم المنجنيق الخاص بمشروع الوحدة. أوجه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن كيفية تصميم هذا النموذج.



16 طيور: التقطت نسر سمكة من بحيرة وطار بها، وعندما وصل إلى ارتفاع 9 m تمكنت السمكة من التحرر لتسقط مرة أخرى في البحيرة. إذا علمت أن الاقتران $h(t) = -5t^2 + 9$ يمثل ارتفاع السمكة بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها، فاستعمل التمثيل البياني لإيجاد زمن بقاء السمكة في الهواء. أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

17 أكتشف المختلف: أيُّ المعادلات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

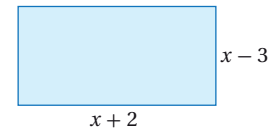
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

المعادلة المختلفة هي: $x^2 - 6x + 8 = 0$ ؛ لأن لها جذرين موجبين، أما المعادلات الباقية فلكل منها جذر سالب وآخر موجب.

18 تبرر: بين الشكل الآتي مستطيلاً مساحته 50 m^2 . أستخدم التمثيل البياني لإيجاد قيمة x ، وأبرر إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.



مسألة مفتوحة: أكتب معادلة تحقق الوصف المعطى في كل مما يأتي:

19 معادلة تربيعية ليس لها جذر حقيقي. **إجابة ممكنة:** $x^2 - x + 3 = 0$

20 معادلة تربيعية لها جذر حقيقي واحد. **إجابة ممكنة:** $x^2 + 2x + 1 = 0$

21 معادلة تربيعية لها جذران صحيحان موجبان. **إجابة ممكنة:** $x^2 - 5x + 6 = 0$

108

الختام

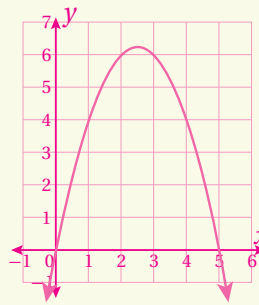
6

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

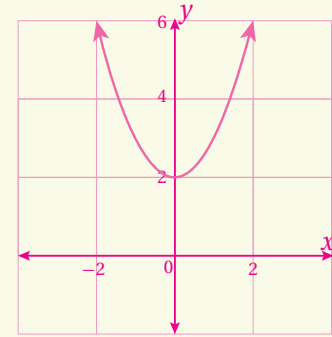
« أحل كل معادلة من المعادلات الآتية بياناً:

1 $-x^2 + 5x = 0$

2 $x^2 = -2$



جذرا المعادلة هما: $x = 0$, $x = 5$



لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليلِ (1) Solving Quadratic Equations by Factoring (1)

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليلِ.

خاصيّةُ الضربِ الصّفريّ.



يمثّل الاقتران $h(t) = -16t^2 + 7t$ ارتفاع كنفّر بالقدم فوق سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه. كم ثانية تقريباً يحتاج الكنفّر ليعود إلى سطح الأرض؟

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



نتائج الدرس



- تعرّف خاصية الضرب الصفري، واستعمالها في حل المعادلات.
- حل معادلات تربيعية بإخراج العامل المشترك الأكبر.
- حل معادلات على صورة $x^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل.
- حل معادلات تربيعية تتضمن فرقاً بين مربعين.
- حل معادلات تربيعية تحوي مربعاً كاملاً في أحد طرفيها، وتحتوي في الطرف الآخر صفراً.
- حل معادلات تربيعية باستعمال الجذر التربيعي.
- حل مسائل حياتية تتطلب استخدام الاقتران التربيعي وإيجاد أصفاره التي هي حلول معادلة تربيعية، وتفسير الظاهرة.

نتائج التعلّم القبلي:

- تحليل المقادير الجبرية بإخراج العامل المشترك.
- تحليل ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$
- تحليل الفرق بين مربعين.
- تحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود.
- حل المعادلات باستعمال الجذر التربيعي.
- حل المعادلات التربيعية بيانياً.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد

التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليلِ، وبخاصيّةِ الضربِ الصّفريّ.

تعلّمتُ في الدرس السابق حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بيانياً، وسأُتعلّمُ في هذا الدرس حلّها جبرياً.

أتأمّلُ كلّاً من الجُمْلِ الآتية:

$$6(0) = 0 \quad 0(-5) = 0 \quad (7-7)(0) = 0$$

ألاحظُ أنّ أحدَ العاملين على الأقل في كلّ حالة ممّا سبق يُساوي صفراً؛ لذا فإنّ حاصل ضربيهما يُساوي صفراً، وهذا ما يُسمّى **بخاصيّةِ الضربِ الصّفريّ** (zero-product property).

خاصيّةُ الضربِ الصّفريّ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين يُساوي صفراً، فإنّ أحدهما على الأقل يجب أن يكون صفراً.

بالرموز: إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $ab = 0$ ، فإن:

$$a = 0 \quad \text{or} \quad b = 0$$

يمكنُ استعمالُ خاصيّةِ الضربِ الصّفريّ والتحليل لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ، فإذا كان أحدُ طرفي مُعادلةٍ مكتوباً بالصورة التحليليّةِ، والطرف الآخر هو 0، فيمكنُ استعمالُ خاصيّةِ الضربِ الصّفريّ لحلّها.

أنذُر

كتابة مقدار جبري بالصورة التحليليّة يعني تحليلاً كاملاً. مثل:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= x(x+5) \\ x^2 + 3x + 2 &= (x+2)(x+1) \end{aligned}$$

- أوزع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أزوّد كلّ مجموعة بورقة المصادر 7: لعبة التحليل، ومشابك ورقية.
- أطلب إلى أفراد المجموعات التوفيق بين بطاقة كلّ مقدار جبري والبطاقة التي تحمل تحليله، ثم ربطهما بمشبك ورقي.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

✓ **إرشاد:** أقصّ البطاقات الموجودة في ورقة المصادر قبل بدء الدرس، ثم أخلطها جيداً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - « ماذا تعرفون عن الكنغر؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع الكنغر في المسألة بعد t ثانية من قفزه؟ $h(t) = -16t^2 + 7t$
 - « كيف يمكن إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه الكنغر حتى يعود إلى سطح الأرض؟ أبرر إجابتي. إجابة ممكنة: بتمثيل منحنى الاقتران $h(t) = -16t^2 + 7t$ بيانياً، وتحديد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور t ؛ لأن إحداها ستمثل الزمن الذي احتاج إليه الكنغر حتى يعود إلى سطح الأرض.
- أطلب إلى أحد الطلبة حل المسألة بيانياً، ثم أسألهم:
 - « كيف يمكن إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه الكنغر حتى يعود إلى سطح الأرض دون تمثيل الاقتران بيانياً؟
 - أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
 - أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟
 - « من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟
 - أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أكتب المعادلة $a \times b = 0$ على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة تحديد أزواج من قيم a و b تجعل المعادلة صحيحة، وأسجّل الصحيح من إجاباتهم على اللوح على صورة أزواج مرتّبة، مثل: $(0, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, 7)$.
- أسأل الطلبة:
 - « ما العدد المشترك بين الأزواج المرتّبة؟ العدد 0
 - « هل يلزم أن يساوي كل من a و b صفراً معاً ليكون ناتج $a \times b$ يساوي صفراً؟ لماذا؟ لا؛ لأنه يكفي أن يكون أحدهما يساوي صفراً.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤالين السابقين، وأتوصّل معهم إلى أنه إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين يساوي صفراً، فإن أحدهما على الأقل يجب أن يساوي صفراً، وأبينّ لهم أن هذا يُسمّى خاصية الضرب الصفري، ثم أقدّم لهم الخاصية بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي).
- أكتب المعادلة $x(x - 1) = 0$ على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة تحديد قيم x التي تجعل المعادلة صحيحة. أناقش إجابات الطلبة وأتوصّل معهم - بالاستعانة بخاصية الضرب الصفري - إلى حقيقة أن x قيمتين فقط هما 0 و 1.
- أكتب المعادلة $(x + 3)(x - 2) = 0$ على اللوح، ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x التي تجعل المعادلة صحيحة. أناقش إجابات الطلبة وأتوصّل معهم - بالاستعانة بخاصية الضرب الصفري - إلى حقيقة أن x قيمتين فقط هما -3 و 2، ثم أوجههم إلى ملاحظة أن $x = 2$ يُعدّ حلاً للمعادلة $x - 2 = 0$ ، وأن $x = -3$ يُعدّ حلاً للمعادلة $x + 3 = 0$ ، وتأسيساً على ذلك فإن حل المعادلة $(x + 3)(x - 2) = 0$ هو حل المعادلتين الخطيتين المكوّنتين لهذه المعادلة.
- أوضّح للطلبة أنه يمكن استعمال خاصية الضرب الصفري وتحليل المقادير الجبرية في حل المعادلات التربيعية، ثم أقدّم لهم خطوات حل المعادلة التربيعية بالتحليل بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.

✓ **إرشاد:** أذكر الطلبة بمفهوم كتابة المقدار الجبري بالصورة التحليلية عند مناقشة خطوات حل المعادلات التربيعية، بالاستعانة بصندوق (أذكر) الوارد في هامش الصفحة 109 من كتاب الطالب.

- أذكر الطلبة بطرائق تحليل المقادير الجبرية التي تعلموها في الصف الثامن، وهي: التحليل بإخراج العامل المشترك، وتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$ ، وتحليل الفرق بين مربعين، وتحليل المربعات الكاملة، ثم أبين لهم أننا سنناقش من خلال المثال 1 حل المعادلات التربيعية بإخراج العامل المشترك الأكبر.

- أذكر الطلبة من خلال مجموعة من الأمثلة بكيفية تحليل المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر.

- ناقش حل المثال 1 مع الطلبة على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.

إرشادات:

- يمكن توجيه الطلبة إلى إعادة حل المعادلات في المثال 1 بيانياً، ومقارنة الحل الجبري بالحل البياني؛ للتحقق من أن الإجابة نفسها بالطريقتين.
- أذكر الطلبة بأن التحقق من صحة الحل يكون بتعويض قيمة x في المعادلة الأصلية، فإذا تساوى طرفا المعادلة فإن قيمة x تُعدّ حلاً للمعادلة، وإلا فإنها لا تُعدّ كذلك.
- أذكر الطلبة بأن تحليل المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر عملية عكسية لعملية التوزيع؛ لذا يمكنهم التحقق من صحة تحليلهم بهذه الطريقة بإعادة توزيع المقادير الجبرية.

حلّ المعادلة التربيعية بالتحليل

مفهوم أساسي

لحلّ المعادلات التربيعية بالتحليل، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أنقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر من المعادلة، وأترك الصفر في الطرف الأيمن.

الخطوة 2: أحلل المقدار الجبري في الطرف الأيسر من المعادلة على صورة حاصل ضرب عاملين.

الخطوة 3: أساوي كلّ عامل بالصفر (خاصية الضرب الصفرى)، وأحلّ كلّ معادلة خطية.

الخطوة 4: حلّ المعادلة التربيعية هي حلول المعادلتين الخطيتين.

حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر

تعلمت سابقاً أنه يمكن تحليل المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر لحدوده، ويمكن استعمال هذه الطريقة من التحليل لحلّ المعادلات التربيعية، كما في المثال الآتي:

أندكر

إخراج العامل المشترك الأكبر لحدود مقدار جبري هي عملية عكسية لعملية التوزيع.

مثال 1

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

$$1 \quad x^2 = -5x$$

$$x^2 = -5x$$

المعادلة المُعطاة

$$x^2 + 5x = 0$$

بجمع $5x$ إلى طرفي المعادلة

$$x(x + 5) = 0$$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفرى

$$x = -5$$

بحلّ كلّ معادلة

إذن، الجذران هما: -5 ، 0 .

أخطاء شائعة:

غالبًا ما يخطئ الطلبة عند حل المعادلة التربيعية بالتحليل بعدم جعل أحد طرفي المعادلة يساوي صفرًا؛ لذا أنبههم إلى ضرورة هذه الخطوة للتمكن من استعمال خاصية الضرب الصفري عند حل المعادلات الخطية الناتجة من التحليل.

تنويع التعليم:

قد يحتاج بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط إلى مراجعة في كيفية إيجاد العامل المشترك الأكبر لحدين جبريين، قبل حل المعادلات التربيعية بإخراج العامل المشترك الأكبر.

مثال إضافي

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $3x^2 = -30x$ $x = 0, x = -10$

2 $2x(3x + 4) = 0$ $x = 0, x = -\frac{4}{3}$

3 $x^2 = 4x$ $x = 0, x = 4$

التحقّق: أعوّض قيمتي x في المُعادلة الأصلية.

عندما $x = 0$

$$x^2 = -5x$$

$$(0)^2 \stackrel{?}{=} -5(0)$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

عندما $x = -5$

$$x^2 = -5x$$

$$(-5)^2 \stackrel{?}{=} -5(-5)$$

$$25 = 25 \quad \checkmark$$

2 $6x^2 = 20x$

$$6x^2 = 20x$$

$$6x^2 - 20x = 0$$

$$2x(3x - 10) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{10}{3}$$

المُعادلة المُعطاة

بطرح $20x$ من طرفي المُعادلة

بإخراج العامل المُشترك الأكبر

خاصية الضرب الصفري

بحلّ كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: $0, \frac{10}{3}$

التحقّق: أعوّض قيمتي x في المُعادلة الأصلية.

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلاً من المُعادلات الآتية:

a) $x^2 - 3x = 0$ $x = 0, x = 3$

b) $8x^2 = -12x$ $x = 0, x = -\frac{3}{2}$

حلّ المُعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية $x^2 + bx + c = 0$

إذا كان المقدار الجبري $x^2 + bx + c$ قابلاً للتحليل، فيمكن أيضاً استعمال خاصية الضرب الصفري لحلّ المُعادلة التربيعية المكتوبة بالصورة القياسية $x^2 + bx + c = 0$.

أندكّر

لتحليل ثلاثي حدود على الصورة $x^2 + bx + c$ ، أبحثُ عن عددين صحيحين m و n مجموعهما يساوي b وحاصل ضربهما يساوي c ، ثمّ أكتب $x^2 + bx + c$ على الصورة $(x+m)(x+n)$.

تعزير اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

مثال 2

- أذكر الطلبة من خلال مجموعة من الأمثلة بكيفية تحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$
- أناقش حل المثال 2 مع الطلبة على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى صناديق (أذكر) الموجودة في هامش كل فرع من أفرع المثال 2؛ لما لها من أهمية في تذكير الطلبة بكيفية تحليل المقدار الجبري الوارد في كل معادلة.

مثال 2

أحلّ كلّاً من المُعادلات الآتية:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

المُعادلة المُعطاة

$$(x + 4)(x + 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 2 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = -4 \quad x = -2$$

بحلّ كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: -4، -2

التحقق: أعوّض قيمتي x في المُعادلة الأصلية.

أندكر

بما أن $b = 6$, $c = 8$ فابحث عن عددين صحيحين موجبين مجموعهما 6 وحاصل ضربهما 8

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

المُعادلة المُعطاة

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x - 6 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 6 \quad x = 2$$

بحلّ كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: 6، 2

التحقق: أعوّض قيمتي x في المُعادلة الأصلية.

أندكر

بما أن $b = -8$, $c = 12$ فابحث عن عددين صحيحين سالبين مجموعهما -8 وحاصل ضربهما 12

3 $x^2 + 5x = 6$

$$x^2 + 5x = 6$$

المُعادلة المُعطاة

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

ب طرح 6 من طرفي المُعادلة

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 1 \quad x = -6$$

بحلّ كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: 1، -6

التحقق: أعوّض قيمتي x في المُعادلة الأصلية.

أندكر

بما أن $b = 5$, $c = -6$ فابحث عن عددين صحيحين مختلفين في الإشارة مجموعهما 5 وحاصل ضربهما -6

أخطاء شائعة:

غالبًا ما يخطئ الطلبة في الإشارات عند حل المعادلات التربيعية، فمثلاً: يفترضون أن حل المعادلة $(x+2)(x-3) = 0$ هو $x = 2, x = -3$ ، ولعلاج ذلك أوكد ضرورة مساواة كل عامل بالصفر، ثم حل كل معادلة خطية ناتجة.

مثال إضافي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $x^2 + 6x + 5 = 0$ $x = -5, x = -1$

2 $x^2 - 9x + 18 = 0$ $x = 3, x = 6$

3 $x^2 = 7x + 8$ $x = -1, x = 8$

مثال 3

- أذكر الطلبة عن طريق مجموعة من الأمثلة بكيفية تحليل المقادير الجبرية التي على صورة فرق بين مربعين، ثم أبين لهم أنه يمكن حل معادلات تربيعية تتضمن فرقاً بين مربعين في أحد طرفيها، وصفرًا في طرفها الآخر باستعمال خاصية الضرب الصفري والتحليل.
- أناقش حل المثال 3 مع الطلبة على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: عند حل الفرع 2 من المثال 3، ألفت انتباه الطلبة إلى أن المعادلة $8x^2 - 50 = 0$ لا تحوي مقداراً جبرياً على صورة فرق بين مربعين، وإنما يلزم قسمة جميع حدود المعادلة على 2؛ لإظهار هذا المقدار.

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $x^2 + 7x = -6$ $x = -1, x = -6$ b) $x^2 - 9x + 8 = 0$ $x = 1, x = 8$ c) $x^2 - 4x - 21 = 0$ $x = 7, x = -3$

حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: تحليل الفرق بين مربعين

يمكن استعمال خاصية الضرب الصفري والتحليل لحل معادلات تربيعية تتضمن فرقاً بين مربعين في أحد طرفيها، وصفرًا في طرفها الآخر.

مثال 3

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 36 = 0$

$(x - 6)(x + 6) = 0$

$x - 6 = 0$ or $x + 6 = 0$

$x = 6$ $x = -6$

المعادلة المعطاة

بتحليل الفرق بين مربعين

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

إذن، الجذران هما: 6، -6.

التحقق: أعوض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

2 $8x^2 - 50 = 0$

$8x^2 - 50 = 0$

$4x^2 - 25 = 0$

$(2x - 5)(2x + 5) = 0$

$2x - 5 = 0$ or $2x + 5 = 0$

$x = \frac{5}{2}$ $x = -\frac{5}{2}$

المعادلة المعطاة

بقسمة طرفي المعادلة على 2

بتحليل الفرق بين مربعين

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

إذن، الجذران هما: $\frac{5}{2}$ ، $-\frac{5}{2}$.

التحقق: أعوض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أذكر

الفرق بين مربعين $a^2 - b^2$ يساوي ناتج ضرب مجموع الحدين في الفرق بينهما.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

أذكر

يحتاج تحليل بعض المقادير الجبرية إلى إجراء خطوات، مثل: إخراج العامل المشترك الأكبر للمحدود جميعها، ثم تحليل ما تبقى من المقدار باستعمال تحليل الفرق بين مربعين، أو تحليل العبارة التربيعية.

- أذكر الطلبة بالمربع الكامل ثلاثي الحدود، وأنه ناتج من ضرب مقدار جبري في نفسه، ثم أيقن لهم أنه عند حل معادلة تحوي مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود في أحد طرفيها وصفرًا في طرفها الآخر، فإن هذا يعني وجود عامل مكرر، ما يعني وجود حل واحد لهذه المعادلة.
- أناقش حل المثال 4 مع الطلبة على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أوجه الطلبة إلى صندوق الدعم البياني المرافق لحل المثال 4؛ للتحقق بيانيًا من أن منحني الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة الواردة في المثال يقطع المحور x في نقطة واحدة، ثم أذكرهم بأن حل هذا النوع من المعادلات يمثل الإحداثي x لرأس القطع المكافئ.

مثال إضافي

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

1 $x^2 - 4x + 4 = 0$ $x = 2$

2 $x^2 + 10x + 25 = 0$ $x = -5$

3 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ $x = \frac{3}{2}$

أتحقق من فهمي

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

a) $4x^2 - 1 = 0$ $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$ b) $2x^2 - 18 = 0$ $x = -3, x = 3$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل: تحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

تعلمت سابقاً أن ثلاثي الحدود على الصورة $a^2 + 2ab + b^2$ أو الصورة $a^2 - 2ab + b^2$ يُسمى مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود، ويمكن تحليله كالاتي:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$$

إذن، ينتج المربع الكامل ثلاثي الحدود من ضرب مقدار جبري في نفسه، وهذا يعني وجود عامل مكرر عند حل معادلة تربيعية تحتوي على مربع كامل ثلاثي حدود في أحد طرفيها وتحتوي في طرفها الآخر على صفر، حينها تكفي مساواة أحد هذين العاملين بالصفر عند استخدام خاصية الضرب الصفرى.

مثال 4

أحل المعادلة: $9x^2 + 6x + 1 = 0$

المعادلة المُعطاة $9x^2 + 6x + 1 = 0$

أكتب الطرف الأيسر على الصورة $a^2 + 2ab + b^2$ $(3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2 = 0$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود $(3x + 1)(3x + 1) = 0$

خاصية الضرب الصفرى $3x + 1 = 0$

بحل المعادلة $x = -\frac{1}{3}$

إذن، للمعادلة جذر واحد، هو: $-\frac{1}{3}$

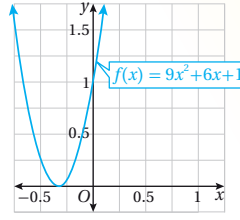
التحقق: أعوض قيمة x في المعادلة الأصلية.

- أذكر الطلبة بما تعلموه سابقاً عن حل المعادلات التربيعية على الصورة $x^2 = c$ حيث c عدد حقيقي، باستعمال تعريف الجذر التربيعي للعدد الموجب، وأبين لهم أنه يمكن بالطريقة نفسها حل المعادلات التربيعية التي يمكن كتابتها على هذه الصورة.
- أناقش حل المثال 5 مع الطلبة على اللوح، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أدير نقاشاً مع الطلبة حول إجابة السؤال الموجود في صندوق (أفكر) المجاور للمثال 5، وأتوصل معهم إلى أنه يمكن حل المعادلة في الفرع 1 من المثال بقسمة حدود المعادلة جميعها على 3 أولاً، ثم حل المعادلة التربيعية باستعمال تحليل الفرق بين مربعين.
- أوضح للطلبة أن أي معادلة تربيعية تتضمن فرقاً بين مربعين في أحد طرفيها، وصفرًا في طرفها الآخر، يمكن حلها بطريقتين، الأولى: تحليل الفرق بين مربعين، والثانية: باستعمال الجذر التربيعي، ثم أطلب إليهم إعادة حل مسائل بند (أنتحق من فهمي) التي تلي المثال 4 باستعمال الجذر التربيعي.

الدعم البياني:



يظهر في الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ، الذي يقطع المحور x في نقطة واحدة؛ ما يعني وجود حل واحد للمعادلة.

أنتحق من فهمي

أحل المعادلة: $x^2 - 6x + 9 = 0$ $x = 3$

حل المعادلات التربيعية باستعمال الجذر التربيعي

تعلمت سابقاً أنه يمكن حل المعادلات على الصورة $x^2 = c$ ؛ حيث $c \geq 0$ ، باستعمال تعريف الجذر التربيعي للعدد الموجب؛ حيث: $x = \pm \sqrt{c}$ ، أما إذا لم تكن المعادلة التربيعية مكتوبة على الصورة $x^2 = c$ ، فأستعمل العمليات الجبرية لكتابة x^2 وحده في أحد طرفي المعادلة أولاً، إن أمكن، ثم أحل المعادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

مثال 5

أحل كلًا من المعادلات الآتية:

1 $3x^2 - 27 = 0$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

المعادلة المعطاة

بجمع 27 إلى طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 3

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

بالتبسيط

إذن، الجذران هما: 3، -3

التحقق: للتحقق، أعوض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أفكر

هل يمكن حل الفرع 1 من المثال 5 بطريقة أخرى؟

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجّه الطلبة إلى بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (18 - 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.
- أطلب إلى الطلبة المتميزين حل المسائل (12 - 10) بأكثر من طريقة.

2 $(x + 4)^2 = 49$

$(x + 4)^2 = 49$

$x + 4 = \pm\sqrt{49}$

$x + 4 = \pm 7$

$x = -4 \pm 7$

$x = -4 + 7$ or $x = -4 - 7$

$x = 3$ or $x = -11$

المعادلة المُعطاة

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

بالتبسيط

بطرح 4 من طرفي المعادلة

بفصل الحالتين

بالتبسيط

إذن، الجذران هما: 3، -11

التحقق: للتحقق، أعوض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

$x = -3, x = 5$

a) $4x^2 - 100 = 0$ $x = -5, x = 5$

b) $(x - 1)^2 = 16$

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $4x^2 + 9x = 0$

$x = 0, x = -\frac{9}{4}$

4 $x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = -3, x = 5$

7 $x^2 + 2x = 24$

$x = -6, x = 4$

10 $x^2 - 9 = 0$

$x = -3, x = 3$

13 $s^2 + 20s + 100 = 0$

$s = -10$

16 $(x + 1)^2 = 4$

$x = -3, x = 1$

2 $7x^2 = 6x$

$x = 0, x = \frac{6}{7}$

5 $t^2 - 8t + 16 = 0$

$t = 4$

8 $x^2 = 17x - 72$

$x = 9, x = 8$

11 $x^2 - 25 = 0$

$x = -5, x = 5$

14 $y^2 + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{16}$

$y = -\frac{1}{4}$

17 $9(x - 1)^2 = 16$

$x = -\frac{1}{3}, x = \frac{7}{3}$

3 $x^2 + 5x + 4 = 0$

$x = -1, x = -4$

6 $x^2 - 18x = -32$

$x = 2, x = 16$

9 $2m^2 = 50$

$m = -5, m = 5$

12 $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$

$x = -3, x = 3$

15 $9m^2 - 12m + 4 = 0$

$m = \frac{2}{3}$

18 $5x^2 + 2 = 6$

$x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

إرشادات:

- في السؤال 25 (أكتشف الخطأ)، أذكر الطلبة بخاصية الضرب الصفري؛ وهذا بدوره سيسهل عليهم تحديد الإجابة غير الصحيحة.
- في السؤال 26 (تبرير)، أسأل الطلبة: «هل يوجد عدد مربعه الكامل -36؟ لا.»
- «إذن ما عدد حلول المعادلة $y^2 = -36$ ؟ أبرر إجابتي. لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية؛ لأن مربع أي عدد حقيقي يكون عددًا موجبًا.»
- في السؤال 29 (تبرير)، أوجّه الطلبة إلى السير بخطوات حل المعادلة التربيعية عكسيًا لحل السؤال.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (29 - 25).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 22, 25 كتاب التمارين: (1 - 13) زوجي
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 20, 21, (23-25) كتاب التمارين: (1 - 13) فردي
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (24 - 29) كتاب التمارين: (13 - 16)

الإثراء

5

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
- أجد قيمة b التي تجعل للمعادلة $x^2 + bx = 6$ حلين مختلفين من مجموعة الأعداد الصحيحة.

$$b = -5, -1, 1, 5$$

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 5 و 6 من خطوات تنفيذ المشروع.

الختام

6

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

« أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$1 \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad x = -2, x = 1$$

$$2 \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad x = 6, x = -2$$

$$3 \quad 4x^2 - 36 = 0 \quad x = -3, x = 3$$



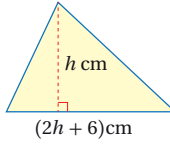
19 **فرشاة:** سقطت فرشاة طلاء من يد سفيان. إذا مثل الاقتران $h(t) = 3 - 5t^2$ ارتفاع تلك الفرشاة بالأمتار عن الأرض، بعد t ثانية من سقوطها، فبعد كم ثانية تصل إلى الأرض؟

$$\sqrt{\frac{3}{5}}$$

أعمار: إذا كان عمر لينة x عامًا، ويكبرها زوجها بثلاثة أعوام، وكان حاصل ضرب عمريهما 700، فأجد:

$$20 \quad \text{معادلة تربيعية تمثل الموقف.} \quad 21 \quad \text{عمر لينة.} \quad x = 25 \quad x^2 + 3x - 700 = 0$$

22 **حديقة:** حديقة مستطيلة الشكل يزيد طولها على عرضها بمقدار 40 m، ومساحتها 48000 m²، يريد مزارع إحاطتها بسياج. أجد طول السياج. **المعادلة التي تعبر عن مساحة الحديقة:** $x(x + 40) = 48000$ عرض الحديقة 200 m، طول الحديقة 240 m، طول السياج 880 m.



23 **هندسة:** يبين الشكل المجاور مثلثًا مساحته 40 cm². أجد ارتفاعه h ، وطول قاعدته.

المعادلة التي تعبر عن مساحة المثلث: $\frac{1}{2} h(2h + 6) = 40$ الارتفاع $h = 5$ cm، طول القاعدة 16 cm.

$$24 \quad \text{أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.} \quad t = \frac{7}{16} \text{ s}$$

مهارات التفكير العليا

25 **اكتشف الخطأ:** حل سلمان ومهند المعادلة التربيعية $x^2 - 3x - 4 = 0$ ، كما هو مبين أدناه. أيهما إجابتها صحيحة؟
إجابة سلمان هي الصحيحة؛ لأنه حلل بشكل صحيح، ثم استخدم خاصية الضرب الصفرى.
أبرر إجابتى. أما مهند فقد أخطأ في تطبيق خاصية الضرب الصفرى على العدد 4

مهند

$$x(x - 3) = 4$$

$$x = 4 \quad \text{or} \quad x - 3 = 4$$

$$x = 7$$

سلمان

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 4 \quad \quad \quad x = -1$$

تبرير: أعدد عدد حلول كل معادلة مما يأتي من دون حلها، وأبرر إجابتى: (26-28) أنظر الهامش.

$$26 \quad y^2 = -36$$

$$27 \quad a^2 - 12 = 6$$

$$28 \quad n^2 - 15 = -15$$

29 **تبرير:** أكتب معادلة تربيعية على الصورة القياسية، جذورها $x = -4$ ، $x = 6$ ، وأبرر إجابتى.
 $x^2 - 2x - 24 = 0$ ، التبرير: مجموع الجذرين سالب معامل x ، وحاصل ضرب الجذرين الحد الثابت.

إجابة الأسئلة في بند (أدرب وأحل المسائل):

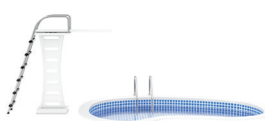
26 لا توجد حلول حقيقية؛ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب.

27 حلان، يوجد عدداً حقيقيين مربع كل منهما 18

28 حل واحد؛ لأن العدد الوحيد الذي مربعه صفر هو الصفر.

حلّ المُعادلات التربيعيّة بالتّحليل (2) Solving Quadratic Equations by Factoring (2)

- تحليل ثلاثيّ الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$.
- حلّ المُعادلات التربيعيّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتّحليل.



إذا كان الاقتران $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$ يمثّل ارتفاع غطّاس بالأمتار فوق سطح الماء، بعد t ثانية من قفزه عن منصّة القفز. فما الزمن الذي يستغرقه للوصول إلى سطح الماء؟

فكرة الدرس

مسألة اليوم

تحليل ثلاثيّ الحدود $ax^2 + bx + c$

تعلّمت سابقاً كيف أحلّ ثلاثيّ الحدود $ax^2 + bx + c$ الذي معامل x^2 فيه يساوي 1 و b و c عدديان صحيحان، ويمكن أيضاً تحليل بعض ثلاثيات الحدود التي على الصورة $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 1$ و $a \neq 0$ ، و b و c أعداد صحيحة، بطريقة مشابهة.

ألاحظ النمط الآتي في عمليّة ضرب المقدارين الجبريين $(2x + 1)$ و $(4x + 5)$:

$$(2x+1)(4x+5) = 8x^2 + 10x + 4x + 5 = 8x^2 + 14x + 5$$

$$10 + 4 = 14 \text{ and } 10 \times 4 = 8 \times 5$$

$$ax^2 + mx + nx + c = ax^2 + bx + c$$

$$m + n = b \text{ and } mn = ac$$

إذن، لتحليل ثلاثيّ الحدود $8x^2 + 14x + 5$ أجد عدديّين m و n حاصل ضربهما 8×5 أو 40، ومجموعهما 14.

أتعلّم

عند ضرب مقدّارين جبريين، فإنّ كلّ منهما يكون عاملاً لناتج الضرب.

تحليل ثلاثيّ الحدود $ax^2 + bx + c$

مفهوم أساسي

لتحليل ثلاثيّ الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، أجد عدديّين صحيحين m و n حاصل ضربهما يساوي (ac) ، ومجموعهما يساوي b ، ثم أكتب $ax^2 + bx + c$ على الصورة $ax^2 + mx + nx + c$ ، ثم أحلّ بتجميع الحدود.

التهيئة

1

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

« أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

1 $x^2 + 8x + 12 = 0$ $x = -6, x = -2$

2 $x^2 - 8x = 0$ $x = 0, x = 8$

« أجد ناتج ضرب كل مما يأتي بأبسط صورة:

3 $(5x + 2)(x + 5)$ $5x^2 + 27x + 10$

4 $4(x + 2)(x + 4)$ $4x^2 + 24x + 32$

5 $(4x - 3)(6x - 1)$ $24x^2 - 22x + 3$

- أناقش الطلبة في حلّ الأسئلة السابقة، وأطلب إليهم تبرير إجاباتهم.

نتائج الدرس

- تحليل ثلاثي الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل.
- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتّحليل إلى العوامل.

نتائج التعلّم القبلي:

- تعرّف خاصية الضرب الصفري، واستعمالها في حل المعادلات.
- حل المعادلات التربيعية بيانياً.
- حل معادلات على صورة $x^2 + bx + c = 0$ بالتّحليل إلى العوامل.
- ضرب المقادير الجبرية.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
« ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع الغطاس بالأمتار فوق سطح الماء؟ $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$ »
- كيف يمكن إيجاد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء؟ أبرّر إجابتي.
إجابة ممكنة: بحل المعادلة التربيعية: $-5t^2 + 7t + 6 = 0$ ؛ لأن وصول الغطاس إلى سطح الماء يعني أن ارتفاعه عن سطح الماء يساوي صفراً، وبحل هذه المعادلة يمكن الحصول على الزمن المطلوب.
- هل يمكن حل المعادلة $-5t^2 + 7t + 6 = 0$ بالتحليل إلى العوامل؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟ »
« من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟ »
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أوضح للطلبة أنهم تعلّموا سابقاً تحليل ثلاثي الحدود على الصورة $ax^2 + bx + c$ ، الذي معامل x^2 فيه يساوي 1، و b و c عدداً صحيحان، وأخبرهم أنهم سيتعلمون في هذا الدرس تحليل ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 1, 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، إضافة إلى حل المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد ناتج ضرب المقدارين الجبريين $(2x + 1)$ و $(4x + 5)$ على اللوح، ثم أستعمل اللونين الأحمر والأزرق لكتابة العددين 10 و 4 الناتجين من عملية الضرب كالاتي:
$$(2x + 1)(4x + 5) = 8x^2 + 10x + 4x + 5$$
$$= 8x^2 + 14x + 5$$
- أستبدل جميع الأعداد الناتجة من عملية ضرب المقدارين الجبريين بالرموز، مع المحافظة على استعمال اللونين الأحمر والأزرق للرمزين المستعملين بوصفهما بديلاً للعددين 10 و 4 كالاتي:

$$ax^2 + mx + nx + c$$

$$ax^2 + bx + c$$

الوحدة 3

إذا كانت إشارة c موجبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، فإن لكل من m و n الإشارة نفسها، ويعتمد تحديد إشارة m و n (موجبة أو سالبة) على إشارة b ، فإذا كانت إشارة b موجبة فإن إشارة كل منهما موجبة، وإذا كانت إشارة b سالبة فإن إشارة كل منهما سالبة.

مثال 1

$$6x^2 + 23x + 7$$

بما أن $a = 6$ ، $b = 23$ ، $c = 7$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $6 \times 7 = 42$ ومجموعهما 23.

وبما أن إشارة كل من c و b موجبة، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد 42 الموجبة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما 23.

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 42
43	1, 42
23	2, 21

العاملان الصحيحان

$$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + mx + nx + 7$$

بكتابة القاعدة

$$= 6x^2 + 2x + 21x + 7$$

بتعويض $m = 2$ ، $n = 21$

$$= (6x^2 + 2x) + (21x + 7)$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= 2x(3x + 1) + 7(3x + 1)$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$= (3x + 1)(2x + 7)$$

بإخراج $(3x + 1)$ عاملاً مشتركاً

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(3x+1)(2x+7) = 6x^2 + 21x + 2x + 7$$

خاصية التوزيع

$$= 6x^2 + 23x + 7 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

$$أحلل $2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$$$

أتعلم

لتسهيل عملية التحليل من الأفضل أن أجعل معامل x^2 موجباً.

- أطلب إلى الطلبة ملاحظة النمط في عملية الضرب، ثم أسألهم:
 - « ما مجموع العددين 4 و 10؟ 14 »
 - « كيف يمكن التعبير عن السؤال السابق بالرموز؟ $m + n = b$ »
 - « ما العددين في المقدار الجبري الناتج اللذان حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب العددين 4 و 10؟ 8 و 5 »
 - « كيف يمكن التعبير عن السؤال السابق بالرموز؟ $mn = ac$ »
 - « ماذا نلاحظ؟ إجابة ممكنة: أن مجموع العددين m و n يساوي b ، وأن حاصل ضربهما يساوي ac »
 - « كيف يمكن الاستفادة مما سبق في تحليل ثلاثي الحدود الذي على الصورة $ax^2 + bx + c$ ؟ ستختلف إجابات الطلبة. »
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، ثم أتوصل معهم عن طريق المناقشة إلى استراتيجية تحليل ثلاثي الحدود الذي على الصورة $ax^2 + bx + c$ بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.

✓ **إرشاد:** ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش الصفحة 118 من كتاب الطالب أثناء مناقشة السؤال الخاص بكيفية تحليل ثلاثي الحدود الذي على الصورة $ax^2 + bx + c$ ؛ لمساعدتهم على الإجابة عن السؤال.

مثال 1

- أوضح للطلبة أهمية إشارة العدد، فإذا كانت إشارة a موجبة وإشارة c موجبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n الإشارة نفسها عند تحليله، وتعتمد إشارتهما على إشارة b ؛ فإذا كانت إشارة b موجبة كانت إشارتهما موجبة، أما إذا كانت إشارة b سالبة فإن إشارة كل منهما سالبة.

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح بوصفه مثالاً على تحليل ثلاثي حدود على الصورة $ax^2 + bx + c$ فيه a و b و c أعداد صحيحة موجبة، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أطلب إلى أحد الطلبة التحقق من صحة الحل بضرب العاملين الناتجين من عملية التحليل، والتحقق من أن ناتج ضربهما يعطي ثلاثي الحدود الأصلي.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه يُفضل أن يكون معامل x^2 موجباً عند تحليل ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، وأنه يمكن جعله موجباً إذا لم يكن كذلك بإخراج (-1) عاملاً مشتركاً من جميع حدود المقدار.
- ألقت انتباه الطلبة إلى أهمية تنظيم أزواج العوامل ومجموعها في جدول؛ لتسهيل إيجاد العاملين الصحيحين.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

إذا كانت إشارة c موجبة وإشارة b سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، فإن إشارة كل من m و n تكون سالبة.

مثال 2

أحلل كلاً ممّا يأتي:

$$1 \quad 3x^2 - 14x + 8$$

بما أن $a = 3$ ، $b = -14$ ، $c = 8$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $3 \times 8 = 24$ ومجموعهما -14

بما أن إشارة b سالبة وإشارة c موجبة، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد 24 السالبة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -14

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 24
-25	-1, -24
-14	-2, -12

العاملان الصحيحان

$$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$$

بكتابة القاعدة

$$= 3x^2 - 2x - 12x + 8 \quad m = -2, n = -12 \text{ بتعويض}$$

$$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8) \quad \text{بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة}$$

$$= x(3x - 2) + (-4)(3x - 2) \quad \text{بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر}$$

$$= (3x - 2)(x - 4) \quad \text{بإخراج } (3x - 2) \text{ عاملاً مشتركاً}$$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(3x - 2)(x - 4) = 3x^2 - 12x - 2x + 8$$

خاصية التوزيع

$$= 3x^2 - 14x + 8 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

2 $20x^2 - 80x + 35$

الخطوة 1: أخرج العامل المشترك الأكبر أولاً.

$20x^2 - 80x + 35 = 5(4x^2 - 16x + 7)$ بالتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

الخطوة 2: أحلل المقدار $4x^2 - 16x + 7$

بما أن $a = 4$, $b = -16$, $c = 7$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $4 \times 7 = 28$ ومجموعهما -16

بما أن b سالبة و c موجبة، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد 28 السالبة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -16

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 28
-29	-1, -28
-16	-2, -14

العاملان الصحيحان

بكتابة القاعدة $4x^2 - 16x + 7 = 4x^2 + mx + nx + 7$

بتعويض $m = -2$, $n = -14$ $= 4x^2 - 2x - 14x + 7$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة $= (4x^2 - 2x) + (-14x + 7)$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر $= 2x(2x - 1) + (-7)(2x - 1)$

بإخراج $(2x - 1)$ عاملاً مشتركاً $= (2x - 1)(2x - 7)$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

خاصية التوزيع $(2x - 1)(2x - 7) = 4x^2 - 14x - 2x + 7$

بالتبسيط $= 4x^2 - 16x + 7$ ✓

إذن، $20x^2 - 80x + 35 = 5(2x - 1)(2x - 7)$

أتعلم

في بعض الأحيان يكون عامل مشترك بين جميع حدود ثلاثي الحدود، وفي هذه الحالة أستعمل خاصية التوزيع لتحليل ثلاثي الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر أولاً قبل البدء بعملية التحليل.

- أوضح للطلبة أهمية إشارة العدد، فإذا كانت إشارة a موجبة وإشارة c موجبة وإشارة b سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، فإن إشارة كل من m و n تكون سالبة عند تحليله، ثم أناقش معهم حل المثال 2 على اللوح بوصفه تطبيقاً على ذلك.
- أطلب إلى أحد الطلبة التحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات

- ألفت انتباه الطلبة إلى إخراج العامل المشترك الأكبر أولاً قبل البدء بعملية تحليل ثلاثي الحدود؛ لما لذلك من أهمية في تسهيل عملية التحليل في ما بعد، كما في الفرع 2 من المثال 2.
- ألفت انتباه الطلبة عند التحقق من صحة الحل في الفرع 2 من المثال 2 إلى أن المقدار الناتج من ضرب العاملين يجب أن يساوي ثلاثي الحدود الذي نتج من إخراج العامل المشترك 5، وللتحقق من مساواته لثلاثي الحدود الأصلي نضربه في 5

مثال إضافي

أحلل كلاً مما يأتي:

1 $7x^2 - 29x + 4$ $(x - 4)(7x - 1)$

2 $3x^2 - 17x + 20$ $(3x - 5)(x - 4)$

3 $10x^2 - 35x + 30$ $5(2x - 3)(x - 2)$

4 $-4x^2 + 17x - 15$ $-(4x - 5)(x - 3)$

مثال 3

- أوضح للطلبة أنه إذا كانت إشارة a موجبة وإشارة c سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، فإن m و n إشارتين مختلفتين عند تحليله، ثم أناقش معهم حل المثال 3 على اللوح بوصفه تطبيقاً على ذلك.
- أطلب إلى أحد الطلبة التحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

مثال إضافي

أحلل كلاً مما يأتي:

- 1 $2x^2 - 3x - 9$ $(2x + 3)(x - 3)$
- 2 $3x^2 - 11x - 20$ $(3x + 4)(x - 5)$
- 3 $-6x^2 + 11x + 35$ $-(2x - 7)(3x + 5)$

اتحقق من فهمي

أحلل كلاً مما يأتي:

a) $9x^2 - 33x + 18$ $3(x - 3)(3x - 2)$ b) $5x^2 - 13x + 6$ $(5x - 3)(x - 2)$

إذا كانت إشارة c سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، فإن m و n إشارتين مختلفتين.

مثال 3

أحلل $3x^2 - 7x - 6$

بما أن $a = 3$ ، $b = -7$ ، $c = -6$ ، فأجد عددين حاصل ضربهما -18 و $3 \times -6 = -18$ ومجموعهما -7 .

بما أن إشارة c سالبة، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد (-18) مختلفة الإشارة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -7 .

أزواج عوامل العدد -18	مجموع العاملين
1, -18	-17
-1, 18	17
2, -9	-7

العاملان الصحيحان

$3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 + mx + nx - 6$

بكتابة القاعدة

$= 3x^2 + 2x - 9x - 6$

$m = 2$ ، $n = -9$ بتعويض

$= (3x^2 + 2x) + (-9x - 6)$ بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= x(3x + 2) + (-3)(3x + 2)$ بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= (3x + 2)(x - 3)$ بإخراج $(3x + 2)$ عاملاً مشتركاً

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(3x+2)(x-3) = 3x^2 - 9x + 2x - 6$$

خاصية التوزيع

$$= 3x^2 - 7x - 6 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

$$3x^2 - 3x - 6 \quad \text{أحل} \quad 3(x-2)(x+1)$$

حلّ المعادلات على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل

يمكن حلّ المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ ، و b و c أعداد صحيحة، بالتحليل أولاً، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال 4

أحلّ كلًا من المعادلات الآتية:

1 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$(3x-1)(x-1) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$3x-1=0 \quad \text{or} \quad x-1=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad x = 1$$

بحل كل معادلة

إذن، الجذران هما: $1, \frac{1}{3}$

2 $30x^2 - 5x = 5$

$$30x^2 - 5x = 5$$

المعادلة المعطاة

$$30x^2 - 5x - 5 = 0$$

ب طرح 5 من طرفي المعادلة

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 5

$$(3x+1)(2x-1) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

أندكر

إذا كانت إشارة c موجبة، وإشارة b سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، و a و b و c أعداد صحيحة، فإن إشارة كل من m و n سالبة.

أندكر

أحرص دائماً على إخراج العامل المشترك الأكبر أولاً قبل البدء بعملية التحليل.

أوضح للطلبة أنه يمكن حل المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c أعداد صحيحة و $a \neq 0$ بالتحليل.

أناقش الطلبة في حل المثال 4 باتباع ما يأتي:

« توزيع الطلبة في مجموعات ثنائية، ثم الطلب إلى بعض المجموعات حل الفرع 1 من المثال، وإلى المجموعات الأخرى حل الفرع 2 »
التحقق من صحة الحل.

أتابع أفراد المجموعات أثناء العمل، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

أناقش حل المثال مع الصف كاملاً.

مثال 5: من الحياة

- أوضح للطلبة أهمية حل المعادلات التربيعية في كثير من التطبيقات الحياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي سؤال (أتحقق من فهمي) الذي يلي المثال 5، أعزز الوعي البيئي لدى الطلبة بتعريفهم بأهمية المحميات الطبيعية في حماية الكائنات الحية المهددة بالانقراض، ومن أهم هذه المحميات في الأردن: محمية ضانا للمحيط الحيوي، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن أهم الكائنات الحية في محمية ضانا وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

$$3x+1=0 \text{ or } 2x-1=0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{2}$$

خاصية الضرب الصغري

بحل كل معادلة

إذن، الجذران هما: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

أتحقق من فهمي

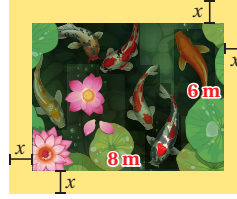
أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ $x = \frac{1}{2}, x = 2$

b) $2x^2 + 6x = -4$
 $x = -2, x = -1$

يمكن استعمال حل المعادلات التربيعية بالتحليل في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



بركة: بركة أسماك زينة مستطيلة الشكل طولها 8 m وعرضها 6 m، يحيط بها ممر عرضة x m، كما في الشكل المجاور. إذا كانت المساحة المخصصة للبركة والممر معاً 120 m²، فأجد عرض الممر x.

طول المنطقة المخصصة للبركة والممر معاً يساوي (2x + 8) m وعرضها (2x + 6) m. بما أن مساحة هذه المنطقة 120 m²، فيمكن كتابة معادلة لإيجاد قيمة x على النحو الآتي:

$$(2x + 6)(2x + 8) = 120$$

مساحة البركة والممر

$$4x^2 + 16x + 12x + 48 = 120$$

خاصية التوزيع

$$4x^2 + 28x + 48 = 120$$

بالتبسيط

$$4x^2 + 28x - 72 = 0$$

بالتبسيط

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$(x + 9)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x + 9 = 0 \text{ or } x - 2 = 0$$

$$x = -9 \quad x = 2$$

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً، فإن عرض الممر يساوي 2 m

اتحقق من فهمي

محمية: محمية طبيعية مستطيلة الشكل يزيد طولها على وثلاثي عرضها بمقدار 1 km. إذا كانت مساحتها 136 km^2 ، فأوجد أبعادها. العرض 8 km، الطول 17 km

معلومة

يهدف إنشاء المحميات الطبيعية إلى حماية الأنواع المهددة بالانقراض ومن الحيوانات والنباتات ومن أهم تلك المحميات في الأردن محمية ضانا للمحيط الحيوي، التي تقع في محافظة الطفيلة وتبلغ مساحتها 320 km^2

أندرب وأحل المسائل

أحل كل ما يأتي:

1 $3x^2 + 11x + 6$
 $(3x + 2)(x + 3)$

4 $4x^2 - 4x - 35$
 $(2x + 5)(2x - 7)$

2 $8x^2 - 30x + 7$
 $(4x - 1)(2x - 7)$

5 $12x^2 + 36x + 27$
 $3(2x + 3)(2x + 3)$

3 $6x^2 + 15x - 9$
 $3(2x - 1)(x + 3)$

6 $6r^2 - 14r - 12$
 $2(3r + 2)(r - 3)$

أحل كل ما من المعادلات الآتية:

7 $24x^2 - 19x + 2 = 0$
 $x = \frac{1}{8}, x = \frac{2}{3}$

10 $5x^2 - 9x - 2 = 0$
 $x = -\frac{1}{5}, x = 2$

13 $28s^2 - 85s + 63 = 0$
 $s = \frac{9}{7}, s = \frac{7}{4}$

16 $13x^2 = 11 - 2x$
 $x = \frac{11}{13}, x = -1$

19 $(2x + 1)(5x + 2) = (2x - 2)(x - 2)$
 $x = \frac{1}{8}, x = -2$

8 $18t^2 + 9t + 1 = 0$
 $t = -\frac{1}{6}, t = -\frac{1}{3}$

11 $4t^2 - 4t - 35 = 0$
 $t = -\frac{5}{2}, t = \frac{7}{2}$

14 $9d^2 - 24d - 9 = 0$
 $d = -\frac{1}{3}, d = 3$

17 $8x - 16 - x^2 = 0$
 $x = 4$

9 $5x^2 + 8x + 3 = 0$
 $x = -\frac{3}{5}, x = -1$

12 $6x^2 + 15x - 9 = 0$
 $x = \frac{1}{2}, x = -3$

15 $8x(x + 1) = 16$
 $x = -2, x = 1$

18 $2t^2 - t = 15$
 $t = -\frac{5}{2}, t = 3$

20 $8x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + x + 2$
 $x = -\frac{1}{3}, x = -\frac{1}{2}$

أندرب وأحل المسائل

• أوجه الطلبة إلى بند (أندرب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 14) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تستعمل خاصة لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

• إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

• إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أندرب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

• أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (25 - 28).
• أرسد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 25 (تبرير)، أوجه الطلبة إلى استعمال نظرية فيثاغورس عند حل السؤال؛ لأن المثلث قائم الزاوية.
- في السؤال 28 (تحد)، أذكر الطلبة أن حاصل ضرب العاملين يجب أن يساوي 24؛ لأن $2 \times 12 = 24$ ، ومجموعها يساوي k ؛ ومنه فإن قيم الثابت k هي مجموع أزواج العوامل الصحيحة للعدد 24

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
« أجد قيمة n التي تجعل لكل معادلة مما يأتي حلاً واحداً فقط من مجموعة الأعداد الصحيحة:

1 $nx^2 + 56x + 49 = 0$ $n = 16$

2 $4x^2 - 20x + n - 7 = 0$ $n = 32$

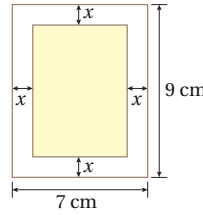
نشاط التكنولوجيا:



أحفز الطلبة على تصفح الموقع الإلكتروني الذي سيظهر عند مسح الرمز المجاور في المنزل، والاستمتاع بالمسائل التي يحويها؛ لتعزيز مهاراتهم الرياضية في حل المعادلات التربيعية بالتحليل.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة حل المعادلة التربيعية الخاصة بكل تصميم من التصميمات الثلاثة باستعمال طريقتي التمثيل البياني والتحليل إن أمكن.



هندسة: يظهر في الشكل المجاور مستطيل باللون الأصفر مساحته 35 cm^2 ، صُنِّعَتْهُ سُروُفٌ بِقَصٍّ أَشْرَطُهُ عَرْضُ كُلِّ مِنْهَا $x \text{ cm}$ مِنْ جَوَانِبِ وَرَقَةٍ مُسْتَطِيلَةٍ الشَّكْلِ طَوْلُهَا 9 cm ، وعَرْضُهَا 7 cm ، أجد: المعادلة التي تعبر عن مساحة المستطيل الأصفر:
 $(9-2x)(7-2x) = 35$ عرض الشريط $x = 1 \text{ cm}$.

21 أبعاد المستطيل الجديد: طول المستطيل: 7 cm ، عرض المستطيل: 5 cm .



23 بطاقة: بطاقة دعوة مستطيلة الشكل يزيد طولها على عرضها بمقدار 3 cm إذا كانت مساحتها 90 cm^2 ، فأجد طولها وعرضها.

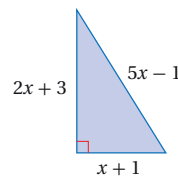
عرض البطاقة x ، المعادلة التي تعبر عن مساحة البطاقة: $x(2x+3) = 90$

عرض البطاقة 6 cm ، طول البطاقة 15 cm

24 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.
 $t = 2 \text{ s}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: يبين الشكل المجاور مثلثاً قائم الزاوية.



25 أبين، بالاعتماد على الشكل، أن $20x^2 - 24x - 9 = 0$ ، وأبرر إجابتي.

أنظر ملحق الإجابات.

إرشاد: أستعمل نظرية فيثاغورس

26 أجد مساحة المثلث.

أنظر ملحق الإجابات.

27 أكتشف المُخْتَلَفَ: أي المقادير الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

المقدار المختلف هو

$(2x-3)(x+2)$

المقادير الباقية تكافئ

$(2x-3)(x+2)$

$(2x-3)(x+2)$

$(2x+3)(x-2)$

$x(2x-3) + 2(2x-3)$

$2x(x+2) - 3(x+2)$

28 نَحْدُ: أجد جميع قيم الثابت k ؛ حيث يمكن تحليل ثلاثي الحدود $2x^2 + kx + 12$ إلى عامليْن باستعمال الأعداد الصحيحة.

حاصل ضرب العاملين يجب أن يساوي 24 ؛ لأن $2 \times 12 = 24$ ، ومجموعها يساوي k ؛ ومنه فإن قيم الثابت k هي مجموع أزواج العوامل الصحيحة للعدد 24

$k = \pm 10, k = \pm 11, k = \pm 14, k = \pm 25$

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال الآتي إليهم:

« أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $2x^2 + 5x + 2 = 0$ $x = -2, x = -\frac{1}{2}$

2 $4x^2 + 3x - 7 = 0$ $x = -\frac{7}{4}, x = 1$

3 $11x = 21 - 2x^2$ $x = \frac{3}{2}, x = -7$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 24, (16-18) كتاب التمارين: (1-15) زوجي
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 15, 20, 21, 22, 27 كتاب التمارين: 18, (1-15) فردي
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 19, 23, (25-28) كتاب التمارين: (16-19)

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ Solving Quadratic Equations by Completing the Square

الدرس 4

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

إكمالُ المُرَبَّعِ.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



ألقى أحمدُ طُعْمًا في الماءِ مِنْ ارتفاعِ مترٍ واحدٍ. إذا كانَ
الافتسارُ $h(t) = -5t^2 + 8t + 1$ يمثِّلُ ارتفاعَ هذا
الطُعْمِ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ، بعدَ t ثانيةٍ مِنْ إلقائه، فبعدَ
كَمْ ثانيةٍ يصلُ إلى سطحِ الماءِ؟

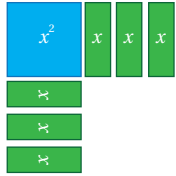
إكمالُ المُرَبَّعِ

تعلَّمتُ سابقًا حلَّ المُعادلةِ التربيعيّةِ التي على الصورةِ $(x + m)^2 = n$ ؛ حيثُ $n \geq 0$ ، وذلكَ
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المُعادلةِ.

ألاحظُ أنَّ المقدارَ $(x + m)^2$ هو الصورةُ التحليليّةُ للمُرَبَّعِ الكاملِ $x^2 + 2mx + m^2$ ، وهذا
يقودُنَا إلى استنتاجٍ أنَّه يمكنُ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ التي تحوي مُربَّعًا كاملاً ثلاثيَّ الحدودِ
معاملُ x^2 فيه يُساوي 1 باستخدامِ الجذرِ التربيعيِّ. ولكنْ، ماذا عَنِ المُعادلاتِ التي لا تحوي
مُربَّعًا كاملاً؟



تمثِّلُ القطعُ الجبريَّةُ المُجاورةُ المقدارَ
الجبريَّ $x^2 + 6x$



ويمكنُ إعادةُ ترتيبِ القطعِ الجبريَّةِ لِتُشكِّلَ جزءًا مِنْ مُربَّعٍ،
كما في الشكلِ المُجاورِ. ألاحظُ أنَّ القطعَ الخضراءَ قُسمَتْ
مجموعَتَيْنِ في كُلِّ منها 3 قطعٍ.

نتائجُ الدرس

- تحويل المقدار التربيعي الذي على صورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود باستعمال عملية إكمال المربع.
- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.

نتائجُ التعلُّمِ القبلي:

- تعرّف خاصية الضرب الصفري، واستعمالها في حل المعادلات.
- تحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود.
- حل المعادلات التربيعية بيانيًا.
- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل.
- حل معادلات تربيعية باستعمال الجذر التربيعي.

مراجعة التعلُّم القبلي ومعالجة الفاقدة التعليمي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

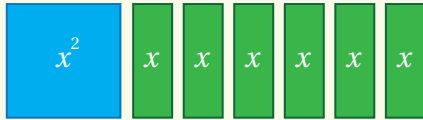
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثمّ أزوّد كلّ مجموعة بورقة المصادر 8: حل المعادلات بالتحليل.
- أطلب إلى أفراد المجموعات إكمال الجدول في ورقة المصادر.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

✓ **إرشاد:** تحتوي ورقة المصادر 8 جزأين، أحدهما الجدول، والآخر حل الجدول؛ لذا أزوّد الطلبة بالجدول أولاً، ثمّ أناقش معهم الحلول.

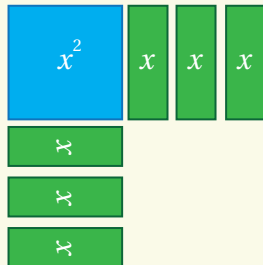
- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثمّ أسألهم:
 - « من منكم يحب الصيد؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع الطعم بالأمتار فوق سطح الماء؟

$$h(t) = -5t^2 + 8t + 1$$
 - « كيف يمكن إيجاد الزمن الذي يستغرقه الطعم للوصول إلى سطح الماء؟ أبرر إجابتي. إجابة ممكنة: بحل المعادلة التربيعية: $-5t^2 + 8t + 1 = 0$ ؛ لأن وصول الطعم إلى سطح الماء يعني أن ارتفاعه عن سطح الماء يساوي صفراً، وبحل هذه المعادلة يمكن الحصول على الزمن المطلوب.
 - « هل يمكن حل المعادلة $-5t^2 + 8t + 1 = 0$ بالتحليل إلى العوامل؟ لا. (أطلب إلى الطلبة محاولة حل المعادلة بالتحليل قبل إصدار الحكم).
 - « بما أن المعادلة لا يمكن حلها بالتحليل إلى العوامل، فكيف يمكن حلها؟
 - أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
 - أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثمّ أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟
 - « من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟
 - أعزّز الإجابات الصحيحة.

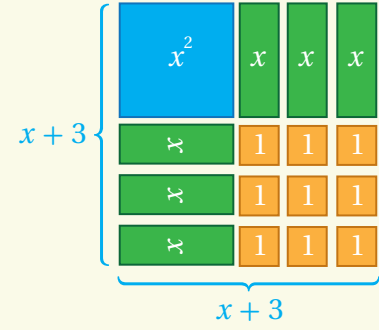
- أكتب المعادلة $(x + m)^2 = n$ على اللوح، ثمّ أسأل الطلبة:
 - « كيف يمكن حل المعادلة علماً بأن $n \geq 0$ ؟ بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.
 - « ما العلاقة بين المقدار الجبري $(x + m)^2$ والمقدار الجبري $x^2 + 2mx + m^2$ ؟ المقدار $(x + m)^2$ هو الصورة التحليلية للمقدار $x^2 + 2mx + m^2$.
 - « ماذا يمثل المقدار $x^2 + 2mx + m^2$ مربعاً كاملاً.
 - « ماذا نستنتج مما سبق؟ يمكن حل المعادلات التي تحوي مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود في أحد طرفيها، وعدداً حقيقياً غير سالب في الطرف الآخر عن طريق أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.
 - « هل يمكن حل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c أعداد صحيحة و $a \neq 0$ باستعمال الجذر التربيعي؟
 - أوضّح للطلبة أنه يمكن حل المعادلات التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال الجذر التربيعي، ولكن باتباع إجراءات معيّنة سيتعرّفونها خلال هذا الدرس، ثمّ أوجّههم إلى تنفيذ النشاط الآتي:
 - **نشاط:** تحويل مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود.
 - أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثمّ أزوّد كل مجموعة بالقطع الجبرية من ورقة المصادر 9: قطع جبرية، ثمّ أبين لهم أنّهم سيتعلّمون في هذا النشاط تحويل أي مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود باستعمال القطع الجبرية، ثمّ أطلب إليهم تنفيذ ما يأتي:
 - « تمثيل المقدار الجبري $(x^2 + 6x)$ بوضع القطع الجبرية متجاورة.



« إعادة تشكيل القطع لتشكّل جزءاً من مربع.



« إكمال المربع بإضافة قطع مفردة.



« التعبير عن مساحة المربع الناتج من القطع الجبرية بمقدار جبري.

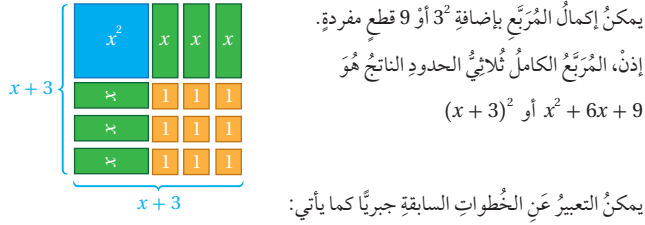
« استنتاج قاعدة لتحويل أي مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود.

- أوضح للمجموعات أنهم تمكنوا عن طريق تنفيذ إجراءات النشاط من تحويل المقدار الجبري $x^2 + 6x$ إلى المربع الكامل ثلاثي الحدود $x^2 + 6x + 9$ ، وذلك بإضافة 9 قطع جبرية مفردة إلى القطع الجبرية الممثلة للمقدار $x^2 + 6x$ ، ثم أبين لهم أن العدد 9 ناتج من قسمة العدد 6 على 2 ثم تربيع الناتج، ومنه فإنه يمكن تحويل أي مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود بإضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ، وأن هذه العملية تُسمى إكمال المربع.

✓ **إرشاد:** اختصارًا للوقت، يُفضّل قصّ القطع الجبرية الموجودة في ورقة المصادر 9 قبل الحصة الصفية.

مثال 1

- أوضح للطلبة خطوات تحويل أي مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.



يمكن إكمال المربع بإضافة 9 قطع مفردة. إذن، المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج هو $x^2 + 6x + 9$ أو $(x + 3)^2$

يمكن التعبير عن الخطوات السابقة جبريًا كما يأتي:

$$x^2 + 6x + 9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

وبشكل عام، يمكن تحويل المقدار التربيعي الذي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل ثلاثي الحدود بإضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ، وتُسمى هذه العملية **إكمال المربع** (completing the square).

إكمال المربع

مفهوم أساسي

بالكلمات: لإكمال مربع أي مقدار تربيعي على الصورة $x^2 + bx$ ، أتبّع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أجد نصف b .

الخطوة 2: أربّع الناتج من الخطوة 1

الخطوة 3: أضيف الناتج من الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

بالرموز: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

أتعلّم

أتبّع الخطوات نفسها، سواء كانت b موجبة أو سالبة.

مثال 1

أجعل كل مقدار مما يأتي مربعًا كاملاً، ثم أحلّل المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

1 $x^2 + 12x$

$$\frac{12}{2} = 6$$

بإيجاد $\frac{b}{2}$

$$6^2 = 36$$

بإيجاد $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2 + 12x + 36$$

بإضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى المقدار الأصلي

✓ **إرشاد:** أوضح للطلبة أن لا تأثير لإشارة b في إجراءات إكمال المربع.

الوحدة 3

إذن، المقدار الناتج بعد إكمال المربع هو $x^2 + 12x + 36$ ، ويمكن تحليله كما يأتي:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

$$2 \quad x^2 - 26x$$

$$\frac{-26}{2} = -13 \quad \text{بإيجاد } \frac{b}{2}$$

$$(-13)^2 = 169 \quad \text{بإيجاد } \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 26x + 169 \quad \text{بإضافة } \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ إلى المقدار الأصلي}$$

إذن، المقدار الناتج بعد إكمال المربع هو $x^2 - 26x + 169$ ، ويمكن تحليله كما يأتي:

$$x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

أنتَحقِّقْ مِنْ فهمي

أجعل كل مقدار مما يأتي مربعاً كاملاً، ثم أحل المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

$$\text{a) } x^2 + 2x \quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad \text{b) } x^2 - 14x \quad x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

حلّ المعادلات التربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع

يمكنني استعمال إكمال المربع لحل أي معادلة تربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ ، وذلك يتطلب فصل المقدار $bx + c$ في الطرف الأيسر أولاً، ثم أكمل المربع.

مثال 2

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

$$1 \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \text{المعادلة المُعطاة}$$

$$x^2 + 4x = 12 \quad \text{بجمع 12 إلى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4 \quad \text{بإكمال المربع بإضافة } 4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 \text{ إلى طرفي المعادلة}$$

$$(x + 2)^2 = 16 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

أفكر

هل يمكن حلّ الفرع 1 من المثال بالتحليل؟ أبرّر إجابتي.

129

تعزيز اللغة ودعمها:

أكّرر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني: ✓

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنتَحقِّقْ مِنْ فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

مثال 2

- أوضح للطلبة أنه يمكن حل أي معادلة تربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ باستعمال إكمال المربع باتباع الإجراءات الآتية:
- « فصل المقدار $bx + c$ في الطرف الأيسر وحده.
- « إكمال المربع للمقدار $bx + c$.
- « أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة الناتجة.
- « حل كل معادلة خطية ناتجة.

- أناقش حل المثال 2 مع الطلبة على اللوح بوصفه تطبيقاً على ما سبق، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقّق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: ✓ أناقش إجابتي سؤالي صندوقي

(أفكر) الموجودين في هامش كل فرع من أفرع المثال 2، وأتوصّل معهم إلى أنه يمكن حل الفرع 1 من المثال بالتحليل، أما الفرع 2 من المثال فلا يمكن ذلك.

أخطاء شائعة:

- قد يخطئ بعض الطلبة عند حل المعادلة التربيعية بطريقة إكمال المربع بعدم إضافة المقدار $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة والاكتمال بإضافته إلى الطرف الذي أُكْمِلَ المربع له فقط؛ ولعلاج ذلك أذكر الطلبة بشكل مستمر بخاصية المساواة للجمع، وأنه يجب جمع العدد نفسه لكلا طرفي المعادلة ليبقىا متساويين، وينتج من ذلك معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية ولها الحل نفسه.
- قد يخطئ بعض الطلبة عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي معادلة لحلها بنسيان الجذر السالب واعتماد الجذر الموجب فقط؛ لذا ألفت انتباههم بشكل مستمر إلى ضرورة أخذ الجذرين: الموجب، والسالب.

مثال إضافي

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

1 $x^2 + 10x - 1 = 0$ $x = -10.1, x = 0.1$

2 $x^2 + 18x - 5 = 0$ $x = -18.3, x = 0.3$

3 $x^2 - 8x + 3 = 0$ $x = 0.4, x = 7.6$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين
 $x + 2 = \pm 4$
 بطرح 2 من طرفي المعادلة
 $x = -2 \pm 4$
 بفصل الحدين
 $x = -2 + 4$ or $x = -2 - 4$
 بالتبسيط
 $x = 2$ $x = -6$
 إذن، جذرا المعادلة 2، -6.

التحقّق: للتحقّق، أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

2 $x^2 - 3x - 1 = 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$ المعادلة المُعطاة

$x^2 - 3x = 1$ بجمع 1 إلى طرفي المعادلة

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$ بإكمال المربع بإضافة $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ إلى طرفي المعادلة

$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$ بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ بجمع $\frac{3}{2}$ من طرفي المعادلة

$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ or $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ بفصل الحدين

$x \approx 3.3$ $x \approx -0.3$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، جذرا المعادلة التقريبيّان 3.3، -0.3.

أتحقّق من فهمي

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع، مُقرّباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$ $x = -1, x = -7$ b) $x^2 - 5x - 3 = 0$
 $x \approx 5.5, x \approx -0.5$

أفكّر

هل يمكن حلّ الفرع 2 من المثال بالتحليل؟ أبرّر إجابتي.

- أوضح للطلبة أنه يمكن حل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال إكمال المربع باتباع الإجراءات الآتية:
 - « قسمة كل حد من حدود المعادلة على a .
 - « فصل الحدين اللذين يحتويان x^2 و x في الطرف الأيسر وحدهما.
 - « إكمال المربع.
 - « أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة الناتجة.
 - « حل كل معادلة خطية ناتجة.
- أناقش حل المثال 3 مع الطلبة على اللوح بوصفه تطبيقاً على ما سبق، وأؤكد ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتحقق من صحة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- ألقت انتباه الطلبة إلى أنه يمكن استعمال طريقة التحليل في حل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ إذا كانت جذورها أعداداً نسبية، أما طريقة إكمال المربع فيمكن بها حل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ سواء أكانت جذورها أعداداً نسبية أم غير نسبية؛ لذا نعدّ طريقة إكمال المربع أشمل من طريقة التحليل.
- أوجّه الطلبة إلى صندوق الدعم البياني المرافق لحل الفرع 2 من المثال 3، للتحقق بيانياً من أن منحني الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة الواردة في هذا الفرع من المثال لا يقطع المحور x ، ما يعني عدم وجود حلول حقيقية للمعادلة.

حلّ المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.

لحلّ المعادلة التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ حيث $a \neq 1$ ، أقسم كل حد في المعادلة على a ، ثم أفصل الحدين اللذين يحتويان على x^2 و x في الطرف الأيسر أولاً، ثم أكوّل المربع.

مثال 3

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع:

1 $2x^2 - 12x + 8 = 0$

$2x^2 - 12x + 8 = 0$

المعادلة المعطاة

$x^2 - 6x + 4 = 0$

بقسمة كل حد على 2

$x^2 - 6x = -4$

بطرح 4 من طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$

بإكمال المربع بإضافة $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$ إلى طرفي المعادلة

$(x-3)^2 = 5$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$x - 3 = \pm\sqrt{5}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = 3 \pm \sqrt{5}$

بجمع 3 إلى طرفي المعادلة

$x = 3 + \sqrt{5}$ or $x = 3 - \sqrt{5}$

بفصل الحدين

إذن، جذرا المعادلة $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$

التحقق: للتحقق، أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

2 $3x^2 + 6x + 15 = 0$

$3x^2 + 6x + 15 = 0$

المعادلة المعطاة

$x^2 + 2x + 5 = 0$

بقسمة كل حد على 3

$x^2 + 2x = -5$

بطرح 5 من طرفي المعادلة

$x^2 + 2x + 1 = -5 + 1$

بإكمال المربع بإضافة $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$ إلى طرفي المعادلة

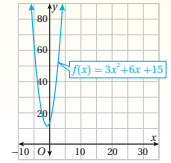
$(x+1)^2 = -4$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

بما أنه لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة، فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

الدعم البياني

يظهر في الشكل الآتي منحني الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $3x^2 + 6x + 15 = 0$ الذي لا يقطع المحور x ؛ ما يعني عدم وجود حلول حقيقية للمعادلة.



تنبيه:

ألقت انتباه الطلبة إلى ضرورة قراءة نص المسائل جيداً قبل البدء بحل المعادلات، فبعض المسائل يُطلَب فيها تقريب الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية محدّدة، وبعضها لا يُطلَب فيه ذلك، وفي هذه الحالة تُترك الإجابة بصيغة الجذور الصماء.

مثال إضافي

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع:

1 $-2x^2 + 12x + 38 = 0$ $3 \pm 2\sqrt{7}$

2 $2x^2 - 8x + 10 = 0$ لا يوجد حل للمعادلة.

تحقق من فهمي

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع:

a) $2x^2 + 20x - 10 = 0$

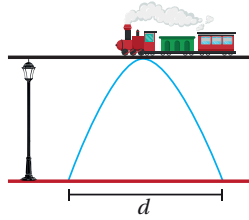
b) $2x^2 + 8x + 12 = 0$

a) $x = -5 \pm \sqrt{30}$

b) لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة.

يمكن استعمال حلّ المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4: من الحياة



تصميم: تمرّ سكة قطارٍ أعلى جسرٍ قوسي، ويمثل الاقتران $h(x) = -x^2 + 10x - 18$ ارتفاع أي نقطة على الجسر عن سطح الأرض بالمتري، و x البعد الأفقي للنقطة بالمتري عن عمود إنارة بجانب الجسر، كما في الشكل المجاور. أجد طول قاعدة القوس d ، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

أفترض أن مستوى سطح الأرض يمثل المحور x ، إذن تمثل كل من نقطة بداية القوس ونهايته حلّاً للمعادلة المرتبطة بالاقتران $h(x)$.

الخطوة 1: أحلّ المعادلة المرتبطة بالاقتران.

$-x^2 + 10x - 18 = 0$

المعادلة المرتبطة بالاقتران

$x^2 - 10x + 18 = 0$

بقسمة كل حد على -1

$x^2 - 10x = -18$

ب طرح 18 من طرفي المعادلة

$x^2 - 10x + 25 = -18 + 25$

بإكمال المربع بإضافة $25 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة

$(x - 5)^2 = 7$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$x - 5 = \pm \sqrt{7}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = 5 \pm \sqrt{7}$

بجمع 5 إلى طرفي المعادلة

$x = 5 + \sqrt{7}$ or $x = 5 - \sqrt{7}$

بفصل الحدين

$x \approx 7.6$

$x \approx 2.4$

باستعمال الآلة الحاسبة

أتعلم

ألاحظ أنه لا يمكن حلّ المعادلة المرتبطة بالاقتران بالتحليل؛ لذا أحلّها بإكمال المربع.

مثال 4: من الحياة

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أناقش الطلبة في إمكانية حل المعادلة المرتبطة بالاقتران الوارد في المثال 4 بالتحليل، وأتوصل معهم بالنقاش إلى عدم إمكانية ذلك؛ لعدم وجود عددين صحيحين حاصل ضربهما 18 ومجموعهما -10

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (6 - 1) والمسائل (24 - 10) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدم من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (30 - 28).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشاد: في السؤال 29 (تبرير)، أوجه الطلبة إلى إعادة ترتيب المعادلة أولاً قبل محاولة حلها بطريقة التحليل.

الخطوة 2: أجد طول قاعدة القوس d .

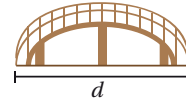
لإيجاد طول قاعدة القوس d أطرح أحد الحلين من الآخر.

$$d = 7.6 - 2.4 = 5.2$$

إذن، طول قاعدة القوس 5.2 m تقريباً.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

تصميم: صمم مهندس نموذجاً لجسر مشاة على شكل قطع مكافئ، بحيث يمثل الاقتران:



ارتفاع الجسر عن

قاعدة النموذج بالديسمتر، و x البعد الأفقي

بالديسمتر عن إشارة ضوئية، كما في الشكل

المجاور. أجد طول قاعدة الجسر d ، مقرباً

إجابتي لأقرب جزء من عشرة. جذرا المعادلة $x \approx 1.6$, $x \approx 4.4$, $d = 2.8$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أجعل كل مقدار مما يأتي مربعاً كاملاً، ثم أحلل المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

1 $x^2 + 4x$
 $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

2 $x^2 + 14x$
 $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

3 $x^2 - 3x$
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

4 $x^2 + 8x$
 $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

5 $x^2 - 2x$
 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

6 $x^2 + 22x$
 $x^2 + 22x + 121 = (x + 11)^2$

أجد قيمة c في كل مما يأتي، ثم أجد المقدار الجبري الذي يعبر عن النموذج:

7

x	2
x^2	$2x$
2	c

 $c = 4$
 $(x + 2)^2$

8

x	8
x^2	$8x$
8	c

 $c = 64$
 $(x + 8)^2$

9

x	10
x^2	$10x$
10	c

 $c = 100$
 $(x + 10)^2$

تنويع التعليم:

- أطلب إلى الطلبة المتميزين إعطاء أكثر من حل للسؤال 30 (تحد).

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« أحدّد عدد حلول المعادلة $ax^2 + bx = c$ ، إذا كانت $c < -\left(\frac{b}{2}\right)^2$ أبرّر إجابتي.

لا توجد حلول للمعادلة؛ لأنه عند إضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة عند إكمال المربع، فإن المعادلة ستصبح كالآتي:

$$ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

وبما أن $0 < \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ سالب (من معطيات المسألة)، والطرف الأيمن مربع كامل، وبما أنه لا يوجد مربع كامل يساوي عددًا سالبًا، إذن لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

نشاط التكنولوجيا:



أحفز الطلبة على تصفّح الموقع الإلكتروني الذي سيظهر عند مسح الرمز المجاور في المنزل، والاستمتاع بالمسائل التي يحويها؛ لتعزيز مهاراتهم الرياضية في حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع.

تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة حل المعادلة التربيعية الخاصة بكل تصميم من التصاميم الثلاثة باستعمال طريقة إكمال المربع.

6 الختام

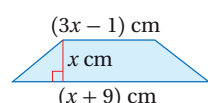
- أطلب إلى الطلبة أن يبيّنوا كتابةً إيجابيات وسلبيات كل من طرائق حل المعادلات التربيعية التي تعلّموها حتى الآن، وهي: التمثيل البياني، والتحليل، وإكمال المربع.

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية بإكمال المربع:

- | | | |
|---|--|---|
| 10 $x^2 + 4x = 12$
$x = -6, x = 2$ | 11 $x^2 - 14x = -13$
$x = 1, x = 13$ | 12 $x^2 - 6x - 11 = 0$
$x = 3 \pm 2\sqrt{5}$ |
| 13 $x^2 + 4x - 1 = 0$
$x = -2 \pm \sqrt{5}$ | 14 $x^2 + 14x - 5 = 0$
$x = -7 \pm 3\sqrt{6}$ | 15 $x^2 - 6x + 3 = 0$
$x = 3 \pm \sqrt{6}$ |
| 16 $x^2 + 13x + 35 = 0$
$x = -\frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}$ | 17 $x^2 + 2x - 1 = 0$
$x = -1 \pm \sqrt{2}$ | 18 $x^2 + 2x - 3 = 0$
$x = -3, x = 1$ |

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية بإكمال المربع، مقربًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

- | | | |
|---|--|--|
| 19 $x^2 + 2x - 9 = 0$
$x \approx 2.2, x \approx -4.2$ | 20 $x^2 - 4x - 7 = 0$
$x \approx 5.3, x \approx -1.3$ | 21 $x^2 + 2x - 5 = 0$
$x \approx -3.4, x \approx 1.4$ |
| 22 $2x^2 - 6x - 3 = 0$
$x \approx -0.4, x \approx 3.4$ | 23 $4x^2 - 8x + 1 = 0$
$x \approx 1.9, x \approx 0.1$ | 24 $2x^2 + 5x - 10 = 0$
$x \approx -3.8, x \approx 1.3$ |



25 هندسة: يبيّن الشكل المجاور شبه منحرف مساحته 20 cm^2 . أجد قيمة x ، مقربًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

$$x \approx 2.3$$

إرشاد: مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع طولي الضلعين المتوازيين مضروبًا في الارتفاع.



26 ضفادع: وقف ضفدع على جذع شجرة يرتفع 1 m عن سطح الأرض، ثم قفز إلى

سطح الأرض ليُمثّل الاقتران $h(t) = -5t^2 + 15t + 1$ ارتفاعه بالمتري عن سطح

الأرض بعد t ثانية من قفزه عن الجذع. بعد كم ثانية يصل الضفدع إلى سطح الأرض؟

$$t \approx 3.1 \text{ s}$$

27 أّحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس. $t \approx 1.7$

مهارات التفكير العليا

28 تبرير: أجد جميع قيم الثابت b ، التي تجعل المقدار $x^2 + bx + 25$ مربعًا كاملاً، وأبرّر إجابتي. $\frac{b^2}{4} = 25, b = \pm 10$

29 تبرير: هل يمكن حلّ المعادلة $x^2 + 10x = -20$ بطريقتي التحليل وإكمال المربع؟ أبرّر إجابتي.

يمكن حلها بإكمال المربع ولا يمكن حلها بالتحليل؛ لأنه لا يوجد عاملان صحيحان مجموعهما 10 وحاصل ضربهما 20

30 مسألة مفتوحة: أكتب معادلة تربيعية تُحلّ بطريقة إكمال المربع لا بطريقة التحليل، ويكون جذراها عددين حقيقيين موجبين.

$$\text{إجابة ممكنة: } x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ حلها } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

134

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 27, (7-9) كتاب التمارين: 16, (1-9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 26, 9, 7 كتاب التمارين: (16-10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (30-28), 26, 25 كتاب التمارين: 18, 17, (16-13)

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

فكرة الدرس

القانون العام، المُمَيِّز.

المصطلحات

مسألة اليوم



في لعبة رمي القرص، رمى لاعب القرص فَمَثَّلَ الاقتران $f(x) = -0.04x^2 + 0.84x + 2$ ارتفاع القرص بالمتر عن سطح الأرض، حيث x المسافة الأفقيّة بالمتر بين اللاعب والقرص. أجد المسافة الأفقيّة بين اللاعب والقرص عندما يصل القرص إلى سطح الأرض.

القانون العام

تعلّمت في الدرس السابق حلّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ باستعمالِ طريقة إكمال المربع، ويمكن بهذه الطريقة اشتقاق قانون يُستعمل لحلّ أيّ مُعادلة تربيعيّة مكتوبة على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ ، كما سألاحظ عند تنفيذ النشاط المفاهيمي الآتي:

حلّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بإكمال المربع

نشاط مفاهيمي

توضّح الخطوات الآتية طريقة حلّ أيّ مُعادلة تربيعيّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ حيث $a \neq 0$. باستعمالِ طريقة إكمال المربع، أصف الإجراء الذي تمّ في كلّ خطوة:

1 $ax^2 + bx + c = 0$

2 $ax^2 + bx = -c$

3 $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$

4 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

5 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

6 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$

7 $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

8 $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

9 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

135

نتائج التعلّم القبلي:

- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام.
- حساب المميّز لمعادلة تربيعية.
- تحديد عدد الحلول الحقيقية لمعادلة تربيعية باستعمال إشارة المميّز.
- اختيار الطريقة الأنسب لحل المعادلة التربيعية.

نتائج التعلّم القبلي:

- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل.
- حل معادلات تربيعية باستعمال الجذر التربيعي.
- حل معادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقدة التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أطلب إلى الطلبة استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، وتقريب الإجابة لأقرب 4 منازل عشرية:

1 $\frac{-3 + 2.5}{4}$

2 $\frac{-3 - 2.5}{4}$

3 $\frac{-3 + \sqrt{65}}{4}$

4 $\frac{-3 - \sqrt{65}}{4}$

تنويع التعليم:

إذا واجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في استعمال الآلة الحاسبة، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى المتميزين في استعمال الآلة الحاسبة؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

✓ **إرشاد:** من غير المرجّح أن يتمكن الطلبة كافّة من حل مسائل بند (التهيئة) بصورة صحيحة، إذ من المتوقّع حاجة بعضهم إلى توضيح حول كيفية استعمال الأقواس بالشكل الصحيح؛ نظراً لوجود أنواع مختلفة من الآلات الحاسبة.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

« ماذا تعرفون عن لعبة رمي القرص؟ ستختلف إجابات الطلبة.

« ما الاقتران الذي يمثل ارتفاع القرص بالمتري عن سطح الأرض؟ $f(x) = -0.04x^2 + 0.84x + 2$

« ماذا تمثل قيمة x في المسألة؟ المسافة الأفقية بالمتري بين اللاعب والقرص.

« كيف يمكن حساب المسافة الأفقية بين اللاعب والقرص عندما يصل القرص إلى سطح الأرض؟ أبرّر إجابتي. إجابة ممكنة: بحل المعادلة التربيعية: $-0.04x^2 + 0.84x + 2 = 0$ ؛ لأن وصول القرص إلى سطح الأرض يعني أن ارتفاعه عن سطح الأرض يساوي صفرًا، وبحل هذه المعادلة يمكن الحصول على المسافة الأفقية المطلوبة.

« هل يمكن حل المعادلة $-5t^2 + 8t + 1 = 0$ بالتحليل إلى العوامل؟ لا. (أطلب إلى الطلبة محاولة حل المعادلة بالتحليل قبل إصدار الحكم).

« بما أن المعادلة لا يمكن حلها بالتحليل إلى العوامل، فهل يمكن حلها بإكمال المربع؟ نعم. (أطلب إلى الطلبة محاولة حل المعادلة بإكمال المربع).

« هل كان حل المعادلة بطريقة إكمال المربع سهلًا؟ ستختلف إجابات الطلبة.

« برأيكم/ برأيكن، هل يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى؟

- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

« ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟

« من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

تُسمى الصيغة التي جرى التوصل إليها في السطر الأخير من النشاط السابق القانون العام (quadratic formula).

حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

مفهوم أساسي

يمكن إيجاد الحلين الحقيقيين للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانون العام على النحو الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

مثال 1

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية بالقانون العام، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

1 $2x^2 - 3x = 5$

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$2x^2 - 3x = 5$$

المعادلة المعطاة

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

ب طرح 5 من طرفي المعادلة

الخطوة 2: أطلب القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$$

بتعويض $a = 2, b = -3, c = -5$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

بالتبسيط

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

بالجمع، ثم إيجاد الجذر التربيعي

$$x = \frac{3-7}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{3+7}{4}$$

بفصل الحلين

$$x = -1 \quad x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

بالتبسيط

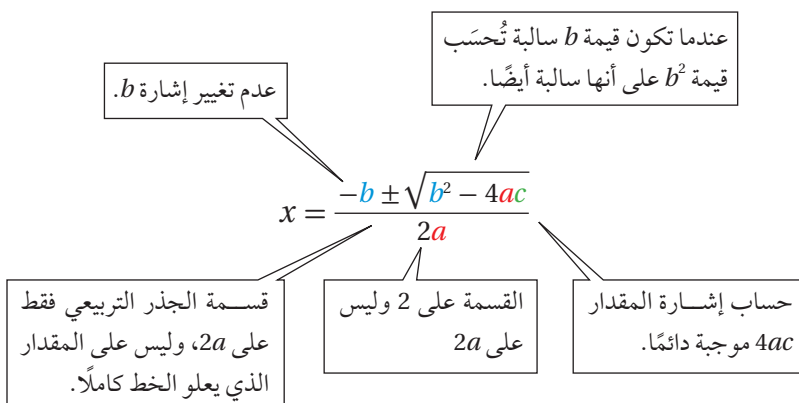
إذن، جذرا المعادلة هما $-1, \frac{5}{2}$.

أتعلم

بما أنه يمكن إيجاد الجذر التربيعي للعدد 49، فلا حاجة إلى استعمال الآلة الحاسبة؛ لذا تكون قيمة الجذر دقيقة وليست تقريبية.

أخطاء شائعة:

يوضح المخطط أدناه الأخطاء الشائعة التي يرتكبها الطلبة عند استخدام القانون العام لحل المعادلات التربيعية، والتي يمكن تجاوزها بالممارسة وحل أكبر قدر ممكن من المسائل.



- أذكر الطلبة بطرائق حل المعادلات التربيعية التي تعلموها حتى الآن، وهي: التمثيل البياني، واستعمال الجذور التربيعية، والتحليل إلى العوامل، وإكمال المربع، ثم أيقن لهم أنه يمكن استعمال طريقة إكمال المربع في اشتقاق قانون يُستعمل لحل أي معادلة تربيعية على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، من خلال تنفيذ النشاط المفاهيمي في الصفحة 135 من كتاب الطالب.

نشاط مفاهيمي: حل المعادلة التربيعية بإكمال المربع.

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أوضح لهم أن الخطوات الواردة في النشاط تمثل خطوات حل أي معادلة تربيعية على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، باستعمال إكمال المربع.
- أطلب إلى كل مجموعة كتابة عبارة شارحة تصف كل خطوة من خطوات حل المعادلة الواردة في النشاط.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش مع الطلبة وصف كل إجراء، ثم أيقن لهم أن الصيغة التي توصلوا إليها في السطر الأخير من المعادلة هي صيغة القانون العام لحل أي معادلة تربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، ثم أثبت على اللوح صيغة القانون العام لحل المعادلة التربيعية بالرموز، وأيقن لهم شروطها بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.

مثال 1

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح بوصفه تطبيقاً على حل المعادلات التربيعية بالقانون العام، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

$$2 \quad 5x^2 - 11x = 4$$

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$5x^2 - 11x = 4$$

المعادلة المُعطاة

$$5x^2 - 11x - 4 = 0$$

ب طرح 4 من طرفي المعادلة

الخطوة 2: أطبق القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}$$

بتعويض $a = 5, b = -11, c = -4$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10}$$

بالتبسيط

$$= \frac{11 \pm \sqrt{201}}{10}$$

بالجمع

$$x = \frac{11 - \sqrt{201}}{10} \quad \text{or} \quad x = \frac{11 + \sqrt{201}}{10}$$

بفصل الجذرين

$$x \approx -0.3 \quad x \approx 2.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، جذرا المعادلة التقريبيان $-0.3, 2.5$

تحقق من فهمي

أحلُّ كُلَّ مِّنَ المعادلات الآتية بالقانون العام، مُقرِّباً إجابتي لأقرب جزءٍ مِّنَ عشرة (إن لزم):

$$a) \quad 3x^2 + 16x = -5 \quad x = -\frac{1}{3}, x = -5 \quad b) \quad x^2 - 2x = 4 \quad x \approx 3.2, x \approx -1.2$$

المُمَيِّز

تعلمت سابقاً أن للمعادلة التربيعية حلين حقيقيين مختلفين، أو حلاً حقيقياً واحداً، أو لا توجد لها حلول حقيقية، ويمكن تحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية قبل حلها باستعمال **المُمَيِّز** (discriminant)، وهو المقدار التربيعي الذي يقع أسفل الجذر التربيعي في القانون العام $(b^2 - 4ac)$ ، ويُرمز إليه بالرمز Δ .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المُمَيِّز

أتعلم

بما أن $\sqrt{201}$ عدد غير نسبي، لذا أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للحل، أما القيمة الدقيقة للحل فتكون بالابقاء على الجذر كما هو.

رموز رياضية

الرمز Δ إغريقي، ويُقرأ دلتا.

إرشاد: أناقش الطلبة في المعلوماتين الواردتين في صندوق (أتعلم) الموجودين في هامش كل فرع من أفرع المثال 1، وأتوصل معهم إلى أننا لا نحتاج إلى استعمال الآلة الحاسبة لتقريب الإجابة إذا كان العدد أسفل الجذر التربيعي مربعاً كاملاً؛ لأن قيمة الجذر عندها ستكون دقيقة وليست تقريبية.

تعزير اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

مثال 2

أذكر الطلبة بما تعلّموه سابقاً حول عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية، ثم أبين لهم أنه يمكن تحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية دون حلها باستعمال المقدار $(b^2 - 4ac)$ الذي يقع أسفل الجذر التربيعي في القانون العام، وأخبرهم أنه يُسمّى المميّز، ثم أوضح لهم كيفية ذلك بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.

- أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح بوصفه تطبيقاً على تحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية دون حلها، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إنّ لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقّق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أوّجه الطلبة إلى صناديق الدعم البياني المرافقة لحل كل فرع من أفرع المثال 2، للتحقّق بيانياً من عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة تربيعية في المثال.

استعمال المميّز

مفهوم أساسي

مميّز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $\Delta = b^2 - 4ac$ ، ويمكن استعماله لتحديد عدد حلول المعادلة التربيعية كما يأتي:

إشارة المميّز Δ	$\Delta > 0$ موجب	$\Delta = 0$ صفر	$\Delta < 0$ سالب
عدد الحلول	حلان حقيقيّان مختلفان	حل حقيقي واحد	لا توجد حلول حقيقية
مثال بياني			

مثال 2

أحدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة تربيعية ممّا يأتي باستعمال المميّز:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(1)(3)$$

$$= 4$$

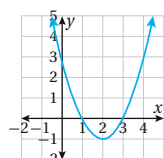
صيغة المميّز

بتعويض $a = 1, b = -4, c = 3$

بالتبسيط

بما أن $\Delta > 0$ ، إذن للمعادلة حلان حقيقيّان مختلفان.

الدعم البياني:



يُظهر التمثيل البياني المُجاوِر لمنحنى الاقتران التربيعي المُرتبط بالمعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ وجود حلّين حقيقيّين مختلفين لها.

مثال إضافي

أحدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة تربيعية مما يأتي باستعمال المميز:

1 $3x^2 + x - 5 = 0$ حلان حقيقيان.

2 $2x^2 + 4x + 5 = 0$ لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

3 $x^2 + 2x + 1 = 0$ حل حقيقي واحد.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه يمكنهم إيجاد قيمة المميز قبل البدء بحل أي معادلة تربيعية، لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة.
- ألقت انتباه الطلبة أنه إذا كانت a موجبة و c سالبة في أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين مختلفين.

2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(1)(1)$

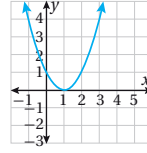
$= 0$

صيغة المميز

بتعويض $a = 1, b = -2, c = 1$

بالتبسيط

بما أن $\Delta = 0$ ، إذن للمعادلة حل حقيقي واحد.



الدعم البياني:

يُظهر التمثيل البياني المُجاوِر لمنحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $x^2 - 2x + 1 = 0$ وجود حل حقيقي واحد.

3 $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4(1)(1)$

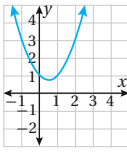
$= -3$

صيغة المميز

بتعويض $a = 1, b = -1, c = 1$

بالتبسيط

بما أن $\Delta < 0$ ، إذن ليس للمعادلة أي حل حقيقي.



الدعم البياني:

يُظهر التمثيل البياني المُجاوِر لمنحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $x^2 - x + 1 = 0$ عدم وجود أي حل حقيقي للمعادلة.

أتحقق من فهمي

أحدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة تربيعية مما يأتي باستعمال المميز:

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

b) $2x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 11 = 0$

(a) للمعادلة حل حقيقي واحد.

(b) للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان.

(c) لا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

اختيار الطريقة الأنسب لحل المعادلة التربيعية

تعلمت خمس طرائق لحل المعادلات التربيعية، وفي بعض الأحيان يكون استعمال إحدى هذه الطرائق أنسب من استعمال الطرائق الأخرى، ويبيّن الجدول الآتي ملخصاً لهذه الطرائق وإيجابيات كل منها وسلباتها.

طرائق حل المعادلات التربيعية

ملخص المفهوم

الطريقة	الإيجابيات	السلبات
التمثيل البياني	- يمكن استعمالها لحل أي معادلة تربيعية. - يمكن بسهولة تحديد الحلول من التمثيل.	قد لا تُعطي حلولاً دقيقة.
التحليل إلى العوامل	- من أفضل الطرائق لتجربتها أولاً. - تُعطي إجابة مباشرة إذا كانت المعادلة قابلة للتحليل أو كان الحد الثابت صفراً.	ليست جميع المعادلات التربيعية قابلة للتحليل.
استعمال الجذور التربيعية	تُستعمل لحل المعادلات على الصورة $(x + a)^2 = c$، حيث $c \geq 0$	لا تُستعمل إذا كان الحد bx موجوداً.
إكمال المربع	- يمكن استعمالها لحل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$. - من الأسهل استعمالها إذا كان $a = 1$، و b عدداً زوجياً.	في بعض الأحيان تكون الحسابات معقدة.
القانون العام	- يمكن استعمالها لحل أي معادلة تربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$. - تُعطي حلولاً دقيقة.	قد تستغرق وقتاً أطول من باقي الطرائق لإجراء الحسابات.

- أناقش مع الطلبة إيجابيات وسلبيات الطرائق الخمس التي تعلموها خلال هذه الوحدة لحل المعادلات التربيعية، بالاستعانة بصندوق (ملخص المفهوم).
- أناقش الطلبة في حل المثال 3، وأؤكد لهم ضرورة تبرير سبب اختيارهم لطريقة الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

أحل كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة، وأبرز سبب اختيار الطريقة:

1 $x^2 + 5x - 14 = 0$

يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادلة بسهولة؛ لذا أحلها باستعمال التحليل إلى العوامل.

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$(x + 7)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x + 7 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = -7 \quad x = 2$$

بحل كل معادلة

إذن، جذرا المعادلة هما 2، -7.

2 $x^2 - 8x - 3 = 0$

بما أن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x عدد زوجي، فمن الأفضل استعمال طريقة إكمال المربع.

$$x^2 - 8x - 3 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$x^2 - 8x = 3$$

بجمع 3 إلى طرفي المعادلة

$$x^2 - 8x + 16 = 3 + 16 \quad \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16 \quad \text{إلى طرفي المعادلة}$$

بإكمال المربع بإضافة 16

$$(x - 4)^2 = 19$$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$$x - 4 = \pm\sqrt{19}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x = 4 \pm \sqrt{19}$$

بجمع 4 إلى طرفي المعادلة

$$x = 4 + \sqrt{19} \quad \text{or} \quad x = 4 - \sqrt{19}$$

بفصل الحلين

إذن، جذرا المعادلة $4 + \sqrt{19}$ ، $4 - \sqrt{19}$.

أنتذكر

أجرب أولاً طريقة التحليل إلى العوامل قبل باقي الطرائق.

أفكر

هل يمكن حل المعادلة بالتحليل؟ أبرز إجابتني.

إرشادات:

- ألفت انتباه الطلبة إلى أننا عادة نبدأ بطريقة التحليل إلى العوامل؛ وفي حال كان التحليل غير ممكن نجرب باقي الطرائق.
- أناقش مع الطلبة إجابة السؤال الوارد في صندوق (أفكر) الموجود في هامش الفرع 2 من المثال 3، وأتوصل معهم إلى أنه لا يمكن حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل؛ لأنه لا يوجد عدداً صحيحان حاصل ضربهما -3 - ومجموعهما -8.

مثال إضافي

أختار طريقة لحل كل معادلة مما يأتي، وأبرر إجابتي:

1 $3x^2 + x = 0$

التحليل إلى العوامل؛ لأن الحد الثابت يساوي صفراً.

2 $x^2 - 6x - 1 = 0$

إكمال المربع؛ لأن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x عدد زوجي.

3 $6x^2 + 22x + 19 = 0$

القانون العام؛ لأنه لا يمكن تحليل المعادلة، ومعامل x^2 ليس 1، والأعداد فيها كبيرة.

3 $2x^2 - 15x = -19$

بما أنه لا يمكن تحليل المعادلة والأعداد فيها كبيرة، فاستعمل القانون العام.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$2x^2 - 15x = -19$$

المعادلة المعطاة

$$2x^2 - 15x + 19 = 0$$

بجمع 19 إلى طرفي المعادلة

الخطوة 2: استعمل المُميز لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

صيغة المُميز

$$= (-15)^2 - 4(2)(19)$$

بتعويض $a = 2, b = -15, c = 19$

$$= 73$$

بالتبسيط

بما أن $\Delta > 0$ ، إذن للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان.

الخطوة 3: أطبق القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)}$$

بتعويض $a = 2, b = -15, \Delta = 73$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$$

بالتبسيط

$$x = \frac{15 - \sqrt{73}}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

بفصل الحلين

$$\text{إذن، جذرا المعادلة } \frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

أتحقق من فهمي أنظر الهامش.

أحل كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة، وأبرر سبب اختيار الطريقة:

a) $x^2 + 3x - 28 = 0$

b) $-x^2 - 10x = 11$

c) $3x^2 - 13x = 5$

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):

(a) أحلها باستعمال التحليل إلى العوامل؛ لسهولة تحليل الطرف الأيسر.

جذرا المعادلة هما: 4, -7

(b) أحلها باستعمال طريقة إكمال مربع؛ لأن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x زوجي.

جذرا المعادلة هما: $-5 \pm \sqrt{14}$

(c) أحلها باستعمال القانون العام؛ لأنها لا تحلل والأعداد فيها كبيرة.

جذرا المعادلة هما: $\frac{13 \pm \sqrt{229}}{6}$

مثال 4: من الحياة

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 4، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، وأؤكد لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أوضح للطلبة أنه لا يمكن حل المعادلة التربيعية في المسألة إلا بالقانون العام؛ لأن الأعداد فيها عشرية.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 4، أعزز الوعي البيئي لدى الطلبة بتعريفهم بمخاطر حرائق الغابات، وعلاقتها بالتغير المناخي، وكيفية منع هذه الحرائق.

مثال 4: من الحياة

يُستعمل القانون العام كثيراً في حلّ المعادلات التربيعية التي تُنمذج تطبيقات حياتية أو علمية؛ لأن قيم المعاملات في تلك المعادلات قد لا تكون بسيطة؛ ما يجعلها غير قابلة للتحليل.

حرائق الغابات: أُطلقت قذيفة لإطفاء حريق شَبَّ في إحدى الغابات، فَمَثَّل الاقتران $h(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 4$ ارتفاعها بالمتّر عن سطح الأرض؛ حيث x المسافة الأفقية بين القذيفة والمدفع. أجد المسافة الأفقية بين موقع سقوط القذيفة والمدفع. إذا افترضنا أن سطح الأرض يمثّل المحور x ، فإن أحد جذري المعادلة $-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$ يمثّل موقع سقوط القذيفة.

أستعمل القانون العام لحلّ المعادلة:

$$-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$$

المعادلة المرتبطة بالاقتران

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$x = \frac{-(0.5) \pm \sqrt{(0.5)^2 - 4(-0.001)(4)}}{2(-0.001)}$$

بتعويض $a = -0.001$, $b = 0.5$, $c = 4$

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

بالتبسيط

$$x = \frac{-0.5 + \sqrt{0.266}}{-0.002} \text{ or } x = \frac{-0.5 - \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

بفصل الحليّين

$$x \approx -7.9$$

$$x \approx 507.9$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن موقع سقوط القذيفة يكون أمام المدفع وليس خلفه، فأستثنى القيمة السالبة. إذن، يبعد موقع سقوط القذيفة عن المدفع 507.9 m تقريباً.

أتحقّق من فهمي

في مناورة تدريبية للقوّات المسلّحة الأردنيّة - الجيش العربيّ، أُطلقت قذيفة من ارتفاع 2 m، فَمَثَّل الاقتران $h(x) = -0.001x^2 + 0.9x + 2$ ارتفاعها بالمتّر عن سطح الأرض؛ حيث x المسافة الأفقية بين القذيفة وموقع إطلاقها. أجد المسافة الأفقية بين موقع إطلاق القذيفة وموقع سقوطها. $x \approx 902.2 \text{ m}$



معلومة

استطاع العلماء مؤخراً تطوير قنابل تحتوي على موادّ تطفئ الحرائق، تُطلق باستخدام مدافع من مسافة تصل إلى 5 km نحو مناطق الاشتعال التي يصعب الوصول إليها، مثل الغابات.



أحلُّ كُلِّ كَلٍّ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِالْقَانُونِ الْعَامِّ، مَقْرَّبًا إِجَابَتِي لِأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إِنْ لَزِمَ):

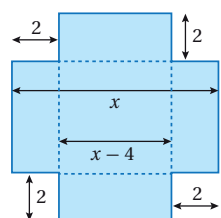
- | | | |
|---|---|---|
| 1 $2x^2 + x - 8 = 0$
$x \approx 1.8, x \approx -2.3$ | 2 $3x^2 + 5x + 1 = 0$
$x \approx -0.2, x \approx -1.4$ | 3 $x^2 - x - 10 = 0$
$x \approx 3.7, x \approx -2.7$ |
| 4 $4x^2 + 3 = -9x$
$x \approx -0.4, x \approx -1.8$ | 5 $6x^2 + 22x + 19 = 0$
$x \approx -1.4, x \approx -2.3$ | 6 $x^2 + 3x = 6$
$x \approx 1.4, x \approx -4.4$ |
| 7 $3x^2 + 1 = 7x$
$x \approx 2.2, x \approx 0.2$ | 8 $2x^2 + 11x + 4 = 0$
$x \approx -0.4, x \approx -5.1$ | 9 $4x^2 + 5x = 3$
$x \approx 0.4, x \approx -1.7$ |
| 10 $4x^2 = 9x - 4$
$x \approx 1.6, x \approx 0.6$ | 11 $7x^2 = 2 - 3x$
$x \approx 0.4, x \approx -0.8$ | 12 $5x^2 - 10x + 1 = 0$
$x \approx 1.9, x \approx 0.1$ |

أحدّد عدّدَ الحُلُولِ الْحَقِيقِيَّةِ لِكُلِّ مُعَادَلَةٍ تَرْبِيعِيَّةٍ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ الْمُتَمَيِّزِ:

- | | | |
|---|--|---|
| 13 $x^2 - 6x + 10 = 0$
$\Delta = -4$, لا توجد حلول حقيقية للمعادلة. | 14 $2x^2 - 12x = -18$
$\Delta = 0$, يوجد للمعادلة حل حقيقي واحد. | 15 $-5x^2 + 8x + 9 = 0$
$\Delta = 244$, يوجد للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان. |
|---|--|---|

أحلُّ كُلِّ مُعَادَلَةٍ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ أَيِّ طَرِيقَةٍ، وَأَبْرُزْ سَبَبَ اخْتِيَارِ الطَّرِيقَةِ: (16-18) أنظر الهامش.

- | | | |
|--------------------|--------------------|------------------------|
| 16 $x^2 + 4x = 15$ | 17 $9x^2 - 49 = 0$ | 18 $x^2 + 4x - 60 = 0$ |
|--------------------|--------------------|------------------------|



- 19 **صناعة:** تجري صناعة صندوق معدنيّ من صفيحة مُرَبَّعَةِ الشَّكْلِ بقطع 4 مُرَبَّعَاتٍ مُتطابِقةٍ مِنْ زَوَايا الصَّفِيحَةِ، طَوْلُ ضَلْعِ كُلِّ مُرَبَّعٍ مِنْهَا 2 m، ثُمَّ تُطَوَّى الْجَوَانِبُ لِشَكْلِ الصَّنْدُوقِ. إِذَا كَانَ حَجْمُ الصَّنْدُوقِ 144 m^3 ، فَأَجِدْ أبعادَ الصَّفِيحَةِ الْأَصْلِيَّةِ الَّتِي صُنِعَ مِنْهَا الصَّنْدُوقُ، مَقْرَّبًا إِجَابَتِي لِأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ. $x \approx 12.5 \text{ m}$

- 20 **حديقة:** حديقةٌ مستطيلة الشكل يزيد طولها على عرضها بمقدار 5 m. إذا كانت مساحتها 60 m^2 ، فأجد أبعادها، مَقْرَّبًا إِجَابَتِي لِأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ مِئَةٍ. الطول 10.64 m تقريبًا، العرض 5.64 m تقريبًا.

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

- 16 أحلها باستعمال طريقة إكمال مربع؛ لأن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x زوجي.
جذرا المعادلة هما $-2 \pm \sqrt{19}$

- 17 أحلها باستعمال الجذور التربيعية؛ لأن الحد bx غير موجود.
جذرا المعادلة هما: $\pm \frac{7}{3}$

- 18 أحلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل؛ لأنه يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادلة بسهولة.
جذرا المعادلة هما: 6، -10

- أوجّه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (6-1) والمسائل (18-13) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدمّة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (27-23).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 26 (تبرير)، أوجّه الطلبة إلى ربط إجابة رنيم بصيغة حل المعادلة التربيعية بالقانون العام.
- في السؤال 27 (أكتشف الخطأ)، أطلب إلى الطلبة إيجاد مميّز المعادلة أولاً، ثم اكتشاف الخطأ الذي وقع فيه نور.

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:
- « أَيْبِن أَنَّهُ لَا تَوْجَدُ حُلُولَ حَقِيقَةِ لِلْمَعَادِلَةِ: $x^2 + 3 = rx - x^2$ حيث r عدد حقيقي.

بكتابة المعادلة على الصورة القياسية:

$$(r^2 + 1)x^2 - rx + 3 = 0$$

بإيجاد مميز المعادلة التربيعية:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= r^2 - 4(r^2 + 1)3$$

$$= r^2 - 12r^2 - 12$$

$$= -11r^2 - 12$$

بما أن r عدد حقيقي، فإن مربعه عدد حقيقي موجب، وبما أن r^2 في -11 ، ومطروح منه 12 ، إذن $\Delta < 0$ ، وهذا يعني أنه ليس للمعادلة حل حقيقي.

نشاط التكنولوجيا:



أحفز الطلبة على تصفّح الموقع الإلكتروني الذي سيظهر عند مسح الرمز المجاور في المنزل، والاستمتاع بالمسائل التي يحويها؛ لتعزيز مهاراتهم الرياضية في حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام.

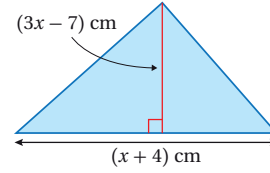
تعليمات المشروع:

- أطلب إلى الطلبة حل المعادلة التربيعية الخاصة بكل تصميم من التصميمات الثلاثة باستعمال القانون العام.

- أطلب إلى كل طالب / طالبة اختيار فكرة فهمها/ فهمتها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها/ تفهمها جيداً، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- أطلب إلى كل طالب / طالبة تسليم الورقة.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أخطّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

21 هندسة: يبين الشكل الآتي مثلثاً مساحته 10 cm^2 . أجد قيمة x ، مقرباً إيجابياً لأقرب جزء من عشرة.

$$x \approx 3.3 \text{ cm}$$



22 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

$$x \approx 23.2 \text{ m}$$

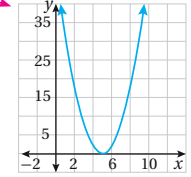
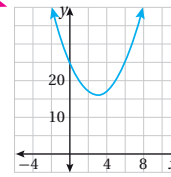
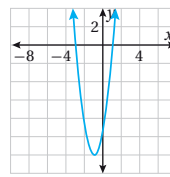
مهارات التفكير العليا

تبرير: أصل كل معادلة في ما يأتي بالتمثيل البياني للافتراض المرتبط بها، وأبرز إجابتي: التبرير: يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان. التبرير: يوجد للمعادلة جذر حقيقي واحد. التبرير: لا توجد للمعادلة جذور حقيقية.

23 $x^2 - 6x + 25 = 0$

24 $2x^2 - 20x + 50 = 0$

25 $3x^2 + 6x - 9 = 0$



26 تحدد: حلت ريم معادلة تربيعية باستعمال القانون العام فكانت إجابتها $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$. أجد المعادلة التربيعية التي حلتها ريم.

$$x^2 - 3x - 7 = 0$$

27 اكتشف الخطأ: يقول نور إن مميز المعادلة $2x^2 + 5x - 1 = 0$ هو 17 . أكتشف الخطأ الذي وقع فيه نور وأصحّحه.

الخطأ الذي وقع فيه نور عدّه $c = 1$ ، والصواب أن $c = -1$.

وبذلك يكون المميز 33

الواجب المنزلي:

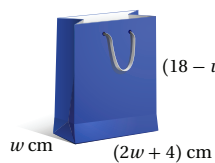
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, 27, (7 - 12) كتاب التمارين: 19, (1 - 9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 19, 20, 27, (10 - 12) كتاب التمارين: 18, 19, (7 - 15)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 19, 21, (23 - 27) كتاب التمارين: (10 - 18)

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ Solving Special Equations

الدرس 6

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ أُسِّ المتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبر من 2
الصورة التربيعية.



كيسٌ للهدايا على شكلٍ مُتوازيٍ مستطيلاتٍ، حجمه $(18 - w) \text{ cm}^3$ ، وأبعاده بدلالة المتغيِّر w موضحة في الشكل المجاور. أجد أبعاده.

تعلّمت في الدروس السابقة حلَّ المُعادلات التربيعية بطرائقٍ مُتنوّعة، وسأتعلّم في هذا الدرس حلَّ مُعادلات أُسِّ المتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبر من 2 باستعمال التحليل والتجميع وخاصية الضرب الصفرى.

حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترك الأكبر

تعلّمت سابقاً أنّ تحليل المقدار الجبري بإخراج العامل المُشترك الأكبر لحدوده هو عمليةٌ عكسيةٌ لعملية التوزيع، ويمكنُ الإفادة من إخراج العامل المُشترك الأكبر في تبسيط وحلِّ مُعادلات أُسِّ المتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ أكبر من 2.

مثال 1

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلات الآتية:

$$1 \quad x^3 + 4x^2 = 5x$$

$$x^3 + 4x^2 = 5x$$

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$x(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -5 \quad \quad x = 1$$

إذن، جذور المُعادلة $-5, 0, 1$

المُعادلة المُعطاة

ب طرح $5x$ من طرفي المُعادلة

ب التحليل بإخراج العامل المُشترك الأكبر

ب التحليل إلى العوامل

خاصية الضرب الصفرى

بحلُّ كُلِّ مُعادلة

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

أتعلّم

أحتاج في بعض المُعادلات إلى استعمال طرائق حلِّ المُعادلات التربيعية التي تعلّمتها سابقاً، بعد إخراج العامل المُشترك الأكبر.

أتعلّم

أكتب جميع حدود المُعادلة في الطرف الأيسر من المُعادلة قبل إخراج العامل المُشترك الأكبر.

نتائج الدرس

- حل مُعادلات أُسِّ المتغيِّر فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 بإخراج العامل المشترك.
- حل مُعادلات أُسِّ المتغيِّر فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 بالتجميع.
- حل مُعادلات أُسِّ المتغيِّر فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 تؤول إلى الصورة التربيعية.
- حل مُعادلات من الدرجة الثالثة تؤول إلى مجموع مكعّبين.
- حل مُعادلات من الدرجة الثالثة تؤول إلى فرق بين مكعّبين.

نتائج التعلّم القبلي:

- حل مُعادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل.
- حل مُعادلات تربيعية باستعمال الجذر التربيعي.
- حل مُعادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.
- حل مُعادلات على صورة $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام.
- اختيار الطريقة الأنسب لحل المُعادلة التربيعية.
- تحليل المقادير الجبرية بالتجميع.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقدة التعليمي:

- أوّجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتبّوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أوزع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أزوّد كلّ مجموعة بورقة المصادر 10: حل المعادلات بالقانون العام، ومشابك ورقية.
- أطلب إلى أفراد المجموعات التوفيق بين بطاقة كلّ معادلة وصيغة القانون العام الخاص بها وحلولها (إن وجدت)، ثم ربط البطاقات الثلاث بمشبك ورقي.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

✓ **إرشاد:** أقصّ البطاقات الموجودة في ورقة المصادر قبل بدء الدرس، ثم أخلطها جيداً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
- « ما شكل كيس الهدايا؟ على شكل متوازي مستطيلات.
- « ما أبعاد كيس الهدايا الموضّحة في الشكل؟ $2w + 4$, w , $18 - w$
- « ماذا تمثّل قيمة w في المسألة؟ عرض متوازي المستطيلات (كيس الهدايا).
- « ما حجم كيس الهدايا؟ 1152 cm^3
- « كيف يمكن إيجاد أبعاد كيس الهدايا؟ بحل المعادلة: $(2w + 4)(18 - w) = 1152$ ، ثم إيجاد الأبعاد بالتعويض.
- « هل يمكن حل هذه المعادلة باستعمال خاصية الضرب الصفري؟ أبرّر إجابتي. لا؛ لأنه يلزم أن يكون أحد طرفي المعادلة يساوي صفراً للتمكن من استعمال خاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.
- « هل هذه المعادلة تربيعية؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- « للإجابة عن السؤال السابق، أطلب إلى الطلبة ضرب الحدود الجبرية الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلة ببعضها، ثم أطلب إلى أحد الطلبة كتابة المعادلة بعد إجراء عملية الضرب على اللوح، ثم ألفت انتباههم إلى أن أعلى أس للمتغير w في المعادلة يساوي 3، وهذا يدل على أن المعادلة ليست تربيعية.

- « أطلب إلى الطلبة إعادة ترتيب المعادلة بجعل أحد طرفيها يساوي صفراً، ثم أسألهم:
- « برأيكم/ برأيكن، كيف يمكن حل هذه المعادلة؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
- « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟
- « من يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أذكر الطلبة بطرائق حل المعادلات التربيعية التي تعلّموها سابقاً، ثم أبيّن لهم أنهم سيتعلّمون في هذا الدرس حل معادلات أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2.
- أذكر الطلبة بتحليل المقادير الجبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر عن طريق مجموعة من الأمثلة، ثم أبيّن لهم أنه يمكن توظيف هذه المهارة في حل بعض المعادلات موضوع الدرس.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1، واؤكّد لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

- ألفت انتباه الطلبة إلى ضرورة كتابة جميع حدود المعادلة في الطرف الأيسر قبل إخراج العامل المشترك الأكبر.
- في الفرع 1 من المثال 1، ألفت انتباه الطلبة إلى أننا احتجنا إلى مهارة تحليل ثلاثي الحدود الذي على الصورة $x^2 + bx + c$ بعد إخراج العامل المشترك الأكبر، أما في الفرع 2 من المثال فقد احتجنا إلى مهارة تحليل الفرق بين مربعين.
- أذكر الطلبة بأن التحقق من صحة الحل يكون بتعويض قيمة x في المعادلة الأصلية، فإذا تساوى طرفا المعادلة فإن قيمة x تُعدّ حلاً للمعادلة، وإلا فإنها لا تُعدّ كذلك.

2 $2x^3 = 18x$

$2x^3 = 18x$

المعادلة المعطاة

$2x^3 - 18x = 0$

ب طرح $18x$ من طرفي المعادلة

$2x(x^2 - 9) = 0$

ب التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

$2x(x-3)(x+3) = 0$

ب تحليل الفرق بين مربعين

$2x = 0$ or $x-3 = 0$ or $x+3 = 0$

خاصية الضرب الصفري

$x = 0$ $x = 3$ $x = -3$

بحل كل معادلة

إذن، جذور المعادلة 3، 0، -3

أنشأ من فهمي أحل كلًا من المعادلات الآتية:

a) $x^3 + 12x = 7x^2$
 $x = 0, x = 3, x = 4$

b) $x^3 = 25x$
 $x = 0, x = -5, x = 5$

حل المعادلات بالتجميع

يمكن حل المعادلات التي تحتوي على أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة التجميع، وذلك بتجميع الحدود التي تحتوي على عوامل مشتركة بينها، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.

مثال 2

أحل كلًا من المعادلات الآتية:

1 $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

المعادلة المعطاة

$(x^3 - 2x^2) + (9x - 18) = 0$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$x^2(x-2) + 9(x-2) = 0$

ب تحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$(x-2)(x^2+9) = 0$

ب إخراج $(x-2)$ عاملاً مشتركاً

$x-2 = 0$ or $x^2+9 = 0$

خاصية الضرب الصفري

$x = 2$

بحل المعادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $x^2 + 9 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن للمعادلة الأصلية جذراً وحيداً هو 2

أنشأ

للتحقق من صحة الحل، أعوّل قيم x في المعادلة الأصلية.

أنشأ

يمكن تحليل المقدار الجبري بالتجميع إذا تحققت الشروط الآتية جميعها:

- إذا احتوى على أربعة حدود أو أكثر.
- إذا احتوى على عوامل مشتركة بين الحدود يمكن تجميعها معاً.
- إذا احتوى على عاملين مشتركين متساويين أو كان أحدهما نظيراً جمعياً للآخر.

أنشأ

لماذا $x^2 + 9 \neq 0$ أبداً؟
إجابتي.

أخطاء شائعة:

- قد يخطئ بعض الطلبة عند حل معادلات بين حدودها عامل مشترك بالقسمة على هذا العامل بدلاً من إخراجها. أيقن للطلبة - مع دعم ذلك بمثال - أن هذا الإجراء يؤدي إلى إلغاء الحل الذي يجعل المتغير يساوي صفراً.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفظ الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنشأ من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجهم.

مثال 2

- أوضح للطلبة أنه يمكن حل المعادلات التي أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2 والتي تحتوي أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة التجميع، ثم أذكرهم بشروط تحليل المقدار الجبري بالتجميع التي تعلموها في الصف الثامن، وأقدم لهم أمثلة على ذلك.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2، وأؤكد لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه عند حل المعادلات التي تحتوي أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة التجميع، فإنه إن أمكن كتابة الحدود الجبرية في المعادلة على صورة حاصل ضرب عاملين أحدهما خطي والآخر تربيعي، فإنه يمكن إيجاد جذورها بمساواة كل عامل بالصفر، وحل المعادلات الناتجة.
- أناقش مع الطلبة إجابة السؤال الوارد في صندوق (أفكر) الموجود في هامش الفرع 1 من المثال 2، وأتوصل معهم إلى أن أي معادلة على الصورة $x^2 + c = 0$ ، حيث c عدد حقيقي موجب لا يوجد لها حل؛ لأن المقدار $x^2 + c$ موجب دائماً بصرف النظر عن قيمة x الحقيقية، ويمكنهم التحقق من ذلك بتمثيل مجموعة من منحنيات اقترانات مرتبطة بمعادلات مكتوبة على هذه الصيغة، وملاحظة أن هذه المنحنيات لا تقطع المحور x .
- في الفرع 2 من المثال 2، أذكر الطلبة أن أي معادلة على الصورة $x^2 = c$ ، حيث $c \geq 0$ يمكن حلها بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة، وذلك عند الوصول إلى خطوة حل المعادلة التربيعية $4x^2 - 5 = 0$

مثال إضافي

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

1 $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

$x = \pm 0.5, 1$

2 $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$

$x = \pm 1, \pm 3$

2 $4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$

$4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$

$(4x^3 + 8x^2) + (-5x - 10) = 0$

$4x^2(x + 2) - 5(x + 2) = 0$

$(x + 2)(4x^2 - 5) = 0$

$x + 2 = 0$ or $4x^2 - 5 = 0$

$x = -2$ $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

المعادلة المُعطاة

بتجميع الحدود ذات العوامل المُشتركة

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المُشترك الأكبر

إخراج $(x+2)$ عاملاً مُشترَكًا

خاصية الضرب الصفري

بحل كل المعادلة

إذن، جذور المعادلة $\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, -2$

تحقق من فهمي

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

a) $9x^3 + 18x^2 + 2x + 4 = 0$ $x = -2$

b) $2x^3 + x^2 - 14x - 7 = 0$

b) $x = -\frac{1}{2}, x = \pm \sqrt{7}$

تحليل مجموع مُكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما، وحل معادلتيهما

تعلَّمت سابقاً حالة خاصة من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل الفرق بين مربعين، وتوجد أيضاً حالة خاصة أخرى من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل مجموع مكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما.

تحليل مجموع مُكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما

مفهوم أساسي

تحليل مجموع مُكعَّبين

مثال	بالرموز
$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

تحليل الفرق بين مكعَّبين

مثال	بالرموز
$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

يمكن حلُّ معادلات تحتوي على مجموع مكعَّبين أو على الفرق بينهما باستعمال طرائق التحليل الخاصة بكلٍّ منهما وخاصية الضرب الصفري.

مثال 3

أحلُّ كُلًّا مِنَ المَعَادَلَاتِ الآتية:

1 $8x^3 + 1 = 0$

$$8x^3 + 1 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$(2x)^3 + 1^3 = 0$$

بالكتابة على صورة مجموع مكعَّبين

$$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$$

بتحليل مجموع مكعَّبين

$$2x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = -\frac{1}{2}$$

بحلُّ المُعَادَلَةِ

بما أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ للمُعَادَلَةِ $4x^2 - 2x + 1 = 0$ لأنَّ مميزها سالبٌ، فإنَّ للمُعَادَلَةِ الأصلية جذرًا وحيدًا هو $-\frac{1}{2}$

طريقة بديلة

يمكن حلُّ المُعَادَلَةِ $8x^3 + 1 = 0$ بطريقة أخرى كالآتي:

$$8x^3 + 1 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$8x^3 = -1$$

بطرح 1 من طرفي المُعَادَلَةِ

$$x^3 = -\frac{1}{8}$$

بقسمة طرفي المُعَادَلَةِ على 8

$$x = -\frac{1}{2}$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

2 $x^3 - 125 = 0$

$$x^3 - 125 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$x^3 - 5^3 = 0$$

بالكتابة على صورة الفرق بين مكعَّبين

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$$

بتحليل الفرق بين مكعَّبين

$$x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 5x + 25 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 5$$

بحلُّ المُعَادَلَةِ

بما أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ للمُعَادَلَةِ $x^2 + 5x + 25 = 0$ لأنَّ مميزها سالبٌ، فإنَّ للمُعَادَلَةِ الأصلية جذرًا وحيدًا هو $x = 5$

- أذكر الطلبة بما تعلّموه سابقًا حول تحليل الفرق بين مربعين، ثم أيقن لهم أنه يمكن تحليل مجموع المكعَّبين، والفرق بينهما، وأقِّد لهم القاعدة الخاصة بكل حالة بالرموز بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.

- أيقن للطلبة أنه يمكن حل معادلات تحتوي مجموع مكعَّبين أو فرقًا بين مكعَّبين في أحد طرفيها وصفرًا في طرفها الآخر باستعمال طرائق التحليل التي تعلّموها، إضافة إلى خاصية الضرب الصفري، ثم أناقش الطلبة في حل المثال 3، وأؤكد لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

- إنَّ لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد:

- أناقش مع الطلبة الطريقة البديلة لحل المعادلة في الفرع 1 من المثال 3، والتي تحتاج إلى إعادة ترتيب المعادلة أولًا؛ تمهيدًا لأخذ الجذر التكعيبي لطرفي المعادلة، ثم أطلب إليهم إعادة حل الفرع 2 من المثال باستعمال الطريقة نفسها.

مثال 4

- أوضح للطلبة مفهوم المقدار على الصورة التربيعية، وأقدم لهم صيغته بالرموز، ثم أوضح لهم أنه يمكن حل المعادلات التي تحوي هذا النوع من المقادير في أحد طرفيها وصفرًا في الطرف الآخر باستعمال طرائق التحليل التي تعلموها خلال هذه الوحدة.
- ناقش مع الطلبة حل المعادلة في المثال 4، بطريقتي التحليل، والتعويض، وأبين لهم أننا نحصل على النتيجة نفسها بصرف النظر عن الطريقة التي نحل بها المعادلة.

إرشاد: ناقش مع الطلبة إجابة السؤال الوارد في صندوق (أفكر) الموجود في هامش المثال 4، وأتوصل معهم إلى أنه يمكن حل المعادلة $(x^3 + 5 = 0)$ بتحليل مجموع مكعبين، ثم أطلب إليهم إعادة حلها بهذه الطريقة، والتحقق من أنهم سيحصلون على النتيجة نفسها.

أخطاء شائعة:

ألقت انتباه الطلبة إلى الخطأ الشائع الوارد في هامش المثال 4 الذي يقع فيه بعض الطلبة عند استعمال طريقة التعويض لحل معادلات تحوي مقدارًا جبريًا على الصورة التربيعية، وأؤكد لهم ضرورة إكمال الحل وإيجاد قيمة المتغير الأصلي في المعادلة للحصول على إجابة صحيحة.

$$3 \quad 128x^5 - 54x^2 = 0$$

$$128x^5 - 54x^2 = 0$$

$$2x^2 (64x^3 - 27) = 0$$

$$2x^2 ((4x)^3 - 3^3) = 0$$

$$2x^2 (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) = 0$$

$$2x^2 = 0 \text{ or } 4x-3=0 \text{ or } 16x^2+12x+9=0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{3}{4}$$

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $16x^2 + 12x + 9 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن للمعادلة الأصلية جذرين هما: $0, \frac{3}{4}$

أنتحق من فهمي

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

a) $27x^3 - 1 = 0$

b) $x^3 + 1000 = 0$

c) $16x^4 - 250x = 0$

حل معادلات على الصورة التربيعية

يسمى المقدار الجبري المكتوب على الصورة $au^2 + bu + c$ حيث u مقدار جبري، مقدارًا على **الصورة التربيعية** (quadratic form)، ويمكن استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها سابقًا في حل معادلات تحوي مقادير على الصورة التربيعية.

مثال 4

$$\text{أحل المعادلة: } x^6 - 3x^3 - 40 = 0$$

الطريقة 1: التحليل

$$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$$

$$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$$

$$(x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \text{ or } x^3 + 5 = 0$$

$$x = 2 \quad x = \sqrt[3]{-5}$$

إذن، جذرا المعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

أتذكر

أحلّ أولًا بإخراج العامل المشترك لتسهيل حل المعادلة.

a) $x = \frac{1}{3}$

b) $x = -10$

c) $x = 0, x = \frac{5}{2}$

أفكر

هل يمكن حل المعادلة $x^3 + 5 = 0$ بطريقة أخرى؟ أبرز إجابتي.

الطريقة 2: التعويض

أفترض أن $u = x^3$

المعادلة المُعطاة $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

بكتابة المعادلة على الصورة التربيعية $(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

بتعويض $u = x^3$ $u^2 - 3u - 40 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(u - 8)(u + 5) = 0$

خاصية الضرب الصفري $u - 8 = 0$ or $u + 5 = 0$

بحل كل المعادلة $u = 8$ $u = -5$

بتعويض $x^3 = u$ $x^3 = 8$ $x^3 = -5$

بأخذ الجذر التكعيبي لطرفي كل معادلة $x = 2$ $x = \sqrt[3]{-5}$

إذن، جذرا المعادلة $\sqrt[3]{-5}$ ، 2،

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $x^4 - 625 = 0$ $x = \pm 5$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
 $x = \pm 1, x = \pm \sqrt{2}$

لحل المعادلات التي أس المتغير فيها عدد صحيح أكبر من 2 كثير من التطبيقات الحياتية.



صناعة: تصنع شركة صناديق لحفظ البضائع على شكل مُتوازي مستطيلات، طول كل صندوق يقل 30 cm عن ارتفاعه، وعرضه يقل 90 cm عن ارتفاعه. إذا كان حجم الصندوق 324000 cm^3 ، فأجد أبعاده.

أفترض أن طول الصندوق l ، وعرضه w ، وارتفاعه h ، وحجمه V .

طول الصندوق: $l = h - 30$

عرض الصندوق: $w = h - 90$

خطأ شائع

يخطئ بعض الطلبة بالتوقف عند إيجاد u ، والصحيح إكمال الحل وإيجاد قيمة x التي تحل المعادلة.

• أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 5، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.

• أفترض متغيراً يمثل كل بُعد من أبعاد الصندوق، ثم أطلب إلى أحد الطلبة التعبير عن طول الصندوق وعرضه بدلالة الارتفاع بالاستناد إلى معطيات المسألة، ثم أطلب إلى آخر التعبير عن المسألة بمعادلة وحلها (إيجاد ارتفاع الصندوق)، ثم أكلف أحد الطلبة إيجاد أبعاد الصندوق الأخرى.

✓ **إرشاد:** في المثال 5 أذكر الطلبة بأنه لا يوجد حل حقيقي لأي معادلة على الصورة $x^2 + c = 0$ ، حيث c عدد حقيقي موجب، وهذا يعني أنه لا يوجد حل للمعادلة $h^2 + 2700 = 0$

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (18 - 1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من زميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي السؤال 19 من كتاب الطالب، أدير حوارًا مع الطلبة حول أهمية المشاريع الصغيرة في دعم الأسر الفقيرة وأثرها في تمكين المرأة وتفعيل دورها في المجتمع.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (25 - 22).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

$$V = l \times w \times h$$

حجم مُتوازي المستطيلات

$$324000 = (h - 30)(h - 90)h$$

بتعويض $V = 324000$

$$l = h - 30, w = h - 90$$

$$324000 = h^3 - 120h^2 + 2700h$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$h^3 - 120h^2 + 2700h - 324000 = 0$$

ب طرح 324000 من طرفي المعادلة

$$(h^3 - 120h^2) + (2700h - 324000) = 0$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$h^2(h - 120) + 2700(h - 120) = 0$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$(h - 120)(h^2 + 2700) = 0$$

بإخراج $(h - 120)$ عاملاً مشتركاً

$$h - 120 = 0 \quad \text{or} \quad h^2 + 2700 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$h = 120$$

بحل المعادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $h^2 + 2700 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن ارتفاع الصندوق 120 cm، ومنه فإن طوله 90 cm، وعرضه 30 cm

تحقق من فهمي



$(x - 1)$ cm
 $(x - 2)$ cm
 $(x + 6)$ cm

صناعة: تصنع شركة صناديق لجهاز إلكتروني على شكل مُتوازي مستطيلات، أبعادها كما هو مبين في الشكل المجاور.

إذا كان حجم الصندوق 60 cm^3 ، فأجد أبعاده. الطول 10 cm، العرض 2 cm، الارتفاع 3 cm

أَتَدْرِبُ وَأَحِلُّ الْمَسَائِلَ

أحل كلًا من المعادلات الآتية:

$$1 \quad 3x^4 - 12x^3 = 0 \quad x = 0, x = 4$$

$$2 \quad 35x^3 - 28x^2 - 7x = 0 \quad x = 0, x = -\frac{1}{5}, x = 1$$

$$3 \quad 6x^6 - 3x^4 - 9x^2 = 0 \quad x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$4 \quad 2x^3 + 4x^2 + 2x = 0 \quad x = 0, x = -1$$

$$5 \quad 3x^3 = 12x \quad x = 0, x = \pm 2$$

$$6 \quad x^3 + 4x^2 + 4x = 0 \quad x = 0, x = -2$$

$$7 \quad 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0 \quad x = \frac{3}{2}, x = \pm\sqrt{2}$$

$$8 \quad 10x^3 - 15x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$9 \quad x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \quad x = 3$$

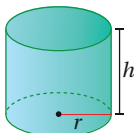
إرشادات:

- في السؤال 22 (أكتشف الخطأ)، أوجه الطلبة إلى إعادة حل المعادلة ومقارنة حلهم بحل نداء لاكتشاف الخطأ.
- في السؤال 25 (تبرير)، ألفت انتباه الطلبة إلى أن $x = 0$ هو أحد حلول المعادلة؛ لذا فإنه يجب أن يكون للمقدار التربيعي الناتج بعد إخراج x عاملاً مشتركاً حل واحد فقط؛ وهذا يعني بالضرورة أن يساوي مميزه صفراً.

- 10 $125x^3 - 1 = 0$ $x = \frac{1}{5}$ 11 $3x^3 + 3000 = 0$ $x = -10$ 12 $x^4 + x^3 - 12x - 12 = 0$
 $x = -1, x = \sqrt[3]{12}$ 13 $5x^3 - 320 = 0$ $x = 4$ 14 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 $x = \pm 1, x = \pm 2$ 15 $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$
 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x = \pm 2$ 16 $4x^4 + 20x^2 = -25$ لا توجد حلول حقيقية. 17 $16x^4 - 81 = 0$
 $x = \pm \frac{3}{2}$ 18 $5w^6 - 25w^3 + 30 = 0$
 $w = \sqrt[3]{3}, w = \sqrt[3]{2}$



19 **مشاريع صغيرة:** يمثل الاقتران $R(t) = t^3 - 8t^2 + t + 15$ الإيراد السنوي (بالآلاف دينار) لمشروع غيداء الصغير بعد t عامًا من إنشائه. بعد كم سنة يصل إيراد غيداء إلى 23 ألف دينار؟ $t = 8$ years



20 **هندسة:** يبين الشكل المجاور أسطوانة حجمها $25\pi h$ cm³. إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة يقل عن ارتفاعها بمقدار 3 cm، فأجد أبعادها. $h = 8$ cm, $r = 5$ cm

21 **أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.** الطول 16 cm، العرض 6 cm، الارتفاع 12 cm

أو العرض 16 cm، والطول 36 cm، والارتفاع 2 cm، ولكن الأبعاد الأولى هي الأرجح والأنسب لسياق المسألة.



مهارات التفكير العليا

22 **اكتشف الخطأ:** حلت نداء المعادلة $2x^4 - 18x^2 = 0$ ، كما هو مبين أدناه. اكتشف الخطأ في حلها وأصححه.

إجابة ممكنة: قسّمت نداء طرفي المعادلة على x^2 ، وفي هذه الحالة لا يظهر الجذر $x = 0$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 18x^2 &= 0 \\ 2x^2(x^2 - 9) &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (x+3)(x-3) &= 0 \\ x = -3 \text{ or } x = 3 \end{aligned}$$

تحذّر: أحلّ المعادلتين الآتيتين، وأبرّر إجابتين:

- 23 $x^6 + 4x^3 = 2$ $x = -1.645, x = 0.766$ 24 $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) = 3$
 $x = 0, x = \pm 2$

25 **تبرير:** أجد قيمة العدد w التي تجعل للمعادلة $5x^3 + wx^2 + 80x = 0$ حلين حقيقيين فقط، وأبرّر إجابتين. $x = 0$ هو أحد الحلول الحقيقية للمعادلة، ولكي يكون للمعادلة حلان حقيقيان فقط يجب أن يكون للمقدار التربيعي بعد إخراج x عاملاً مشتركاً حل واحد فقط؛ وهذا يعني بالضرورة أن يساوي ممیزه صفراً. $\Delta = w^2 - 1600 = 0, w = \pm 40$

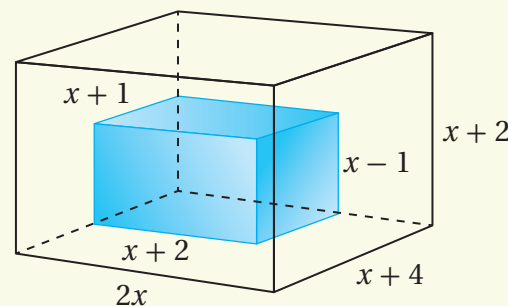
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 19, 22 كتاب التمارين: (1 - 16) فردي
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (20 - 22) كتاب التمارين: (1 - 16) زوجي
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 20, (22 - 25) كتاب التمارين: 8, 9, (14 - 18)

أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« وُضع صندوق صغير داخل صندوق كبير أبعاد كل منهما موضحة في الشكل أدناه. إذا كان حجم الفراغ داخل الصندوق الكبير وخارج الصندوق الصغير يُعطى بالعلاقة $33x + 162$ وحدة مكعبة، فأجد حجم كل من الصندوق الكبير والصندوق الصغير.



$$x = 4$$

حجم الصندوق الصغير 90 وحدة مكعبة.
حجم الصندوق الكبير 384 وحدة مكعبة.

تعليمات المشروع:

أذكر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعين عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكد أن عناصر المشروع كافة متوافرة يوم العرض.

أطلب إلى كل طالب/ طالبة اختيار فكرة فهمها/ فهمتها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها/ تفهمها جيداً، وكتابة سؤال عنها في ورقة.

أطلب إلى كل طالب/ طالبة تسليمي الورقة.

بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، أخطّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي أرصدها.

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بيانيًا:

- 6 $-x^2 + 7x - 12 = 0$ (6-10) أنظر الهامش.
7 $x^2 - 8x + 16 = 0$
8 $-x^2 - 6x = 9$
9 $3x^2 - 27 = 0$
10 $x^2 + 6x = -8$

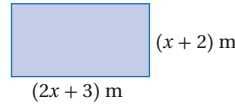
أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ:

- 11 $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x = -2, x = 5$
12 $x^2 - 8x + 15 = 0$ $x = 3, x = 5$
13 $m^2 + 10m + 25 = 0$ $m = -5$
14 $25t^2 - 49 = 0$ $t = \pm \frac{7}{5}$
15 $12x^2 - 16x - 35 = 0$ $x = -\frac{7}{6}, x = \frac{5}{2}$
16 $10x^2 - x = 2$ $x = -\frac{2}{5}, x = \frac{1}{2}$
17 $25x^2 = 10 - 45x$ $x = \frac{1}{5}, x = -2$

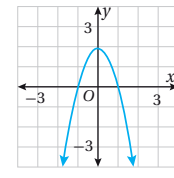


18 يمثل الاقتران $h(t) = -16t^2 + 8t$ ارتفاع جُنْدَبٍ بالقدم بعد t ثانية من قفزه. بعد كم ثانية يصل إلى ارتفاع 1 ft عن سطح الأرض؟
 $t = \frac{1}{4}$

19 يبيّن الشكل الآتي مستطيلًا مساحته 91 m^2 . أجد أبعاده.
الطول 13 m، العرض 7 m



أختار رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلِّ ممّا يأتي:



1 أي ممّا يأتي يمثّل أحد حلول المُعادلة التربيعية في الشكل المُجاور؟

- a) 1 b) 2
c) 0 d) 3

2 جذرا المُعادلة $3x^2 - 48 = 0$ ، هما:

- a) -2, 2 b) -4, 4
c) -16, 16 d) 6, -6

3 جذرا المُعادلة $x^2 - 17x + 42 = 0$ ، هما:

- a) 1, 42 b) 2, 21
c) 3, 14 d) 6, 7

4 جذرا المُعادلة $2x^2 - x - 3 = 0$ ، هما:

- a) $-\frac{2}{3}, 1$ b) $\frac{2}{3}, -1$
c) $-\frac{3}{2}, 1$ d) $\frac{3}{2}, -1$

5 أي المقادير الجبرية الآتية ليس مُربّعًا كاملاً؟

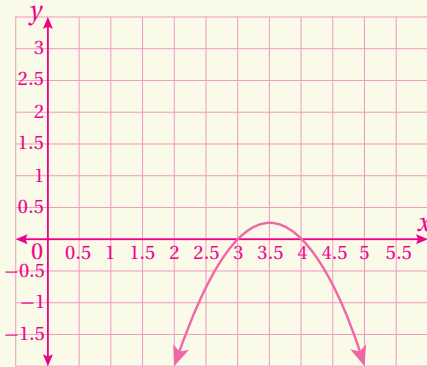
- a) $x^2 - 26x + 169$
b) $x^2 + 32x + 256$
c) $x^2 + 30x - 225$
d) $x^2 - 44x + 484$

اختبار نهاية الوحدة:

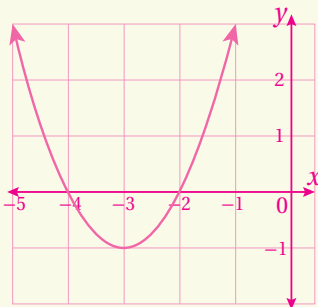
- أطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة (1-19) فرديًا، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعًا في حلّ بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حلّ المسائل (20-45)، وأتجوّل بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلّها؛ لمناقشتها على اللوح.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

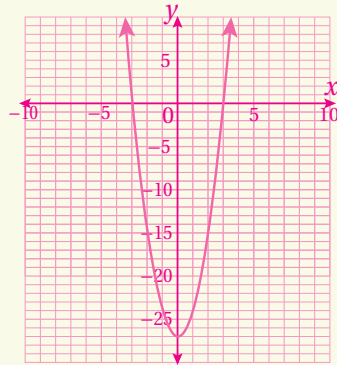
6 للمعادلة جذران، هما: 3, 4



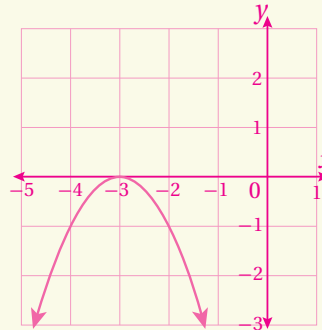
10 للمعادلة جذران، هما: -2, -4



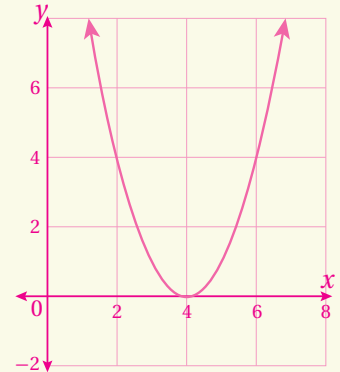
9 للمعادلة جذران، هما: 3 ±



8 للمعادلة جذر واحد، هو: -3



7 للمعادلة جذر واحد، هو: 4



اختبار نهاية الوحدة

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بالقانون العامّ، مقربًا إجابتي

لأقرب جزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

36 $5x^2 + 2x - 1 = 0$ $x \approx 0.3, x \approx -0.7$
 37 $7x^2 + 12x = -2$ $x \approx -0.2, x \approx -1.5$
 38 $3x^2 + 11x = -9$ $x \approx -1.2, x \approx -2.4$

أحلّ كُلَّ مُعادَلَةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، وأبرزُ سببَ اختيارِ الطريقةِ: (39-41) أنظر الهامش.

39 $2x^2 + 7x = 0$ 40 $4x^2 + 8x - 5 = 0$
 41 $x^2 - 2x = 5$

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ:

42 $3x^4 = 27x^2$ $x = 0, x = \pm 3$
 43 $x^3 + x^2 = 4x + 4$ $x = -1, x = \pm 2$
 44 $2x^3 + 3x^2 = 8x + 12$ $x = -\frac{3}{2}, \pm 2$
 45 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

تدريب على الاختبارات الدولية

46 أيُّ قيمِ c الآتية تجعلُ المُعادَلَة $5x^2 + c = 10$ دونَ حلٍّ؟
 a) 12 b) 5 c) 9 d) 1

47 أيُّ ممَّا يأتي يُعدُّ عاملاً لثلاثي الحدودِ $13x^2 + 32x - 21$ ؟

a) $13x + 3$ b) $13x + 7$
 c) $13x + 21$ d) $13x - 7$

48 أيُّ ممَّا يأتي يجعلُ المقدارَ $x^2 + 14x$ عندَ إضافتيه مُربعًا كاملاً؟

a) 7 b) 49 c) 14 d) 196

49 عددُ الحلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادَلَة $x^2 + 7x = -11$ ، هو:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

أحلّ كُلًّا ممَّا يأتي:

20 $2x^2 + 13x + 20$ 21 $7y^2 + 16y - 15$
 22 $2t^2 - t - 3$ 23 $8y^2 - 10y - 3$
 24 $2q^2 - 11q - 21$ 25 $10w^2 + 11w - 8$
 (2x+5)(x+4) (7y-5)(y+3)
 (2t-3)(t+1) (4y+1)(2y-3)
 (2q+3)(q-7) (5w+8)(2w-1)



26 يُمثِّلُ الاقتِرانُ $h(t) = -5t^2 + 30t$ ارتفاعَ صاروخٍ نارِيٍّ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةٍ مِنْ إطلاقِهِ. بعدَ كمَّ ثانيةٍ مِنْ إطلاقِهِ يصلُ الصاروخُ إلى الأرضِ؟ $t = 6$

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُربَّعِ، تاركًا الإجابةَ بدلالةِ الجذرِ التربيعيِّ:

27 $x^2 + 6x + 7 = 0$ $x = -3 \pm \sqrt{2}$
 28 $x^2 - 3x - 1 = 0$ $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$
 29 $x^2 - 9x + 10 = 0$ $x = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$
 30 $x^2 - 2x - 7 = 0$ $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$



31 فناءٌ منزلٍ على شكلِ مُستطيلٍ يزيدُ طولُهُ على عَرْضِهِ بمقدارِ 6 m، ومساحَتُهُ 216 m^2 . أجدُ أبعادهُ، باستعمالِ إكمالِ المُربَّعِ. الطول 18، العرض 12

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُربَّعِ، مقربًا إجابتي لأقرب جزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

$x = -2, x = 12$ $x \approx 0.6, x \approx -1.6$
 32 $x^2 - 10x = 24$ 33 $x^2 + x - 1 = 0$
 34 $2x^2 + 20x - 10 = 0$ 35 $3x^2 - 6x - 9 = 0$
 $x \approx 0.5, x \approx -10.5$ $x = 3, x = -1$

تدريب على الاختبارات الدولية:

• أعرفُ الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبين لهم أهميتها، ثم أوجههم إلى حلّ الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فرديًا، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.

• أشجّع الطلبة على الاهتمام بحلّ مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكلّ جدّية، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

(39) أحلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل؛ لأن الحد الثابت يساوي صفرًا.

جذرا المعادلة هما: $0, -\frac{7}{2}$

(40) أحلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل؛ لسهولة تحليل الطرف الأيسر.

جذرا المعادلة هما: $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

(41) أحلها باستعمال طريقة إكمال مربع؛ لأن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x زوجي.

جذرا المعادلة هما: $1 \pm \sqrt{6}$

كتاب التمارين

الوحدة 3: حلّ المعادلات

أستعدّ لدراسة الوحدة

مثال: أحلّ المقدار $16x^2 - 25$

بكتابة المقدار على صورة فرق بين مربعين
بتحليل الفرق بين مربعين

$$16x^2 - 25 = (4x)^2 - (5)^2$$
$$= (4x - 5)(4x + 5)$$

حلّ المعادلات باستعمال الجذر التربيعي (الدرس 2)

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحة الحلّ:

$$10 \quad y^2 = 2.25 \pm 1.5$$
$$12 \quad t^2 = \frac{64}{100} \pm \frac{8}{10}$$

$$11 \quad x^2 = \frac{16}{169} \pm \frac{4}{13}$$
$$13 \quad y^2 = 0.0144 \pm 0.12$$

مثال: أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحة الحلّ:

a) $x^2 = 144$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

عندما $x = -12$

$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$

$144 = 144 \quad \checkmark$

عندما $x = 12$

$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$

$144 = 144 \quad \checkmark$

b) $t^2 = \frac{1}{36}$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

عندما $t = \frac{1}{6}$

$(\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$

عندما $t = -\frac{1}{6}$

$(-\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$

28

الوحدة 3: حلّ المعادلات

أستعدّ لدراسة الوحدة

أخيرُ معلوماتي بحلّ التدريبات أولاً، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة، أستعين بالمثال المُعطى.

التحليل بإخراج العامل المشترك (الدرس 2)

أحلّ كلّ مقدار جبريّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $3x + 21 \quad 3(x + 7)$

2 $6x - 14 \quad x^2(3 - 7x)$

3 $5x^3 - 10x^2 + 25x \quad 5x(x^2 - 2x + 5)$

مثال: أحلّ المقدار $36x^2 + 54x$ تحليلًا كاملاً

الخطوة 1: أجد العامل المشترك الأكبر للحدّين $36x^2$ و $54x$

أحلّ كلّ حدّ إلى عوامله الأولية، وأحدّد العوامل الأولية المشتركة.

$36x^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times x \times x$
 $54x = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times x$

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $18x = 2 \times 3 \times 3 \times x$

الخطوة 2: أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$36x^2 + 54x = 18x(2x + 3)$$

تحليل ثلاثيّ الحدود $x^2 + bx + c$ (الدرس 2)

أحلّ كلّاً ممّا يأتي:

4 $x^2 + 2x - 24 \quad (x - 4)(x + 6)$

5 $x^2 + 16x + 28 \quad (x + 2)(x + 14)$

6 $x^2 - 22x + 72 \quad (x - 4)(x - 18)$

مثال: أحلّ المقدار $x^2 - 10x + 16$

بكتابة القاعدة

بتعويض $m = -2, n = -8$

$$x^2 - 10x + 16 = (x + m)(x + n)$$
$$= (x - 2)(x - 8)$$

تحليل الفرق بين مربعين (الدرس 2)

أحلّ كلّاً ممّا يأتي:

7 $x^2 - 64 \quad (x - 8)(x + 8)$

8 $4x^2 - 100 \quad (2x - 10)(2x + 10)$

9 $64x^2 - 1 \quad (8x - 1)(8x + 1)$

27

الوحدة 3: حلّ المعادلات

أستعدّ لدراسة الوحدة

أتحقّق من صحة الحلّ:

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$(-\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$

عندما $x = \frac{1}{6}$

$(\frac{1}{6})^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$

ضرب المقادير الجبريّة (الدرس 3)

أجد ناتج ضرب كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

14 $(x - 3)(x + 5) \quad x^2 + 2x - 15$

15 $(12 - 4x)(1 + 2x) \quad -8x^2 + 20x + 12$

16 $(2x - 5)(4x - 8x^2) \quad -16x^2 + 48x^2 - 20x$

17 $(3x + 4)^2 \quad 9x^2 + 24x + 16$

18 $(x^2 + 7)^2 \quad x^4 + 14x^2 + 49$

19 $(3x - 1)(3x + 1) \quad 9x^2 - 1$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x + 1)(3x - 4)$ بأبسط صورة:

بفصل المقدار $(2x + 1)$ إلى حدّين، ثمّ ضرب كلّ منهما في $(3x - 4)$

باستعمال خاصيّة التوزيع

بتجميع الحدود المتشابهة

$$(2x + 1)(3x - 4) = 2x(3x - 4) + 1(3x - 4)$$
$$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$$
$$= 6x^2 - 5x - 4$$

التحليل بالتجميع (الدرس 6)

أحلّ كلّ مقدار جبريّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

20 $5x^3 - 15x^2 + 4x - 12 \quad 5x^2(x - 3) + 4(x - 3) = (x - 3)(5x^2 + 4)$

21 $5x - 10x^2 + 2y - 4xy \quad 5x(1 - 2x) + 2y(1 - 2x) = (1 - 2x)(5x + 2y)$

مثال: أحلّ المقدار $4xy + 8y + 3x + 6$ تحليلًا كاملاً.

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

بتحليل كلّ تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

بإخراج $(x + 2)$ عاملاً مشتركاً

$$4xy + 8y + 3x + 6 = (4xy + 8y) + (3x + 6)$$
$$= 4y(x + 2) + 3(x + 2)$$
$$= (x + 2)(4y + 3)$$

29

155A

كتاب التمارين

الدرس 2

حلّ المُعادلات التربيعيّة بالتّحليل (1)

Solving Quadratic Equations by Factoring (1)

أحلّ المُعادلات الآتية بالتّحليل:

- $9m^2 - 18m = 0$ $m = 0, 2$
- $x^2 + 11x + 18 = 0$ $x = -2, -9$
- $x^2 - 6x + 8 = 0$ $x = 4, 2$
- $x^2 - 2x - 15 = 0$ $x = -3, 5$
- $x^2 + 10x = -24$ $x = -6, -4$
- $a^2 - 14a + 49 = 0$ $a = 7$
- $16t^2 - 1 = 0$ $t = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$
- $(2x - 1)^2 = 81$ $x = 5, -4$
- $4(x - 2)^2 = 25$ $x = \frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$
- $t^2 + 4t - 12 = 0$ $t = -6, 2$
- $x^2 + 4x + 4 = 0$ $x = -2$
- $27 - 3y^2 = 0$ $y = -3, 3$

13 هندسة: يبيّن الشكل المُجاوِر مُستطيلاً مساحته 44 cm^2 . أجد أبعاده.

الطول 11، العرض 4

14 أجد عدديّن زوجيّين متتاليّين حاصل ضربيهما 168 العدد الأوّل 12، العدد الثاني 14 أو العدد الأوّل -12، العدد الثاني -14

15 يبيّن الشكل المُجاوِر متوازيّ مُستطيلات طوله يُساوي 4 أمثال عرضه، وحجمه 320 m^3 . أجد طوله وعرضه.

العرض 4، الطول 16

16 أكتشف الخطأ: حلّ عامر المُعادلة التربيعيّة $2x^2 - 33 = 39$ ، كما هو مبين أدناه. أكتشف الخطأ في حلّه، وأصحّحه.

الخطأ في حل عامر أنه عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة $x^2 = 36$ اكتفى بالحل $x = 6$ للمعادلة وأهمل $x = -6$ والصواب أن تكون حلول المعادلة $x = \pm 6$

31

الدرس 1

حلّ المُعادلات التربيعيّة بيانيّاً

Solving Quadratic Equations by Graphing

أحلّ كُلّ مُعادلات الآتية بيانيّاً:

- للمعادلة جذران، هما: -3، -4 $x^2 + 7x + 12 = 0$
- للمعادلة جذران، هما: -3، 4 $x^2 - x - 12 = 0$
- للمعادلة جذران، هما: 1، 5 $x^2 - 4x - 5 = 0$
- للمعادلة جذران، هما: 2، 5 $x^2 - 7x = -10$
- للمعادلة جذر واحد، هو: 1 $x^2 - 2x = -1$
- للمعادلة جذران، هما: -2، -4 $x^2 + 6x = -8$

أعداد: عدنان صحيان مجموعتهما 2، وحاصل ضربيهما -8. يمكن استعمال المعادلة $-x^2 + 2x + 8 = 0$ لتحديد هذين العددين.

7 أمثل الاقتران المُربّط بالمعادلة $0 = x^2 + 2x + 8$ بيانيّاً.

8 استعمل التمثيل البياني لإيجاد العددين: -2، 4

9 اختيار من متعدّد: أيّ مما يأتي يُعدّ التمثيل البيانيّ لُمُنْحَى الاقتران المُربّط بالمعادلة $x^2 = -4x + 12$ ؟

a)

b)

c)

d)

30

الدرس 3

حلّ المُعادلات التربيعيّة بالتّحليل (2)

Solving Quadratic Equations by Factoring (2)

أحلّ كُلّ مُعادلات الآتية بالتّحليل:

- $3n^2 + 5n - 2$ $(3n - 1)(n + 2)$
- $2x^2 + 3x + 1$ $(2x + 1)(x + 1)$
- $3x^2 - x - 2$ $(3x + 2)(x - 1)$
- $5b^2 - 13b + 6$ $(5b - 3)(b - 2)$
- $30x^2 - 25x - 30$ $5(3x + 2)(2x - 3)$
- $21x^2 + 2x - 3$ $(7x + 3)(3x - 1)$
- $3x^2 + 8x - 3 = 0$ $x = \frac{1}{3}, -3$
- $3t^2 - 14t + 8 = 0$ $t = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$
- $6x^2 - 5x - 4 = 0$ $x = \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}$
- $24x^2 - 19x + 2 = 0$ $x = \frac{1}{8}, \frac{2}{3}$
- $15k^2 + 4k - 35 = 0$ $k = \frac{7}{5}, -\frac{5}{3}$
- $6x^2 + 30 = 5 - 3x^2 - 30x$ $x = -\frac{5}{3}$
- $2k^2 - 5k - 18 = 0$ $k = \frac{9}{2}, -2$
- $12m^2 + 11m = 15$ $m = -\frac{5}{3}, \frac{3}{4}$
- $40n^2 - 70n + 15 = 0$ $n = \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

هندسة: اعتمد الشكل المُجاوِر، وأحلّ السؤالين تيّاراً:

16 أجد مساحة المُستطيل المُجاوِر بدلالة x . $A = 2x^2 + 6x + 4$

17 إذا كانت مساحة المُستطيل 40 وحادٍ مربع، فأجد قيمة x . $x = 3$

18 رياضة: إذا كان الاقتران $h(t) = -16t^2 + 8t + 24$ يمثّل ارتفاع غطاس بالأقدام فوق سطح الماء، بعد t ثانية من قفزه عن منتصف القفز، فما الزمن الذي يستغرقه للوصول إلى سطح الماء؟ $t = \frac{3}{2} \text{ min}$

19 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحلّ الآتي، وأصحّحه.

الخطأ في إخراج العامل المشترك. والصواب هو:

$2(x^2 - x - 12) = 2(x - 4)(x + 3)$

$2x^2 - 2x - 24 = 2(x^2 - x - 12)$

$= 2(x - 6)(x + 4)$

32

كتاب التمارين

الدرس 4

حلُّ المُعادلات التربيعية بإكمال المربع Solving Quadratic Equations by Completing the Square

أجمل كل مقدار مما يأتي مُرتبًا كاملاً، ثمّ احلّ المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

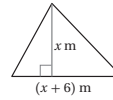
- $x^2 - 9x$
- $x^2 + 10x$
- $x^2 + 13x$
- $x^2 - 18x$
- $x^2 - \frac{1}{2}x$
- $x^2 + 5x$
- $x^2 - 10x + 25 = (x+5)^2$
- $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = (x - \frac{1}{4})^2$
- $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = (x + \frac{5}{2})^2$
- $x^2 + 2x - 7 = 0$
- $x^2 - 5x = 0.5$
- $5x^2 + 20x = 10$
- $x^2 - 11x = 0$
- $x \approx -0.1, x \approx 5.1$
- $4x = x^2 - 4x - 32$
- $x \approx 10.9, x \approx -2.9$

أحلّ المُعادلات الآتية بإكمال المربع، وأقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

- تبيّن البطاقات الآتية خطوات حلّ المُعادلة $x^2 + 6x + 7 = 0$ بطريقة إكمال المربع. أرتب هذه البطاقات من الخطوة الأولى في الحلّ إلى الخطوة الأخيرة.

أجمع 9 لطرفي المعادلة.

الخطوة 2



أطرح 7 من طرفي المعادلة.

الخطوة 1

أكتب $x^2 + 6x + 9 = 2 + 9$ على صورة $(x+3)^2 = 2 + 9$

الخطوة 3

أأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

الخطوة 4

- هندسة: بيّن الشكل المُجاور مثلثاً مساحته 108 m^2 . أجد قيمة x ، وأقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة: $x = 12 \text{ m}$

- حديقة: حديقة زهورٍ مستطيلة الشكل طولها 9 m وعرضها 6 m ، مُحاطة بِمَسَرٍّ عرضُه $x \text{ m}$. إذا كانت مساحتها مُساوية لمساحة الممرّ، فأجد عرض الممرّ: $x = 1.5 \text{ m}$

33

الدرس 5

حلُّ المُعادلات التربيعية باستعمال القانون العام Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

أحلّ المُعادلات الآتية بالقانون العام، وأقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

- $x^2 + 3x - 3 = 0$
- $x^2 - 43x = -6$
- $4x^2 - 20x = -25$
- $x \approx 0.8, x \approx -3.8$
- $x \approx 42.9, x \approx 0.1$
- $x = 2.5$
- $5x + 6 - x^2 = 0$
- $-6x - x^2 = 9$
- $-2x^2 + 3x = -4$
- $x = 6, x = -1$
- $x = -3$
- $x \approx -0.9, x \approx 2.4$
- $3x^2 - 5 + 14x = 0$
- $2x^2 - 5x = 11$
- $7 - 4x^2 = 16x$
- $x = -5, x = \frac{1}{3}$
- $x \approx -1.4, x \approx 3.9$
- $x \approx -4.4, x \approx 0.4$

أحلّ كل مُعادلةٍ مما يأتي باستعمال أيّ طريقة، وأبرز سبب اختيار الطريقة: (10-15) أنظر الهامش.

- $x^2 + 3x + 2 = 2$
- $x^2 - 9 = 0$
- $x^2 - 5x - 7 = 0$
- $x^2 - 6x = 0$
- $(x - 4)^2 = 13$
- $x^2 + 10x = 1$

- أرضيات: أرضية على شكلٍ مُتوازي أضلاع طولُ قاعدتيه $m(5x - 2)$ ، وارتفاعُه $m(3x + 1)$. إذا كانت مساحة الأرضية 130 m^2 ، فما طولُ قاعدة المُتوازي وما ارتفاعُه؟ $x = 3$ ، طول القاعدة 13 m ، الارتفاع 10 m

استعمل المساحة المُعطاة في كلّ مما يأتي لأجد قيمة x ، وأقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة:

- $A = 150 \text{ cm}^2$ $x = 7$
- $A = 45 \text{ cm}^2$ $x = 4$

- أكتشف الخطأ: حلّ كريمة معادلةً تربيعية باستعمال القانون العام كما هو مُبيّن أدناه. أكتشف الخطأ في حلّ كريمة، وأصحّحه.

الخطأ في حل كريمة أنه عند تعويضه عن b بالعدد (-7) في القانون العام لم يجعل $(-b)$ تساوي 7، وفي حال التعويض الصحيح أن يكون جذرا المعادلة: $3, -\frac{2}{3}$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ or } x = -3$$

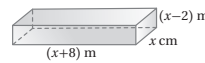
34

الدرس 6

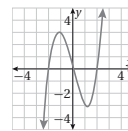
حلُّ مُعادلات خاصة Solving Special Equations

أحلّ المُعادلات الآتية:

- $24x^3 + 18x^2 = 0$
- $x^3 - 2x^2 - 24x = 0$
- $3x^3 = 192x^3$
- $2x^3 - 20x^2 + 5x - 50 = 0$
- $x^3 - 5x^2 + 6x = 30$
- $16x^3 + 32x^2 - x - 2 = 0$
- $x^3 + 512 = 0$
- $3x^3 - 192x^3 = 0$
- $3x + 1 = x^2 + 3x^3$
- $2x^3 + 2x^2 - 144x^3 = 0$
- $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$
- $16x^4 - 81 = 0$
- $4x^3 - 32x^2 + 48x^2 = 0$
- $4x^3 - 7x^2 - 16x + 28 = 0$
- $4x^4 - 25 = 0$



- هندسة: بيّن الشكل المُجاور مُتوازي مستطيلات حجمه 96 m^3 . أجد أبعادَه: $x = 4$ ، الطول: 12 m ، العرض: 4 m ، الارتفاع: 2 m



- أكتب مُعادلة مُرتبطة بِمُنحنى الاقتران المُتمثّل بيانيًا في الشكل المُجاور، وأبرز إجابتني. توجد ثلاثة جذور للمعادلة هي: $x = 2, x = -2, x = 0$. يجب أن يكون تحليل المعادلة على $(x-2)(x+2) = 0$ ، ومنه فإن صيغة المعادلة يمكن أن تكون: $x^3 - 4x = 0$



- حوض أسماك: بيّن الشكل المُجاور حوضًا للأسماك على شكل مُتوازي مستطيلات حجمه 12 dm^3 . أجد أبعادَه: الطول 6 dm ، العرض 1 dm ، الارتفاع 2 dm

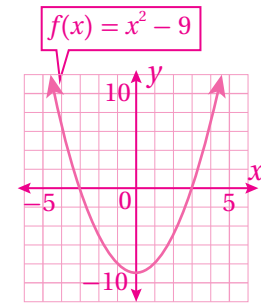
35

إجابة الأسئلة في كتاب التمارين (الدرس 5):

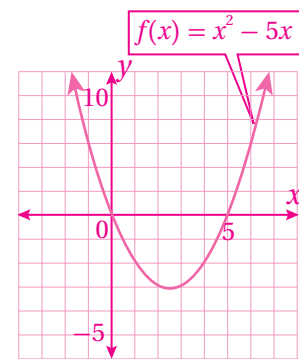
- أحلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل؛ لأن الحد الثابت يساوي صفراً بعد إعادة كتابة المعادلة بالصورة القياسية. جذرا المعادلة هما: $0, -3$
- أحلها باستعمال الجذور التربيعية؛ لأن الحد bx غير موجود. جذرا المعادلة هما: ± 3
- أحلها باستعمال القانون العام؛ لأن معامل x فردي، ولا يمكن تحليلها إلى العوامل. جذرا المعادلة هما: $-1.1, 6.1$
- أحلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل؛ لأن الحد الثابت يساوي صفراً. جذرا المعادلة هما: $0, 6$
- أحلها باستعمال الجذور التربيعية؛ لأن المعادلة مكتوبة على الصورة $(x+a)^2 = c$ ، حيث $c \geq 0$ جذرا المعادلة هما: $0.4, 7.6$
- أحلها باستعمال طريقة إكمال مربع؛ لأن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x زوجي. جذرا المعادلة هما: $-10.1, 0.1$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

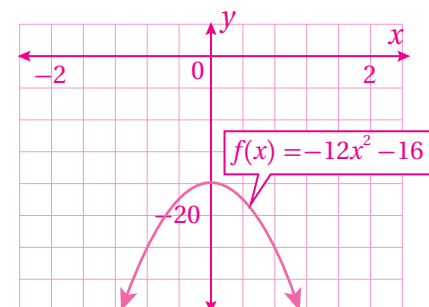
(1) للمعادلة جذران، هما: 3, -3



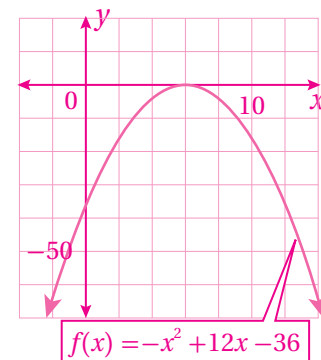
(2) للمعادلة جذران، هما: 0, 5



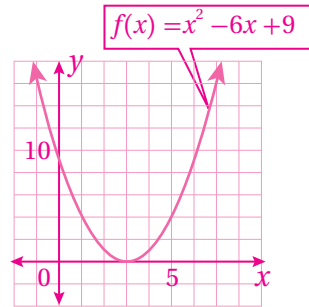
(3) لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة.



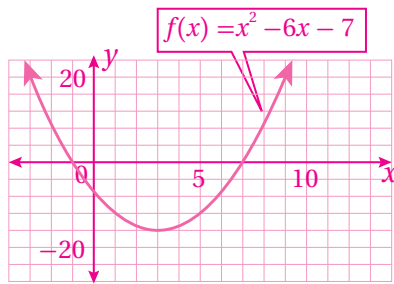
(4) للمعادلة جذر وحيد، هو: 6



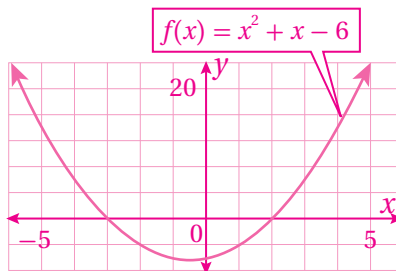
(5) للمعادلة جذر وحيد، هو: 3



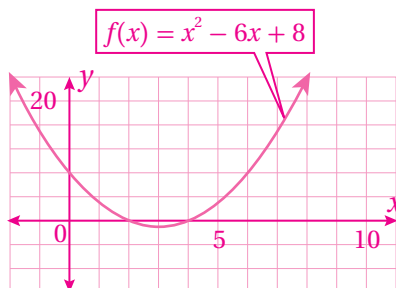
(6) للمعادلة جذران، هما: -1, 7



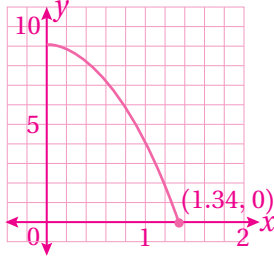
(7) للمعادلة جذران، هما: -3, 2



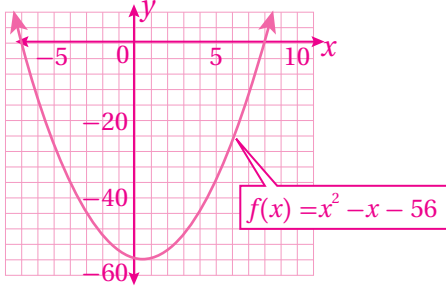
(8) للمعادلة جذران، هما: 2, 4



16) 1.34 s



18)



$$(x+2)(x-3) = 50$$

$$x^2 - x - 56 = 0$$

جذرا المعادلة هما: 8، -7، ولكن قيمة x التي تحقق مساحة المستطيل هي 8؛ لأن تعويض -7 في أبعاد المستطيل يعطي قيمًا سالبة، ولا يمكن أن يكون الطول سالبًا.

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

(25) بما أن المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين، ومنه فإن:

$$(2x + 3)^2 + (x + 1)^2 = (5x - 1)^2$$

بالتبسيط ينتج أن:

$$20x^2 - 24x - 9 = 0$$

(26) أجد قيمة x بحل المعادلة من السؤال السابق:

$$20x^2 - 24x - 9 = 0$$

$$(10x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{3}{10}, x = \frac{3}{2}$$

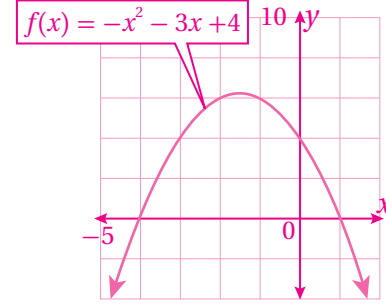
جذرا المعادلة هما: $\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{10}$ ، ولكن قيمة x التي تحقق مساحة المثلث

هي $\frac{3}{2}$ ؛ لأن تعويض $-\frac{3}{10}$ في وتر المثلث يعطي قيمة سالبة، ولا يمكن

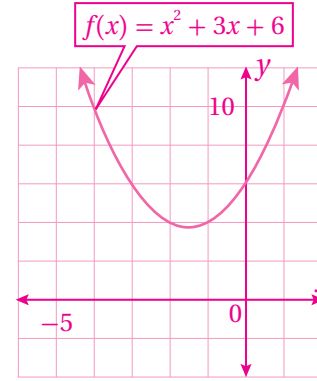
أن يكون الطول سالبًا.

إذن، مساحة المثلث $\frac{15}{2}$ وحدة مربعة.

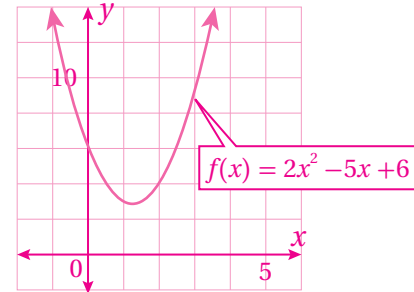
(9) للمعادلة جذران، هما: 1، -4،



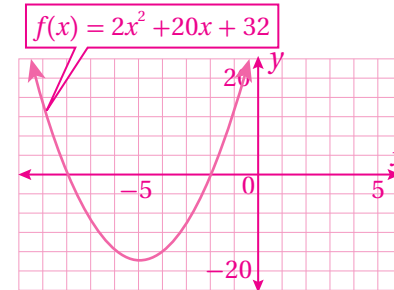
(10) لا توجد للمعادلة جذور حقيقية.



(11) لا توجد للمعادلة جذور حقيقية.



(12) للمعادلة جذران، هما: -2، -8،





مُخطّط الوحدة



عدد الحصص	الأدوات اللازمة	المصطلحات	النتائج	اسم الدرس
4	• لوح رسم بياني للمستوى الإحداثي. • آلة حاسبة.	• المسافة. • الإحداثي. • نقطة المنتصف.	• تعرّف مفهوم المسافة بين نقطتين على خط الأعداد. • إيجاد المسافة بين نقطتين على خط الأعداد. • استنتاج قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي باستعمال نظرية فيثاغورس. • إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي. • توظيف قانون المسافة بين نقطتين في حل مسائل رياضية. • تعرّف مفهوم نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة. • إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد. • إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي. • توظيف إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.	الدرس 1: المسافة في المستوى الإحداثي
4	• لوح رسم بياني للمستوى الإحداثي. • آلة حاسبة. • ورقة المصادر 12		• تمييز قانون البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي. • إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي. • إيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي. • توظيف قانون البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.	الدرس 2: المسافة بين نقطة ومستقيم
4	• لوح رسم بياني للمستوى الإحداثي. • آلة حاسبة. • ورقة المصادر 11 • ورقة المصادر 12	البرهان الإحداثي.	• رسم مضلع في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثياته بدلالة أطوال أضلاعه المعطاة بصورة متغيرات. • إيجاد إحداثيات رؤوس مضلعات مرسومة في مستوى إحداثي غير مدرج بدلالة إحداثيات رؤوس أخرى معطاة بصورة متغيرات. • تعرّف البرهان الإحداثي، وتوظيفه لبرهنة نظريات هندسية. • تصنيف الأشكال الرباعية باستعمال البرهان الإحداثي.	الدرس 3: البرهان الإحداثي
1	عرض نتائج مشروع الوحدة			
1	اختبار نهاية الوحدة			
14 حصة	المجموع:			

ما أهمية هذه الوحدة؟

الهندسة الإحداثية عماد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS)، وهي تُستخدم في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية المهمة، مثل أجهزة الرادار التي ترصد حركة السفن والطائرات وتنظمها، كما تُستخدم في تخطيط الطرق والحدائق.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.
- استعمال الهندسة الإحداثية لبرهنة بعض النظريات.

تعلمت سابقاً:

- إيجاد ميل خط مستقيم ومعادليته.
- حل نظام من معادلتين خطيتين.
- الشروط التي تؤكد أن شكلاً رباعياً متوازي أضلاع.
- تحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً.

156

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعرف الطلبة في هذه الوحدة كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين على خط الأعداد وفي المستوى الإحداثي، إضافة إلى إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة على خط الأعداد وفي المستوى الإحداثي.

وسيتعرف الطلبة أيضاً أن البعد بين نقطة ومستقيم هو أقصر مسافة بين المستقيم والنقطة، وسيجدون البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي، والبعد بين مستقيمين متوازيين.

إضافة إلى ما سبق سيتعرف الطلبة كيفية رسم مضلع في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه بدلالة أطوال أضلاعه المعطاة بصورة متغيرات، وإيجاد إحداثيات رؤوس مضلعات مرسومة في مستوى إحداثي غير مدرج بدلالة إحداثيات رؤوس أخرى معطاة بصورة متغيرات، وكيفية توظيف البرهان الإحداثي في برهنة نظريات هندسية.

الترابط الرأسي بين الصفوف

الصف العاشر

- كتابة معادلة دائرة بالصورة القياسية علم مركزها ونقطة تمر بها.
- تعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة، وتوظيفها في إيجاد: إحداثيات مركز دائرة معادلتها مكتوبة بالصورة العامة، وطول نصف قطرها.
- حساب طول القطعة المماسية إذا علمت الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، وإحداثي نقطة نهاية القطعة المماسية خارج الدائرة.
- إثبات أن مستقيماً معطى معادلته هو مماس لدائرة علمت الصورة القياسية لمعادلتها.

الصف التاسع

- إيجاد المسافة بين نقطتين على خط الأعداد وفي المستوى الإحداثي.
- توظيف قانون المسافة بين نقطتين في حل مسائل رياضية.
- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد، وفي المستوى الإحداثي.
- توظيف إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.
- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي.
- إيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي.
- توظيف قانون البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.
- رسم مضلع في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه بدلالة أطوال أضلاعه المعطاة بصورة متغيرات.
- تعرف البرهان الإحداثي، وتوظيفه لبرهنة نظريات هندسية وتصنيف الأشكال الرباعية.

الصف الثامن

- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.
- إيجاد ميل المستقيم المار بنقطتين.
- كتابة معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.
- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالحذف.
- كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ويوازي مستقيماً معلوماً.
- كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة ويعامد مستقيماً معلوماً.
- تحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً.
- تحديد ما إذا كان مستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك من خلال الميل.

الهندسة الإحداثية والخريطة

مشروع الوحدة

مشروع الوحدة:

هدف المشروع: يهدف مشروع الوحدة إلى إيجاد المسافة بين مدينتين على الخريطة باستعمال برمجة جيو جبرا، وإيجاد البعد بين النقطة التي تمثل إحدى المحافظات، والمستقيم الواصل بين أي محافظتين.

يهدف مشروع الوحدة أيضاً إلى تنمية مهارتي التواصل والعمل الجماعي وتعزيزهما، وتطوير مهارات تحديد المشكلة، والمثابرة على تقديم حلول لها.

خطوات تنفيذ المشروع

- أعرف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- أوزع الطلبة إلى مجموعات، وأؤكد أهمية تعاون أفراد المجموعة، وتوزيع المهام في ما بينهم.
- أوضح للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، وعناصر المنتج النهائي المطلوب منهم، وأؤكد أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع أولاً بأول، وتعزيزها بالصور.
- أذكر الطلبة بالعودة إلى المشروع في نهاية كل درس من دروس الوحدة؛ لاستكمال ما يجب إنجازه من خطوات تنفيذ المشروع.
- أبين للطلبة سلفاً معايير تقييم المشروع.

عرض النتائج

لعرض نتائج المشروع، أبين للطلبة ما يأتي:

- إمكانية استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، مثل: المطوية، وبرمجة العروض التقديمية.
- اختيار كل مجموعة واحداً منها؛ للوقوف أمام أفراد المجموعات الأخرى، وعرض البيانات التي جمعها مع أفراد مجموعته (تتمثل أهمية هذه الخطوة في تنمية مهارات التواصل لدى الطلبة).
- الطلب إلى أفراد المجموعات ذكر بعض الصعوبات التي واجهوها أثناء تنفيذ المشروع، وكيف تمكّنوا من التغلب عليها؛ تعزيزاً لمهاراتهم في حل المشكلات.

فكرة المشروع

إيجاد المسافة بين مدينتين على الخريطة باستعمال برمجة جيو جبرا.

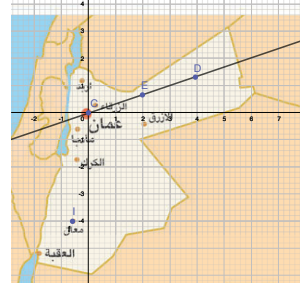


المواد والأدوات

شبكة الإنترنت، برمجة جيو جبرا.



خطوات تنفيذ المشروع:



background image

- 1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن خريطة المملكة الأردنية الهاشمية، ثم أحفظها في جهاز الحاسوب.
- 2 أنقر على أيقونة من شريط الأدوات، ثم أختار الصورة التي أحفظتها.
- 3 أعدّل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B، اللتين تظهران عليها، بحيث تكون العاصمة عمان نقطة الأصل.
- 4 أظهر الشبكة فوق الصورة بقرّر زرّ الفأرة الأيمن، ثم أختار Settings، ومنها أختار background image.
- 5 أجدّ مقياس رسم الخريطة، التي أدرجتها، باتباع الخطوات الآتية:
 - أختار أيقونة من شريط الأدوات، ثم أنقر موقع العاصمة على الخريطة ليظهر الحرف C، وأنقر موقع المحافظة ليظهر الحرف D، وتظهر الإحداثيات في شريط الإدخال.
 - أستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لأجدّ بُعد المحافظة عن العاصمة عمان.
 - أبحث في شبكة الإنترنت عن المسافة الحقيقية بين المحافظة التي اخترتها والعاصمة عمان، ثم أجدّ مقياس الرسم.
- 6 أجدّ المسافة الحقيقية بين 3 محافظات أخرى، باستعمال الخطوات السابقة ومقياس الرسم الذي أوجدته.
- 7 أستعمل صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي لأجدّ نقطة المنتصف بين كل محافظتين من المحافظات الثلاث التي اخترتها في الخطوة السابقة.
- 8 يُمكنني إيجاد معادلة المستقيم الواصل بين أي محافظتين على الخريطة بالنقر على أيقونة من شريط الأدوات، ثم بالنقر على كل من النقطتين اللتين تمثلان المحافظتين، لتظهر معادلة المستقيم في شريط الإدخال.
- 9 أجدّ البعد بين النقطة التي تمثل إحدى المحافظات والمستقيم من الخطوة السابقة باستعمال صيغة البعد بين نقطة ومستقيم.

عرض النتائج:

أعدّ عرضاً تقديمياً أبين فيه خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور، وبعض الصعوبات التي واجهتها في أثناء العمل.

157

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	إدراج الخريطة في برمجة جيو جبرا بحيث تكون العاصمة عمان نقطة الأصل.			
2	استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد بُعد المحافظة عن العاصمة عمان.			
3	استعمال صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي؛ لإيجاد نقطة المنتصف بين كل محافظتين من المحافظات الثلاث المختارة.			
4	إيجاد البعد بين نقطة تمثل إحدى المحافظات ومستقيم واصل بين أي محافظتين.			
5	التعاون والعمل بروح الفريق.			
6	إعداد المشروع في الوقت المحدد.			
7	عرض المشروع بصورة واضحة (مهارة التواصل).			
8	استعمال التكنولوجيا لعرض نتائج المشروع.			

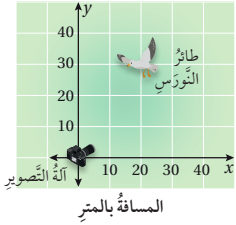
1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

المسافة في المستوى الإحداثي Distance in the Coordinate Plane

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.



المسافة، الإحداثي، نقطة المنتصف.
تلتقط آلة تصوير صوراً عالية الدقة للطيور التي تبعد عنها 50 m أو أقل. هل تلتقط الآلة صورة عالية الدقة لطائر النورس الموضح موقعه في المستوى الإحداثي المجاور؟

فكرة الدرس

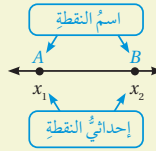
المصطلحات

مسألة اليوم

المسافة بين نقطتين

المسافة (distance) بين نقطتين على خط الأعداد هي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين بحيث تمثلان نهايتي القطعة، ويمكن استعمال **إحداثي** (coordinate) كل من النقطتين لإيجاد المسافة بينهما.

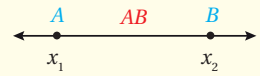
أتعلم



صيغة المسافة على خط الأعداد

مفهوم أساسي

بالكلمات: المسافة بين نقطتين على خط الأعداد هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيهما.



بالرموز: إذا كان إحداثي النقطة A على خط الأعداد هو x_1 وإحداثي النقطة B هو x_2 ، فإن:

$$AB = |x_2 - x_1| \quad \text{or} \quad AB = |x_1 - x_2|$$

رموز رياضية

يُرمز إلى القطعة المستقيمة التي نقطتها بدايتها A ونهايتها B بالرمز $\overline{AB}$ أما طولها فيرمز إليه بالرمز AB .

نتائج الدرس

- تعرّف مفهوم المسافة بين نقطتين على خط الأعداد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين على خط الأعداد.
- استنتاج قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي باستعمال نظرية فيثاغورس.
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- تطبيق قانون المسافة بين نقطتين في حل مسائل رياضية.
- تعرّف مفهوم نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة.
- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد.
- إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- تطبيق إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.

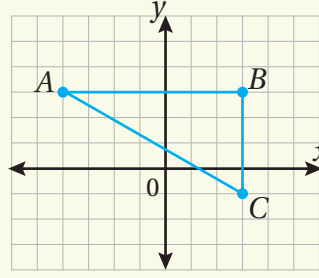
نتائج التعلم القبلي:

- استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.

مراجعة التعلم القبلي ومعالجة الفاقد

التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.



- أرسم الشكل المجاور على اللوح، ثم أسأل الطلبة:

« ما طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؟ 7 وحدات.

« كيف أوجدتم ذلك؟ إجابة ممكنة: بعدّ الوحدات المربعة بين النقطتين A و B .

« ما طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ ؟ 4 وحدات.

« كيف أوجدتم ذلك؟ إجابة ممكنة: بعدّ الوحدات المربعة بين النقطتين B و C .

« ما طول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ ؟ ستختلف إجابات الطلبة.

- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم من خلال المناقشة إلى إمكانية استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد طول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ ، ثم أطلب إليهم إيجادها.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) وتأمل المستوى الإحداثي المجاور لها، ثم أسألهم:

« ما الزوج المرتب الذي يمثل موقع آلة التصوير في المستوى الإحداثي؟ $(0, 0)$

« ما الزوج المرتب الذي يمثل موقع النورس في المستوى الإحداثي؟ $(20, 30)$

« كم مترًا يجب أن يبعد الطير عن آلة التصوير لتلتقط له صورة عالية الدقة؟ 50 m أو أقل.

« هل ستلتقط الآلة صورة عالية الدقة لطائر النورس الموضح في موقعه في المستوى الإحداثي؟ إذا كان بُعد الطائر عن آلة التصوير 50 m أو أقل فستلتقط له صورة عالية الدقة.

« كيف يمكن إيجاد بُعد الطائر عن آلة التصوير؟ إجابة ممكنة: بتشكيل مثلث قائم الزاوية وتره القطعة المستقيمة الواصلة بين النورس وآلة التصوير، ثم إيجاد طول هذه القطعة المستقيمة باستعمال نظرية فيثاغورس.

- أبين للطلبة أنهم سيتعرّفون في هذا الدرس طريقة أخرى لإيجاد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النورس وآلة التصوير بالاعتماد على إحداثيات النقطتين اللتين تمثلان موقع كل منهما.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟

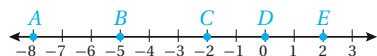
« مَنْ يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟

« أعزّز الإجابات الصحيحة.

- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا يجب ألا أقول للطالب / لل طالبة: (إجابتك خطأ)، بل أقول له / لها: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟)، ثم أشكره / أشكرها على محاولة الإجابة عن السؤال. بعد ذلك أطلب إلى غيره / غيرها الإجابة عن السؤال؛ لتعرّف الإجابة الصحيحة، وأعزّزه / أعزّزها، ثم أطلب إلى الطالب الأول / الطالبة الأولى الإجابة عن السؤال مرة أخرى، وأعزّزه / أعزّزها كما عزّزت مَنْ أجاب عن السؤال نفسه إجابة صحيحة.

مثال 1

أستعمل خط الأعداد الآتي لأجد BE .



بما أن إحداثي النقطة B هو -5 ، وإحداثي النقطة E هو 2 ، فإن:

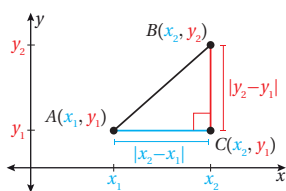
$$\begin{aligned} BE &= |x_2 - x_1| && \text{صيغة المسافة على خط الأعداد} \\ &= |2 - (-5)| && \text{بتعويض } x_2 = 2, x_1 = -5 \\ &= 7 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أنتحقق من فهمي

أستعمل خط الأعداد المبين أعلاه لأجد كلًا مما يأتي:

a) $AD \quad AD = |0 - (-8)| = 8$

b) $CB \quad CB = |(-5) - (-2)| = 3$



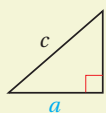
يُمكنني إيجاد المسافة بين النقطتين A و B في المستوى الإحداثي باستعمال نظرية فيثاغورس، وذلك بتشكيل مثلث قائم الزاوية يكون AB وترًا فيه، كما في الشكل المجاور، ثم أستعمل نظرية فيثاغورس لأجد AB كالآتي:

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AC)^2 + (CB)^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ &= (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2 && \text{بتعويض } AC = |x_2 - x_1|, CB = |y_2 - y_1| \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 && \text{مربعات الأعداد دائمًا موجبة} \\ AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة} \end{aligned}$$

تُسمى الصيغة التي توصّلت إليها من نظرية فيثاغورس صيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

أنذكّر

نظرية فيثاغورس



$$a^2 + b^2 = c^2$$

إرشادات:

- أوضح للطلبة الفرق بين الرمز المستعمل للتعبير عن القطعة المستقيمة والرمز المستعمل للتعبير عن طولها بالاستعانة بصندوق (رموز رياضية) المجاور لصندوق (مفهوم أساسي).
- في المثال 1، أذكر الطلبة بأنه يلزم إجراء العمليات الحسابية لإيجاد الناتج داخل رمز القيمة أولاً، ثم إيجاد القيمة المطلقة لذلك الناتج.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

مثال 1

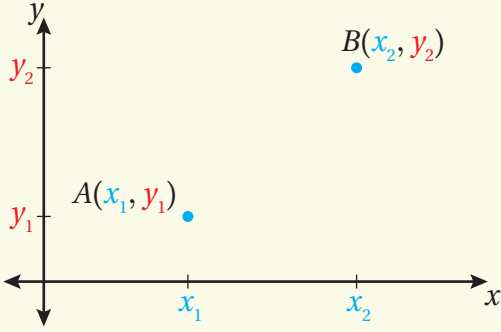
- أوضح للطلبة مفهوم المسافة بين نقطتين على خط الأعداد، ثم أبين لهم أنه يمكن إيجادها بإيجاد الفرق المطلق بين إحداثي النقطتين اللتين تمثلان نهايتي القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين، ثم أقدم صيغة المسافة بين نقطتين على خط الأعداد بالكلمات والرموز بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي).

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح.

- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

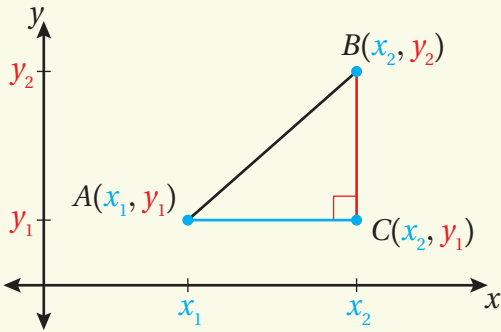
مثال 2

- أرسم الشكل الآتي على اللوح، ثم أسأل الطلبة:



- « كيف يمكن إيجاد المسافة بين النقطتين A و B؟
بتشكيل مثلث قائم الزاوية يكون $\overline{AB}$ وترًا فيه،
ثم استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول هذا
الوتر.

- أطلب إلى أحد الطلبة إكمال رسم المثلث قائم الزاوية
كما في الشكل الآتي:



- أكتب على اللوح نظرية فيثاغورس للمثلث ABC، ثم
أسأل الطلبة:

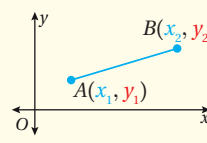
- « كيف يمكن التعبير عن طول الضلع $\overline{AC}$
باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد؟
 $\overline{AC} = |x_2 - x_1|$

- « كيف يمكن التعبير عن طول الضلع $\overline{CB}$
باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد؟
 $\overline{CB} = |y_2 - y_1|$

- أعوض $|x_2 - x_1|$ بدلاً من $\overline{AC}$ ، وأعوض $|y_2 - y_1|$
بدلاً من $\overline{CB}$ في نظرية فيثاغورس، ثم أتوصل مع
الطلبة بعد إجراء العمليات الرياضية إلى صيغة
المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، وأبين لهم
ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛
للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي



المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 2

- أجد المسافة بين النقطتين $P(-7, 5)$ و $Q(4, -3)$ ، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي

$$= \sqrt{(4 - (-7))^2 + ((-3) - 5)^2}$$

بتعويض $(x_1, y_1) = (-7, 5)$
 $(x_2, y_2) = (4, -3)$

$$= \sqrt{(11)^2 + (-8)^2}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{185}$$

بإيجاد مربع كل عدد، والجمع

$$\approx 13.6$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، المسافة بين النقطتين P و Q هي 13.6 وحدة تقريباً.

تحقق من فهمي

أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

a) $C(5, 0)$, $D(-7, 9)$
 $CD = 15$

b) $G(4, -2)$, $H(8, -8)$
 $GH \approx 7.2$

يمكن استعمال صيغة المسافة في تطبيقات حياتية، مثل إيجاد المساحة والمحيط في المخططات الهندسية.

أتعلم

من الأسهل إيجاد طول القطعة المستقيمة الأفقية في المستوى الإحداثي باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد، وذلك بإيجاد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثيين x لكل من نقطتي نهايتي القطعة، وإيجاد طول القطعة المستقيمة العمودية أجد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثيين y لكل من نقطتي نهايتي القطعة.

أتعلم

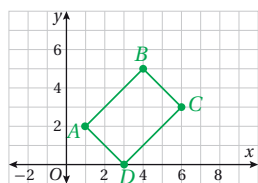
عند إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي لا يكون ترتيب الإحداثيين x و y في كل مجموعة من الأقواس مهماً.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أتعلم) الوارد في هامش المثال 2، والذي يبين أن ترتيب كل من الإحداثيين x و y في مجموعة الأقواس لا يكون مهماً؛ ثم أطلب إليهم تبرير ذلك.

تنويع التعليم:

- أستعمل الأقلام الملونة أثناء إجراءات التوصل إلى صيغة المسافة في المستوى الإحداثي؛ لما لذلك من أثر في تثبيت المفهوم لدى الطلبة، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.

مثال 3: من الحياة



حديقة: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مُخطَّط قاعدة بيت بلاستيكي مستطيل الشكل بُنِيَ غِداءً في فناء منزلها الخلفي لزراعة النباتات. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل متراً واحداً، فأوجد مساحة البيت البلاستيكي.

لإيجاد مساحة البيت البلاستيكي، أجد طوله وعرضه باستعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أجد طول البيت البلاستيكي.

أفترض أن طول البيت AB ، وبما أن $A(1, 2)$ و $B(4, 5)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة المسافة في المستوى الإحداثي} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 2)^2} && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (4, 5) \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} && \text{بالتبسيط} \\ &= \sqrt{18} && \text{بإيجاد مربع كل عدد، والجمع} \\ &= 3\sqrt{2} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، طول البيت البلاستيكي $3\sqrt{2}$ m

الخطوة 2: أجد عرض البيت البلاستيكي.

أفترض أن عرض البيت البلاستيكي BC ، وبما أن $B(4, 5)$ و $C(6, 3)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة المسافة في المستوى الإحداثي} \\ &= \sqrt{(6 - 4)^2 + (3 - 5)^2} && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (4, 5), (x_2, y_2) = (6, 3) \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} && \text{بالتبسيط} \\ &= \sqrt{8} && \text{بإيجاد مربع كل عدد، والجمع} \\ &= 2\sqrt{2} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، عرض البيت البلاستيكي $2\sqrt{2}$ m



معلومة

للبيوت البلاستيكية مميزات عدة، مثل توفير درجة حرارة مناسبة لنمو النباتات، ما يتيح إمكانية الزراعة في أي وقت من العام.

أفكر

هل هذا هو الحل الوحيد للمثال؟ أبرر إجابتي.

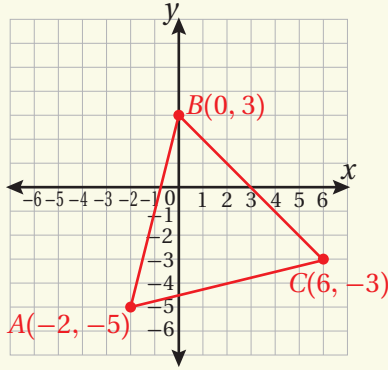
- أناقش الطلبة في أهمية استعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي في تطبيقات حياتية، مثل: إيجاد المساحة والمحيط في المخططات الهندسية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضح للطلبة أنه لإيجاد مساحة البيت البلاستيكي الذي قاعدته على شكل مستطيل، فإنه يلزم إيجاد طول قاعدة البيت البلاستيكي وعرضه، ثم أكلف أحد الطلبة إيجاد الطول وآخر إيجاد العرض باستعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي على اللوح.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بأن طول المستطيل هو قياس طول الضلع الطويل، وأن العرض هو قياس طول الضلع القصير.
- أناقش الطلبة في إجابة سؤال (أفكر) الوارد في هامش المثال 3، وأتوصل معهم إلى أن DC يمثل طول البيت، وأن AD يمثل عرض البيت، ومنه فإنه يمكن إيجاد هذين الطولين لإيجاد مساحة البيت.

مثال إضافي:

يظهر في المستوى الإحداثي الآتي مخطط لقطعة أرض، يرغب مالکها إحاطتها بسيّاح، إذا كانت تكلفة المتر الطولي للسيّاح 5 JD فأجد تكلفة السيّاح.



125 JD تقريباً.

المفاهيم العابرة للمواد

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي مثال 3، أعزز الوعي البيئي لدى الطلبة بتعريفهم بمميزات الزراعة داخل البيوت البلاستيكية، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن أهم فوائد الزراعة في البيوت البلاستيكية، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

الخطوة 3: أجد مساحة البيت البلاستيكي.

$$A = l \times w$$

$$= 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$= 12$$

صيغة مساحة المستطيل

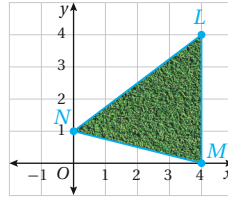
$$l = 3\sqrt{2}, w = 2\sqrt{2}$$

بتعويض

بالتبسيط

إذن، مساحة البيت البلاستيكي 12 m^2

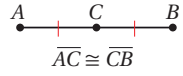
تحقق من فهمي



يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مخطط حديقة مثلثة الشكل، يرغب خالد في تركيب مرشحات لريها عند رؤوس المثلث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل متراً واحداً، فأجد طول الأنابيب التي تصل بين المرشحات الثلاثة، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

نقطة منتصف القطعة المستقيمة

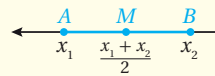
نقطة منتصف (midpoint) القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة.



فمثلاً، إذا كانت C نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $AC = CB$ ، وهذا يعني أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

يمكنني إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد بإيجاد الوسط الحسابي لإحداثيتي نقطتي نهايتي.

صيغة نقطة المنتصف على خط الأعداد



إذا كان إحداثيتي النقطة A على خط الأعداد هو x_1 وإحداثيتي النقطة B هو x_2 ، وكانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن إحداثيتي M هو:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

مفهوم أساسي

أندكز

يبدل الرمز $\cong$ على التطابق، وتدل الإشارة الحمراء في الشكل المجاور على أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ أي أن لهما الطول نفسه.

إجابة التدريب في بند (تحقق من فهمي 3):

$$L(4, 4), M(4, 0), N(0, 1)$$

$$LM = 4 \text{ m}, MN \approx 4.1 \text{ m}, LN = 5 \text{ m}$$

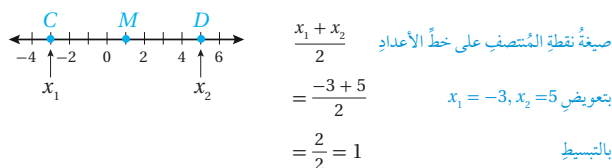
طول الأنابيب التي تصل بين المرشحات الثلاثة:

$$LM + MN + LN = 4 + 4.1 + 5 \approx 13.1 \text{ m}$$

مثال 4

1 إذا كان إحداثيًا نقطتي نهايتي $\overline{CD}$ هما -3 و 5، فأوجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{CD}$.

أفترض أن $x_1 = -3$ و $x_2 = 5$ ، وأن نقطة منتصف $\overline{CD}$ هي M .



إذن، إحداثي نقطة المنتصف هو 1

2 في الشكل المجاور، إذا كانت M نقطة

منتصف $\overline{AB}$ ، فأوجد طول $\overline{MB}$.



الخطوة 1: أجد قيمة x .

$$\overline{AM} \cong \overline{MB}$$

تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة

$$AM = MB$$

تعريف تطابق القطع المستقيمة

$$2x + 1 = 3x - 4$$

بالتعويض

$$2x + 5 = 3x$$

بجمع 4 إلى طرفي المعادلة

$$5 = x$$

ب طرح $2x$ من طرفي المعادلة

الخطوة 2: أجد طول $\overline{MB}$.

$$MB = 3x - 4$$

طول $\overline{MB}$

$$= 3(5) - 4$$

بتعويض $x = 5$

$$= 11$$

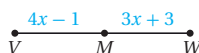
بالتبسيط

إذن، طول $\overline{MB}$ هو 11 وحدة طول.

أنظر الهامش. **أنتحقق من فهمي**

(a) إذا كان إحداثيًا نقطتي نهايتي $\overline{PT}$ هما -9 و 10، فأوجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{PT}$.

(b) في الشكل المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{VW}$ ، فأوجد طول $\overline{VM}$ و طول $\overline{VW}$.



إرشادات:

- أذكر الطلبة عند تقديم مفهوم نقطة المنتصف بالرمز الدال على تطابق القطع المستقيمة، وأذكرهم بأن القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.
- في الفرع 2 من المثال 4، أذكر الطلبة بكيفية حل معادلة خطية بمتغير واحد موجود على طرفي المساواة.

إجابة التدريب في بند (أنتحقق من فهمي 4):

$$\frac{10 + (-9)}{2} = \frac{1}{2} : \overline{PT} \text{ نقطة منتصف}$$

$$4x - 1 = 3x + 3 \Rightarrow x = 4$$

$$VM = 4(4) - 1 = 15, VW = 2 \times 15 = 30$$

مثال 5

- أقدم للطلبة كيفية إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.
- أناقش الطلبة في حل المثال 5 على اللوح، وأبين لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة إلى أن إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة لا يتأثران بترتيب إحداثي نقطتي نهايتي القطعة.

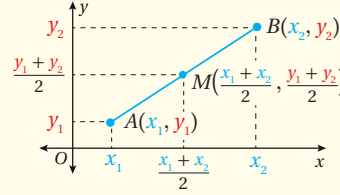
أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند إيجاد إحداثي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بطرح الإحداثي x لنقطتي نهايتيه وقسمة الناتج على 2، وطرح الإحداثي y لنقطتي نهايتيه وقسمته على 2؛ لذا أؤكد بشكل مستمر أن إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي يمثل الوسط الحسابي لكل من الإحداثي x والإحداثي y لنقطتي نهايتيه.

يمكن إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بإيجاد الوسط الحسابي لكل من الإحداثي x والإحداثي y لنقطتي نهايتيه.

صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي



إذا كانت $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ نقطتين في المستوى الإحداثي، و M نقطة منتصف AB ، فإن إحداثي M هما:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 5

أجد إحداثي النقطة M ، التي تمثل منتصف PQ ؛ حيث $P(-6, 3)$ و $Q(1, -1)$.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي}$$

$$M\left(\frac{-6 + 1}{2}, \frac{3 + (-1)}{2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (1, -1) \\ (x_2, y_2) = (-6, 3) \end{array}$$

$$M\left(\frac{-5}{2}, 1\right) \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، إحداثي النقطة M منتصف PQ هما $\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$.

أتحقق من فهمي

أجد إحداثي النقطة M ، التي تمثل منتصف HI ؛ حيث $H(5, -3)$ و $I(-1, -7)$ و $M(2, -5)$.

يمكن إيجاد إحداثي نقطة نهاية قطعة مستقيمة إذا عُلِمَ إحداثي نقطة النهاية الأخرى للقطعة وإحداثي نقطة المنتصف.

أتعلم

ترتيب إحداثي نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة ليس مهماً عند إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

مثال 6

إذا كانت $M(2, 1)$ نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، حيث $J(1, 4)$ ، فأوجد إحداثيَي النقطة K .

الخطوة 1: أعوض الإحداثيات المعروفة في صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

$$K(x_2, y_2) \text{ و } J(x_1, y_1)$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M(2, 1) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي}$$

$$M\left(\frac{1 + x_2}{2}, \frac{4 + y_2}{2}\right) = M(2, 1) \quad \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (1, 4)$$

الخطوة 2: أكتب معادلتين، وأحلّهما لإيجاد إحداثيَي K .

أجد x_2

$$\frac{1 + x_2}{2} = 2$$

$$1 + x_2 = 4$$

$$x_2 = 3$$

أجد y_2

$$\frac{4 + y_2}{2} = 1$$

$$4 + y_2 = 2$$

$$y_2 = -2$$

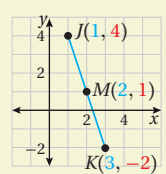
إذن، إحداثيَا النقطة K هما $(3, -2)$.

أتحقق من فهمي

إذا كانت $M(-5, 10)$ نقطة منتصف $\overline{EP}$ ، حيث $E(-8, 6)$ ، فأوجد إحداثيَي النقطة $P(-2, 14)$.

أتعلم

يُمكنني التحقق من معقوليّة الإجابة بتمثيل النقاط الثلاثة في المستوى الإحداثي، وملاحظة أن المسافة بين J و M تظهر مساوية للمسافة بين M و K .



مثال 6

- أناقش مع الطلبة من خلال المثال 6 كيف يمكن إيجاد إحداثيَي نقطة نهاية قطعة مستقيمة إذا عُلِمَ إحداثيَي نقطة النهاية الأخرى للقطعة وإحداثيَي نقطة المنتصف.
- إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: أوجه الطلبة إلى تأمل تمثيل النقاط الثلاث الواردة في المثال 6، وملاحظة أن المسافة بين نقطة المنتصف والنهية الأولى للقطعة مساوية للمسافة بين نقطة المنتصف والنهية الأخرى للقطعة، ثم أطلب إليهم التحقق من معقوليّة إجابتهم عن سؤال (أتحقق من فهمي) الذي يلي المثال 6 بالطريقة نفسها.

أدرب وأحل المسائل



أستعمل خطّ الأعداد المجاور لأجد كلاً ممّا يأتي:

1 $AB = 8$

2 $CD = 7$

3 $CB = 13$

4 $AC = 5$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11 - 1) والمسائل (20 - 13) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمّة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

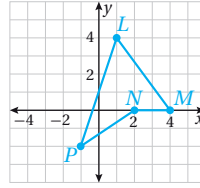
- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (27 - 25).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

5 $C(-1, 6), D(4, 8)$
 $CD \approx 5.4$

6 $E(6, -1), F(2, 0)$
 $EF \approx 4.1$

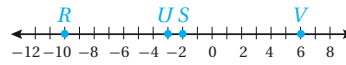
7 $G(4, -5), H(0, 2)$
 $GH \approx 8.1$



8 أجد محيط المضلع المعطاة رؤوسه في المستوى الإحداثي المجاور.

$LM = 5, MN = 2, NP \approx 3.6, PL \approx 6.3$

محيط المضلع: $LM + MN + NP + PL \approx 5 + 2 + 3.6 + 6.3 \approx 16.9$



أستعمل خط الأعداد المجاور لأجد إحداثي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة الآتية:

9 $\overline{RS}$

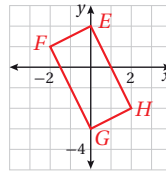
إحداثي نقطة منتصف $\overline{RS}$ هو -6

10 $\overline{UV}$

إحداثي نقطة منتصف $\overline{UV}$ هو $1\frac{1}{2}$

11 $\overline{VS}$

إحداثي نقطة منتصف $\overline{VS}$ هو 2



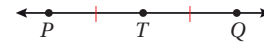
$FE = \sqrt{5}$

$EH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

مساحة المستطيل: $A = l \times w = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$

12 أجد مساحة المستطيل FEHG المعطاة رؤوسه في المستوى الإحداثي المجاور.

أستعمل الشكل أدناه لأجد PT في كل مما يأتي:



13 $PT = 5x + 3, TQ = 7x - 9, PT = 33$

14 $PT = 7x - 24, TQ = 6x - 2, PT = 130$

أجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{HK}$ في كل من الحالات الآتية:

15 $H(7, 3), K(-4, -1), M(\frac{3}{2}, 1)$

16 $H(-4, -5), K(2, 9), M(-1, 2)$

17 $H(-6, 10), K(8, -2), M(1, 4)$

أجد إحداثي نقطة نهاية القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ المجهولة في كل مما يأتي. علماً أنّ M نقطة منتصف $\overline{CD}$:

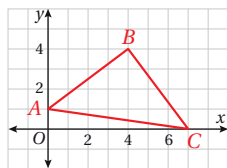
18 $C(-5, 4), M(-2, 5)$
 $D(1, 6)$

19 $D(1, 7), M(-3, 1)$
 $C(-7, -5)$

20 $D(-4, 2), M(6, -1)$
 $C(16, -4)$

إرشادات:

- في السؤال 25 (أكتشف الخطأ)، أوجه الطلبة إلى إيجاد طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ومقارنة خطوات حلهم بخطوات الحل التي تظهر في المسألة لتحديد الخطأ.
- في السؤال 27 (تبرير)، أوضح للطلبة أنه يلزمهم إيجاد المسافة التي قطعتها مرام أولاً، ثم تحديد عدد الدقائق التي لزمها لقطع تلك المسافة وفقاً للسرعة الثابتة التي كانت تتحرك فيها.



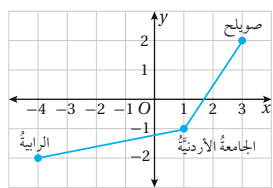
أستعمل الشكل المُجاوِر الذي يبيّن $\triangle ABC$ في المُستوى الإحداثي، للإجابة عن السؤالين الآتيين نياعاً:

21) $AB = 5, BC = 5, AC \approx 7.1$

أحدّد نوع المثلث من حيث الأضلاع.

22) أجد محيط المثلث.

محيط المثلث: $AB + BC + AC = 5 + 5 + 7.1 \approx 17.1$



23) مسافة: تظهر في المُستوى الإحداثي المُجاوِر 3 مناطق في العاصمة

عمّان، هي: صويلح، والجامعة الأردنية، والراية. إذا كانت كل وحدة

في المُستوى الإحداثي تمثّل كيلومتراً واحداً، فأجد المسافة بين

صويلح والجامعة الأردنية والمسافة بين الراية والجامعة الأردنية،

مقرّاً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

موقع صويلح (3, 2)، موقع الجامعة الأردنية (1, -1)، موقع الراية (-4, -2).

المسافة بين صويلح والجامعة: 3.6 km تقريباً. المسافة بين الجامعة والراية: 5.1 km تقريباً.

24) أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أنظر الهامش.

مهارات التفكير العليا

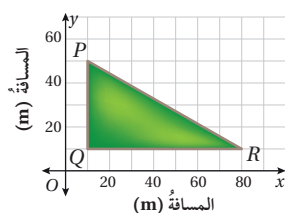
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2 + (6-(-4))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{1+100} \\ &= \sqrt{101} \approx 10 \end{aligned}$$

25) أكتشف الخطأ: وجد عماد المسافة التقريبية بين النقطتين

$A(6, 2)$ و $B(1, -4)$ ، كما هو مبين جانباً. أكتشف الخطأ

في حلّ عماد، وأصحّحه. أنظر الهامش.

26) تبرّر: تقع النقطة P على القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتان $A(1, 4)$ و $D(7, 13)$. إذا كانت المسافة بين P و A ثلاثة أمثال المسافة بين P و D، فأجد إحداثيات النقطة P. أبرّر إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.



27) تبرّر: يبيّن الشكل المُجاوِر مخططاً لحديقة عامّة على شكل

مثلث مُحاطة بممرٍ مُشاة. تمارس فيها مرّاء رياضة الركض، حيث

انطلقت على الممرّ بسرعة ثابتة مقدارها 130 m لكل دقيقة من P

إلى Q ثم من Q إلى R ثم عادت إلى P. كم دقيقة تقريباً استغرقت

مرّاء للعودة إلى P مرّة أخرى؟ أبرّر إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأستلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 12, 24, 25 كتاب التمارين: 1, 3, 4, 6
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (21 - 25) كتاب التمارين: 2, 5, 7, 9
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 23, (25 - 27) كتاب التمارين: 8, (10 - 12)

5 الإثراء

• أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« إذا كان $A(-6, -4)$, $B(-2, 2)$, $C(4, -2)$

إحداثيات رؤوس مثلث، فأثبت أن هذه النقاط

تمثّل رؤوس مثلث قائم الزاوية.

تعليمات المشروع:

• أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوات (1 - 7) من خطوات

تنفيذ المشروع.

6 الختام

• أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه السؤال

الآتي إليهم:

« أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي:

1) $(-2, 3)$, $(1, 0)$ $3\sqrt{2}$

2) $(4, -8)$, $(9, 1)$ $\sqrt{106}$

إجابة الأسئلة في بند (أدرب وأحلّ المسائل):

24) إحداثيا موقع الطائر هما (20, 30)

المسافة بين موقع الطائر وآلة التصوير لأقرب جزء من عشرة هي: $d \approx 36.1$ m

بما أن 36.1 m < 50 m إذن يمكن أن تلتقط آلة التصوير صورة عالية الدقة لطائر

النورس.

25) الخطأ في حل عماد أنه طرح الإحداثي x للنقطة B من الإحداثي y للنقطة A

وطرح الإحداثي y للنقطة B من الإحداثي x للنقطة A

الصواب:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(6-1)^2 + (2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (6)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7.8 \end{aligned}$$

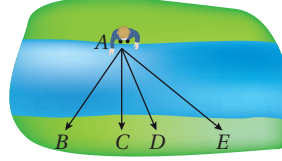
البُعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ Distance between a Point and a Line

فكرة الدرس

- إيجاد البُعد بين نقطةٍ ومستقيمٍ.
- إيجاد البُعد بين مُستقيمين مُتوازيين.

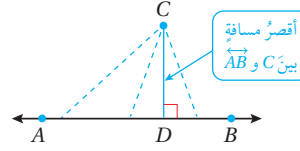
مسألة اليوم

يحاول جمالٌ عبورَ جدولٍ مائيٍّ بالقفزِ مِنْ موقعِهِ عندَ النقطةِ A إلى الجهةِ الأخرى مِنَ الجدولِ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاورِ. إلى أيّ نقطةٍ يجبُ أَنْ يقفزَ جمالٌ؟ أبرّرْ إجابتي.



البُعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

البُعدُ بين مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليه هو طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديةِ على المستقيمِ مِنْ تلكِ النقطةِ، وتمثلُ أقصرَ مسافةٍ بينَ المستقيمِ والنقطةِ. فمثلاً، أقصرُ مسافةٍ بينَ النقطةِ C و $\overleftrightarrow{AB}$ هي طولُ $\overline{CD}$.

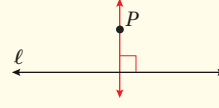


أتدّكرُ

يشيرُ الرمزُ $\overleftrightarrow{AB}$ إلى المستقيمِ المارِّ بالنقطتين A و B .

تعلّمتُ سابقاً كيفُ أنشئُ عموداً على مستقيمٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليه باستعمالِ فرجارٍ ومسطرةٍ، ويتضحُ مِنْ هذهِ الطريقةِ وجودُ مستقيمٍ عموديٍّ واحدٍ على الأقلِّ على مستقيمٍ معلومٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليه، لكنَّ المُسلّمةَ الآتيةَ تنصُّ على أنَّ هذا المستقيمَ العموديَّ مستقيمٌ وحيدٌ.

مُسلّمةُ التعامُدِ



لأيّ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليه يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقط يَمُرُّ بالنقطةِ، ويكونُ عمودياً على المستقيمِ المعلومِ.

مُسلّمةُ

أتدّكرُ

المُسلّمةُ عبارةٌ رياضيةٌ تُقبَلُ على أنّها صحيحةٌ مِنْ غيرِ برهانٍ.

نتائج الدرس

- تمييز قانون البُعد بين نقطةٍ ومستقيمٍ في المستوى الإحداثي.
- إيجاد البُعد بين نقطةٍ ومستقيمٍ في المستوى الإحداثي.
- إيجاد البُعد بين مستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي.
- توظيف قانون البُعد بين نقطةٍ ومستقيمٍ في المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية.

نتائج التعلّم القبلي:

- إنشاء عمود على مستقيم من نقطة خارجة.
- حل نظام مكوّن من معادلتين خطيتين بالحذف.
- إيجاد ميل المستقيم المار بنقطتين.
- إيجاد معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة.
- كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ويوازي مستقيماً معلوماً.
- كتابة معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ويعامد مستقيماً معلوماً.
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

مراجعة التعلّم القبلي ومعالجة الفاقد

التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أقسم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أكتب الأسئلة الآتية على اللوح، وأطلب إلى المجموعات الإجابة عنها:

إذا كان $y = 2x + 6$ معادلة المستقيم L ، فأجب عن الأسئلة الآتية:

« أثبت أن النقطة (3, 12) تقع على المستقيم.

« أجد ميل المستقيم L .

« أمثل المستقيم L في المستوى الإحداثي.

« أجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم L والمار بنقطة الأصل.

« أجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم L والمار بالنقطة (0, 3).

- أتابع عمل المجموعات، وأفدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

- أناقش إجابات الأسئلة مع الصف كاملاً.

- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

« عند أي نقطة يقف جمال؟ عند النقطة A

« إلى أي نقطة يجب أن يقفز جمال؟ النقطة C

« لماذا؟ لأنها تمثل أقصر مسافة بين موقع جمال والجهة الأخرى من الجدول.

« لو افترضنا أن صفتي الجدول تمثّلان مستقيمين متوازيين، فما علاقة $\overline{AC}$ بهذين المستقيمين؟

- أبين للطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:

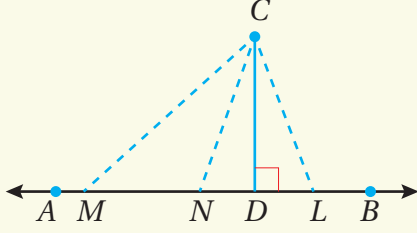
« ما رأيكم في إجابة زميلكم / زميلتك؟

« من يتفق مع إجابة زميله / زميلتها؟

- أعزز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أرسم الشكل الآتي على اللوح، ثم أسأل الطلبة:



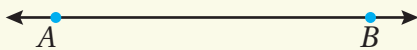
- « أي القطع المستقيمة يمثل طولها أقصر مسافة بين النقطة C و $\overleftrightarrow{AB}$ ؟ $\overline{CD}$ »
- « ما علاقة $\overline{CD}$ بـ $\overleftrightarrow{AB}$ ؟ $\overline{CD}$ عمودية على $\overleftrightarrow{AB}$ عند النقطة D. »
- « إذن، برأيكم / برأيكن ماذا تمثل أقصر مسافة بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه؟ طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة. »

- أوضّح للطلبة أن أقصر مسافة بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه تمثل طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، ويُطلق عليها اسم: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه.

- أسأل الطلبة: هل يوجد أكثر من قطعة مستقيمة تمثل البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه؟ **ستختلف إجابات الطلبة.**

- أبين للطلبة أنه يمكنهم التوصل إلى تصور حول إجابة السؤال السابق هندسيًا، ثم أقسمهم إلى مجموعات ثنائية، وأزود كل مجموعة بورقة مرسوم عليها الشكل الآتي، وأطلب إليهم إنشاء عمود من النقطة C على $\overleftrightarrow{AB}$.

C



- بعد انتهاء المجموعات من إنشاء العمود، أسألهم: « هل يمكنكم رسم عمود آخر من النقطة C على $\overleftrightarrow{AB}$ ؟ لا »

مثال 1

أجدُ البعد بين النقطة $(1, 0)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(3, 0)$ و $(1, 2)$.

الخطوة 1: أجدُ معادلة المستقيم l .

- أجدُ ميل المستقيم l .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 3} = \frac{2}{-2} = -1$$

صيغة الميل

بالتعويض $(x_1, y_1) = (3, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$

بالتبسيط

إذن، ميل المستقيم l هو -1

- أجدُ مقطع المستقيم l من المحور y باستعمال ميله ونقطة يمرُّ بها:

$$y = mx + b$$

صيغة الميل والمقطع

$$0 = -1(3) + b$$

$$b = 3, x = 3, y = 0$$

$$3 = b$$

بجمع 3 لطرفي المعادلة

إذن، معادلة المستقيم l هي: $y = 3 - x$

الخطوة 2: أجدُ معادلة المستقيم w العمودي على المستقيم l والمارّ بالنقطة $(1, 0)$.

بما أن ميل المستقيم l الذي معادلته $y = 3 - x$ هو -1 ؛ فإن ميل المستقيم w العمودي على المستقيم l هو 1

أجدُ مقطع المستقيم w من المحور y باستعمال ميله والنقطة التي يمرُّ بها.

$$y = mx + b$$

صيغة الميل والمقطع

$$0 = 1(1) + b$$

$$b = -1, x = 1, y = 0$$

$$-1 = b$$

بطرح 1 من طرفي المعادلة

إذن، معادلة المستقيم w هي: $y = x - 1$

أتذكّر

أستعمل ميل المستقيم والمقطع y لكتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع على الصورة $y = mx + b$

أتذكّر

• ميل المستقيم $y = mx + b$ هو m
• حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين يساوي -1

« لماذا؟ إجابة ممكنة: لأن أي عمود على $\vec{AB}$ من النقطة C سينطبق على العمود الذي تم رسمه.

« إذن، هل القطعة المستقيمة التي تمثل البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هي قطعة وحيدة؟ نعم.

- أوضح للطلبة أنه لأي مستقيم ونقطة لا تقع عليه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة، ويكون عمودياً على المستقيم المعلوم، وهذه تسمى **مسلمة التعامد**.
- ناقش مع الطلبة من خلال حل المثال 1 كيفية إيجاد البعد بين نقطة معلومة ومستقيم مار بنقطتين معلومتين، وذلك من خلال إيجاد معادلة المستقيم أولاً، ثم إيجاد معادلة المستقيم العمودي على ذلك المستقيم والمار بالنقطة المعلوم، ثم إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين، وأخيراً استعمال صيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي في إيجاد المسافة بين النقطة المعلوم ونقطة تعامد المستقيمين.
- إن لزم الأمر، ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بالفرق بين الرمز المستعمل للتعبير عن القطعة المستقيمة والرمز المستعمل للتعبير عن مستقيم بالاستعانة بصندوق (أذكر) الوارد في الصفحة 168 من كتاب الطالب.
- ألقت انتباه الطلبة إلى أن كلمة بُعد تشير إلى أقصر مسافة.
- قد يحتاج بعض الطلبة إلى تذكير بإجراءات إنشاء عمود على مستقيم من نقطة خارجه؛ لذا أقدم لهم الدعم اللازم.
- يمكن تنفيذ خطوة إنشاء عمود على مستقيم من نقطة خارجه على اللوح مع الصف كاملاً، باستخدام الأدوات الهندسية الخاصة بذلك.
- أذكر الطلبة بتعريف المسلمة الذي تعلموه سابقاً في الصف الثامن بالاستعانة بصندوق (أذكر) الوارد في الصفحة 168 من كتاب الطالب.
- ألقت انتباه الطلبة إلى صناديق (أذكر) أثناء شرح المثال 1؛ لما لها من أهمية في تذكير الطلبة بالمهارات والمفاهيم السابقة اللازمة لحل المثال.

الخطوة 3: استعمل معادلتَي المُستقيمين l و w لكتابة نظام مُعادلاتٍ وحلّه لإيجاد نقطة تقاطع المُستقيمين.

$y = -x + 3$	معادلة المستقيم l
$(+) y = x - 1$	معادلة المستقيم w
$2y = 2$	بحذف المتغير x
$y = 1$	بقسمة طرفي المعادلة على 2

أعوّض 1 بدلاً من y في إحدى المُعادلتين؛ لإيجاد قيمة x .

$y = x - 1$	معادلة المستقيم w
$1 = x - 1$	بتعويض 1 بدلاً من y
$x = 2$	بجمع 2 لطرفي المعادلة

إذن، يتقاطع المستقيمان l و w في النقطة $(2, 1)$.

الخطوة 4: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين $(1, 0)$ و $(2, 1)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة في المستوى الإحداثي
$= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$	بتعويض $(x_1, y_1) = (1, 0)$ $(x_2, y_2) = (2, 1)$
$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$	بالتبسيط
$= \sqrt{2}$	بإيجاد مربع كل عدد، والجمع

إذن، البعد بين النقطة $(1, 0)$ والمستقيم l هي $\sqrt{2}$ وحدة.

تحقق من فهمي 1.9 وحدة طول تقريباً.

أجد البعد بين النقطة $(1, 0)$ والمستقيم l الذي مُعادلتُه: $y = 3x + 3$

أندكر

حلّ نظام المُعادلات الخطيّة بمتغيرين هو زوج مرتّب يحقق كل مُعادلة في النظام.

أندكر

يمكن حلّ نظام المُعادلات بالحذف أو بالتعويض.

أتعلم

أجد البعد بين النقطة والمحور x بتحديد الإحداثي y للنقطة، وأجد البعد بين النقطة والمحور y بتحديد الإحداثي x للنقطة.

تعزير اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدرّيب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

- أوضح للطلبة أنهم من خلال المثال 1 تعلموا كيفية إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال حل المعادلات وصيغة المسافة بين نقطتين، ثم أبين لهم أنه توجد صيغة رياضية لإيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي بشكل مباشر، ثم أقدم لهم هذه الصيغة بالرموز بالاستعانة بصندوق (مفهوم أساسي) الوارد في كتاب الطالب.
- ناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، وأبين لهم ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- إن لزم الأمر، ناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم هذه المهارة.

إرشاد: في المثال 2، أذكر الطلبة بأنه يلزم إجراء العمليات الحسابية لإيجاد الناتج داخل رمز القيمة أولاً، ثم إيجاد القيمة المطلقة لذلك الناتج، في خطوة التبسيط التي تلي خطوة التعويض في صيغة البعد بين نقطة ومستقيم.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم بعدم كتابة معادلة المستقيم على الصورة $Ax + By + C = 0$ ؛ لذاؤكد بشكل مستمر أهمية هذه الخطوة في إيجاد البعد بشكل صحيح.

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

تعلمت في المثال السابق إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال حل المعادلات وصيغة المسافة بين نقطتين، ويمكن أيضاً إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي بشكل مباشر باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

البعد بين المستقيم l ، الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$ ، والنقطة $P(x_1, y_1)$ يُعطى بالصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شريطة ألا تكون قيمتا A و B معاً صفراً.

مثال 2

أجد البعد بين النقطة $(3, -5)$ والمستقيم $3x - 4y = 26$

الخطوة 1: أكتب مُعادلة المستقيم على الصورة $Ax + By + C = 0$

$$3x - 4y = 26$$

معادلة المستقيم المُعطاة

$$3x - 4y - 26 = 0$$

يطرح 26 من طرفي المعادلة

$$\text{إذن، } A = 3, B = -4, C = -26$$

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|3(3) + (-4)(-5) + (-26)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$\text{تعويض } A = 3, B = -4, C = -26, x_1 = 3, y_1 = -5$$

بالتبسيط

إذن، البعد بين النقطة والمستقيم $\frac{3}{5}$ وحدة.

أندكّر

أكتب مُعادلة المستقيم على الصورة $Ax + By + C = 0$ قبل التطبيق في صيغة البعد بين نقطة ومستقيم.

أندكّر

أتبع أولويات العمليات الحسابية عند التطبيق في قانون البعد بين نقطة ومستقيم.

توسعة

اشتقاق صيغة بعد نقطة عن مستقيم في المستوى الإحداثي

أناقش الطلبة في اشتقاق صيغة بُعد نقطة عن مستقيم في المستوى الإحداثي بالاستعانة بالرسم الآتي:

رُسمت $\overline{PR}$ موازية للمحور y فكان إحداثيا R هما $(x_1, \frac{-C - Ax_1}{B})$

ورُسمت $\overline{ST}$ موازية للمحور x وطولها وحدة واحدة، ورُسمت $\overline{TU}$ موازية للمحور y

فكان طولها يساوي القيمة المطلقة لميل المستقيم $Ax + By + C = 0$ وهي $|\frac{-A}{B}|$

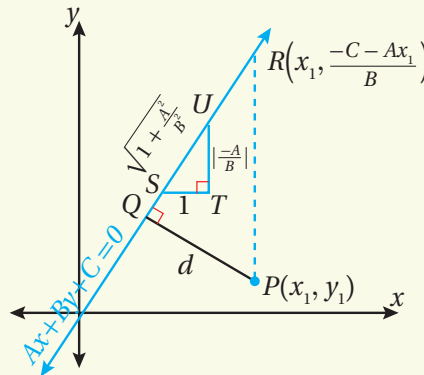
وبذلك يكون طول الوتر $\overline{SU}$ هو: $\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}}$

المثلثان PQR , STU متشابهان، إذن:

$$\frac{PQ}{ST} = \frac{PR}{SU}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{|\frac{-C - Ax_1}{B} - y_1|}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2}}}$$

$$d = \frac{|\frac{-C - Ax_1 - By_1}{B}|}{\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{B}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



- أناقش الطلبة في أهمية تحديد أقصر مسافة في كثير من المواقف الحياتية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أطلب إلى آخر تحديد المعطيات والمطلوب.
- أوضح للطلبة أنه لإيجاد أقصر مسافة بين موقع التخييم والطريق الرئيس؛ فإنه يلزم إيجاد البعد بين النقطة التي تمثل موقع التخييم، والمستقيم الذي يمثل الطريق الرئيس، ثم أطلب إلى أحد الطلبة كتابة معادلة المستقيم الذي يمثل الطريق الرئيس على الصورة $Ax + By + C = 0$ ، وأطلب إلى آخر إيجاد البعد بين النقطة والمستقيم باستعمال صيغة البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي.



معلومة

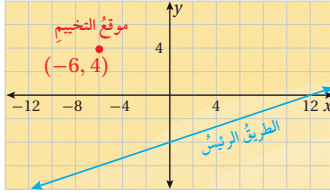
يسمى وادي رم أيضًا وادي القمر؛ لأن تضاريسه تشبه تضاريس سطح القمر، كما أنه يعد منطقة سياحية مهمة يزورها السياح من مختلف أنحاء العالم للتمتع بالطبيعة الصحراوية الخلابة.

أنتحق من فهمي

أجد البعد بين النقطة $(-1, 3)$ والمستقيم $3x - 4y = 16$ 6.2 وحدات طول.

نحتاج في كثير من المواقف الحياتية إلى تحديد أقصر مسافة لتوفير الوقت والجهد.

مثال 3: من الحياة



كشافة: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور موقع تخييم مجموعة كشافية في منطقة وادي رم. إذا أرادت المجموعة العودة إلى مدينة العقبة عبر الطريق

الرئيس، وكانت معادلة المستقيم التي تمثل هذا الطريق المؤدي إلى مدينة العقبة هي $y = \frac{1}{3}x - 4$ ، فأجد أقصر مسافة بين موقع التخييم والطريق، مقربًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة. علمًا أن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل كيلومترًا واحدًا.

لإيجاد أقصر مسافة بين موقع التخييم والطريق الرئيس، أجد البعد بين النقطة $(-6, 4)$ والمستقيم $y = \frac{1}{3}x - 4$.

الخطوة 1: أكتب معادلة المستقيم على الصورة $Ax + By + C = 0$.

معادلة المستقيم المعطاة $y = \frac{1}{3}x - 4$

بكتابة المعادلة على الصورة $Ax + By + C = 0$ $\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$

إذن، $A = \frac{1}{3}$ ، $B = -1$ ، $C = -4$

أتعلم

يمكن إيجاد معادلة
مكافئة للمعادلة
 $\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$
بضرب طرفي المعادلة
بالعدد 3، وذلك لتسهيل
الحسابات.

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{\left| \frac{1}{3}(-6) + (-1)(4) + (-4) \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2}}$$

$$\approx 9.5$$

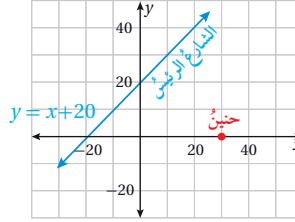
صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

بموضي، $A = \frac{1}{3}, B = -1,$
 $C = -4, x_1 = -6, y_1 = 4$

باستعمال الآلة الحاسبة

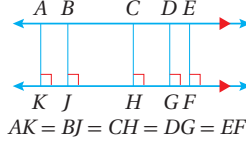
إذن، البعد بين موقع التخيم والطريق الرئيس 9.5 km تقريباً.

أتحقق من فهمي



يظهر في المستوى الإحداثي المجاور موقع منزل حنين بالنسبة إلى الشارع الرئيس المؤدي إلى مدرستها. إذا كانت معادلة المستقيم الذي يمثل الشارع الرئيس هي $y = x + 20$ ، فأجد أقصر مسافة بين منزل حنين والطريق، تقريباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة. **35.4 km**

البعد بين مستقيمين متوازيين



تعلمت سابقاً أن المستقيمين المتوازيين هما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه، بحيث يكون البعد بينهما ثابتاً، وهذا يعني أن البعد بين أي نقطة على أحدهما والمستقيم الآخر ثابت.

البعد بين مستقيمين متوازيين

مفهوم أساسي

البعد بين مستقيمين متوازيين هو البعد بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

إرشاد: أناقش الطلبة في ما جاء في صندوق (أتعلم) الوارد في هامش المثال 3، ثم أطلب إليهم إيجاد معادلة مكافئة للمعادلة التي تمثل الطريق الرئيس، وإعادة حل المثال مرة أخرى والتحقق من تساوي النتائج.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي مثال 3، أعزز الوعي الوطني لدى الطلبة بتعريفهم بالخصائص الجغرافية لوداي رم.

مثال 4

أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين m, n إذا كانت معادلتهم $3x + 4y + 8 = 0$ و $3x + 4y + 10 = 0$ على الترتيب.

الخطوة 1: أجد إحداثي نقطة تقع على أحد المستقيمين.

أعوض $x = 0$ في معادلة المستقيم m لأجد الإحداثي y المقابل لها.

$$3x + 4y + 8 = 0$$

معادلة المستقيم m

$$3(0) + 4y + 8 = 0$$

بتعويض $x = 0$

$$y = -2$$

بحل المعادلة

إذن، تقع النقطة $(0, -2)$ على المستقيم m

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم الآخر.

أجد البعد بين النقطة $(0, -2)$ والمستقيم n ؛ حيث $A = 3, B = 4, C = 10$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$= \frac{|3(0) + (4)(-2) + 10|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}$$

بتعويض $A = 3, B = 4, C = 10, x_1 = 0, y_1 = -2$

$$= \frac{2}{5}$$

بالتبسيط

إذن، البعد بين المستقيمين m و n هو $\frac{2}{5}$ وحدة.

تحقق من فهمي

أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين m, n إذا كانت معادلتهم $x - 7y + 14 = 0$ و $x - 7y - 11 = 0$ على الترتيب.

تقع النقطة $(7, 3)$ على المستقيم الذي معادلته $x - 7y + 14 = 0$ ، وبُعدها عن المستقيم الآخر

يساوي 3.5 وحدة تقريباً.

أتعلم

يمكن تحديث ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا إذا كان لهما الميل نفسه وكان المقطع y مختلفاً.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه يمكن اختيار أي قيمة للإحداثي x لتعويضها في معادلة أحد المستقيمين؛ لإيجاد الإحداثي y المقابل لها، ولكن اختيار $x = 0$ يجعل إيجاد قيمة الإحداثي y سهلاً.
- ألقت انتباه الطلبة إلى المعلومة الواردة في صندوق (أتعلم)، وأقدم لهم مجموعة من الأمثلة التي تعزز المفهوم.

توسعة

أناقش الطلبة في اشتقاق صيغة بديلة لإيجاد المسافة بين مستقيمين متوازيين على النحو الآتي:

ليكن l_1 ، و l_2 مستقيمين متوازيين كما في الرسم المجاور؛ ومعادلتها:

$$Ax + By + C_1 = 0, Ax + By + C_2 = 0$$

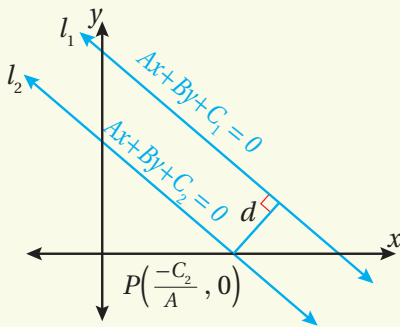
على الترتيب، فإن l_2 يقطع المحور x في النقطة

P التي إحداثياتها $(-\frac{C_2}{A}, 0)$ وتكون المسافة

بين المستقيمين وفق صيغة المسافة بين النقطة

P والمستقيم l_1 هي d حيث:

$$d = \frac{|A(-\frac{C_2}{A}) + B(0) + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



أي أن المسافة بين مستقيمين متوازيين تساوي الفرق المطلق بين الحدين الثابتين في معادلتيهما مقسوماً على الجذر التربيعي لمجموع مربعي معاملي x, y في المعادلتين.

مثال إضافي

أجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين مما يأتي:

- $y = -2$ و $y = 4$ $d = 6$
- $x = 9.5$ و $x = -12$ $d = 21.5$
- $y = \frac{1}{4}x + 2$ و $4y - x = -60$ $d \approx 16.5$

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 - 15) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (20 - 22).
- أرصد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

الواجب المنزلي:

- أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (17 - 19) كتاب التمارين: 1, 3, 5, 7
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 16, 19, 20 كتاب التمارين: 2, 4, 6, 9, 10
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (19 - 22) كتاب التمارين: (8 - 11)

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

(1) معادلة المستقيم $l: y = -\frac{4}{7}x + \frac{-24}{7}$

البعد بين النقطة P والمستقيم l تقريباً 4.8

أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l في كل مما يأتي من غير استعمال صيغة البعد بين نقطة ومستقيم:

(1) النقطة $P(2, 1)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(-6, 0)$ و $(1, -4)$.
(2) معادلة المستقيم $l: y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$

البعد بين النقطة P والمستقيم l تقريباً 4.8
(2) النقطة $P(-9, 2)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(2, 8)$ و $(-2, 3)$.

(3) معادلة المستقيم $l: y = \frac{-7}{8}x + \frac{-17}{8}$
(3) النقطة $P(4, 4)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(1, -3)$ و $(-7, 4)$.

البعد بين النقطة P والمستقيم l تقريباً 7.2
أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l في كل مما يأتي باستعمال صيغة البعد بين نقطة ومستقيم:

(4) النقطة $P(5, 7)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(0, 1)$. 6

(5) النقطة $P(1, -9)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(4, 9)$ و $(4, -1)$. 3

(6) النقطة $P(-3, -10)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(3, 1)$ و $(-8, -1)$. 9.7 تقريباً.

أجد البعد بين النقطة والمستقيم في كل مما يأتي:

(7) $y - \frac{1}{6}x + 6 = 0$, $P(-6, 5)$ 7
(8) $y = x + 2$, $Q(2, 4)$ 0
(9) $y + \frac{1}{4}x = 1$, $S(4, 3)$ 2.9 تقريباً.

(10) $y = -3$, $T(5, 2)$ 5
(11) $x = 4$, $K(-2, 5)$ 6
(12) $y - x = 0$, $R(5, 3)$ 1.4 تقريباً.

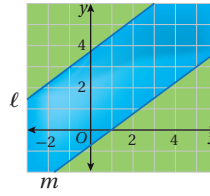
أجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين في ما يأتي:

(13) $4x - y + 1 = 0$ 2.2 تقريباً.
(14) $12x + 5y - 3 = 0$ 0.8 تقريباً.
(15) $2x - 3y + 4 = 0$ 3.1 تقريباً.

$4x - y - 8 = 0$

$12x + 5y + 7 = 0$

$y = \frac{2}{3}x + 5$



(16) نهر: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور جزء من نهر يمثل المستقيمان l و m صفتيه. أجد عرض النهر، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

علماً أن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 10 أمتار.

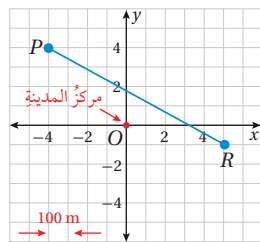
معادلة المستقيم $l: 3x - 4y + 15 = 0$

معادلة المستقيم $m: 3x - 4y - 3 = 0$

المسافة بين المستقيمين l, m في المستوى الإحداثي تساوي: 3.6
عرض النهر بالأمتار يساوي: $3.6 \times 10 = 36 \text{ m}$

إرشادات:

- في السؤال 20 (أكتشف الخطأ)، أوجه الطلبة إلى تحديد قيم A و B و C الخاصة بمعادلة المستقيم لتحديد الخطأ الذي وقع فيه عمران.
- في السؤال 21 (تبرير)، أذكر الطلبة بأن مساحة المثلث تساوي نصف طول القاعدة في الارتفاع، أي أنه يلزمهم تحديد قاعدة المثلث وإيجاد طولها باستعمال قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، ثم إيجاد معادلة المستقيم $\vec{AB}$ الذي يحوي قاعدة المثلث، ثم إيجاد ارتفاع المثلث بإيجاد البعد بين الرأس C والمستقيم $\vec{AB}$.



يظهر في المستوى الإحداثي المجاور منزل بسمّة الذي يقع عند النقطة P ، ومنزل رشا الذي يقع عند النقطة R .

17 أجد طول الطريق بين منزل بسمّة ومنزل رشا.
المسافة بين منزل رشا ومنزل بسمّة بالأمتار تساوي: $10.3 \times 100 \approx 1030$ m

18 أجد النقطة التي تمثل مُتَصَفَّ الطريق بين منزل بسمّة ومنزل رشا.
 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

19 إذا كان مركز المدينة يقع عند نقطة الأصل، فأجد أقصر مسافة بين هذا المركز والطريق الواصل بين منزلي بسمّة ورسا.
البعد بين النقطة O والمستقيم PQ تساوي تقريباً: 1.6 وحدة.

البعد بين مركز المدينة والطريق الواصل بين منزلي بسمّة ورسا بالأمتار يساوي: $1.6 \times 100 = 160$ m

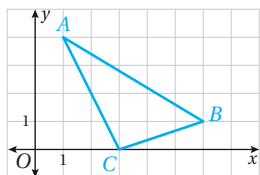
مهارات التفكير العليا

20 أكتشف الخطأ: وجد عمران البعد بين المستقيم l الذي معادلته: $y + 2x - 8 = 0$ والنقطة $P(1, -1)$ ، كما هو مبين أدناه. أكتشف الخطأ في حل عمران، وأصحّحه.

الخطأ في التعويض، إذ عوض عمران العدد -1 بدلاً من x ، وعوض العدد 1 بدلاً من y والصواب هو:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \times (1) + 1 \times (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + (-1) - 8|}{\sqrt{1+1}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1(1) + (2)(-1) + (-8)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$



21 تبرير: أجد مساحة المثلث المرسوم في المستوى الإحداثي المجاور، وأبرز إجابتي. أنظر الهامش.

22 نَحْدُ: أجد إحداثي النقطة (النقاط) على المحور x ، التي تبعد 4 وحدات عن المستقيم $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
النقاط هي: $(8, 0)$, $(-2, 0)$

إجابة السؤال في بند (أدرب وأحل المسائل):

$$(21) \text{ صيغة مساحة المثلث } A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

فأحتاج إلى إيجاد طول القاعدة AB ، وارتفاع المثلث h وهو البعد بين النقطة C و $\overline{AB}$
أولاً: أجد طول القاعدة AB

$$b = AB = \sqrt{34}$$

$$\text{ثانياً: أجد ارتفاع المثلث } h = \frac{14}{\sqrt{34}}$$

$$\text{ثالثاً: أجد مساحة المثلث } A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{34} \times \frac{14}{\sqrt{34}} = 7$$

إذن مساحة المثلث ABC تساوي 7 وحدات مربعة.

• أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

« إذا كان المستقيم l عمودياً على المستقيمين m, n ويقطعهما في النقطتين $(0, 6)$, $(a, 4)$ ، وكانت المسافة بين المستقيمين المتوازيين $\sqrt{5}$ وحدة، فأجد قيمة (قيم) a ومعادلي المستقيمين m و n .

قيم الثابت $a = \pm 1$

عندما $a = 1$ فإن معادلي المستقيمين m و n هما:

$$m: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$n: y = \frac{1}{2}x + 6$$

عندما $a = -1$ فإن معادلي المستقيمين m و n هما:

$$m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

نشاط التكنولوجيا:

• أوجّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيو جبرا لإيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين باتباع الخطوات الآتية:

« إدخال معادلي المستقيمين في شريط الإدخال.

« النقر على أيقونة  من شريط الأدوات.

« النقر على المستقيم الأول، ثم النقر على المستقيم الثاني ليظهر البعد بين المستقيمين المتوازيين في شريط الإدخال.

تعليمات المشروع:

• أطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوتين 8 و 9 من خطوات تنفيذ المشروع.

• أمنح الطلبة دقائق معدودة لكتابة فقرة عما تعلّموه في هذا الدرس، ثم أطلب إلى بعضهم قراءة الفقرات التي كتبوها.

البرهان الإحداثي Coordinate Proof

نتائج الدرس

- رسم مضلع في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه بدلالة أطوال أضلاعه المعطاة بصورة متغيرات.
- إيجاد إحداثيات رؤوس مضلعات مرسومة في مستوى إحداثي غير مدرج بدلالة إحداثيات رؤوس أخرى معطاة بصورة متغيرات.
- تعرف البرهان الإحداثي، وتوظيفه لبرهنة نظريات هندسية.
- تصنيف الأشكال الرباعية باستعمال البرهان الإحداثي.

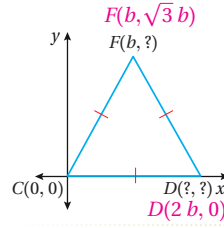
نتائج التعلم القبلي:

- تعرف خصائص متوازي الأضلاع وحالاته الخاصة (المستطيل، والمربع، والمعين).
- إثبات إن كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع باستخدام خواص متوازي الأضلاع.
- التطبيق على خواص متوازي الأضلاع وحالاته الخاصة الآتية:
- « القطران متناصفان في الأشكال جميعها.
- « القطران متعامدان وينصفان الزوايا عند الرؤوس في كل من المربع والمعين.
- « القطران متطابقان في كل من المربع والمستطيل.
- حل مسائل تتعلق في خواص متوازي الأضلاع وحالاته الخاصة.
- التطبيق على نظريات المثلث المتطابق الضلعين الآتية:
- « العمود النازل من الرأس إلى القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس.
- « القطعة المتوسطة الواصلة من رأس المثلث إلى القاعدة تكون عمودية عليها، وتنصف زاوية الرأس.
- « منصف زاوية الرأس يكون عمودياً على القاعدة وينصفها.
- « زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين تكونان متطابقتين.
- « زوايا المثلث المتطابق الأضلاع الثلاث متطابقة وقياس كل منها 60°

استعمال الهندسة الإحداثية لبرهنة نظريات هندسية.

البرهان الإحداثي.

يبيّن الشكل المجاور المثلث المتطابق الأضلاع CFD .
أجد الإحداثيات المجهولة للرؤوس.

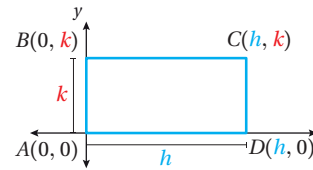


تمثيل المضلع في المستوى الإحداثي وتسميته

لتمثيل مضلع في المستوى الإحداثي، يُفضل رسم أحد رؤوسه على نقطة الأصل وأحد أضلاعه على محور إحداثي؛ وذلك لتسهيل تحديد إحداثيات بقيّة رؤوسه اعتماداً على خصائصه.

مثال 1

- أرسم في المستوى الإحداثي المستطيل $ABCD$ ، الذي طوله h وعرضه k وحدة.
- أجعل زاوية القائمة A على نقطة الأصل؛ لأرسمه في الربع الأول.
- أفترض أن AD يمثل طول المستطيل ويساوي h وحدة، وأن AB يمثل عرضه ويساوي k وحدة.
- أرسم D على المحور x . وبما أن طول AD يساوي h وحدة، فإن الإحداثي y للنقطة D هو 0 ، والإحداثي x هو h .
- أرسم B على المحور y . وبما أن طول AB يساوي k وحدة، فإن الإحداثي x للنقطة B هو 0 ، والإحداثي y هو k .
- أرسم الرأس C ، بحيث يكون إحداثياته (h, k) .



- إيجاد ميل المستقيم المار بنقطتين في المستوى الإحداثي.
- تحديد ما إذا كان مستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك من خلال الميل.
- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

مراجعة التعلم القبلي ومعالجة الفاقد التعليمي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

- أقسّم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وأزوّد كل مجموعة بورقة المصادر 1: الهندسة الإحداثية.
- أطلب إلى كل مجموعة مناقشة الأسئلة في ورقة المصادر والإجابة عنها.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش الحل مع الصف كاملاً.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، وتأمل الشكل المجاور لها، ثم أسألهم:
 - « ما الشكل الهندسي المُمثل في المستوى الإحداثي؟ مثلث.
 - « ما نوع هذا المثلث؟ متطابق الأضلاع.
 - « كيف عرفتم/ عرفتن ذلك؟ الإشارات المتماثلة المرسومة على الأضلاع الثلاثة تعني أن للأضلاع الثلاثة الطول نفسه.
 - « ما إحداثيات الرأس C ؟ $(0, 0)$
 - « ما الإحداثي x للرأس D ؟ 0
 - « ما الإحداثي y للرأس D ؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « ما الإحداثي y للرأس F ؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- ألفت انتباه الطلبة إلى أن المستوى الإحداثي المجاور للمسألة غير مدرج؛ لذا لا يمكن تحديد الإحداثي y لكل من الرأسين D و F ، وإنما يمكن التعبير عنه بدلالة b وذلك باستعمال خصائص المثلث المتطابق الأضلاع، ثم أسألهم:
 - « ما خصائص المثلث متطابق الأضلاع؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - « أي هذه الخصائص يمكن استعماله لإيجاد الإحداثي y لكل من النقطتين D و F ؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أناقش الطلبة في إجاباتهم، ثم أسألهم:
 - « ما رأيكم في إجابة زميلكم/ زميلتك؟
 - « مَنْ يتفق مع إجابة زميله/ زميلتها؟
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أذكر الطلبة بما تعلموه سابقاً حول رسم المضلع في المستوى الإحداثي، إذا علّمت إحداثيات رؤوسه، وأقدّم لهم مثلاً على ذلك.
- أقسّم الطلبة إلى مجموعات رباعية، وأزوّد كل مجموعة بورقة المصادر 2: مستوى إحداثي فارغ، ثم أطلب إليهم رسم المستطيل $ABCD$ في الربع الأول من المستوى الإحداثي، الذي طوله 5 وحدات، وعرضه 4 وحدات، بحيث يكون الرأس A على نقطة الأصل، وضلعان من أضلاعه منطبقين على المحورين الإحداثيين، ثم أطلب إليهم تحديد إحداثيات كل رأس من رؤوسه.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش إجابات المجموعات مع الصف كاملاً، وأتوصّل معهم إلى أن تحديد إحداثيات رؤوس المستطيل في هذه الحالة اعتمد على أن أحد رؤوس المستطيل مثبت على نقطة الأصل، وأن ضلعين من أضلاعه منطبقان على المحورين الإحداثيين، إضافة إلى خصائص المستطيل.
- أطلب إلى المجموعات رسم المثلث ABC القائم الزاوية والمتطابق الضلعين في الربع الأول من المستوى الإحداثي، الذي طول ضلعيه المتطابقين 4 وحدات، بحيث يكون رأس القائمة B على نقطة الأصل، وساقاه المتطابقان منطبقين على المحورين الإحداثيين.
- أتابع عمل المجموعات، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.
- أناقش إجابات المجموعات مع الصف كاملاً، وأتوصّل معهم إلى أن تحديد إحداثيات رؤوس المثلث في هذه الحالة اعتمد على أن رأس القائمة مثبت عند نقطة الأصل، وأن ساقيه المتطابقين منطبقان على المحورين الإحداثيين، إضافة إلى خصائص المثلث القائم الزاوية، ثم أسأل الطلبة:
 - « إذا كانت أطوال أضلاع المضلع معطاة بدلالة متغيرات، فكيف يمكن تمثيل المضلع في المستوى الإحداثي وتحديد إحداثيات رؤوسه؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أناقش الطلبة في إجابة السؤال السابق، وأتوصّل معهم إلى أنه عند رسم مضلع أطوال أضلاعه غير معلومة في المستوى الإحداثي فإننا نبدأ برسم أحد رؤوسه على نقطة الأصل، وأحد أضلاعه على المحور الإحداثي (إن أمكن)، ثم يمكن تحديد إحداثيات رؤوسه اعتماداً على خصائص هذا المضلع.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه عند رسم مضلع أطوال أضلاعه غير معلومة في المستوى الإحداثي فإننا نستعمل مستوى إحداثيًا غير مدرج.
- عند مناقشة الفرع 1 من المثال 1، أذكر الطلبة بأن طول المستطيل يمثل طول الضلع الطويل فيه، وعرض المستطيل يمثل طول الضلع القصير فيه، وتأسيسًا على ذلك فإننا نرسم الضلع الذي يمثل الطول بحيث يكون أطول من الضلع الذي يمثل العرض عند تمثيل المستطيل في المستوى الإحداثي.
- في الفرع 1 من المثال 1، أخبر الطلبة أنه يمكن رسم طول المستطيل على المحور y ، وعرضه على المحور x ، ثم أطلب إليهم رسمه في هذه الحالة وتحديد إحداثيات رؤوسه.
- في الفرع 2 من المثال 1، أذكر الطلبة بخواص المثلث متطابق الضلعين، وأطلب إليهم تحديد الخاصية التي تساعد على رسم المثلث JKL وهي أن منتصف زاوية الرأس في المثلث المتطابق الضلعين عمودي على القاعدة وينصفها.
- ألفت انتباه الطلبة أنه يمكن تسمية الإحداثي الذي لا يمكن تحديده بأي رمز مجهول، ومثال ذلك الإحداثي y للرأس L في المثلث JKL في الفرع 2 من المثال 1.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية واللغة الإنجليزية، وأحفّز الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجهم.

- أناقش حل الفرع 1 من المثال 1 مع الطلبة بطرح الأسئلة الآتية:
 - « ما الشكل الهندسي المطلوب رسمه في المستوى الإحداثي؟ مستطيل.
 - « ما هي خواص المستطيل؟ إجابة ممكنة: زواياه قوائم، وكل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.
- أرسم مستوى إحداثيًا غير مدرج على اللوح، ثم أرسم رأس المستطيل A على نقطة الأصل وأثبت إحداثياته على الرسم، ثم أخبر الطلبة أننا سنرسم المستطيل في الربع الأول من المستوى الإحداثي، وأننا سنفترض أن AD يمثل طول المستطيل، وأن AB يمثل عرضه، ثم أكلّف أحد الطلبة رسم بقية الرؤوس بحيث يكون الرأس D على المحور x ، والرأس B على المحور y ، ثم أسأل:
 - « ما طول $\overline{AD}$ ؟ h وحدة.
 - « أي إحداثي الرأس D له علاقة بطول $\overline{AD}$ ؟ لماذا؟ الإحداثي x ؛ وذلك لأن الرأس D يقع على المحور x ، لذا فإن الإحداثي x للرأس D يمثل بعد الرأس D عن الرأس A المرسوم على نقطة الأصل.
 - « ما الإحداثي y للرأس D ؟ لماذا؟ 0 ؛ لأن الرأس D مرسوم على المحور x .
- أطلب إلى أحد الطلبة تثبيت إحداثي الرأس D على الرسم، ثم أسأل:
 - « ما طول $\overline{AB}$ ؟ k وحدة.
 - « أي إحداثي الرأس B له علاقة بطول $\overline{AB}$ ؟ لماذا؟ الإحداثي y ؛ وذلك لأن الرأس B يقع على المحور y ، لذا فإن الإحداثي y للرأس B يمثل بعد الرأس B عن الرأس A المرسوم على نقطة الأصل.
 - « ما الإحداثي x للرأس B ؟ لماذا؟ 0 ؛ لأن الرأس B مرسوم على المحور y .
- أطلب إلى أحد الطلبة تثبيت إحداثي الرأس B على الرسم، ثم أسأل:
 - « ما الإحداثي x للرأس C ؟ لماذا؟ h ؛ لأن الرأس C يقع عموديًا فوق الرأس D في المستوى الإحداثي، لذا فإن للرأسين C و D الإحداثي x نفسه.
 - « ما الإحداثي y للرأس C ؟ لماذا؟ k ؛ لأن الرأس C يقع يمين الرأس B في المستوى الإحداثي، لذا فإن للرأسين C و B الإحداثي y نفسه.
- أطلب إلى أحد الطلبة تثبيت إحداثي الرأس C على الرسم.
- أناقش حل فرع 2 من المثال 1 مع الطلبة باتباع الإجراءات نفسها التي اتبعتها في مناقشة الفرع 1.

- أوضح للطلبة أنه يمكن تحديد الإحداثيات المجهولة لرؤوس مضلع مرسوم في المستوى الإحداثي، وذلك باستعمال المعلومات المعطاة على الشكل بالإضافة إلى خواص ذلك المضلع.

- أرسم الشكل الوارد في الفرع 1 من المثال 2، ثم ناقش مع الطلبة الحل بطرح الأسئلة الآتية:
« ما الشكل الهندسي المرسوم في المستوي الإحداثي؟ مثلث.

- « ما نوع هذا المثلث؟ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.

- « كيف عرفتم / عرفتم ذلك؟ لأن الزاوية F منطبقة على الزاوية القائمة التي يصنعها المحوران الإحداثيان، والإشارات المتماثلة المرسومة على ساقي المثلث القائم الزاوية تعني أن لساقيه الطول نفسه.

- « ما إحداثي الرأس F ؟ لماذا؟ $(0, 0)$ ؛ لأنه يقع على نقطة الأصل.

- أطلب إلى أحد الطلبة تثبيت إحداثي الرأس F على الرسم، ثم أسأل:

- « ما طول $\overline{EF}$ ؟ لماذا؟ a وحدة؛ لأن الإحداثي y للرأس E يمثل طول $\overline{EF}$.

- « ما طول $\overline{FG}$ ؟ لماذا؟ a وحدة؛ لأن $\overline{FG} \cong \overline{EF}$.

- « ما الإحداثي x للرأس G ؟ لماذا؟ a ؛ لأن طول $\overline{FG}$ يساوي a وحدة.

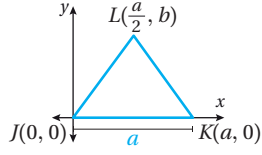
- « ما الإحداثي y للرأس G ؟ لماذا؟ 0 ؛ لأن الرأس G يقع على نقطة الأصل.

- أطلب إلى أحد الطلبة تثبيت إحداثي الرأس G على الرسم.

- ناقش مع الطلبة الفرعين 2 و 3 من المثال 2، باتباع الإجراءات نفسها التي اتبعناها في مناقشة الفرع 1.

2 أرسم في المستوى الإحداثي المثلث المتطابق الضلعين JLK ، الذي فيه طول $\overline{JK}$ يساوي a وحدة.

- أجعل رأس المثلث J على نقطة الأصل؛ لأرسمه في الربع الأول.
- أرسم K على المحور x ، وبما أن طول $\overline{JK}$ يساوي a وحدة، فإن الإحداثي y للنقطة K هو 0 ، والإحداثي x هو a .
- بما أن المثلث متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للرأس L يقع في منتصف المسافة بين 0 و a ؛ أي أنه يساوي $\frac{a}{2}$ ، وبما أن الإحداثي y لا يمكن تحديده، فيمكن تسويته b .



تحقق من فهمي أنظر الهامش.

- (a) أرسم في المستوى الإحداثي المستطيل $ABCD$ ، الذي طوله a وحدة، وعرضه $2b$ وحدة.
- (b) أرسم في المستوى الإحداثي المثلث قائم الزاوية HMN ، الذي فيه طول $\overline{HM}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NM}$ يساوي b وحدة.

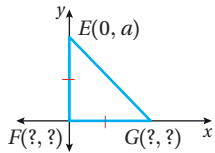
إيجاد الإحداثيات المجهولة

يمكن تحديد إحداثيات مجهولة لرؤوس مضلع مُمثل في المستوى الإحداثي، وذلك باستعمال خصائص المضلع والإحداثيات الأخرى المعروفة.

مثال 2

أجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

- 1 بما أن الرأس F يقع على نقطة الأصل فإن إحداثيته $(0, 0)$.
- بما أن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$ فإن طول $\overline{GF}$ يساوي a وحدة، وهو يمثل الإحداثي x للرأس G .
- بما أن الرأس G على المحور x ، فإن إحداثيته y يساوي 0 . ومنه، فإن إحداثي G هما $(a, 0)$.

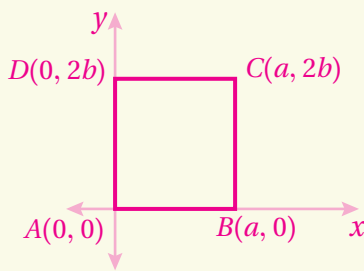


أفكر

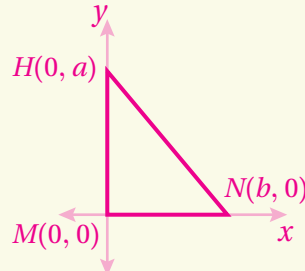
هل المثلث في الفرع 1 من المثال 2 قائم الزاوية؟ أبرر إجابتك.

إجابة التدريب في بند (تحقق من فهمي 1):

a)



b)



إرشادات:

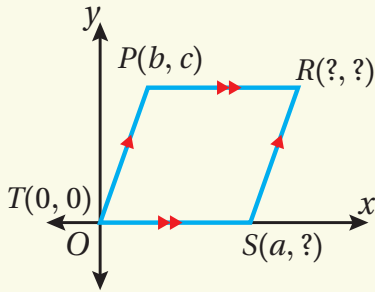
- ألفت انتباه الطلبة إلى صندوق (أندكّر) الوارد في هامش الفرع 2 من المثال 2؛ لما له من أهمية في تحديد نوع الشكل الهندسي في السؤال قبل البدء بتحديد إحداثياته.
- أذكر الطلبة بأن الأسهم الحمراء المتماثلة تشير إلى الأضلاع المتوازية.

تنويع التعليم

- أطلب إلى الطلبة إيجاد طول $\overline{EG}$ بدلالة a .

$$EG = \sqrt{2} a$$

- قد يجد بعض الطلبة من ذوي المستويين المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تحديد الإحداثي x للرأس R في الشكل أدناه؛ ولعلاج ذلك يمكنني تقديم المفهوم عددياً أولاً، ثم أقدمه باستعمال قيم مجهولة.



أندكّر

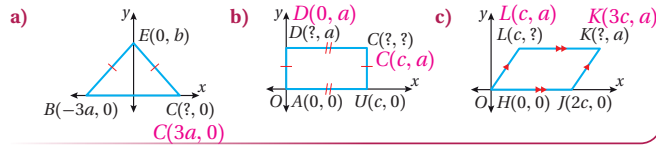
إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قوائم، وعندها يكون مستطيلاً، وبما أن أضلاعه متطابقة وزواياه قوائم فالشكل الهندسي مربع.

أندكّر

إذا كان الشكل متوازي أضلاع فإن الأضلاع المتقابلة متطابقة.

أتحقق من فهمي

أجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



- بما أن الرأس M يقع عند نقطة الأصل فإن إحداثييه $(0, 0)$.

بما أن الرأس Q يقع على المحور x ، ويقع الرأس N على المحور y ، فإن $\angle NMQ$ قائمة، إذن أضلاع الشكل متطابقة. وعليه، فالشكل مربع.

بما أن الشكل مربع فإن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وهو يمثل الإحداثي y للرأس N .

بما أن الرأس N يقع على المحور y ، فإن إحداثي x يساوي 0 . ومنه، فإن إحداثي N هما $(0, a)$.

بما أن الشكل مربع، فإن بُعد الرأس P عن المحور x وعن المحور y هو a . ومنه، فإن إحداثي P هما (a, a) .
- بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيين فالشكل متوازي أضلاع.

بما أن الرأس S على المحور x فإن إحداثي y يساوي 0 . ومنه، فإن إحداثي S هما $(a, 0)$.

بما أن القطع المستقيمة الأفقية متوازية دائماً، فإن للنقطتين P و R الإحداثي y نفسه، وبما أن طول $\overline{PR}$ يساوي a وحدة والإحداثي x للنقطة P هو b ، فإن الإحداثي x للنقطة R هو $b + a$. ومنه، فإن إحداثي R هما $(a + b, c)$.

- أذكر الطلبة بمفهوم البرهان وخطواته، ثم أذكرهم بنوعي البراهين التي تعلموها في الصف الثامن، وهما: البرهان السهمي، والبرهان ذو العمودين.
- أقدم للطلبة البرهان الإحداثي بوصفه نوعاً جديداً من أنواع البراهين، وتُستعمل فيه أشكال هندسية مرسومة في المستوى الإحداثي، ويتضمن استعمال متغيرات تمثل إحداثيات رؤوس الشكل أو قياسات زواياه وأضلاعه، والذي يمكنهم من توظيف ما تعلموه في المثاليين السابقين.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 3، ثم أرسم على اللوح في مستوى إحداثي غير مدرج مثلثاً غير محدد القياسات لتمثيل النظرية، وأناقش الطلبة في تحديد إحداثيات كل من رؤوس المثلث باستعمال قيم متغيرة، ويمكن الاستعانة في هذا بالخطوة 1 من خطوات البرهان.

- أعدد مع الطلبة المعطيات باستعمال رؤوس المثلث التي تم افتراضها في الخطوة 1 من الإثبات، ثم أناقش معهم المطلوب لتوصل معهم من خلال المناقشة إلى أن للإثبات شقين؛ أحدهما إثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ، والآخر إثبات أن $DE = \frac{1}{2} AC$.
- أبدأ بمناقشة الشق الأول من الإثبات مع الطلبة بطرح الأسئلة الآتية:

« كيف يمكن تحديد ما إذا كان مستقيمان يقعان في المستوى نفسه متوازيين أم لا؟ بإيجاد ميل كل منهما وتحديد ما إذا كان الميلان متساويين أم لا.

« ما ميل $\overline{AC}$ ؟ لماذا؟ 0؛ لأنه منطبق على المحور x .

« ما ميل $\overline{DE}$ ؟ ستختلف إجابات الطلبة.

- أناقش إجابات الطلبة عن السؤال السابق، وأتوصل معهم إلى أنه لتحديد ميل $\overline{DE}$ يلزم إيجاد إحداثيي كل من D و E أولاً والتي يمكن إيجادها باستعمال صيغة نقطة المنتصف، ثم إيجاد ميل $\overline{DE}$.

- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد إحداثيي كل من D و E ، وإلى آخر إيجاد ميل $\overline{DE}$ الذي يساوي 0، ثم ألفت انتباه الطلبة إلى أن ميل $\overline{AC}$ يساوي ميل $\overline{DE}$ ، وأن هذا يعني أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.

البرهان الإحداثي

البرهان الإحداثي (coordinate proof) هو أحد أنواع البراهين، تُستعمل فيه أشكال هندسية مرسومة في المستوى الإحداثي لإثبات صحة نظريات هندسية، ويتضمن أيضاً استعمال متغيرات تمثل إحداثيات رؤوس الشكل أو قياسات زواياه أو أضلاعه؛ لضمان أن النتيجة التي يجري برهانها صحيحة لجميع الأشكال من النوع نفسه بغض النظر عن إحداثيات رؤوسه.

أندكّر

تعلمت سابقاً نوعين من البراهين، هما: البرهان السهمي، والبرهان ذو العمودين.

مثال 3

أكتب برهاناً إحصائياً لاثبت أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث تساوي نصف طول الضلع الثالث وتوازيه.

الخطوة 1: أرسم المثلث في المستوى الإحداثي.

أرسم المثلث ABC في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات كل من رؤوسه.

الخطوة 2: أعدد المعطيات والمطلوب.

المعطيات: في $\triangle ABC$

• D نقطة منتصف $\overline{AB}$.

• E نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ، وأن $DE = \frac{1}{2} AC$.

الخطوة 3: البرهان

(1) أثبت أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

باستعمال صيغة نقطة المنتصف، فإن إحداثيي كل من D و E هما:

$$D\left(\frac{b+0}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = D\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \quad E\left(\frac{b+a}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = E\left(\frac{b+a}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

بما أن الإحداثيي y لكل من D و E متساويان، فإن ميل $\overline{DE}$ يساوي صفراً، وبما أن $\overline{AC}$ منطبق على المحور x ، فإن ميله أيضاً يساوي صفراً. إذن، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ لأن لهما الميل نفسه.

أتعلم

المثلث ABC الذي رؤوسه في المستوى الإحداثي غير محدد القياسات؛ لأن اختيار الإحداثيات اعتمد على قيمتين متغيرتين هما a و b ؛ لذا يمكن استعمال هذا المثلث لإثبات صحة علاقات في جميع المثلثات.

أندكّر

للمستقيمات المتوازية الميل نفسه، والمستقيمات الأفقية جميعها متوازية وميلها يساوي 0.

• أنتقل إلى مناقشة الشق الثاني بطرح الأسئلة الآتية:

« كيف يمكن إثبات أن $DE = \frac{1}{2} AC$ ؟ »

بإيجاد طول DE ، وطول AC ، ثم التحقق من أن $DE = \frac{1}{2} AC$.

« كيف يمكن إيجاد طول كل من DE و AC ؟ »

باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد.

« لماذا؟ لأن القطعتين المستقيمتين أفقيتان في المستوى الإحداثي.

• أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد طول DE ، وإلى آخر إيجاد طول AC ، ثم أطلب إليهم المقارنة بين الطولين للتوصل إلى أن $DE = \frac{1}{2} AC$ ، ثم أوضح لهم أن البرهان اكتمل بإثبات شقيه.

✓ **إرشاد:** ألفت انتباه الطلبة إلى أنه لا يجوز استعمال الأعداد لتمثيل رؤوس الأشكال أو قياسات أضلاعها عند إثبات النظريات، وأنه يلزم استعمال المتغيرات في ذلك؛ لضمان أن النتيجة التي يجري برهانها صحيحة لجميع الأشكال من النوع نفسه بغض النظر عن إحداثيات الرؤوس.

(2) أثبت أن $DE = \frac{1}{2} AC$

استعمل صيغة المسافة على خط الأعداد لإيجاد DE .

$$\begin{aligned} DE &= |x_2 - x_1| && \text{صيغة المسافة على خط الأعداد} \\ &= \left| \frac{b+a}{2} - \frac{b}{2} \right| && \text{بالتعويض } x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = \frac{b+a}{2} \\ &= \left| \frac{a}{2} \right| && \text{بالتبسيط} \\ &= \frac{a}{2} && \text{بإيجاد القيمة المطلقة} \end{aligned}$$

استعمل صيغة المسافة على خط الأعداد لإيجاد AC .

$$\begin{aligned} AC &= |x_2 - x_1| && \text{صيغة المسافة على خط الأعداد} \\ &= |a - 0| && \text{بالتعويض } x_1 = 0, x_2 = a \\ &= |a| && \text{بالتبسيط} \\ &= a && \text{بإيجاد القيمة المطلقة} \end{aligned}$$

$$\text{بما أن } DE = \frac{a}{2} \text{ و } AC = a, \text{ فإن } DE = \frac{1}{2} AC$$

✍ **اتحقق من فهمي**

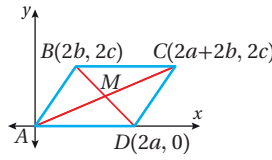
اكتب برهاناً إحداثياً لأثبت أن القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث قائم الزاوية ومتنصف الوتر تساوي نصف طول الوتر. أنظر الهامش.

أندكر

من الأسهل إيجاد طول القطعة المستقيمة الأفقية في المستوى الإحداثي باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد، وذلك بإيجاد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي x لكل من نقطتي نهايتي القطعة، وإيجاد طول القطعة المستقيمة الرأسية أجد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي y لكل من نقطتي نهايتي القطعة.

مثال 4

اكتب برهاناً إحداثياً لأثبت أنه إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإن قطريه ينصف كل منهما الآخر.



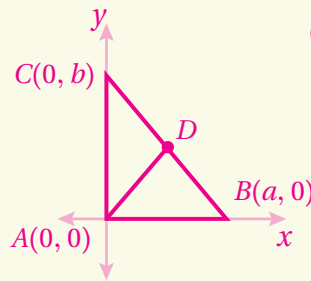
الخطوة 1: أرسم متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي.

أرسم $ABCD$ في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات كل من رؤوسه، كما في الشكل المجاور.

أتعلم

بما أن صيغة نقطة المنتصف تتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2، فمن الأسهل استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2

إجابة التدريب في بند (أتحقق من فهمي 3):



أرسم مثلثاً قائم الزاوية، وأحدد إحداثياته على الرسم

المعطيات: $\triangle ABC$ قائم الزاوية في A

D نقطة منتصف BC

المطلوب: إثبات أن: $AD = \frac{1}{2} BC$

البرهان:

(1) أجد إحداثيات D

$$D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

(2) أجد AD

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

(3) أجد BC

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{إذن، } AD = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} BC$$

أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 4، ثم أرسـم على اللوح في مستوى إحداثي غير مدرج متوازي أضلاع غير محدد القياسات لتمثيل النظرية، وأناقش الطلبة في تحديد إحداثيات كل من رؤوس المتوازي باستعمال قيم متغيرة، ويمكن الاستعانة في هذا بالخطوة 1 من خطوات البرهان.

أحدّد مع الطلبة المعطيات باستعمال رؤوس المتوازي التي تم افتراضها في الخطوة 1 من الإثبات، ثم أناقش معهم المطلوب لأنوِّصل معهم من خلال المناقشة إلى أن للإثبات شقين؛ أحدهما إثبات أن M نقطة منتصف $\overline{AC}$ وأنها أيضًا نقطة منتصف $\overline{BD}$.

أطلب إلى أحد الطلبة البدء بخطوات البرهان بإيجاد نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، وإلى آخر إيجاد نقطة منتصف $\overline{BD}$ ، لأنوِّصل معهم بعدها إلى أن لكل من $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ نقطة المنتصف نفسها، وبما أن M تمثل نقطة تقاطع هذين القطرين، فإن هذا يعني أن M نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، ونقطة منتصف $\overline{BD}$.

إرشاد: ألفت انتباه الطلبة عند تحديد إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع في المثال 4، إلى أنه من الأسهل تحديد إحداثيات من مضاعفات العدد 2؛ وذلك لأن صيغة نقطة المنتصف تتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2.

تنويع التعليم

قد يجد بعض الطلبة من ذوي المستويين المتوسط ودون المتوسط صعوبة في رسم الشكل الهندسي المناسب لإثبات النظريات الهندسية باستعمال البرهان الإحداثي؛ لذا أمّنهم بعض الوقت وأقدّم لهم الدعم اللازم.

الخطوة 2: أحدّد المعطيات والمطلوب.

المعطيات:

• إحداثيات رؤوس $ABCD$.

• نقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هي M .

المطلوب: إثبات أن M نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، ونقطة منتصف $\overline{BD}$ أيضًا.

الخطوة 3: البرهان

• أجدُ منتصف $\overline{AC}$ باستعمال صيغة نقطة المنتصف.

$$\left(\frac{2a+2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2} \right) = (a+b, c)$$

• أجدُ منتصف $\overline{BD}$ باستعمال صيغة نقطة المنتصف.

$$\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{2c+0}{2} \right) = (a+b, c)$$

• بما أن لكل من $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ نقطة المنتصف نفسها، ونقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هي M ، فإن M نقطة منتصف $\overline{AC}$ ونقطة منتصف $\overline{BD}$.

أتحقّق من فهمي

أكتبُ برهانًا إحصائيًا لأثبت أنه إذا كان في الشكل الرباعيّ ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع. أنظر الهامش.

تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

تعلّمتُ سابقًا أن كلّ من المستطيل والمعين والمربّع هو حالة خاصّة من متوازي الأضلاع، ولكلّ شكلٍ منها خصائصٌ مُميّزة.

حالات خاصّة من متوازي الأضلاع

مراجعة المفهوم

- المستطيل متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم وقُطْرَاهُ متطابقان.
- المعين متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة وقُطْرَاهُ متعامدان.
- المربّع متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة وزواياه الأربع قوائم وأقطاره متعامدة ومتطابقة.

أندجّر

جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين تطبّق على المربّع.

إجابة التدريب في بند (أتحقّق من فهمي 4):

أرسم الشكل الرباعي $ABCD$ فيه الضلعان $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$ متوازيان ومتطابقان،

ثم أحدّد إحداثيات رؤوسه على المستوى الإحداثي.

المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه:

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

المطلوب: إثبات أن الشكل الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع.

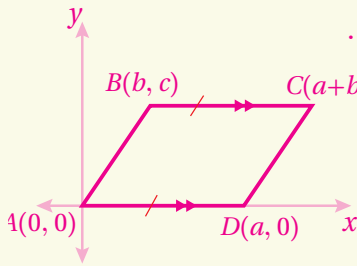
البرهان: من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ يبقى أن نثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$$\text{ميل } \overline{AB} : m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c}{b} \quad \text{ميل } \overline{DC} : m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c}{b}$$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{DC}$ ويساوي $\frac{c}{b}$ إذن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

بما أن الشكل الرباعي $ABCD$ فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين، إذن: $ABCD$ متوازي أضلاع.



- أراجع الطلبة بما تعلموه سابقاً حول الحالات الخاصة من متوازي الأضلاع وخصائص كل منها.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة نص المثال 5، ثم أطلب إلى آخر رسم متوازي الأضلاع $ABCD$ الوارد في المثال في المستوى الإحداثي.
- أناقش الطلبة في معطيات المسألة والمطلوب منها، ثم أوجههم إلى ملاحظة أن الشكل لا يبدو مربعاً أو مستطيلاً، وأنه يبدو معيناً، ولكن يلزم التحقق من ذلك جبرياً، ثم أسألهم:

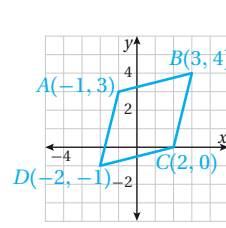
« كيف يمكن إثبات أن متوازي الأضلاع هذا معين؟ بإثبات أن قطريه غير متطابقين، وأنهما متعامدان.

« كيف يمكن التحقق من أن قطري متوازي الأضلاع غير متطابقين؟ بإيجاد طول كل من قطر باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي؛ فإذا كان الطولان غير متساويين، فإن هذا يعني أن القطرين غير متطابقين.

« كيف يمكن التحقق من أن القطرين متعامدان؟ بإيجاد ميل كل قطر؛ فإذا كان حاصل ضرب الميلين يساوي -1 ؛ فإنهما متعامدان.

- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد طول كل من قطري متوازي الأضلاع، ومن ثم أطلب إلى الطلبة المقارنة بين الطولين للتحقق من أن قطري متوازي الأضلاع غير متطابقين؛ ومنه يمكن التوصل إلى حقيقة أن متوازي الأضلاع هذا ليس مستطيلاً ولا مربعاً.
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد ميل كل من قطري متوازي الأضلاع، ومن ثم أطلب إلى الطلبة إيجاد حاصل ضرب الميلين للتحقق من أن ناتج الضرب يساوي -1 ؛ ومنه يمكن التوصل إلى حقيقة أن متوازي الأضلاع هذا معين.

أحدّد ما إذا كان $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $B(3, 4)$ ، $C(2, 0)$ ، $D(-2, -1)$ ، $A(-1, 3)$ مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً.



الخطوة 1: أرسم متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي. أرسم $ABCD$ في المستوى الإحداثي، كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أحدّد المعطيات والمطلوب.

المعطيات: إحداثيات رؤوس $ABCD$.

المطلوب: إثبات أن $ABCD$ معين أو مستطيل أو مربع.

الخطوة 3: البرهان

إذا كان قطراً متوازي الأضلاع متطابقين فإنه مستطيل، وإذا كانا متعامدين فإنه معين، وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مربع.

- أستعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولَي القطرين $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

$$AC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{((-2) - 3)^2 + ((-1) - 4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

بما أن $3\sqrt{2} \neq 5\sqrt{2}$ فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $ABCD$ ليس مستطيلاً ولا مربعاً.

- أستعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{BD}$	ميل $\overline{AC}$
$m = \frac{(-1) - 4}{(-2) - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$	$m = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1$

بما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1 فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $ABCD$ معين.

أنتحَق مِن فهمي

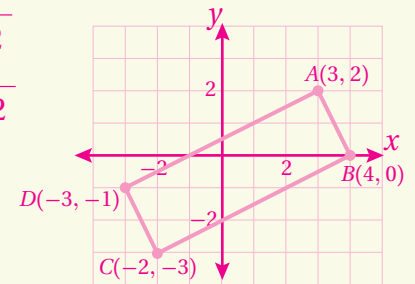
أحدّد ما إذا كان $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $B(4, 0)$ ، $C(-2, -3)$ ، $D(-3, -1)$ ، $A(3, 2)$ مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً. أنظر الهامش.

إجابة التدريب في بند (أنتحَق من فهمي 5):

$$AC = \sqrt{((-2) - 3)^2 + ((-3) - 2)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{((-3) - 4)^2 + ((-1) - 0)^2} = 5\sqrt{2}$$

بما أن $AC = BD$ فإن القطرين متطابقان، إذن: متوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل أو مربع.



$$m = \frac{-5}{-5} = 1 \quad \text{ميل } \overline{AC}$$

$$m = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7} \quad \text{ميل } \overline{BD}$$

بما أن ميل $\overline{AC}$ هو ليس معكوس مقلوب ميل $\overline{BD}$ ، إذن القطران غير متعامدين. إذن $ABCD$ مستطيل فقط وليس مربعاً.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجّه الطلبة إلى بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13 - 1)، والمسائل (20 - 17) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.

- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكنوا من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، وأحفز الطلبة على طرح أي تساؤل عن خطوات الحل المقدمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

- إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (23 - 21).
- أرسد أية أفكار غير تقليدية من الطلبة، ثم أطلب إلى هؤلاء الطلبة كتابة هذه الأفكار على اللوح.

إرشادات:

- في السؤال 22 (أكتشف الخطأ)، أوجّه الطلبة إلى استخدام خصائص المستطيل بوصفه حالة خاصة من متوازي الأضلاع لمعرفة الإجابة الصحيحة.
- في السؤال 23 (تحدّ)، ألفت انتباه الطلبة إلى توظيف خصائص متوازي الأضلاع أثناء الحل.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أرسمُ كلاً من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات رؤوس كل منها: (1-4) أنظر الهامش.

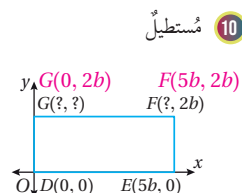
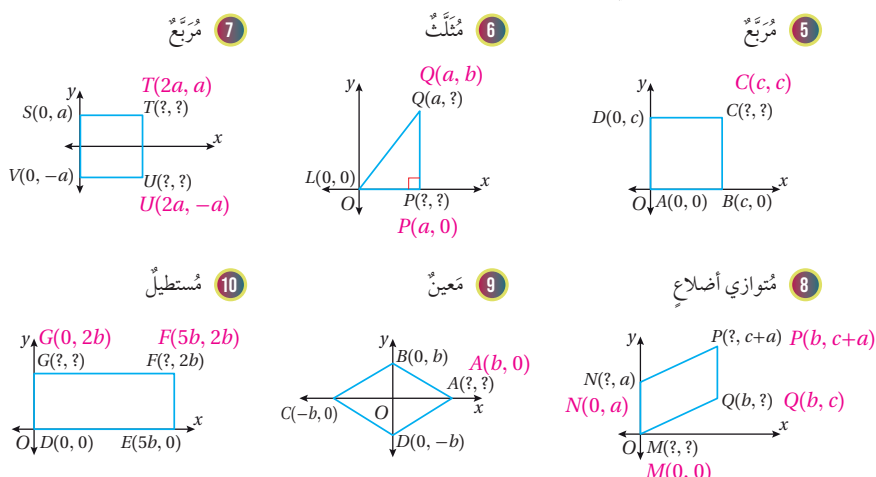
1 المثلث قائم الزاوية RMN ، الذي طول MN فيه يساوي 3 وحدات، وطول MR يساوي 4 وحدات.

2 المربع $ABCD$ ، الذي طول ضلعه $3a$.

3 المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين JGF ، الذي طول كل من ساقيه p وحدة.

4 المثلث متطابق الأضلاع QWR ، الذي طول ضلعه $4b$.

أجدُ الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



أكتبُ برهاناً إحداثياً لأثبتُ كلاً مما يأتي: (11-13) أنظر ملحق الإجابات.

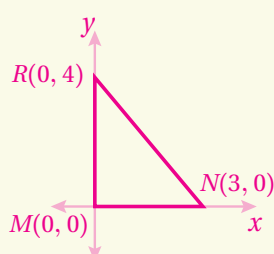
11 إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

12 إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع.

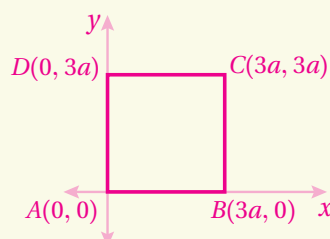
13 العمود النازل من رأس المثلث المتطابق الضلعين إلى القاعدة يُنصف القاعدة.

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

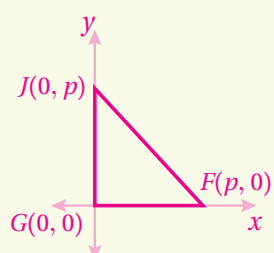
1)



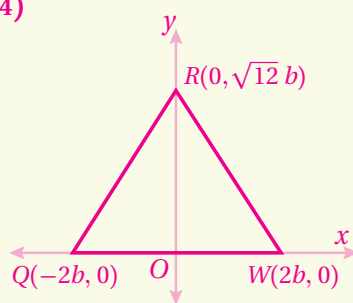
2)



3)



4)



ويمكن أن يكون:

$Q(0, 0), W(4b, 0), R(2b, \sqrt{12}b)$

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

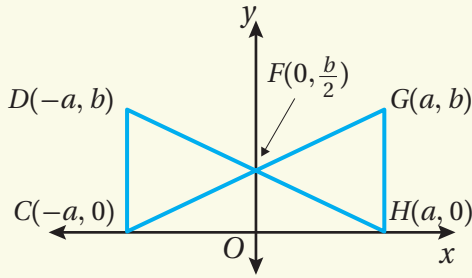
المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 15, 22 كتاب التمارين: (1 - 7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 14, 16, 22 كتاب التمارين: (3 - 10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 15, 16, (21 - 23) كتاب التمارين: (8 - 12)

الإثراء

5

أطلب إلى الطلبة حل السؤال الإثرائي الآتي:

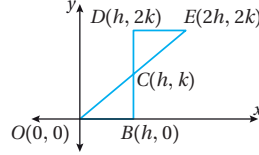
« أستعمل البيانات المعطاة على الشكل المجاور، لأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $\triangle FGH \cong \triangle FDC$ »



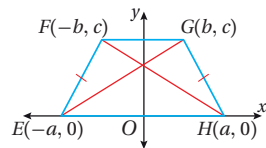
تعليمات المشروع:

أذكر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعين عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكد أن عناصر المشروع كافة متوافرة يوم العرض.

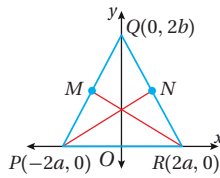
14 أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور، لأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $\triangle DEC \cong \triangle BOC$.
أنظر ملحق الإجابات.



15 أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور، لأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $\overline{EG} \cong \overline{FH}$.
 $EG = \sqrt{(b - (-a))^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{(b+a)^2 + c^2}$
 $FH = \sqrt{(a - (-b))^2 + (0 - c)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$
إذن $FH = EG$

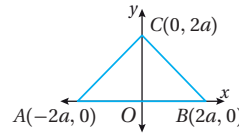


16 في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$ ، وكانت M نقطة منتصف $\overline{PQ}$ و N نقطة منتصف $\overline{RQ}$ ، فأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $\overline{PM} \cong \overline{RN}$. أنظر ملحق الإجابات.



أحدّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل ممّا يأتي، متعيناً أو مستطيلاً أو مربعاً:

- 17 $J(-4, 2), K(0, 3), L(1, -1), M(-3, -2)$ مربع
18 $J(-2, 7), K(7, 2), L(-2, -3), M(-11, 2)$ معين
19 $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$ مربع
20 $J(-1, 4), K(-3, 2), L(2, -3), M(4, -1)$ مستطيل



21 تبرير: أصنّف $\triangle ABC$ ، المرسوم في المستوى الإحداثي المجاور، بحسب أضلاعه وزواياه، وأبرّر إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

22 اكتشف الخطأ: تقول شذا إن الشكل الرباعي PQRS، الذي إحداثيات رؤوسه $R(1, -5), S(-2, 1), P(0, 2), Q(3, -4)$ متوازي أضلاع وليس مستطيلاً، وتقول ضحى إنه مستطيل. أي الإجابتين صحيحة؟ أبرّر إجابتي.
إجابة ضحى هي الصحيحة؛ لأن قطري الشكل متطابقان ولكنهما ليسا متعامدين، لذا فالشكل الرباعي PQRS مستطيل.

23 تحدّد: متوازي أضلاع أحد رؤوسه النقطة $(2, 4)$ والرأس الآخر النقطة $(3, 1)$ ونقطة تقاطع قطريه $(0, 1)$. أجد بقية رؤوسه. الرؤوس المتبقية $(-2, -2), (-3, 1)$

الختام

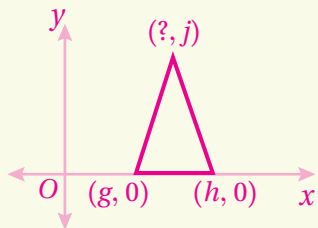
6

أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بتوجيه الأسئلة الآتية إليهم:

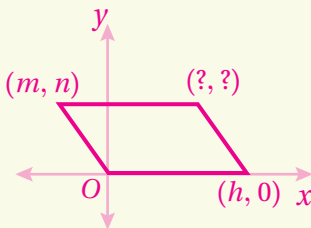
1 أرسّم في المستوى الإحداثي المربع ABCD الذي طول ضلعه $4b$.

« أجد الإحداثيات المجهولة في كل من الأشكال الآتية:

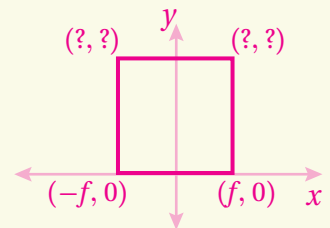
4 مثلث متطابق الضلعين



3 متوازي أضلاع



2 مربع



اختبار نهاية الوحدة

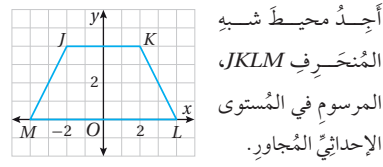
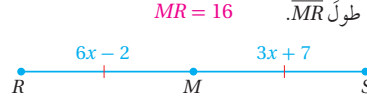
أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

- 6 $A(2, 2), B(6, 5)$ 5 $N(-3, 2), M(9, 7)$ 13
8 $P(1, 5), T(7, -3)$ 9 $F(-6, -4), J(9, 4)$ 17

أجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{AB}$ في كل من الحالات الآتية:

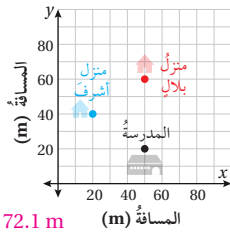
- 10 $A(8, 4), B(12, 2)$ (10, 3)
11 $A(9, 5), B(8, -6)$ $(8\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
12 $A(-11, -4), B(-9, -2)$ $(-10, -3)$

13 في الشكل الآتي، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{RS}$ ، فأجد



المحيط: 20.9 وحدة تقريباً.

15 انطلق بلال من منزله إلى المدرسة مروراً بمنزل أشرف. أجد المسافة التي قطعها بلال من منزله إلى المدرسة، وأستعين بالمستوى الإحداثي أدناه.



أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المسافة بين النقطتين $A(-1, 4)$ و $B(-3, -2)$ هي:

- a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{40}$
c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{34}$

2 إحداثي نقطة منتصف $\overline{CD}$ حيث $C(1, -2)$

و $D(-3, 6)$ هما:

- a) $(-1, 2)$ b) $(-1, 4)$
c) $(1.5, -0.5)$ d) $(-4.5, 1.5)$

3 إذا كانت $M(-2, -6)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، حيث

$B(7, 4)$ ، فإن إحداثي النقطة A هما:

- a) $(-11, 16)$ b) $(11, -16)$
c) $(11, 16)$ d) $(-11, -16)$

4 نقطة تقاطع قطري مربع طول ضلعيه s ورأسه $(0, 0)$ و (s, s) هي:

- a) (s, s) b) $(2s, 2s)$
c) $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ d) $(\frac{s}{2}, 0)$

5 إذا كانت $(0, 0)$ ، $(5, 3)$ ، $(3, 5)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع، فإن النقطة التي تمثل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع هي:

- a) $(5, 0)$ b) $(3, 0)$
c) $(2, -2)$ d) $(2, 2)$

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-5) فردياً، وأنجول بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعاً في حل بعض المسائل على اللوح.
- أوزع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (6-30)، وأنجول بينهم؛ لأساعدهم وأرشدهم وأوجههم، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها؛ لمناقشتها على اللوح.

تدريب على الاختبارات الدولية:

- أعرف الطلبة بالاختبارات الدولية، وأبين لهم أهميتها، ثم أوجههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فدياً، ثم أناقشهم في إجاباتها على اللوح.
- أشجع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة، والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وأحرص على تضمين امتحاناتي المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

إجابات التدريب في بند (اختبار نهاية الوحدة):

(22) إجابة ممكنة:

معادلة $\vec{AC} : x - y + 2 = 0$

$AC = 3\sqrt{2}, h = \frac{6}{\sqrt{2}}$

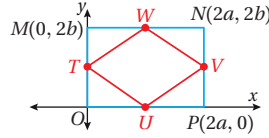
مساحة المثلث:

$\frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = 9$

المساحة 9 وحدات مربعة

أحد ما إذا كان $JKLM$ ، المَعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، معيناً أو مُستطيلاً أو مُربّعاً:

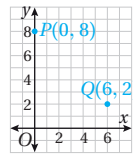
- 28 $J(5, 2), K(1, 9), L(-3, 2), M(1, -5)$ معين؛ لأن القطرين متعامدان ومختلفان في الطول.
 29 $J(5, 2), K(2, 5), L(-1, 2), M(2, -1)$ مُربّع؛ لأن القطرين متعامدان ومتساويان في الطول.
 30 في الشكل الآتي، إذا كان $MNPO$ مُستطيلاً، وكانت T, W, V, U نقاطاً مُتّصفِ أضلاعه، فأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $TWVU$ معين. أنظر الهامش.



تدريب على الاختبارات الدولية

- 31 بيّن الشكل المُجاوِرَ النقطتين M و N . أيّ ممّا يأتي يمكن أن يكون إحداثيَّي النقطة P ، بحيث يكون المثلث MPN متطابق الضلعين؟

- a) (3, 5) b) (3, 2) c) (1, 5) d) (5, 1)

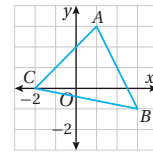


- a) (7, 8) b) (4, 4)
c) (3, 5) d) (2, 2)

32 أيّ النقاط الآتية تقع في مُتّصفِ المسافة بين النقطتين P و Q ، المُمثَلَتين في المُستوى الإحداثي المُجاوِر؟

أجد البعد بين النقطتين والمستقيم في كل مما يأتي:

- 16 $y = -x + 2, P(8, 4)$ $5\sqrt{2}$
 17 $x - 3y + 9 = 0, Q(-13, 6)$ $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 18 $y - 4x = 7, B(-13, 6)$ 12.4
 19 $y - 1 = 5x, S(3, 3)$ $\frac{\sqrt{26}}{2}$
 20 $y + 2x + 15 = 0, M(-1, -4)$ $9\frac{\sqrt{5}}{5}$
 21 $2x + y + 5 = 0, N(0, 0)$ $\sqrt{5}$

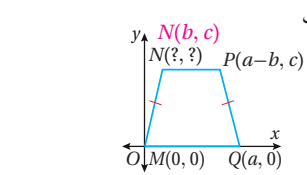
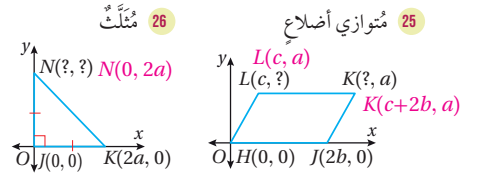


22 أجد مساحة المثلث المرسوم في المُستوى الإحداثي المُجاوِر، وأبرّر إجابتي. أنظر الهامش.

أجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين في ما يأتي:

- 23 $x + 2y - 3 = 0$ 24 $9x + 12y + 10 = 0$
 $x + 2y + 4 = 0$ $9x + 12y - 20 = 0$
 3.13 وحدة تقريباً. 2 وحدة.

أجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



27 شبه مُنحَرَف

30 (1) أجد إحداثيات $WVUT$ باستخدام الرسم أو قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة.

$W(a, 2b), V(2a, b), U(a, 0), T(0, b)$

(2) أثبت أن الشكل $WVUT$ متوازي أضلاع بإيجاد ميل أضلاعه ومقارنتها.

ميل $\overline{WV}$ يساوي $-\frac{b}{a}$ وميل $\overline{UT}$ يساوي $-\frac{b}{a}$ إذن $\overline{WV} \parallel \overline{UT}$

ميل $\overline{WT}$ يساوي $\frac{b}{a}$ وميل $\overline{VU}$ يساوي $\frac{b}{a}$ إذن $\overline{WT} \parallel \overline{VU}$

إذن الشكل $WVUT$ متوازي أضلاع.

(3) أجد طول كلٍّ من القطرين وميليهما من الإحداثيات بالرسم.

• ميل القطر $\overline{WU}$ غير معرف (لأنه رأسي) وميل القطر $\overline{VT}$ يساوي 0 (لأنه أفقي)، إذن: القطران معامدان.

• طول $\overline{WU}$ يساوي $2b$ وطول $\overline{VT}$ يساوي $2a$ ، إذن: القطران غير متساويين في الطول.

إذن من (1) و (2) و (3) الشكل $WVUT$ معين.

كتاب التمارين

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعدّ لدراسة الوحدة

حلّ نظام مكون من معادلتين خطيتين بالحدف (الدرس 2)

أحلّ نظام المعادلات في كلّ ممّا يأتي بطريقة الحذف:

7 $y = 2x + 1$

$y = -x + 4$ (1, 3)

8 $y + x = 2$

$3y + x = 0$ (3, -1)

9 $y = -0.4x - 1$

$y = x - 8$ (5, -3)

مثال: أحلّ نظام المعادلات الآتي بطريقة الحذف:

$3x + 2y = 18$

$2x - y = 5$

خطوة 1: أضرب المعادلة الثانية في 2

$3x + 2y = 18$

$4x - 2y = 10$

أضرب كلّ حدّ في 2

خطوة 2: أجمع المعادلتين

$3x + 2y = 18$

$4x - 2y = 10$

$7x = 28$

$\frac{7x}{7} = \frac{28}{7}$

$x = 4$

بالحذف المتغيّر y

بقسمة طرفي المعادلة على 7

بالتبسيط

خطوة 3: أعوّض 4 بدلاً من x في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة y .

المعادلة الثانية

بالتعويض عن x بـ 4

بالتبسيط

بالطرح 8 من كلا الطرفين

بالتبسيط

بقسمة طرفي المعادلة على -1

أبسط

إذن، حلّ النظام هو (4, 3).

37

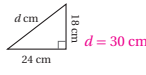
الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

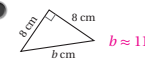
أستعدّ لدراسة الوحدة

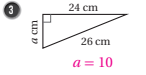
أختر معلوماتي لحلّ التدريبات أولاً، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة، استعين بالمثال المُعطى.

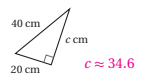
نظرية فيثاغورس (الدرس 1)

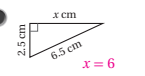
أجد طول الضلع المجهول في كلّ مثلث قائم الزاوية ممّا يأتي (أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

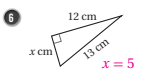
1  $d = 30$ cm

2  $b \approx 11.3$

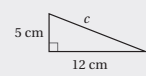
3  $a = 10$

4  $c \approx 34.6$

5  $x = 6$

6  $x = 5$

مثال: أجد طول الضلع المجهول في كلّ مثلث قائم الزاوية ممّا يأتي (أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

a)  $a^2 + b^2 = c^2$

$5^2 + 12^2 = c^2$

$25 + 144 = c^2$

$169 = c^2$

$c = \pm \sqrt{169}$

$c = \pm 13$

نظرية فيثاغورس

أعوّض $a = 5, b = 12$

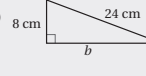
أجد القوى

أجمع

تعريف الجذر التربيعي

أبسط

للمعادلة حلان: 13 و -13، وبما أنّ الطول يجب أن يكون عدداً موجباً، إذن طول الوتر 13 cm

b)  $a^2 + b^2 = c^2$

$8^2 + b^2 = 24^2$

$64 + b^2 = 576$

$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$

$b^2 = 512$

$b = \pm \sqrt{512}$

$b \approx \pm 22.6$

نظرية فيثاغورس

أعوّض $a = 8, c = 24$

أجد القوى

أطرح 64 من كلا الطرفين

أبسط

تعريف الجذر التربيعي

استعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول الضلع المجهول b يساوي 22.6 cm

36

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعدّ لدراسة الوحدة

كتابة معادلة المستقيم المارّ بنقطة معطاة وبنواحي مستقيماً معلوماً (الدرس 2)

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المعطاة والواحي للمستقيم المعطاة معادلته في كلّ ممّا يأتي:

16 $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$ $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

17 $(2, -7), 2y = 5x - 3$ $y = \frac{5}{2}x - 12$

18 $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$ $y = -\frac{1}{4}x + 9$

19 $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$ $y = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$

مثال: أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-2, 5)$ والواحي للمستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$.

خطوة 1: أجد ميل المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$ هو $\frac{3}{2}$

خطوة 2: أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع باستعمال الميل والنقطة المعطاة.

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

أعوّض $m = \frac{3}{2}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$

أبسط

خاصية التوزيع

أجمع 5 إلى الطرفين

أبسط

39

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعدّ لدراسة الوحدة

إيجاد ميل المستقيم (الدرس 2)

أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي:

10 $(3, 4), (1, 0)$ $m = 2$

11 $(-2, 5), (8, -3)$ $m = -\frac{4}{5}$

12 $(2, 1), (3, 1)$ $m = 0$

13 $(5, 6), (5, -1)$ m غير معرف.

مثال: أجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(1, 6)$ و $(-1, 2)$.

صيغة الميل

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{2 - 6}{(-1) - 1}$

$m = \frac{-4}{-2} = 2$

بالتعويض عن (x_1, y_1) بـ $(1, 6)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(-1, 2)$

بالتبسيط

38

كتاب التمارين

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة (4, 0) والعمودي على المستقيم $4y = -8x + 1$

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

لإيجاد ميل المستقيم المُعطى أحتاج إلى كتابة المعادلة بصورة الميل والمقطع.

$$4y = -8x + 1$$

معادلة المستقيم المُعطى

$$\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$$

أقسم طرفي المعادلة على 4

$$y = -2x + \frac{1}{4}$$

أبسط

ميل المستقيم $y = -2x + \frac{1}{4}$ هو -2

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى يساوي معكوس مقلوب العدد -2 ؛ أي $\frac{1}{2}$

الخطوة 3 أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أعوّض $m = -2$ ، $(x_1, y_1) = (4, 0)$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

أبسط

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)$$

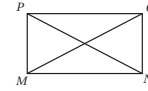
خاصية التوزيع

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

حالات خاصة من متوازي الاضلاع (المستطيل) (الدرس 3)

24 إذا كان $PQMN$ مستطيلًا، وكان $MQ = 2x + 11$ و $PN = 5x - 31$ ، فأجد قيمة المتغير x .

$$x = 14$$

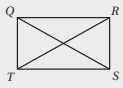


الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: إذا كان $QRST$ مستطيلًا، وكان $QS = 6x + 14$ و $RT = 9x + 5$ ، فأجد قيمة المتغير x .

بما أن $QRST$ مستطيل، فإن قطريه متطابقان، إذن أجد قيمة x التي تجعل $QS \cong RT$



المستطيل: هو متوازي أضلاع قطرياه متطابقان، وزواياه قوائم.

$$QS = RT$$

$$9x + 5 = 6x + 14$$

$$3x + 5 = 14$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

قطر المستطيل متساويان في الطول

أعوّض

أطرح $6x$ من طرفي المعادلة

أطرح 5 من طرفي المعادلة

أقسم طرفي المعادلة على 3

حالات خاصة من متوازي الاضلاع (المعين) (الدرس 3)

25 يبين الشكل المجاور المعين $DEFG$. إذا كانت $m\angle G = 118$ ، فأجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل.

$$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 31^\circ$$



مثال: يبين الشكل المجاور المعين $NPQM$. إذا كانت $m\angle N = 120^\circ$ ، فأجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل.

$$m\angle 1 = m\angle 3$$

$$m\angle 1 + m\angle 3 + 120^\circ = 180^\circ$$

$$2(m\angle 1) + 120^\circ = 180^\circ$$

$$2(m\angle 1) = 60^\circ$$

$$m\angle 1 = 30^\circ$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

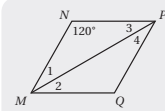
مجموع زوايا المثلث

أعوّض

أطرح 120 من طرفي المعادلة

أقسم طرفي المعادلة على 2

ومنهُ فإن $m\angle 1 = m\angle 3 = 30^\circ$.



المعين: هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متساوية، وقطرياه متعامدان، وكل قطري من قطريه ينصف الزاويتين المتقابلتين اللتين يصل بين رأسيهما.

41

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعد لدراسة الوحدة

وبحسب نظرية الزوايا المتقابلة في المعين فإن $m\angle 1 = m\angle 2$

و $m\angle 3 = m\angle 4$ ، وهذا يعني أنّ:

$$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 30^\circ$$

حالات خاصة من متوازي الاضلاع (المربع) (الدرس 3)

يبين الشكل المجاور المربع $QRST$. إذا كان قطره يتقاطعان في النقطة K و $KQ = 1$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

$$26 \quad m\angle RKS$$

$$m\angle RKS = 90^\circ$$

$$27 \quad m\angle QTK$$

$$m\angle QTK = 45^\circ$$

$$28 \quad m\angle QRK$$

$$m\angle QRK = 45^\circ$$

$$29 \quad KS$$

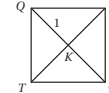
$$KS = 1$$

$$30 \quad QS$$

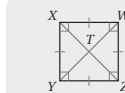
$$QS = 2$$

$$31 \quad RT$$

$$RT = 2$$



مثال: يبين الشكل المجاور المربع $XWZY$. إذا كان $WT = 3$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



المربع: هو متوازي أضلاع يحقق شروط المستطيل والمعين معاً.

a) $m\angle WYZ$

$$m\angle WYZ = 45^\circ$$

قطر المربع ينصف الزاويتين الواسليتين رأسيهما

b) ZX

$$ZX = WY$$

$$ZX = 2WT$$

$$ZX = 2(3)$$

$$ZX = 6$$

قطر المربع متطابقان

قطر المربع ينصف كل منهما الآخر

أعوّض

أبسط

الوحدة 4: الهندسة الإحداثية

أستعد لدراسة الوحدة

المستقيمان المتوازيان والمتعامدان (الدرس 3)

أحدّ ما إذا كان المستقيمان $\vec{BA}$ و $\vec{DC}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي:

$$32 \quad A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$$

ميل $\vec{AB} = \frac{1}{4}$ ، ميل $\vec{CD} = -4$ متعامدان.

$$33 \quad A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$$

ميل $\vec{AB} = \frac{1}{4}$ ، ميل $\vec{CD} = -4$ متعامدان.

$$34 \quad A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), D(-6, -5)$$

ميل $\vec{AB} = \frac{1}{3}$ ، ميل $\vec{CD} = -\frac{1}{3}$ متوازيين، وغير متعامدين.

$$35 \quad A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$$

مثال: أحدّ ما إذا كان $\vec{BA}$ و $\vec{DC}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(1, 1)$ ، $B(-1, -5)$ ، $C(3, 2)$ ، $D(6, 1)$

الخطوة 1 أجد ميل كل مستقيم.

ميل $\vec{AB}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$$

أعوّض عن $(x_1, y_1) = (1, 1)$ وعن $(x_2, y_2) = (-1, -5)$

$$= \frac{-6}{-2} = 3$$

أبسط

ميل $\vec{CD}$

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1 - 2}{6 - 3}$$

أعوّض عن $(x_1, y_1) = (3, 2)$ وعن $(x_2, y_2) = (6, 1)$

$$= -\frac{1}{3}$$

أبسط

الخطوة 2 أحدّ العلاقة بين المستقيمين.

الميلان غير متساويين، إذن، المستقيمان غير متوازيين. ولتحديد ما إذا كان المستقيمان متعامدين أجد حاصل ضرب ميليهما.

$$3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

بما أنّ حاصل ضرب ميلي $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ يساوي -1 ، إذن، المستقيمان متعامدان.

43

كتاب التمارين

الدرس 2

البُعد بين نقطة ومُسْتَقِيم

Distance between a Point and a Line

1 أجد البُعد بين المُستقيم l ، المارّ بالنقطتين $(-3, -1)$ ، $(1, 2)$ ، والنقطة $P(5, 8)$.

2 أجد البُعد بين المُستقيم l ، المارّ بالنقطتين $(-4, 1)$ ، $(-1, 3)$ ، والنقطة $P(1, 7)$.

3 أجد البُعد بين النقطة P والمُسْتَقِيم l في كلِّ ممَّا يأتي:

4 $l: y = 3x - 4$, $P(0, 0)$

5 $l: y + 2x = 5$, $P(1, \frac{-1}{2})$

6 $l: x = \frac{-1}{2}$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

7 $y = x - 11$

8 $y = x - 7$

9 $y + 2x = 1$

10 $y = -2x + 16$

11 $2y + 5x - 7 = 0$

12 $2y + 5x - 11 = 0$

يمثِّل الشَّكلُ المُجاوِزُ دعامات مُستخدَمة في سقف موقف للسيارات.

9 أجد البُعد بين رأسَي الدعامات C و A .

10 أجد مساحة المنطقة المثلثية ABC .

11 يمثل الشَّكلُ المُجاوِزُ خطَّ توزيع المياه تحت الأرض، الذي يمثِّله المُستقيم $l: y = 2x - 2$ ، وتمثِّل B فيه نقطة تزويد المنزل بالمياه. أجد أقصر مسافة بين خطِّ التوزيع l والنقطة B .

12 علِّم أنَّ كلَّ وحدة في المُستوى تمثِّل مترًا واحدًا.

13 علِّم أنَّ كلَّ وحدة في المُستوى تمثِّل 10 أمتار.

بعد النقطة عن المُستقيم 0.45 تقريبًا.

البعد بين خطِّ التوزيع والنقطة B بالأمطار: $0.45 \times 10 = 4.5 \text{ m}$

الدرس 1

المسافة في المُستوى الإحداثي

Distance in the Coordinate Plane

أجد المسافة بين كلِّ نقطتين ممَّا يأتي، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

1 $A(1, 2)$, $B(0, -7)$

2 $C(-1, -2)$, $D(3, -4)$

3 $E(9, 1)$, $F(-2, 3)$

4 المسافة بين اللاعين A و B .

5 المسافة بين اللاعين B و C .

6 المسافة بين اللاعين A و C .

7 $FM = 3x - 4$, $MG = 5x - 26$, $FG = ?$

8 $FM = 5y + 13$, $MG = 5 - 3y$, $FG = ?$

9 $MG = 7x - 15$, $FG = 33$, $x = ?$

10 $FM = 8a + 1$, $FG = 42$, $a = ?$

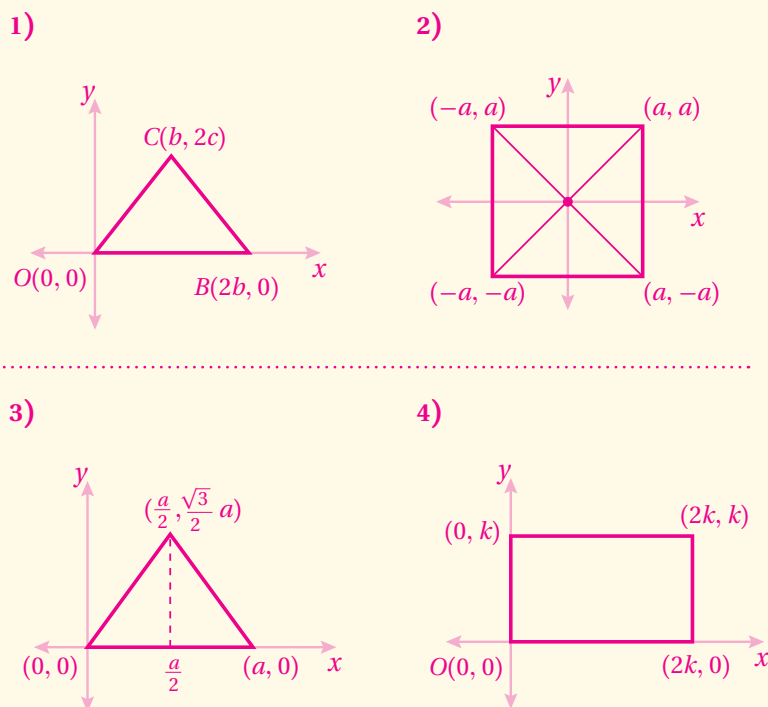
11 إذا علمت أنَّ النقطة B هي مُتَنَصِّفُ AC والنقطة C هي مُتَنَصِّفُ AD ، كما هو مبين في الشَّكل المُجاوِز، فأجد إحداثيَّ النقطة B .

12 حلَّ المثلثان المرسومان في المُستوى الإحداثي المُجاوِز مُطابقًا؟ أبرِّز إجابتي.

المثلثان مطابقان بثلاثة أضلاع؛ لأن:

$WS = PR = 4$, $TW = QR = 3\sqrt{2}$, $TS = PQ = \sqrt{10}$

إجابة الأسئلة في كتاب التمارين (الدرس 3):



الدرس 3

البرهان الإحداثي

Coordinate Proof

ارسم تَلاَمٍ مُلَوَّنَ المُضَعَّباتِ الآتية في المُستوى الإحداثي، وأحدِّ إحداثيات رؤوس كلِّ منها: (1-4) انظر الهامش.

1 مثلث متطابق الضلعين طول قاعدتيه $2b$ وارتفاعه $2c$

2 مربع طول ضلعيه $2a$ ، وانتهي قُطْرَاهُ في نقطة الأصل.

3 مثلث متطابق الأضلاع طول قاعدتيه a .

4 مُستطيل طولُهُ $2k$ وعرْضُهُ k وحدة.

أجد الإحداثيات المجهولة في كلِّ شكلٍ مِنَ الأشكال الآتية:

5 مُستطيل

6 شبه مُخَوِّف

7 مربع

8 مثلث

9 مثلث

10 مُتوازي أضلاع

11 أستعمل المعلومات المُعطاة في الشكل الآتي؛ لأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أنَّ $\triangle ODB \cong \triangle BDC$

12 أستعمل المعلومات المُعطاة في الشكل الآتي؛ لأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أنَّ $\triangle OPQ \cong \triangle QRO$

$$m_2 = \frac{c-0}{d-a} = \frac{c}{d-a} : \overline{NM} \text{ ميل}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{d-a} \Rightarrow b = d-a \Rightarrow d = a+b$$

إذن، إحداثيا الرأس M هما $(a+b, c)$

والآن أجد أطوال الأضلاع.

$$OL = \sqrt{b^2 + c^2}, NM = \sqrt{(a+b-a)^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

أي أن: $\overline{OL} \cong \overline{NM}$

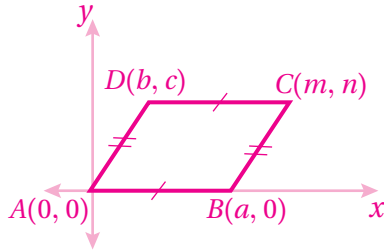
وكذلك: $LM = |a+b-a| = |a| = a$ (حيث $a > 0$)

$ON = |a-0| = |a| = a$ (حيث $a > 0$)

إذن، $\overline{LM} \cong \overline{ON}$

إذن، كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

(12) أرسم الشكل الرباعي $ABCD$ وأحدد إحداثياته على المستوى الإحداثي.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع أي إثبات

أن: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

البرهان:

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، فإن:

$$AB = DC \Rightarrow (AB)^2 = (DC)^2$$

$$(AB)^2 = (a-0)^2 + (0-0)^2 = a^2$$

$$(DC)^2 = (m-b)^2 + (n-c)^2$$

$$\Rightarrow (m-b)^2 + (n-c)^2 = a^2 \dots\dots\dots(1)$$

وبما أن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فإن:

$$AD = BC \Rightarrow (AD)^2 = (BC)^2$$

$$(AD)^2 = (b-0)^2 + (c-0)^2 = b^2 + c^2$$

$$(BC)^2 = (m-a)^2 + (n-0)^2 = (m-a)^2 + n^2$$

$$\Rightarrow (m-a)^2 + n^2 = b^2 + c^2 \dots\dots\dots(2)$$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 1:

(26) من المعطيات: $AP = 3PD$

بما أن $AP = 3PD$ ؛ فإن $AP = \frac{3}{4}AD$.

المسافة الرأسية بين $A(1, 4)$ و $B(7, 13)$

هي $13-4 = 9$ ، والمسافة الأفقية هي

$$7-1 = 6$$

بما أن $AP = \frac{3}{4}AD$ فإن المسافة الرأسية بين P ، و A تساوي $\frac{3}{4}$ المسافة

$$\frac{3}{4}(9) = 6.75$$
 ومنه: A ، و D ، الرأسية بين

وبما أن $AP = \frac{3}{4}AD$ فإن المسافة الأفقية بين P ، و A تساوي $\frac{3}{4}$ المسافة

$$\frac{3}{4}(6) = 4.5$$
 ومنه: A ، و D ، الأفقية بين

إذن، الإحداثي x للنقطة P يزيد بمقدار 4.5 وحدة على الإحداثي x

لنقطة A ، وأيضاً يزيد الإحداثي y لها بمقدار 6.75 وحدة على

الإحداثي y للنقطة A . ومنه:

$$P(1+4.5, 6.75+4) = P(5.5, 10.75)$$

$$27) \quad PQ = 50 - 10 = 40 \text{ m}, QR = 80 - 10 = 70 \text{ m}$$

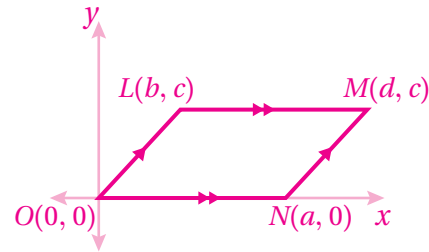
$$RP = \sqrt{(80-10)^2 + (10-50)^2} = \sqrt{6500} = 10\sqrt{65} \text{ m}$$

$$t = \frac{(40+70+10\sqrt{65})}{130} \approx 1.5 \text{ min}$$

إجابات أسئلة كتاب الطالب، الدرس 3:

(11) أرسم متوازي الأضلاع $OLMN$ وأحدد إحداثياته على المستوى

الإحداثي.



المعطيات: $OLMN$ متوازي أضلاع فيه $\overline{OL} \parallel \overline{NM}$, $\overline{LM} \parallel \overline{ON}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{OL} \cong \overline{NM}$, $\overline{LM} \cong \overline{ON}$

البرهان:

بما أن $\overline{OL} \parallel \overline{NM}$ فإن لهما الميل نفسه.

$$m_1 = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b} : \overline{OL} \text{ ميل}$$

$$14) DE = \sqrt{((2h)-h)^2 + ((2k)-(2k))^2} = h$$

$$OB = \sqrt{(h-0)^2 + (0-0)^2} = h$$

$$(1) \dots \dots \dots DE = OB$$

$$DC = k, CB = k$$

$$(2) \dots \dots \dots DC = CB$$

$$EC = \sqrt{((2h)-h)^2 + ((2k)-k)^2} = \sqrt{(h)^2 + (k)^2}$$

$$OC = \sqrt{(h-0)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{(h)^2 + (k)^2}$$

$$(3) \dots \dots \dots EC = OC$$

من 1, 2, 3 ينطبق المثلثان بثلاثة أضلاع.

16) أجد إحداثيات M و N باستخدام قانون إحداثيات نقطة في المنتصف.

$$N\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (a, b)$$

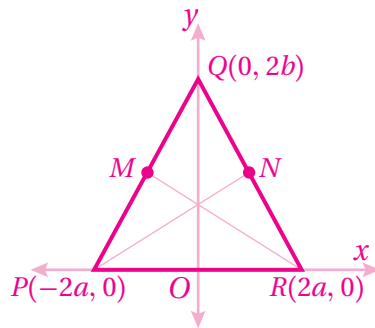
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{0+(-2a)}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (-a, b)$$

أجد RM و PN وأقارنهما.

$$RM = \sqrt{(-a-(2a))^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(3a)^2 + (b)^2}$$

$$PN = \sqrt{(a-(-2a))^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(3a)^2 + (b)^2}$$

$$RM = PN \text{ إذن}$$



$$21) BC = \sqrt{(0-(2a))^2 + (2a-0)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8} a$$

$$AC = \sqrt{(0-(-2a))^2 + (2a-0)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8} a$$

إذن المثلث متطابق الضلعين.

ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 وميل $\overline{AC}$ يساوي 1 إذن $\overline{CB} \perp \overline{AC}$ أي أن الزاوية C قائمة، إذن المثلث قائم الزاوية في C .

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن: $m = b + a, n = c$ ، ويمكن التحقق بالتعويض.

إذن، إحداثيا الرأس C هما $(b + a, c)$

والآن نجد ميل كل من $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{DC}$ باستخدام قانون الميل

$$\text{ميل } \overline{AB} \text{ يساوي } \frac{0-0}{a-0} = 0, \text{ وميل } \overline{DC} : \frac{c-c}{b+a-b} = 0$$

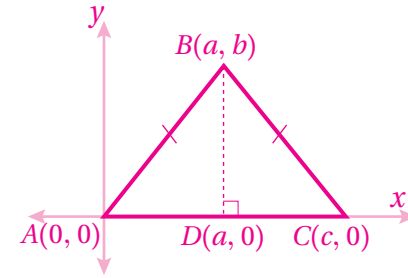
$$\text{إذن } \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\text{وميل } \overline{AD} \text{ يساوي } \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}, \text{ وميل } \overline{BC} \text{ يساوي } \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$$

$$\text{إذن } \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان في الشكل الرباعي، إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

13) أرسم مثلثاً متطابق الضلعين ABC بحيث تنطبق قاعدته على المحور x وأحدد إحداثيات رؤوسه على المستوى الإحداثي.



المعطيات: ABC مثلث فيه: $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ ، و $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ ، أي أن: $AD = DC$

البرهان:

$$\overline{BA} \cong \overline{BC} \Rightarrow BA = BC$$

$$BA = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{(a-c)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = (a-c)^2$$

$$\Rightarrow |a| = |a-c|$$

$$\Rightarrow a = a-c \text{ or } a = -(a-c)$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ X or } a = c-a$$

$$\Rightarrow c = 2a$$

إذن، إحداثيا C هما $(2a, 0)$

$$AD = |a-0| = |a| = a \text{ (حيث } a > 0)$$

$$DC = |2a - a| = |a| = a \text{ (حيث } a > 0)$$

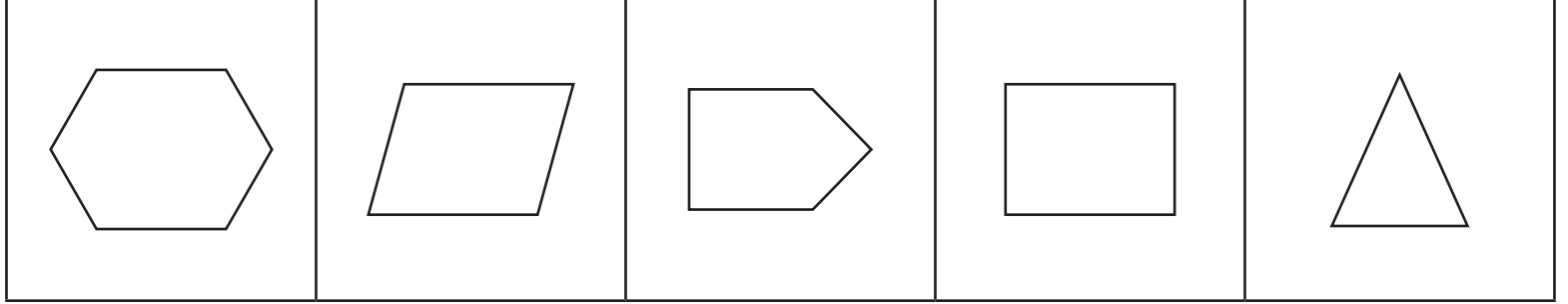
$$\text{إذن، } AD = DC$$

أوراق المصادر

ورقة المصادر 1: المدخلات والمخرجات

« أصل بين كل شكل في المجموعة A وعدد أضلاعه في المجموعة B:

المجموعة A



المجموعة B

3	4	5	6
---	---	---	---

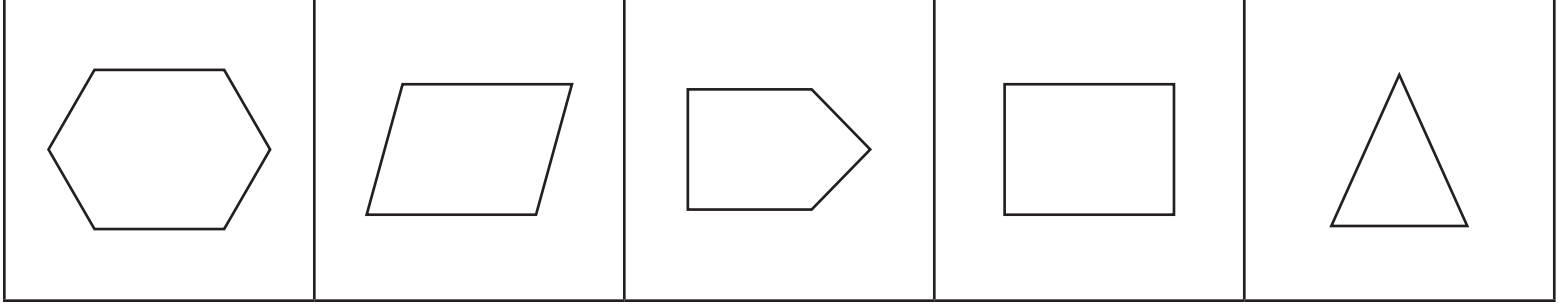
« أجب عن الأسئلة الآتية:

- 1 ماذا أسمي المجموعة A؟
- 2 ماذا أسمي المجموعة B؟
- 3 هل يوجد شكل من الأشكال في المجموعة A يرتبط بأكثر من عدد في المجموعة B؟
- 4 هل يوجد عدد في المجموعة B يرتبط بأكثر من شكل في المجموعة A؟
- 5 إذا علمت أن العلاقة أعلاه تمثل اقتراناً، فما الشروط التي ينبغي توفرها في العلاقة لكي تمثل اقتراناً؟

ورقة المصادر 1: المدخلات والمخرجات (الإجابات)

« أصل بين كل شكل في المجموعة A وعدد أضلاعه في المجموعة B:

المجموعة A



المجموعة B

3	4	5	6
---	---	---	---

« أجب عن الأسئلة الآتية:

- 1 ماذا أسمي المجموعة A؟ إجابة محتملة: المدخلات / المجال.
- 2 ماذا أسمي المجموعة B؟ إجابة محتملة: المخرجات / المدى.
- 3 هل يوجد شكل من الأشكال في المجموعة A يرتبط بأكثر من عدد في المجموعة B؟ لا.
- 4 هل يوجد عدد في المجموعة B يرتبط بأكثر من شكل في المجموعة A؟ نعم، العدد 4 ارتبط به المستطيل، ومتوازي الأضلاع من مجموعة الأشكال (المجال).
- 5 إذا علمت أن العلاقة أعلاه تمثل اقتراناً، فما الشروط التي ينبغي توفرها في العلاقة لكي تمثل اقتراناً؟ أنظر إجابات الطلبة.

ورقة المصادر 2: الاقتران الخطي

- 1 أكوّن جدولاً للقيم، ثمّ أمثل المعادلة الخطية $y = 2x + 4$ على المستوى البياني أدناه، ثمّ أجيب عن الأسئلة التي تليه.

قيم x	قيم y



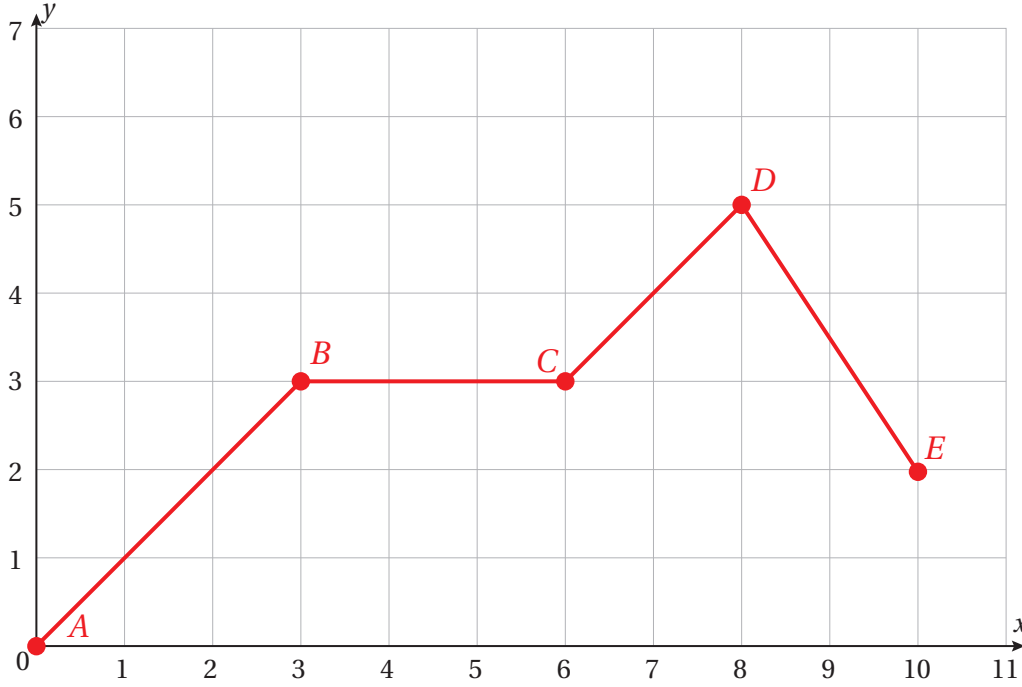
- هل يجتاز هذا التمثيل البياني للمعادلة المعطاة اختبار الخطّ الرأسيّ؟
- إذا اجتاز التمثيل البياني اختبار الخطّ الرأسيّ، فماذا يمكن أن نسمّيه؟

- 2 إذا علمت أن المعادلة: $y = 2x + 7$ تُمثّل اقتراناً خطيّاً، فأكمل الجدول الآتي:

x	$y = f(x)$
5	$y = f(5) = 2(5) + 7 = 17$
-3	
2	

ورقة المصادر 3: تفسير التمثيلات البيانية

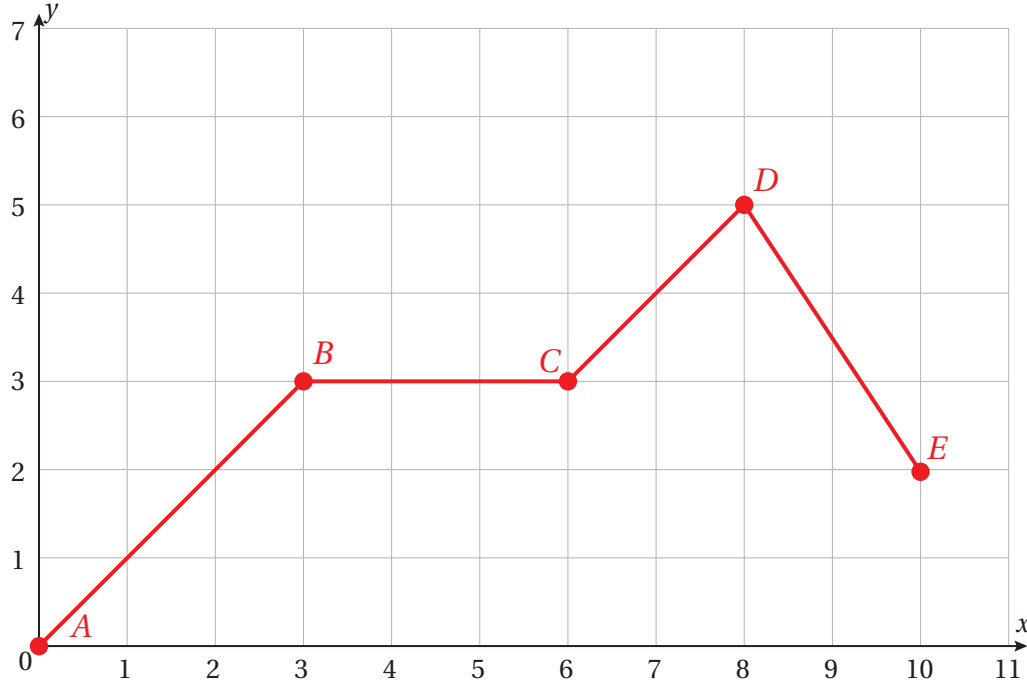
« باستعمال التمثيل البياني أدناه، أجب عن الأسئلة الآتية:



- 1 ما قيمة x عند النقطة B ؟
- 2 ما قيمة y عند النقطة D ؟
- 3 ما قيمة y عندما $x = 7$ ؟
- 4 ما قيمة x عندما $y = 1$ ؟
- 5 ما ميل $\overline{AB}$ ؟
- 6 ما ميل $\overline{BC}$ ؟
- 7 ما ميل $\overline{DE}$ ؟
- 8 هل قيم y في الفترة بين النقطتين A, B تتزايد أم تتناقص؟
- 9 هل قيم y في الفترة بين النقطتين D, E تتزايد أم تتناقص؟
- 10 هل قيم x, y في الفترة بين النقطتين B, C تتزايد أم تتناقص؟
- 11 ما العلاقة بين إجابتي السؤالين 5 و 8 وإجابتي السؤالين 6 و 10 وإجابتي السؤالين 7 و 9؟ أبرر إجابتي.

ورقة المصادر 3: تفسير التمثيلات البيانية (الإجابات)

« باستعمال التمثيل البياني أدناه، أجب عن الأسئلة الآتية:



- 1 ما قيمة x عند النقطة B ؟ 3
- 2 ما قيمة y عند النقطة D ؟ 5
- 3 ما قيمة y عندما $x = 7$ ؟ 4
- 4 ما قيمة x عندما $y = 1$ ؟ 1
- 5 ما ميل $\overline{AB}$ ؟ $m = 1$
- 6 ما ميل $\overline{BC}$ ؟ $m = 0$
- 7 ما ميل $\overline{DE}$ ؟ $m = -\frac{3}{2}$
- 8 هل قيم y في الفترة بين النقطتين A, B تتزايد أم تتناقص؟ تتزايد.
- 9 هل قيم y في الفترة بين النقطتين D, E تتزايد أم تتناقص؟ تتناقص.
- 10 هل قيم x, y في الفترة بين النقطتين B, C تتزايد أم تتناقص؟ قيم x تتزايد، وقيم y ثابتة لا تتغير.
- 11 ما العلاقة بين إجابتي السؤالين 5 و 8 وإجابتي السؤالين 6 و 10 وإجابتي السؤالين 7 و 9؟ أبرر إجابتي. أنظر إجابات الطلبة.

ورقة المصادر 4: منحنيات الموقع - الزمن

معلوماتٌ تعلمتها سابقاً في مبحث العلوم:

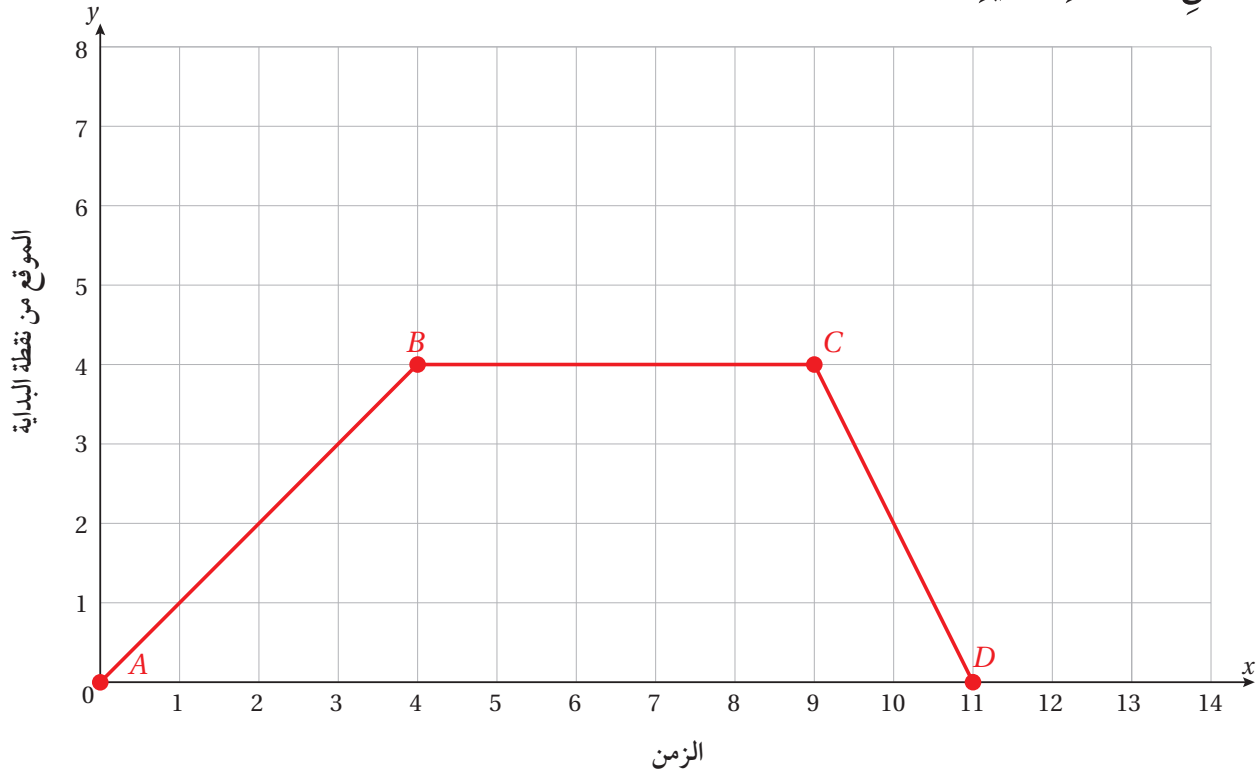
1/ السرعة المتوسطة $\bar{v}_s$ هي معدلُ تغيّر المسافة S بالنسبة إلى التغيّر في الزمن Δt ويمكنُ حسابها باستعمال الصيغة:

$$\bar{v}_s = \frac{S}{\Delta t}$$

2/ ميل المستقيم غير الرأسيّ هو نسبة التغيّر الرأسيّ إلى التغيّر الأفقيّ؛ أي أنّ ميل المستقيم غير الرأسيّ المارّ بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- باستعمال المعلوماتين أعلاه ومنحنى الموقع - الزمن أدناه، الذي يُمثّل حركة جسم في فترة زمنية محدّدة، أجب عن الأسئلة الآتية:



1 أجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[1, 4]$.

2 أجد ميل $\overline{AB}$.

3 ماذا أستنتج؟

4 أجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[4, 9]$.

5 أجد ميل $\overline{BC}$.

6 ماذا أستنتج؟

ورقة المصادر 5: لعبة التوصيل

« أصل بين السؤال في العمود الأيمن وإجابته الصحيحة في العمود الأيسر:

الإجابة الصحيحة
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2

السؤال
اعتمادًا على التمثيل البياني أدناه:
1 ما قيمة المقطع y ؟
2 ما قيمة المقطع x ؟
3 ما قيمة $f\left(\frac{3}{4}\right)$ ؟
4 ما قيمة $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ؟
5 ما أس المتغير x ؟
اعتمادًا على التمثيل البياني أدناه:
6 ما ميل المستقيم l ؟
7 ما قيمة المقطع y للمستقيم l ؟

عددُ الإجابات الصحيحة:

الأسماء: و

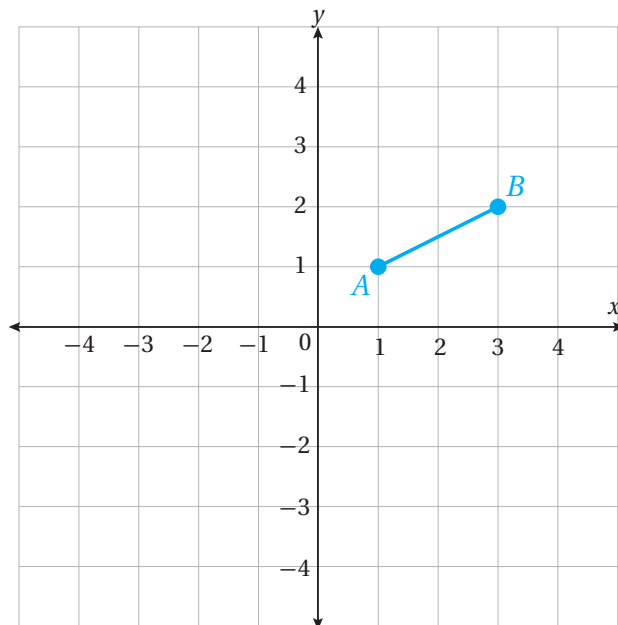
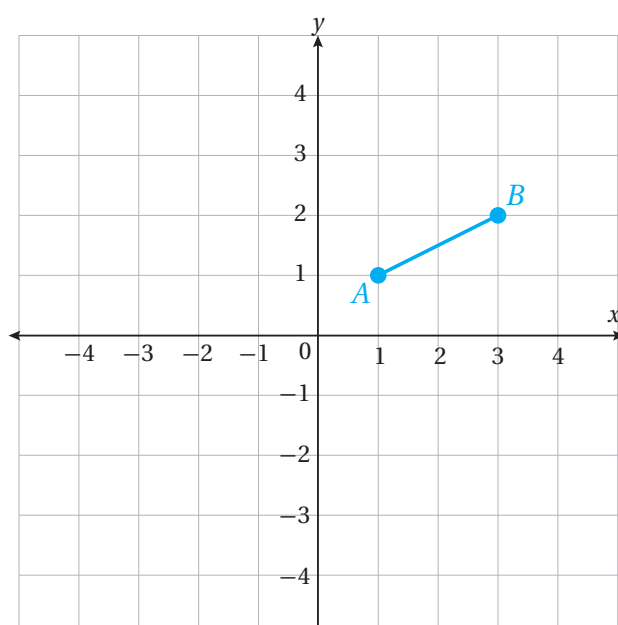
ورقة المصادر 5: لعبة التوصيل (الإجابات)



الإجابة الصحيحة	رقم السؤال
4	1
-1	2
7	3
2	4
1	5
-2	6
9	7

ورقة المصادر 6: التحويلات الهندسية

« أرسمُ صورة القطعة المستقيمة المعطاة في العمود الأيمن الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية التي تقابلها في العمود الأيسر:

وصفُ التحويلات الهندسية	التمثيلُ البيانيُّ المُعطى
انسحاب 3 وحداتٍ إلى اليسار ووحدينٍ إلى أعلى، ثم انعكاسٌ حول المحور y.	1 
انعكاسٌ حول المحور x، ثم انعكاسٌ حول المحور y، ثم انسحابٌ وحدةً واحدةً إلى أسفل.	2 

الأسماء: و

ورقة المصادر 7: لعبة التحليل



$x^2 + 7x + 12$	$(x + 3)(x + 4)$
$x^2 - 10x + 16$	$(x - 2)(x - 8)$
$x^2 + x - 20$	$(x - 4)(x + 5)$
$x^2 + 6x + 9$	$(x + 3)(x + 3)$
$x^2 - 5x + 6$	$(x - 2)(x - 3)$
$x^2 + 2x - 8$	$(x - 2)(x + 4)$
$x^2 - 8x + 16$	$(x - 4)(x - 4)$
$x^2 - 3x$	$x(x - 3)$
$x^2 + x$	$x(x + 1)$
$x^2 + 4x$	$x(x + 4)$

ورقة المصادر 8: حل المعادلات بالتحليل

« أكمّل الجدول الآتي بما يناسبه:

المعادلة	التحليل إلى العوامل	حلّ المعادلة
$x^2 - 8x + 12 = 0$		
	$(2x - 3)(x + 4) = 0$	
		$x = -\frac{3}{2}, x = 4$
$8x^2 = 15 - 14x$		

الحل:

المعادلة	التحليل إلى العوامل	حلّ المعادلة
$x^2 - 8x + 12 = 0$	$(x - 2)(x - 6) = 0$	$x = 2, x = 6$
$2x^2 + 5x - 12 = 0$	$(2x - 3)(x + 4) = 0$	$x = \frac{3}{2}, x = -4$
$2x^2 - 5x - 12 = 0$	$(2x + 3)(x - 4) = 0$	$x = -\frac{3}{2}, x = 4$
$8x^2 = 15 - 14x$	$(4x - 3)(2x + 5) = 0$	$x = \frac{3}{4}, x = -\frac{5}{2}$

ورقة المصادر 9: قطع جبرية

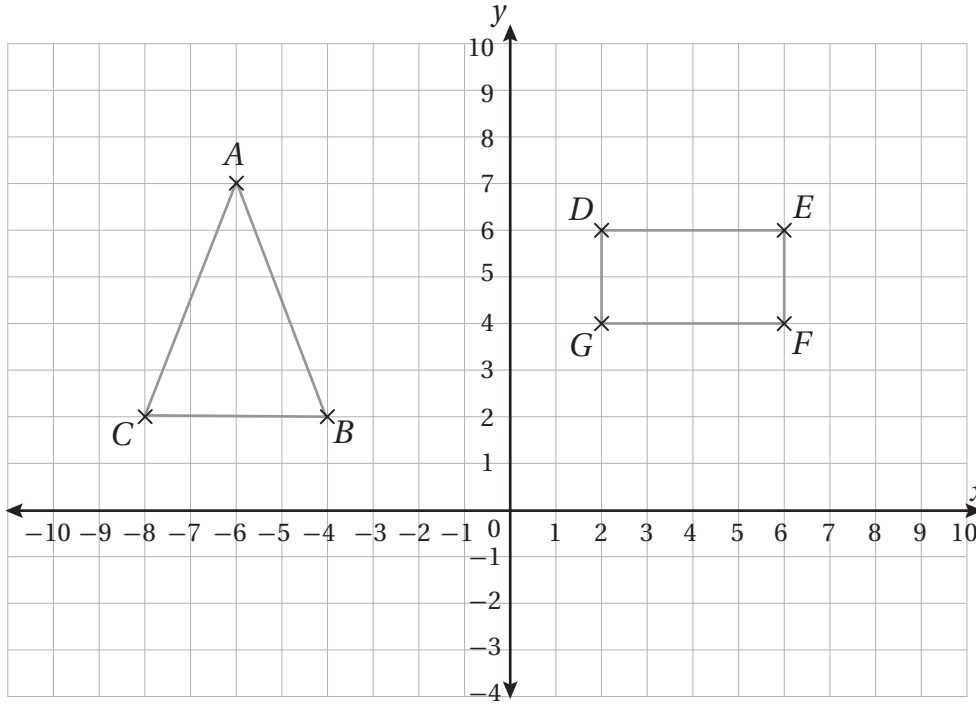
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
x		x		
x		x		
x^2		x^2		

ورقة المصادر 10: حل المعادلات بالقانون العام

$x^2 + 5x - 2 = 0$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times -2}}{2 \times 1}$	$x = 0.37$ $x = -5.37$
$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1}$	$x = 4$
$x^2 + 5x + 8 = 0$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1}$	لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.
$3x - 5x^2 - 8 = 0$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times -5 \times -8}}{2 \times -5}$	لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.
$-9x - 3x^2 + 1 = 0$	$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times -3 \times 1}}{2 \times -3}$	$x = -3.11$ $x = 0.11$
$2x - 4x^2 + 8 = 0$	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times -4 \times 8}}{2 \times -4}$	$x = -1.19$ $x = 1.69$

ورقة المصادر 11: الهندسة الإحداثية

« أحدد إحداثي كل رأس من رؤوس الشكلين الممثلين في المستوى الإحداثي الآتي:



A: (_____ , _____)

B: (_____ , _____)

C: (_____ , _____)

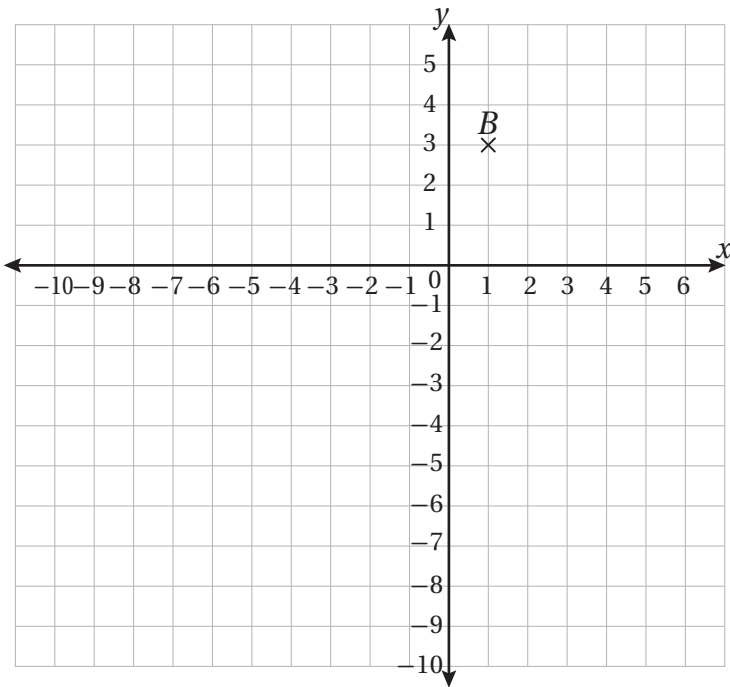
D: (_____ , _____)

E: (_____ , _____)

F: (_____ , _____)

G: (_____ , _____)

« أستعمل المستوى الإحداثي المجاور لأجد كلاً مما يأتي:



① إحداثيات النقطة B.

② إحداثيات النقطة B تحت تأثير انسحاب مقدار 5 وحدات إلى اليمين.

③ إحداثيات النقطة B تحت تأثير انسحاب مقدار 2 وحدة إلى الأعلى.

④ إحداثيات النقطة B تحت تأثير انسحاب مقدار وحدة إلى اليسار.

⑤ إحداثيات النقطة B تحت تأثير انسحاب مقدار 3 وحدات إلى الأسفل.

⑥ إحداثيات النقطة B تحت تأثير انسحاب مقدار 4 وحدات إلى اليمين و 6 وحدات إلى الأسفل.

ورقة المصادر 12: مستوى إحدائي فارغ

