المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات كتاب التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب التمارين الصف الثاني عشر الأكاديمي- ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات والمقادير الجبرية

أستعد لدراسة الوحدة

	قسمة كثيرات الحدود صفحة 6
1	$3x^2+6x+33$ $x-4\,\overline{)\,3x^3-6x^2+9x-5}$ $3x^3-12x^2$ $6x^2+9x-5$ $6x^2-24x$ $33x-5$ $33x-132$ 127 ناتج القسمة $3x^2+6x+33$ والباقي 127
2	$4x^3-10x^2+28x-75.5$ $2x+5\,\overline{)\,8x^4+6x^2-11x+7}$ $8x^4+20x^3$ $-20x^3+6x^2-11x+7$ $-20x^3-50x^2$ $56x^2-11x+7$ $56x^2+140x$ $-151x+7$ $-151x-377.5$ 384.5 ناتج القسمة $4x^3-10x^2+28x-75.5$ والباقي 384.5
	تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية صفحة 6
3	$x^2+6x-7=0$ $\Delta=(6)^2-4(1)(-7)=64$ قيمة المميز تساوي 64 (موجبة). إذن، يوجد حلان حقيقيان لهذه المعادلة.
4	$x^2-4x+4=0$ $\Delta=(-4)^2-4(1)(4)=0$ قيمة المميز تساوي 0 (صفرًا). إذن، يوجد حل حقيقي واحد لهذه المعادلة.

5	$x^2 - 2x + 7 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(7) = -24$ قيمة المميز تساوي -24 (سالبة). إذن، لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة.
حل المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر صفحة 7	
6	$x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow x(x-3) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 3$
7	$8x^2 = -12x \quad \Rightarrow 8x^2 + 12x = 0$ $\Rightarrow 4x(2x-3) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$
8	$4x^2 + 9x = 0 \quad \Rightarrow x(4x+9) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = -\frac{9}{4}$
9	$7x^2 = 6x \quad \Rightarrow 7x^2 - 6x = 0$ $\Rightarrow x(7x-6) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = \frac{7}{6}$
حل المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية $x^2 + bx + c = 0$ صفحة 7	
10	$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ $\Rightarrow x = 5, x = -3$
11	$t^2 - 8t + 16 = 0 \quad \Rightarrow (t-4)^2 = 0$ $\Rightarrow t = 4$
12	$x^2 - 18x = -32 \quad \Rightarrow x^2 - 18x + 32 = 0$ $\Rightarrow (x-16)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = 16, x = -2$
13	$x^2 + 2x = 24 \quad \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$ $\Rightarrow (x+6)(x-4) = 0$ $\Rightarrow x = -6, x = 4$

14	$x^2 = 17x - 72 \quad \Rightarrow x^2 - 17x + 72 = 0$ $\Rightarrow (x-9)(x-8) = 0$ $\Rightarrow x = 9, x = 8$
15	$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -4, x = -1$
16	$s^2 + 20s + 100 = 0 \quad \Rightarrow (s+10)^2 = 0$ $\Rightarrow s = -10$
17	$y^2 + 8y = 20 \quad \Rightarrow y^2 + 8y - 20 = 0$ $\Rightarrow (y+10)(y-2) = 0$ $\Rightarrow y = -10, y = 2$
18	$m^2 - 12m + 32 = 0 \quad \Rightarrow (m-8)(m-4) = 0$ $\Rightarrow m = 8, m = 4$
	حل المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ صفحة 8
19	$24x^2 - 19x + 2 = 0 \quad \Rightarrow (3x-2)(8x-1) = 0$ $\Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{8}$
20	$18x^2 + 9x + 1 = 0 \quad \Rightarrow (6x+1)(3x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{6}, x = -\frac{1}{3}$
21	$5x^2 + 8x + 3 = 0 \quad \Rightarrow (5x+3)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{3}{5}, x = -1$
22	$5x^2 - 9x - 2 = 0 \quad \Rightarrow (5x+1)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{5}, x = 2$
23	$4t^2 - 4t - 35 = 0 \quad \Rightarrow (2t+5)(2t-7) = 0$ $\Rightarrow t = -\frac{5}{2}, t = \frac{7}{2}$

24	$6x^2+15x-9=0 \quad \Rightarrow (6x-3)(x+3)=0$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=-3$
25	$28s^2-85s+63=0 \quad \Rightarrow (4s-7)(7s-9)=0$ $\Rightarrow s=\frac{7}{4}, s=\frac{9}{7}$
26	$9d^2-24d-9=0 \quad \Rightarrow (9d+3)(d-3)=0$ $\Rightarrow d=-\frac{1}{3}, d=3$
27	$8x(x+1)=16 \Rightarrow x(x+1)=2$ $\Rightarrow x^2+x-2=0$ $\Rightarrow (x+2)(x-1)=0$ $\Rightarrow x=-2, x=1$
حل المعادلة التربيعية بالقانون العام صفحة 9	
28	$x^2+x-6=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$ $x=\frac{-1+5}{2}=2 \;,\; x=\frac{-1-5}{2}=-3$
29	$x^2+4x-1=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2}$ $x=\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}=-2+\sqrt{5} \;,\; x=\frac{-4-2\sqrt{5}}{2}=-2-\sqrt{5}$
30	$x^2+2x-5=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}$ $x=\frac{-2+2\sqrt{6}}{2}=-1+\sqrt{6} \;,\; x=\frac{-2-2\sqrt{6}}{2}=-1-\sqrt{6}$

تبسيط المقادير النسبية صفحة 10	
31	$\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}=\frac{2(x-3)+5(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{7x-1}{x^2-2x-3}$
32	$\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}=\frac{4(x+2)-5(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{-x+23}{x^2-x-6}$
33	$\frac{3x}{x-1}\times\frac{x+4}{6x}=\frac{x+4}{2(x-1)}=\frac{x+4}{2x-2}$
34	$\frac{x}{x+1}\div\frac{x+4}{2x+2}=\frac{x}{x+1}\times\frac{2x+2}{x+4}=\frac{x}{x+1}\times\frac{2(x+1)}{x+4}=\frac{2x}{x+4}$
35	$\frac{x+4}{x^2-16}=\frac{x+4}{(x+4)(x-4)}=\frac{1}{x-4}$
36	$\frac{x^2-4x-5}{x+1}=\frac{(x+1)(x-5)}{x+1}=x-5$

الدرس الأول: نظريتا الباقي والعوامل

1

$\times$	$3x^2$	$-8x$	15	
$2x$	$6x^3$	$-16x^2$	$30x$	0
3	$9x^2$	$-24x$	45	

ناتج القسمة $3x^2 - 8x + 15$ والباقي 0

2

$\times$	$3x^3$	$7x^2$	$5x$	2	
x	$3x^4$	$7x^3$	$5x^2$	$2x$	13
-2	$-6x^3$	$-14x$	$-10x$	-4	

ناتج القسمة $3x^3 + 7x^2 + 5x + 2$ والباقي 13

3

$\times$	x^2	$7x$	-8	
x	x^3	$7x^2$	$-8x$	0
-4	$-4x^2$	$-28x$	32	

$$x^3 + 3x^2 - 36x + 32 = (x-4)(x^2 + 7x - 8) = (x-4)(x-1)(x+8)$$

أبعاد المستطيل هي: $(x-4), (x-1), (x+8)$

4

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$$

$$f(-2) = -4 \Rightarrow 2(-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + 6 = -4$$

$$\Rightarrow -16 - 4 - 2a + 6 = -4$$

$$\Rightarrow a = -5$$

5

$x(x+5)(x+1) = 180 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 5x = 180$

$\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 5x - 180 = 0$

عوامل الحد الثابت هي:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm12, \pm15, \pm18, \pm20, \pm30, \pm36, \pm45, \pm60, \pm$

$(4)^3 + 6(4)^2 + 5(4) - 180 = 0 \quad \Rightarrow (x-4)$ عامل

$\times$	x^2	$10x$	45	
x	x^3	$10x^2$	$45x$	0
-4	$-4x^2$	$-40x$	-180	

$x^3 + 6x^2 + 5x - 180 = 0 \quad \Rightarrow (x-4)(x^2 + 10x + 45) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ ($x^2 + 10x + 45$ مميزها سالب)

أبعاد متوازي المستطيلات هي: $4\ cm, 5\ cm, 9\ cm$

6

$f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + 3$

$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^3 + b(-1)^2 + b(-1) + 3 = 0$

$\Rightarrow -a + b - b + 3 = 0$

$\Rightarrow -a + 3 = 0$

$\Rightarrow a = 3$

$f(1) = 4 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + b(1) + 3 = 4$

$\Rightarrow a + b + b + 3 = 4$

$\Rightarrow a + 2b = 1$

$\Rightarrow 3 + 2b = 1$

$\Rightarrow b = -1$

<table>
<tr><td>7</td><td>

$3x^3 + 14x^2 - 7x - 10$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$

$3(1)^3 + 14(1)^2 - 7(1) - 10 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)$ عامل

$\times$	$3x^2$	$17x$	10	
x	$3x^3$	$17x^2$	$10x$	0
-1	$-3x^2$	$-17x$	-10	

$$3x^3 + 14x^2 - 7x - 10 = (x-1)(3x^2 + 17x + 10)$$
$$= (x-1)(3x+2)(x+5)$$

</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x = x(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2$

$2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)$ عامل

$\times$	$2x^2$	$3x$	-2	
x	$2x^3$	$3x^2$	$-2x$	0
-1	$-2x^2$	$-3x$	2	

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x = x(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$$
$$= x(x-1)(2x^2 + 3x - 2)$$
$$= x(x-1)(2x-1)(x+2)$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>9</td><td>

$3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm4$

$3(2)^3 - 4(2)^2 - 6(2) + 4 = 0 \quad \Rightarrow$ عامل $(x-2)$

$\times$	$3x^2$	$2x$	-2	
x	$3x^3$	$2x^2$	$-2x$	0
-2	$-6x^2$	$-4x$	4	

$3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(3x^2 + 2x - 2) = 0$

$$\Rightarrow x = 2, x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$

</td></tr>
<tr><td>10</td><td>

$2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm6, \pm9, \pm18, \pm36$

$2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 16(-2) - 36 = 0 \quad \Rightarrow$ عامل $(x+2)$

$\times$	$2x^2$	x	-18	
x	$2x^3$	x^2	$-18x$	0
2	$4x^2$	$2x$	-36	

$2x^3 + 5x^2 - 16x - 36 = 0 \Rightarrow (x+2)(2x^2 + x - 18) = 0$

$$\Rightarrow x = -2, x = \frac{-1-\sqrt{145}}{4}, x = \frac{-1+\sqrt{145}}{4}$$

</td></tr>
</table>

11

نفرض طول نصف قطر قاعدة المخروط r وارتفاعه h وحجمه V ،

فيكون: $h = r + 5$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$24\pi = \frac{1}{3}\pi r^2(r+5) \Rightarrow 72 = r^2(r+5)$$

$$\Rightarrow 72 = r^3 + 5r^2$$

$$\Rightarrow r^3 + 5r^2 - 72 = 0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm18, \pm24, \pm36, \pm72$

$(3)^3 + 5(3)^2 - 72 = 0 \quad \Rightarrow (x-3)$ عامل

$\times$	r^2	$8r$	24	
r	r^3	$8r^2$	$24r$	0
-3	$-3r^2$	$-24r$	-72	

$$r^3 + 5r^2 - 72 = 0 \quad \Rightarrow (r-3)(r^2 + 8r + 24) = 0$$

$\Rightarrow r = 3$ ($r^2 + 8r + 24$ مميزها سالب)

أبعاد المخروط هي: $r = 3\ cm, h = 8\ cm$

الدرس الثاني: الكسور الجزئية

1	$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$ $=\frac{x-3}{(2x+5)(7-3x)}=\frac{A}{2x+5}+\frac{B}{7-3x}$ $A(7-3x)+B(2x+5)=x-3$ $x=-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{29}{2}A=-\frac{11}{2}\Rightarrow A=-\frac{11}{29}$ $x=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{29}{3}B=-\frac{2}{3}\Rightarrow B=-\frac{2}{29}$ $\Rightarrow\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}=\frac{-\frac{11}{29}}{2x+5}+\frac{-\frac{2}{29}}{7-3x}$
2	$\frac{3x-5}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$ $A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=3x-5$ $x=0\Rightarrow A=-5$ $x=1\Rightarrow C=-2$ $x=2\Rightarrow A+2B+2C=1\Rightarrow -5+2B-4=1\Rightarrow B=5$ $\Rightarrow\frac{3x-5}{x(x-1)^2}=\frac{-5}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}$
3	$\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ $A(x^2+1)+(Bx+C)(2x-1)=x^2+x-2$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{5}{4}A=-\frac{5}{4}\Rightarrow A=-1$ $x=0\Rightarrow A-C=-2\Rightarrow C=1$ $x=1\Rightarrow 2A+B+C=0\Rightarrow -2+B+1=0\Rightarrow B=1$ $\Rightarrow\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}=\frac{-1}{2x-1}+\frac{x+1}{x^2+1}$

4	$\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}=\frac{5x-1}{(2x+1)(x-3)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-3}$ $A(x-3)+B(2x+1)=5x-1$ $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{7}{2}A=-\frac{7}{2}\Rightarrow A=1$ $x=3\Rightarrow 7B=14\Rightarrow B=2$ $\Rightarrow\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}=\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{x-3}$
5	$\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}=\frac{9-5x}{x(x^2-4x+3)}=\frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-1}$ $A(x-3)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x-3)=9-5x$ $x=0\Rightarrow 3A=9\Rightarrow A=3$ $x=3\Rightarrow 6B=-6\Rightarrow B=-1$ $x=1\Rightarrow -2C=4\Rightarrow C=-2$ $\Rightarrow\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}=\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-3}+\frac{-2}{x-1}$
6	$\frac{36+5x}{16-x^2}=\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}=\frac{A}{4-x}+\frac{B}{4+x}$ $A(4+x)+B(4-x)=36+5x$ $x=4\Rightarrow 8A=56\Rightarrow A=7$ $x=-4\Rightarrow 8B=16\Rightarrow B=2$ $\Rightarrow\frac{36+5x}{16-x^2}=\frac{7}{4-x}+\frac{2}{4+x}$

7	$\frac{8x+3}{x^2-3x}=\frac{8x+3}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}$ $A(x-3)+Bx=8x+3$ $x=0\Rightarrow -3A=3\Rightarrow A=-1$ $x=3\Rightarrow 3B=27\Rightarrow B=9$ $\Rightarrow \frac{8x+3}{x^2-3x}=\frac{-1}{x}+\frac{9}{x-3}$
8	$\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}=\frac{(x+1)(3x-5)}{x^2(x+1)}=\frac{3x-5}{x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$ $Ax+B=3x-5$ $x=0\Rightarrow B=-5$ $x=1\Rightarrow A+B=-2\Rightarrow A=3$ $\Rightarrow \frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}=\frac{3}{x}+\frac{-5}{x^2}$
9	$\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ $A(x-3)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-2)=3x^2+2x+2$ $x=2\Rightarrow A=18$ $x=3\Rightarrow C=35$ $x=0\Rightarrow 9A+6B-2C=2\Rightarrow 162+6B-70=2\Rightarrow B=-15$ $\Rightarrow \frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}=\frac{18}{x-2}+\frac{-15}{x-3}+\frac{35}{(x-3)^2}$

10	$\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}=\frac{2x^2-3x-27}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ $A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx=2x^2-3x-27$ $x=0\Rightarrow 9A=-27\Rightarrow A=-3$ $x=3\Rightarrow 3C=-18\Rightarrow C=-6$ $x=1\Rightarrow 4A-2B+C=-28\Rightarrow -12-2B-6=-28\Rightarrow B=5$ $\Rightarrow \frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}=\frac{-3}{x}+\frac{5}{x-3}+\frac{-6}{(x-3)^2}$
11	$\frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}=\frac{5x+8}{(x-2)(4x^2-4x+1)}$ $=\frac{5x+8}{(x-2)(2x-1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)^2}$ $A(2x-1)^2+B(x-2)(2x-1)+C(x-2)=5x+8$ $x=2\Rightarrow 9A=18\Rightarrow A=2$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{3}{2}C=\frac{21}{2}\Rightarrow C=-7$ $x=0\Rightarrow A+2B-2C=8\Rightarrow 2+2B+14=8\Rightarrow B=-4$ $\Rightarrow \frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{-4}{2x-1}+\frac{-7}{(2x-1)^2}$
12	$\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{1-2x}$ $(Ax+B)(1-2x)+C(x^2+3)=5x^2+2$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{13}{4}C=\frac{13}{4}\Rightarrow C=1$ $x=0\Rightarrow B+3C=2\Rightarrow B=-1$ $x=1\Rightarrow -A-B+4C=7\Rightarrow -A+1+4=7\Rightarrow A=-2$ $\Rightarrow \frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}=\frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{1}{1-2x}$

13	$\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = \frac{Ax+B}{2x^2+x+5} + \frac{C}{x-1}$ $(Ax+B)(x-1) + C(2x^2+x+5) = 24$ $x = 1 \Rightarrow 8C = 24 \Rightarrow C = 3$ $x = 0 \Rightarrow -B + 5C = 24 \Rightarrow B = -9$ $x = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 6C = 24 \Rightarrow 2A + 18 + 18 = 24 \Rightarrow A = -6$ $\Rightarrow \frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = \frac{-6x-9}{2x^2+x+5} + \frac{3}{x-1}$
14	$\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5} = 3 + \frac{-x+8}{2x^2+3x-5}$ $= 3 + \frac{-x+8}{(2x+5)(x-1)} = 3 + \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-1}$ $A(x-1) + B(2x+5) = -x+8$ $x = -\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2}A = \frac{21}{2} \Rightarrow A = -3$ $x = 1 \Rightarrow 7B = 7 \Rightarrow B = 1$ $\Rightarrow \frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5} = 3 + \frac{-3}{2x+5} + \frac{1}{x-1}$
15	$\frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2} = x + \frac{-5x+12}{x^2-3x+2}$ $= x + \frac{-5x+12}{(x-2)(x-1)} = x + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$ $A(x-1) + B(x-2) = -5x+12$ $x = 2 \Rightarrow A = 2$ $x = 1 \Rightarrow -B = 7 \Rightarrow B = -7$ $\Rightarrow \frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{-7}{x-1}$

16	$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x-1)(x+1)+x+1+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$ $=\frac{3x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$
17	$\frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{(x-c)^2}$ $A(x-c)+B=ax+b$ $x=c\Rightarrow B=ac+b$ $x=0\Rightarrow -cA+B=b\Rightarrow A=a$ $\Rightarrow \frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{a}{x-c}+\frac{ac+b}{(x-c)^2}$
18	$\frac{1}{x^2-ax-bx+abx}=\frac{1}{x(x-a-b+ab)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-a-b+ab}$ $A(x-a-b+ab)+Bx=1$ $x=0\Rightarrow A=\frac{1}{-a-b+ab}$ $x=a+b-ab\Rightarrow B(a+b-ab)=1\Rightarrow B=\frac{1}{a+b-ab}$ $\Rightarrow \frac{1}{x^2-ax-bx+abx}=\frac{\frac{1}{-a-b+ab}}{x}+\frac{\frac{1}{a+b-ab}}{x-a-b+ab}$
19	$\frac{ax+b}{x^2-c^2}=\frac{ax+b}{(x-c)(x+c)}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{x+c}$ $A(x+c)+B(x-c)=ax+b$ $x=c\Rightarrow A=\frac{ac+b}{2c}$ $x=-c\Rightarrow B=\frac{-ac+b}{-2c}$ $\Rightarrow \frac{ax+b}{x^2-c^2}=\frac{\frac{ac+b}{2c}}{x-c}+\frac{\frac{-ac+b}{-2c}}{x+c}$

20	$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + Bx = 2$ $x = 0 \Rightarrow A = 1$ $x = -2 \Rightarrow B = -1$ $\Rightarrow \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+2}$ $\frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \frac{2}{5\times 7} + \cdots + \frac{2}{11\times 13}$ $= \frac{1}{1} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \cdots \frac{1}{11} + \frac{-1}{13} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

الوحدة الثانية: المتطابقات والمعادلات المثلثية

أستعد لدراسة الوحدة

	الاقترانات المثلثية صفحة 13
1	$\sqrt{(15)^2+(8)^2}=17$ $\sin\theta=\frac{8}{17}$, $\cos\theta=\frac{15}{17}$, $\tan\theta=\frac{8}{15}$ $\csc\theta=\frac{17}{8}$, $\sec\theta=\frac{17}{15}$, $\cot\theta=\frac{15}{8}$
	إيجاد قيم النسب المثلثية إذا عُلمت قيمة نسبة مثلثية صفحة 13
2	$\cos\theta=-\frac{7}{12}$, $\tan\theta>0$ $\Rightarrow$ θ في الربع الثالث $\sqrt{(12)^2-(7)^2}=\sqrt{95}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{95}}{12}$, $\sec\theta=-\frac{12}{7}$, $\csc\theta=-\frac{12}{\sqrt{95}}$ $\tan\theta=\frac{\sqrt{95}}{7}$, $\cot\theta=\frac{7}{\sqrt{95}}$
3	$\sec\theta=5$, $\sin\theta<0$ $\Rightarrow$ θ في الربع الرابع $cos\,\theta=\frac{1}{5}$ $\sqrt{(5)^2-(1)^2}=\sqrt{24}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{24}}{5}$, $\csc\theta=-\frac{5}{\sqrt{24}}$ $\tan\theta=-\sqrt{24}$, $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{24}}$
4	$\cot\theta=\frac{1}{4}$, $\sin\theta<0$ $\Rightarrow$ θ في الربع الثالث $\sqrt{(1)^2+(4)^2}=\sqrt{17}$ $tan\,\theta=4$, $\sin\theta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\csc\theta=-\frac{\sqrt{17}}{4}$ $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sec\theta=-\sqrt{17}$

5	$\csc\theta = 2 \quad , \quad \cos\theta > 0 \quad \Rightarrow$ θ في الربع الأول $\sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \cot\theta = \sqrt{3}$
إيجاد قيمة الاقتران المثلثي لأي زاوية صفحة 13	
6	$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
7	$\cot 120° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
8	$\sin 210° = -\frac{1}{2}$
9	$\csc(-30°) = -2$
10	$\tan\frac{\pi}{4} = 1$
11	$\cos\frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$
12	$\sec\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
13	$\tan\frac{15\pi}{4} = -1$
الجيب وجيب التمام للزوايا المتتامة صفحة 15	
14	$\cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70° = 0.9397$
15	$\sin 35° = \cos(90° - 35°) = \cos 55° = 0.57358$
16	$\cos 12° = \sin(90° - 12°) = \sin 78° = 0.9781$ $\sin 12° = \sqrt{1 - \cos^2 12°} = \sqrt{1 - (0.9781)^2} = 0.2081$
معكوس اقترانات الجيب وجيب التمام والظل صفحة 16	
17	$\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

18	$\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$
19	$\sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$
حل المعادلات المثلثية صفحة 16	
20	$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=45°,135°$
21	$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=30°,210°$
22	$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=30°,330°$
23	$7+9\cos x=1\Rightarrow\cos x=-\frac{2}{3}\Rightarrow x=131.8°,228.2°$
24	$2\sin x+1=0\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=210°,330°$
25	$1-2\tan x=5\Rightarrow\tan x=-2\Rightarrow x=116.6°,296.6$
26	$2\sin x\tan x+\tan x=0\Rightarrow\tan x\,(2\sin x+1)=0$ $\Rightarrow\tan x=0,\sin x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x=0°,180°,360°,210°,330°$
27	$\cos x+3\sin x\cos x=0\Rightarrow\cos x\,(1+3\sin x)=0$ $\Rightarrow\cos x=0,\sin x=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow x=90°,270°,199.5°,340.5°$
28	$3(\cos x+3)=7+\cos x\Rightarrow 2\cos x=-2$ $\Rightarrow\cos x=-1$ $\Rightarrow x=180°$

الدرس الأول: المتطابقات المثلثية 1

1	$\cos^3 x + \sin^2 x \cos x = \cos x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos x$
2	$\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1+\cos x + 1 - \cos x}{1-\cos^2 x} = \dfrac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$
3	$\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x = \sin^2 x$
4	$\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x} = \dfrac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos x\,(\cos x - 1)} = \dfrac{\cos x + 1}{\cos x} = 1 + \sec x$
5	$\dfrac{1+\cos x}{1+\sec x} = \dfrac{1+\cos x}{1+\dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{\cos x + \cos^2 x}{\cos x + 1} = \dfrac{\cos x\,(1+\cos x)}{\cos x + 1} = \cos x$
6	$\dfrac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1} = \dfrac{(3\sin x + 1)(\sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2} = \dfrac{3\sin x + 1}{\sin x + 1}$
7	$\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\csc x} = \cos x \times \left(\dfrac{1}{\sec x}\right) + \sin x \times \left(\dfrac{1}{\csc x}\right) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
8	$\ln\lvert 1+\cos x\rvert + \ln\lvert 1-\cos x\rvert = \ln\lvert(1+\cos x)(1-\cos x)\rvert$ $= \ln\lvert 1-\cos^2 x\rvert = \ln\lvert\sin^2 x\rvert = 2\ln\lvert\sin x\rvert$
9	$\dfrac{1}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
10	$\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B} = \tan A + \tan B$
11	$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ $= \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
12	$\tan\dfrac{19\pi}{12} = -\tan\left(2\pi - \dfrac{19\pi}{12}\right) = -\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = -\tan\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ $= -\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{1+\cos\frac{5\pi}{6}}} = -\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = -2-\sqrt{3}$
13	$\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80° = \cos(10° + 80°) = \cos 90° = 0$

14	$\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\sin x + \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}$ $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cos x$ $\Rightarrow \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$
15	$\tan A = \tan\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan B}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan B} = \frac{1-\tan B}{1+\tan B}$
16	$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t} = \frac{\frac{\sin s}{\cos s} + \frac{\sin t}{\cos t}}{1 - \frac{\sin s}{\cos s} \times \frac{\sin t}{\cos t}} \times \frac{\cos s \cos t}{\cos s \cos t}$ $= \frac{\sin s \cos t + \cos s \sin t}{\cos s \cos t - \sin s \sin t} = \frac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)}$
17	من التمثيل البياني نلاحظ أن المنحنيين متماثلان حول المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}$ فإذا أخذنا أي نقطتين متماثلتين، فإن لهما البعد نفسه عن محور التماثل. لتكن الزاوية θ التي صورتها $\sin^2\theta$ بالاقتران الأول، وصورتها $\cos^2\theta$ بالاقتران الثاني. بما أن البعدين عن محور التماثل متساويان فإنه لدينا ثلاث حالات: 1) إذا كان منحنى $y = \sin^2\theta$ فوق منحنى $y = \cos^2\theta$: نكتب: $\sin^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \cos^2\theta$ ومنه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 2) إذا كان منحنى $y = \cos^2\theta$ فوق منحنى $y = \sin^2\theta$: نكتب: $\cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2\theta$ ومنه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 3) عند نقاط التقاطع فإن $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ و $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ ومنه $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ أي أنه أيًّا كان قياس الزاوية θ فإن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ وهو المطلوب.

الدرس الثاني: المتطابقات المثلثية 2

1	$2\sin 3x\cos 3x = \sin 6x$
2	$\dfrac{2\tan 7x}{1-\tan^2 7x} = \tan 14x$
3	$\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 4x} = \dfrac{1-(1-2\sin^2 2x)}{2\sin 2x\cos 2x} = \dfrac{2\sin^2 2x}{2\sin 2x\cos 2x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$
4	$\dfrac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°} = \tan 2(15°) = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
5	$\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sin 2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
6	$\cos^2 37.5° - \sin^2 37.5° = \cos 2(37.5°)$ $= \cos 75° = \cos\dfrac{1}{2}(150°) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 150°}{2}}$ $= \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
7	$\sin 75° = \sin\dfrac{1}{2}(150°) = \sqrt{\dfrac{1-\cos 150°}{2}}$ $= \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
8	$\cos\dfrac{23\pi}{12} = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$ $= \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

9	$\tan 202.5° = \tan(202.5° - 180°)$ $= \tan 22.5° = \tan \frac{1}{2}(45°)$ $= \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2}-1$
10	$2\sin 52.5° \sin 97.5° = \cos(52.5° - 97.5°) - \cos(52.5° + 97.5°)$ $= \cos 45° - \cos 150° = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
11	$\sin 75° \sin 15° = \frac{1}{2}(\cos(75° - 15°) - \cos(75° + 15°))$ $= \frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 90°) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$
12	$\cos 37.5° \sin 7.5° = \sin 7.5° \cos 37.5°$ $= \frac{1}{2}(\sin(7.5° - 37.5°) + \sin(7.5° + 37.5°))$ $= \frac{1}{2}(\sin -30° + \sin 45°)$ $= \frac{1}{2}(-\sin 30° + \sin 45°) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$
13	$A = \frac{1}{2}a^2 \sin\theta = \frac{1}{2}a^2 \sin 30° = \frac{1}{4}a^2$
14	$A = \frac{1}{4} \times 49 = 12.25\ cm^2$
15	$\cos^4 2x - \sin^4 2x = (\cos^2 2x + \sin^2 2x)(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$ $= 1 - 2\sin^2 2x$
16	$\csc 2x = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\csc x \sec x$

17	$\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1}=\cos\theta$
18	$\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=\dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\cos 2\theta}{1}=\cos 2\theta$
19	$\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x+\sin x}=\dfrac{2\sin 5x\cos 5x}{2\sin 5x\cos 4x}=\dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$
20	$\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$ $=\dfrac{4\sin x\cos x}{\cos 2x}=\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}=2\tan 2x$

الدرس الثالث: حل المعادلات المثلثية

1	$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$ $2x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$
2	$\cot x - \csc x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow \cos x - 1 = \sqrt{3}\sin x$ $\Rightarrow (\cos x - 1)^2 = 3\sin^2 x$ $\Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 3(1 - \cos^2 x)$ $\Rightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$ $\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ $\Rightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$ $\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = 1$ $x = \frac{4\pi}{3}$

3	$\frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x} = 2 \quad \Rightarrow 1+\cot^2 x = 2\cot^2 x$ $\Rightarrow \cot^2 x = 1$ $\Rightarrow \tan^2 x = 1$ $\Rightarrow \tan x = \pm 1$ $x = \frac{\pi}{4}\ , \quad x = \frac{3\pi}{4}\ , \quad x = \frac{5\pi}{4}\ , \quad x = \frac{7\pi}{4}$
4	$3\cos^2 x = \sin^2 x \quad \Rightarrow 3\cos^2 x = 1-\cos^2 x$ $\Rightarrow 4\cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3}\ , \quad x = \frac{2\pi}{3}\ , \quad x = \frac{4\pi}{3}\ , \quad x = \frac{5\pi}{3}$
5	$3\sin 3x + 4\cos 3x = 0 \quad \Rightarrow 3\sin 3x = -4\cos 3x$ $\Rightarrow \tan 3x = -\frac{4}{3}$ $3x = 2.21 + k\pi \Rightarrow x = 0.74 + \frac{k\pi}{3}$ $x = 0.74\ , \quad x = 1.79\ , \quad x = 2.83\ ,$ $x = 3.88\ , \quad x = 4.93, \quad x = 5.96$
6	$\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , \frac{x}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi\ , x = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi$ $x = \frac{\pi}{3}$

7	$\cot^2 x + 5\csc x = 5 \Rightarrow \csc^2 x - 1 + 5\csc x = 5$ $\Rightarrow \csc^2 x + 5\csc x - 6 = 0$ $\Rightarrow (\csc x + 6)(\csc x - 1) = 0$ $\Rightarrow \csc x = -6, \csc x = 1$ $\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{6}, \sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2}, \quad x = 3.31, \quad x = 6.12$
8	$4\sec^2 x - 9\sec x = -2 \Rightarrow 4\sec^2 x - 9\sec x + 2 = 0$ $\Rightarrow (4\sec x - 1)(\sec x - 2) = 0$ $\Rightarrow \sec x = \frac{1}{4}, \quad \sec x = 2$ $\Rightarrow \cos x = 4$ (مرفوض), $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{5\pi}{3}$
9	$\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 5 \Rightarrow \frac{1+\sin x + 1 - \sin x}{1-\sin^2 x} = 5$ $\Rightarrow \frac{2}{\cos^2 x} = 5$ $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ $x = 0.87, \quad x = 5.40, \quad x = 2.26, \quad x = 4.03$

10	$\cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x\,(1 - 2\sin 2x) = 0$ $\Rightarrow \cos 2x = 0, \sin 2x = \frac{1}{2}$ $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,,\quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\,,\quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi\ ,\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ $x = \frac{\pi}{4}\,,\quad x = \frac{3\pi}{4}\,,\quad x = \frac{5\pi}{4}\,,\ x = \frac{7\pi}{4}$ $x = \frac{\pi}{12}\,,\ x = \frac{5\pi}{12},\ x = \frac{13\pi}{12}\,,\ x = \frac{17\pi}{12}$
11	$4\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$ $\Rightarrow 2\sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) - \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$ $\Rightarrow (2\sin x - 1)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $x = \frac{\pi}{6}\,,\quad x = \frac{5\pi}{6}\,,\quad x = \frac{\pi}{3}\,,\quad x = \frac{5\pi}{3}$
12	$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 1$ $\Rightarrow 2\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{\pi}{4}\,,\quad x = \frac{3\pi}{4}$

13	$h = 67.5 - 67.5\cos\theta$ $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h = 67.5 - 67.5\cos\frac{\pi}{2} = 67.5$ $\Rightarrow 2r = 2(67.5) = 135\ m$
14	$67.5 - 67.5\cos\theta = 100 \quad \Rightarrow \cos\theta = -\frac{13}{27} \approx -0.48$ $\Rightarrow \theta \approx \pi - 1.07 \approx 2.07 \ , \ \theta \approx \pi + 1.07 \approx 4.21$ $T_1 = \frac{2.07 \times 30}{2\pi} \approx 9.88\ min$ $T_2 = \frac{4.21 \times 30}{2\pi} \approx 20.1\ min$
15	يتقاطع المنحنيان في الفترة $[0, 2\pi)$ مرتان، إذن، يوجد حلان لهذه المعادلة في الفترة المذكورة.
16	$\cos x = \tan x \Rightarrow \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow \cos^2 x = \sin x$ $\Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x$ $\Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $x \approx 0.67$
17	$sin(A + B) = 2sin(A - B)$ $\sin A\cos B + \cos A\sin B = 2\sin A\cos B - 2\cos A\sin B$ $\sin A\cos B = 3\cos A\sin B$ $\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} = \frac{3\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$ $\tan A = 3\tan B$

18	$sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \tan x = 3\tan\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \tan x = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}, \quad x=\frac{4\pi}{3}$

الوحدة الثالثة: التفاضل وتطبيقاته

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد المشتقة باستعمال التعريف العام صفحة 21	
1	$f(x)=3x-8$ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-8-3x+8}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$
2	$f(x)=4x^3+3x$ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^3+3(x+h)-4x^3-3x}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+3x+3h-4x^3-3x}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3+3x+3h-4x^3-3x}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3+3h}{h}$ $=\lim_{h\to 0}(12x^2+12xh+4h^2+3)$ $=12x^2+3$

3	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2-4}-\dfrac{1}{x^2-4}}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2-4-(x+h)^2+4}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x-x-h)(x+x+h)}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h(2x+h)}{h(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(2x+h)}{(x^2-4)((x+h)^2-4)}$ $=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$
	مشتقة اقتران القوة صفحة 22
4	$f'(x)=21x^2$
5	$f'(x)=16x^{\frac{1}{3}}$
6	$f'(x)=6x-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$
7	$f(x)=-3x^{-7}\Rightarrow f'(x)=21x^{-8}=\frac{21}{x^8}$
8	$f(x)=x^5-2x^3\Rightarrow f'(x)=5x^4-6x^2$
9	$y=7x^{-3}+3x^{-1}-2$ $\dfrac{dy}{dx}=-21x^{-4}-3x^{-2}=-\dfrac{21}{x^4}-\dfrac{3}{x^2}$
	مشتقة اقترانات باستعمال قاعدة السلسلة صفحة 23
10	$\dfrac{dy}{dx}=6(2x-3)^5(2)=12(2x-3)^5$

11	$y=\sqrt{9-3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2\sqrt{9-3x}}$
12	$y=(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{3}{2}}(4)=-\frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}$
13	$f'(x)=4(1-2x)^3(-2)=-8(1-2x)^3$
14	$f'(x)=-5(3-2x^2)^{-4}(-4x)=\frac{20x}{(3-2x^2)^4}$
15	$f'(x)=\frac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7)=\frac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}$
	إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي عند نقطة ما صفحة 23
13	$f'(x)=2(3x+2)(3)=18x+12$ ميل المماس: $f'(-1)=18(-1)+12=-6$ معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-6(x+1)$ $\Rightarrow y=-6x-5$
14	بما أن ميل المماس هو -6 إذن ميل العمودي هو $\frac{1}{6}$ معادلة العمودي على المماس: $y-1=\frac{1}{6}(x+1) \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}$

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

1	$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$
2	$f(x) = 2e^x + x^{-2}$ $f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \frac{2}{x^3}$
3	$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$
4	$f(x) = 2e^x + x \quad , \quad x = 2$ $f(2) = 2e^2 + 2$ $f'(x) = 2e^x + 1$ ميل المماس: $f'(2) = 2e^2 + 1$ معادلة المماس: $y - 2e^2 - 2 = (2e^2 + 1)(x - 2)$ $y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$
5	$f'(x) = 3 + \cos x$ عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$ $3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$ وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \le \cos x \le 1$ إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f.
6	$s(t) = 3t^2 - t^3 \quad , t \ge 0$ السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$ التسارع: $a(t) = 6 - 6t$

7	يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ $v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2-t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$ $s(0) = 0, \quad s(2) = 12 - 8 = 4$ إذن يكون الجسيم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0\text{ m},\ s = 4\text{ m}$
8	$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x \quad , x = e^2$ $f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \quad \Rightarrow (e^2, 4)$ $f'(x) = \frac{2}{x}$ ميل المماس: $f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$ معادلة المماس: $y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$
9	ميل المستقيم الذي معادلته $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3 $f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
10	$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$ $f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2$
11	نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = 2$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$ معادلة المماس: $y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

1	$f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
2	$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$
3	$f(x) = \dfrac{x^2 + cx}{x^2 + c}\ , x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{(2x + c)(x^2 + c) - 2x(x^2 + cx)}{(x^2 + c)^2} = \dfrac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2 + c)^2}\ , x \neq 0$
4	$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$
5	$f'(x) = 4 - x^2 \sec^2 x - 2x \tan x$
6	$f'(x) = \dfrac{-x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^4} = \dfrac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$
7	$f(x) = x - \dfrac{4x}{x + 3}$ $f'(x) = 1 - \dfrac{4(x + 3) - 4x}{(x + 3)^2} = 1 - \dfrac{12}{(x + 3)^2}$
8	$f'(x) = \dfrac{-6\cos^2 x - (3 - 3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2} = \dfrac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$
9	$f'(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$
10	$f'(x) = -x^2 \sin x + 2x\cos x$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$ معادلة المماس: $y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$
11	$f'(x) = \dfrac{(\cos x)(\cos x) + \sin x\,(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$ ميل المماس: $f'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$ معادلة المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$
12	$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} = \dfrac{-2x + 2}{x^3} = 0 \ \Rightarrow x = 1$ النقطة المطلوبة هي: $(1, f(1)) = (1,1)$

13	$h'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ النقطة المطلوبة هي: $(0, h(0)) = (0,0)$
14	$g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$ $g'(x) = \frac{8e^x - 8e^x(x-2)}{e^{2x}} = \frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}} = \frac{8(3-x)}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow x = 3$ النقطة المطلوبة هي: $(3, g(3)) = \left(3, \frac{8}{e^3}\right)$
15	$u'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 3$
16	$v'(4) = \frac{g(4)f'(4) - f(4)g'(4)}{\left(g(4)\right)^2} = \frac{2 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1}{(2)^2} = -\frac{7}{12}$
17	$f'(x) = x \sec x \tan x + \sec x = \sec x\,(1 + x \tan x)$
18	$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$
19	$a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$ $a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032 \ \text{ft/s}^2$
20	$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} \approx -0.007 \ \text{ft/s}^2$
21	$A = \sqrt{t}(6t+5) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \quad \text{cm}^2/\text{s}$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

1	$f'(x) = -10e^{-0.1x}$
2	$f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$
3	$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$
4	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$
5	$f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2} = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$ $f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2(x-1)\ln 3}$
6	$f(x) = 2(\cot(\pi x+2))^2$ $f'(x) = -4\pi\cot(\pi x+2)\csc^2(\pi x+2)$
7	$f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$
8	$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$
9	$f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3+2} \times \frac{2x(x^3+2)-3x^4}{(x^3+2)^2}$ $= \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^2} = \frac{8x^3-2x^6}{(x^3+2)^3}$
10	$f'(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$ $= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$
11	$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$ $= \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$
12	$f'(x) = -(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$

13	$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$ معادلة المماس: $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$
14	$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$ ميل المماس: $f'(-1) = -54$ $x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 27$ معادلة المماس: $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$
15	$f'(x) = 3\sec^2 3x$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ معادلة المماس: $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$
16	$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$ $= 3\cos x\,(1 - \sin^2 x)$ $= 3\cos x\,(\cos^2 x)$ $= 3\cos^3 x$
17	$f''(x) = -9\cos^2 x\sin x$

18	$\frac{dy}{dt} = b\cos t$ $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$ $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ معادلة المماس: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$ $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$
19	$y = e^{ax}$ $\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = 1 \rightarrow e^{ax} = \frac{1}{a}$ $\Rightarrow ax = \ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\Rightarrow x = \frac{-\ln a}{a}$ $\Rightarrow y = e^{a(\frac{-\ln a}{a})} = e^{-\ln a} = (e^{\ln a})^{-1} = \frac{1}{a}$ إذن، النقطة المطلوبة هي: $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$
20	ميل العمودي على المماس عند النقطة P يساوي 1- معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right) \Rightarrow y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$ $\Rightarrow y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow k = \frac{1 - \ln a}{a}$
21	$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)} = (4 + 3f(x))^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = \frac{1}{2}(3f'(x))(4 + 3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$ $h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}} = \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

22	$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ $f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$
23	$f'(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$ $f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$ $= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$ $f''(x) + 16f(x) = 0$
24	$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$ $\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$
25	$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \rightarrow -\sec\theta = \sqrt{2} \rightarrow \sec\theta = -\sqrt{2} \rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ عندما $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$، فإن: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, y = 2\cos\theta = 2 \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}$
26	$\frac{dy}{dx} = -\sec\theta = -\frac{1}{\cos\theta}$ يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos\theta = 0$ وعندها يكون: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0 = 1 \ , y = 2\cos\theta = 2 \times 0 = 0$ فالنقطة المطلوبة هي: $(1,0)$
27	$a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$ $a(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$ $v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}$ m/s
28	$f(u) = u^5 + 1 \Rightarrow f'(u) = 5u^4$ $u = g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

29	$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2\sec^2 u \tan u$ $u = g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi$ $(fog)'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi = 5\pi$
30	$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t\ ,\ \frac{dx}{dt} = 10\cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t \quad , -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
31	يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا، إذن: $10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4، إذن: $2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$
32	$\frac{dy}{dt} = -3\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t} \quad , 0 \le t \le 2\pi$ $(x, y) = (0,0) \Rightarrow (2\sin 2t, 3\cos t) = (0,0) \Rightarrow \sin 2t = 0$ و $\cos t = 0$ $\sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ $\cos t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

1	$3x^3y^2\frac{dy}{dx}+3x^2y^3=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$
2	$x\frac{dy}{dx}+y=\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y)$ $\Rightarrow x\frac{dy}{dx}-\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=-y+\cos(x+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y+\cos(x+y)}{x-\cos(x+y)}$
3	$4y^3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=10 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{10}{4y^3-2y}=\frac{5}{2y^3-y}$
4	$x\cos y\frac{dy}{dx}+\sin y+y\sin x-\cos x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y+y\sin x}{\cos x-x\cos y}$
5	$-\csc^2 y\frac{dy}{dx}=1-\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\csc^2 y}=\frac{-1}{\cot^2 y}=-\tan^2 y$
6	$\frac{x\frac{dy}{dx}+y}{2\sqrt{xy}}+1+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y+2\sqrt{xy}+4y\sqrt{xy}\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y+2\sqrt{xy}}{x+4y\sqrt{xy}}$
7	$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$ نعوض $(x,y)=(2,-1)$ $\Rightarrow 4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$ معادلة المماس: $y+1=0(x-2) \Rightarrow y=-1$
8	$xe^y\frac{dy}{dx}+e^y+\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}=0$ نعوض $(x,y)=(1,\ln 2)$ $e^{\ln 2}\frac{dy}{dx}+e^{\ln 2}+\ln 2+0=0$ $2\frac{dy}{dx}+2+\ln 2=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1-\frac{1}{2}\ln 2$ معادلة المماس: $y-\ln 2=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)(x-1)$ $y=\left(-1-\frac{1}{2}\ln 2\right)x+1+\frac{3}{2}\ln 2$

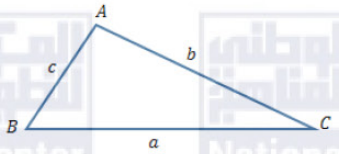
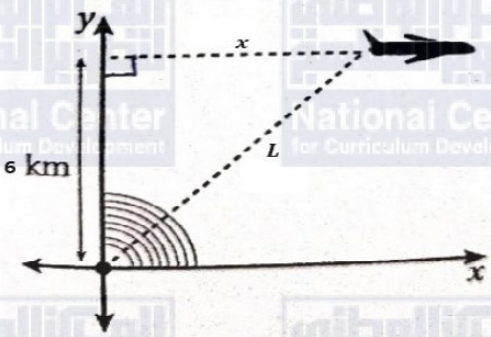
9	$4x\frac{dy}{dx}+4y=0$ نعوض $(x,y)=(1,\frac{9}{4})$ $4\frac{dy}{dx}+9=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$ معادلة المماس: $y-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{9}{2}$
10	$x+\frac{1}{4}y\frac{dy}{dx}=0$ نعوض $(x,y)=(1,2)$ $1+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2$ معادلة المماس: $y-2=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+4$
11	$x^2\frac{dy}{dx}+2xy-4=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4-2xy}{x^2}=4x^{-2}-2yx^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=-8x^{-3}+2yx^{-2}-2x^{-1}\frac{dy}{dx}$ $=-8x^{-3}+2yx^{-2}-2x^{-1}(4x^{-2}-2yx^{-1})$ $=-16x^{-3}+6yx^{-2}=-\frac{16}{x^3}+\frac{6y}{x^2}$
12	$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-xy^{-1}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=xy^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}$ $=xy^{-2}(-xy^{-1})-y^{-1}$ $=-x^2y^{-3}-y^{-1}$ $=-\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{8}{y^3}$

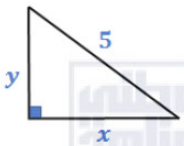
13	$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2\frac{dy}{dx}}{4y^2} = \frac{12xy - 6x^2 \times \frac{3x^2}{2y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$
14	$3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx}$ نعوض $(x,y) = (1,0)$ $3\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ ميل المماس: $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ بما أن ميل المماس هو $-\frac{1}{2}$، فإن ميل العمودي على المماس هو 2 معادلة العمودي على المماس: $y - 0 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

15	نفرض أن النقطة المطلوبة هي $P\ (x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى. نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x فينتج أنّ: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y} = -\frac{9x}{4y}$ ميل المماس عند P هو: $-\frac{9x_1}{4y_1}$ لكن ميل المماس يساوي -0.5 إذن، $-\frac{9x_1}{4y_1} = -0.5 \Rightarrow 2y_1 = 9x_1$ وبضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أنّ: $4y^2 + 9x^2 = 36$ وبتعويض إحداثيي P نجد أنّ: $4{y_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36$ $\Rightarrow 81{x_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36 \Rightarrow 90{x_1}^2 = 36 \Rightarrow {x_1}^2 = 0.4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{0.4}$ $\Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}\sqrt{0.4} = \sqrt{8.1}$ النقطة المطلوبة هي: $P\,(\sqrt{0.4}, \sqrt{8.1})$
16	$x^2 + xy + y^2 = 7$ $y = 0 \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \ \Rightarrow P_1 = (\sqrt{7}, 0), P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$ $x^2 + xy + y^2 = 7 \ \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \ \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{P_1} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2 \quad , \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{P_2} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2$ ميلا المماسين متساويان، إذن هذان المماسان متوازيان.

الدرس الخامس: المعدلات المرتبطة

1	المعطى: $\frac{dV}{dt} = 8$ المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $\rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=12} = 576\pi \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12} = 8 \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=12} = \frac{8}{576\pi} = \frac{1}{72\pi}$ cm/s
2	المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{V=36\pi}$ عندما يكون الحجم 36π، يكون: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=3} = 4\pi r^2 \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3}$ $8 = 4\pi \times 9 \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=3} = \frac{8}{36\pi} = \frac{2}{9\pi}$ cm/s
3	$t = 33.5 \Rightarrow V = 8 \times 33.5 = 268 \text{ cm}^3$ عندما يكون الحجم 268 cm^3 يكون طول نصف القطر $\sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}} \approx 4$ cm $\Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=4} = 64\pi \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=4} = 8 \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=4} = \frac{8}{64\pi} = \frac{1}{8\pi} \approx 0.04$ cm/s

4	معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.  $A = \frac{1}{2}ab\sin C$ فإذا كان $a = b = s, C = \theta$، فإنّ: $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$
5	المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$ و المطلوب : $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$ ، حيث s ثابت $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$ $\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}s^2 (\cos\frac{\pi}{6})\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$
6	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 3$ و المطلوب : $\left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=20}$ $y = \frac{10}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=20} = \frac{-1200}{(401)^2} \approx -0.007\text{cm/s}$
7	المعطى: $\frac{dL}{dt} = 300$ و المطلوب : $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{L=10}$ $L^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x = \sqrt{L^2 - 36}$ $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{L\frac{dL}{dt}}{\sqrt{L^2-36}}$ $\Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right\|_{L=10} = \frac{10 \times 300}{\sqrt{100-36}} = \frac{3000}{\sqrt{64}}$ $= 375 \text{ km/h}$ 

8	نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو x، وأن بعد الطرف العلوي عن الأرض هو y.  المعطى: $\frac{dy}{dt} = 0.15 \text{ m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=3}$ من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 25$ $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$ $\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$ عندما $x = 3$، يكون: $y^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow y = 4$ $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=3} = -\frac{4(0.15)}{3} = -0.2 \text{ m/s}$ إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة 0.2 m/s نحو اليسار مقتربًا من الجدار.
9	$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$
10	المعطى: $\frac{dx}{dt} = 4$ المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4}$ $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$ $= 2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$ $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=4} = 2e^{-\frac{(4)^2}{2}}(1 - (4)^2)(4)$ $= -120e^{-8} \text{ cm}^2/\text{min}$

الوحدة الرابعة: الأعداد المركبة

أستعد لدراسة الوحدة

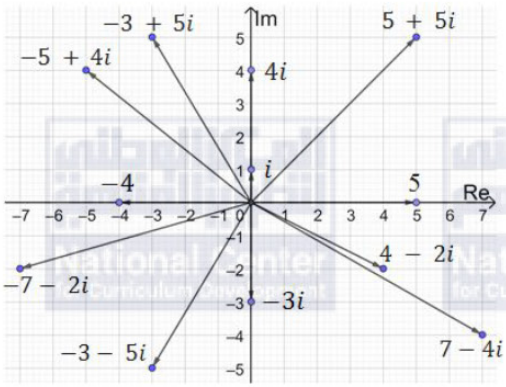
	حل معادلات كثيرات الحدود صفحة 32
1	$x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-6)(x+2)=0 \Rightarrow x=6\ ,x=-2$
2	$2x^3-6x^2+7x-60=0$ بتجريب الأصفار النسبية المحتملة، نجد أن $x=4$ حل لهذه المعادلة، إذن $(x-4)$ عامل من عوامل كثير الحدود $2x^3-6x^2+7x-60$ ، نقسم فنحصل على: $2x^3-6x^2+7x-60=(x-4)(2x^2+2x+15)$ $\Rightarrow 2x^3-6x^2+7x-60=0 \Rightarrow 2x^2+2x+15=0\ or\ x-4=0 \Rightarrow x=4$ ملاحظة: العبارة التربيعية $2x^2+2x+15$ مميزها سالب، أي ليس لها جذور حقيقية. فالحل الوحيد لهذه المعادلة هو: $x=4$
	تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها صفحة 33
3	$\overrightarrow{AB}=\langle 2-4,6-2\rangle=\langle -2,4\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
4	$\overrightarrow{AB}=\langle 0-(-2),7-3\rangle=\langle 2,4\rangle$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
	معادلة الدائرة صفحة 33
5	$(x+1)^2+(y-8)^2=25$
6	$r=\sqrt{(5+7)^2+(4-13)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$ $(x+7)^2+(y-13)^2=225$

الدرس الأول: الأعداد المركبة

1	$\sqrt{-128} = \sqrt{-1 \times 2 \times 64} = 8i\sqrt{2}$
2	$\sqrt{-14} = \sqrt{-1 \times 14} = i\sqrt{14}$
3	$\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \times 81} = 9i$
4	$\sqrt{-125} = \sqrt{-1 \times 5 \times 25} = 5i\sqrt{5}$
5	$3\sqrt{-32} = 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16} = 12i\sqrt{2}$
6	$\sqrt{-\frac{28}{9}} = \sqrt{-1 \times \frac{7 \times 4}{9}} = \frac{2i\sqrt{7}}{3}$
7	$i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i$
8	$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$
9	$i^{98} = (i^2)^{49} = (-1)^{49} = -1$
10	$i^{121} = i^{120} \times i = (i^2)^{60} \times i = (-1)^{60} \times i = i$
11	

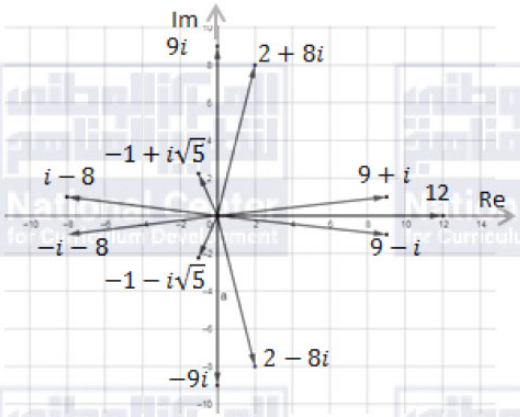
z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

12-23

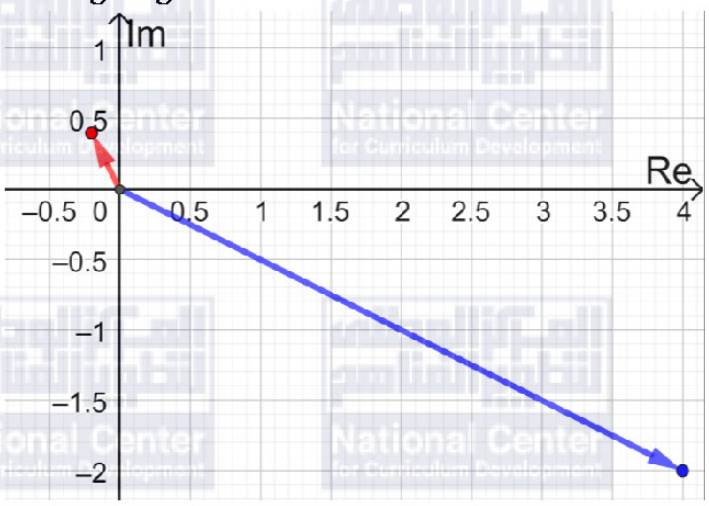


24	$A = 4 + 5i \quad \Rightarrow \lvert A\rvert = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \quad , Arg(A) = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.90$ $B = 3i \quad \Rightarrow \lvert B\rvert = \sqrt{9} = 3 \quad , Arg(B) = \frac{\pi}{2}$ $C = 2 - 6i \quad \Rightarrow \lvert C\rvert = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10} \quad , Arg(C) = -\tan^{-1} 3 \approx -1.25$ $D = -2i \quad \Rightarrow \lvert D\rvert = \sqrt{4} = 2 \quad , Arg(D) = -\frac{\pi}{2}$ $E = -4 \quad \Rightarrow \lvert E\rvert = \sqrt{16} = 4 \quad , Arg(E) = \pi$ $F = -5 - 4i \quad \Rightarrow \lvert F\rvert = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ $Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{4}{5}\right) \approx -2.47$ $G = -3 + 4i \quad \Rightarrow \lvert G\rvert = \sqrt{9+16} = 5$ $Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 2.21$
25	$2x + 1 = 7 \quad , 4 = -y + 3$ $\Rightarrow x = 3 \ , y = -1$
26	$x + 3y = 26 \, , 2x - 4y = 32$ $\Rightarrow x = 20 \, , y = 2$
27	$\lvert z\rvert = 6 \ , Arg(z) = \tan^{-1}\frac{0}{6} = 0$ $z = 6(\cos 0 + i \sin 0)$
28	$\lvert z\rvert = 5 \ , Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ $z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
29	$\lvert z\rvert = \sqrt{12+4} = 4 \ , Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ $z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

30	$\lvert z\rvert = \sqrt{2}\ , Arg(z) = \pi - \tan^{-1} 1 = \frac{3\pi}{4}$ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
31	$\lvert z\rvert = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\ , Arg(z) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$ $z = 2\sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46))$
32	$\lvert z\rvert = 2\sqrt{17}\ , Arg(z) = \tan^{-1} 4 \approx 1.33$ $z = 2\sqrt{17}(\cos 1.33 + i\sin 1.33)$
33	$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$
34	$12(-1 + i(0)) = -12$
35	$8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$
36	$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$
37	$\bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$
38	$\bar{z} = 9 + i$
39	$\bar{z} = 2 + 8i$
40	$\bar{z} = 9i$
41	$\bar{z} = 12$
42	$\bar{z} = -i - 8$



الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

1	$9+3i$
2	$2-5i$
3	$12+28i$
4	$64-36i^2=100$
5	$-8+24\sqrt{3}i+72-24\sqrt{3}i=64$
6	$\frac{3-i}{4-3i}\times\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{15+5i}{25}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$
7	$z=1-3i\ \ ,w=1+i$
8	$wz=4-2i\rightarrow\lvert wz\rvert=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ $Arg(wz)=-\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx-0.46$ $\frac{w}{z}=\frac{1+i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{-2+4i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ $\left\lvert\frac{w}{z}\right\rvert=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \ ,Arg\left(\frac{w}{z}\right)=\pi-\tan^{-1}2\approx2.03$
9	$wz=4-2i\ ,\frac{w}{z}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ 
10	$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

11	$\lvert z\rvert = \sqrt{(-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = 6$
12	$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$
13	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert w\rvert = 6 \times 18 = 108$
14	$\sqrt{-15+8i} = x+iy \quad \Rightarrow -15+8i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow -15+8i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = -15 \ , 2xy = 8 \ \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$ $\Rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \ , y = \ \pm 4$ $\sqrt{-15+8i} = \pm(1+4i)$
15	$\sqrt{-7-24i} = x+iy \quad \Rightarrow -7-24i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow -7-24i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = -7 \ , 2xy = -24 \ \Rightarrow y = -\frac{12}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$ $\Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \ , y = \ \mp 4$ $\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i)$
16	$\sqrt{105+88i} = x+iy \quad \Rightarrow 105+88i = (x+iy)^2$ $\Rightarrow 105+88i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow x^2 - y^2 = 105 \ , 2xy = 88 \ \Rightarrow y = \frac{44}{x}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105$ $\Rightarrow x^4 - 105x^2 - 1936 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-121) = 0 \Rightarrow x = \pm 11 \ , y = \ \pm 4$ $\sqrt{105+88i} = \pm(11+4i)$

17	$Arg(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \quad \lvert\omega\rvert = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\lvert\omega^3\rvert = \lvert\omega\rvert \times \lvert\omega\rvert \times \lvert\omega\rvert = 1 \times 1 \times 1 = 1$ $Arg(\omega^3) = Arg(\omega) + Arg(\omega) + Arg(\omega) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ $\Rightarrow \omega^3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$
18	$z_1 z_2 = 3 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$
19	$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \overline{z_1} = 3\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$ $z_1\overline{z_1} = 3 \times 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = 9(\cos 0 + i\sin 0)$
20	$z_2{}^3 = z_2{}^2 \times z_2 = 2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \times z_2$ $= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $= 8\left(\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ $= 8(\cos\pi + i\sin\pi)$
21	$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$
22	$\left\lvert\frac{u - 9i}{3 + i}\right\rvert = 5 \Rightarrow \frac{\lvert u - 9i\rvert}{\lvert 3 + i\rvert} = 5$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{u^2 + 81}}{\sqrt{9 + 1}} = 5$ $\Rightarrow \sqrt{u^2 + 81} = 5\sqrt{10}$ $\Rightarrow u^2 + 81 = 250$ $\Rightarrow u^2 = 169 \Rightarrow u = \pm 13$ لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u = -13$.

حلّ آخر:

ويمكن كتابة الصورة القياسية للعدد $\frac{u-9i}{3+i}$ وهي $\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i$ ثم إيجاد مقياس هذا العدد

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = \left|\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i\right|$$

$$\sqrt{(\frac{3u-9}{10})^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2} = 5$$

$$(\frac{3u-9}{10})^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2 = 25$$

$$(3u-9)^2+(u+27)^2 = 2500$$

$$9u^2-54u+81+u^2+54u+729 = 2500$$

$$10u^2 = 1690 \Rightarrow u^2 = 169 \Rightarrow u = \pm 13$$

وبما أن u سالبة فإن $u = -13$.

23

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، فإنّه يحقق المعادلة، أي أنّ:

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$(1+8i+16i^2)(1+4i) + 5(1+8i+16i^2)+a(1+4i)+b=0$$

$$(-15+8i)(1+4i)+5(-15+8i)+a(1+4i)+b=0$$

$$-15-52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$$

$$-122+a+b+i(4a-12)=0$$

$$-122+a+b=0\ ,4a-12=0 \Rightarrow a=3, b=119$$

فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة، فإن $1-4i$ جذر آخر لها. نكوّن معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$\big(x-(1+4i)\big)\big(x-(1-4i)\big) = (x-1-4i)(x-1+4i)$$

$$= x^2-2x+17$$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ فنحصل على:

$$x^3+5x^2+3x+119 = (x^2-2x+17)(x+7)$$

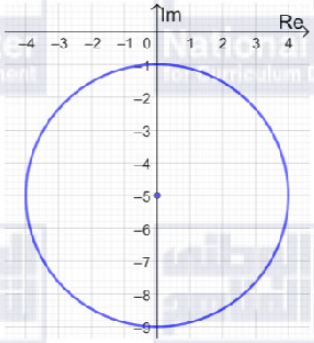
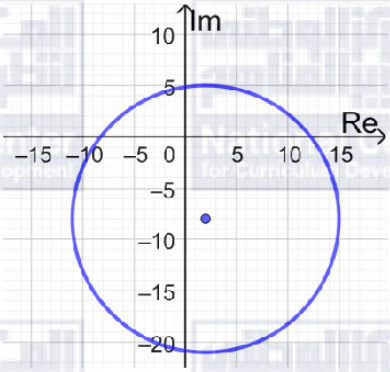
الجذران الآخران لهذه المعادلة هما: $x=-7,\ x=1-4i$

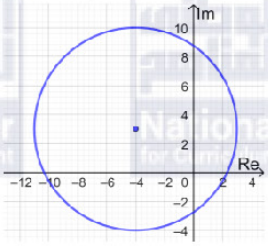
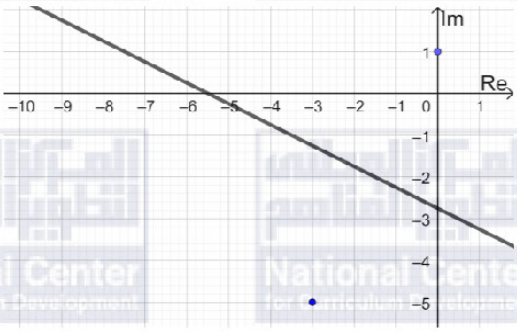
24	نبسط $\frac{362-153i}{2-3i}$ $\frac{362-153i}{2-3i}=\frac{362-153i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{1183+780i}{13}=91+60i$ $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\sqrt{91+60i}=x+iy$ $\Rightarrow 91+60i=x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow x^2-y^2=91\ ,2xy=60\ \Rightarrow y=\frac{30}{x}$ $\Rightarrow x^2-\frac{900}{x^2}=91$ $\Rightarrow x^4-91x^2-900=0$ $\Rightarrow (x^2+9)(x^2-100)=0\Rightarrow x=\pm 10\ ,y=\ \pm 3$ $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\pm(10+3i)$
25	إذا كان $(4+3i)$ جذرًا تربيعيًّا للعدد $(7+24i)$ فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة: $(4+3i)^2=7+24i$ نستطيع التأكد من ذلك بالحساب: $(4+3i)^2=16+24i-9=7+24i$ إذن هو فعلًا جذر تربيعي للعدد$(7+24i)$، وجذره التربيعي الآخر هو : $-4-3i$
26	$\theta_1=Arg(7+24i)=\tan^{-1}\frac{24}{7}\ \approx 1.287$ $\theta_2=Arg(4+3i)=\tan^{-1}\frac{3}{4}\ \approx 0.6435$ $2\times\theta_2=2(0.6435)=1.287=\theta_1$ إذن، $Arg(7+24i)=2Arg(4+3i)$

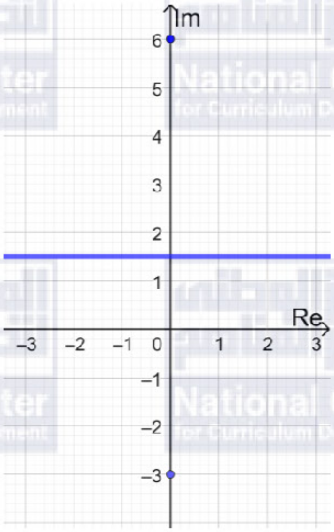
27	$\lvert 7+24i\rvert = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$ $\lvert 4+3i\rvert = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ $\Longrightarrow \lvert 7+24i\rvert = \lvert 4+3i\rvert^2$
28	$\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1-i \Rightarrow \frac{a}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} + \frac{b}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1-i$ $\Rightarrow \frac{3a-ia}{10} + \frac{b-2ib}{5} = 1-i$ $\Rightarrow \frac{3}{10}a - i\frac{a}{10} + \frac{b}{5} - i\frac{2b}{5} = 1-i$ $\Rightarrow \frac{3}{10}a + \frac{b}{5} = 1 \ , \quad \frac{a}{10} + \frac{2b}{5} = 1$ $\Rightarrow 3a+2b = 10 \quad , a+4b = 10$ $\Rightarrow b = 2 \quad , a = 2$
29	$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm 3, \pm 29, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{29}{2}, \pm 87, \pm\frac{87}{2}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z = -3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$ إذن $(z+3)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z+3)(2z^2 - 14z + 29) = 0$ $\Rightarrow z = -3 \quad , z = \frac{14 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{14 \pm 6i}{4} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-3, \ \frac{7}{2}+\frac{3}{2}i, \ \frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$

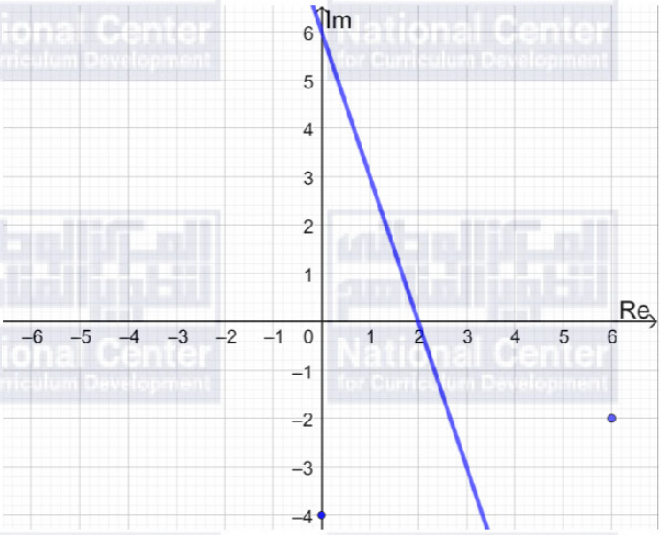
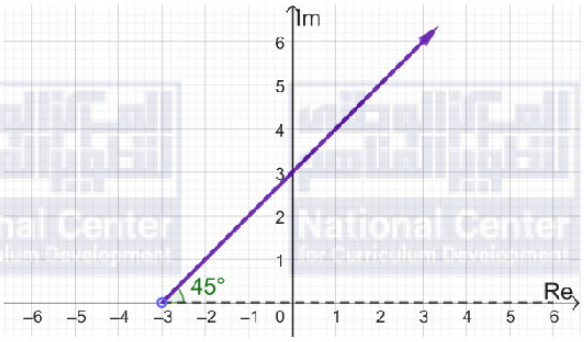
30	$z^3+4z^2-10z+12=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة لأن: $(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$ إذن $(z+6)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $z^3+4z^2-10z+12=(z+6)(z^2-2z+2)=0$ $\Rightarrow z=-6\ \ ,z=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-6,\ 1+i,\ 1-i$
31	بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ ، فإن: $(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$ $\Rightarrow -7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$ $\Rightarrow -7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-4b+10)=0$ $\Rightarrow -2-2a+3b=0\ ,-14+11a-4b=0$ $\Rightarrow a=2,b=2$ المعادلة هي: $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$ بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة، فإنّ $(-2-i)$ جذر آخر لها. نكوّن معادلة لها هذان الجذران: مجموع الجذرين يساوي: -4 ، حاصل ضرب الجذرين يساوي: 5 المعادلة هي: $z^2+4z+5=0$ ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4z+5 فنحصل على: $z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4z+5)(z^2-2z+5)$ $z^2-2z+5=0\ \ \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$ جذور هذه المعادلة هي: $z=1-2i,\ z=1+2i, z=-2+i\ ,z=-2-i$

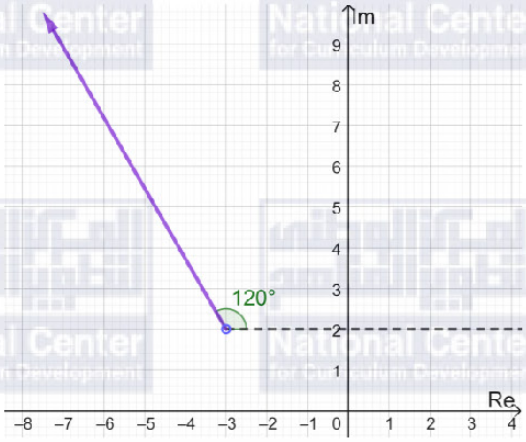
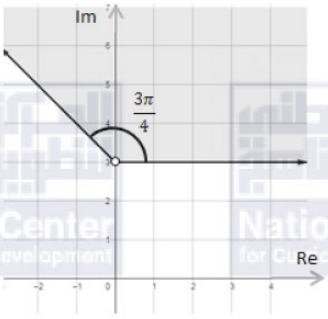
الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

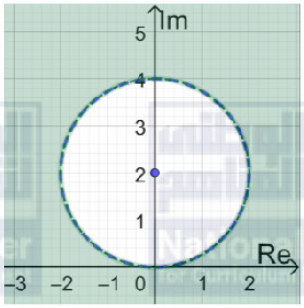
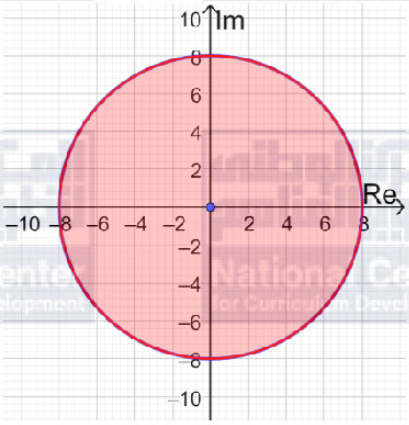
1	$\lvert z+5i\rvert - 3 = 1 \quad \Rightarrow \lvert z-(-5i)\rvert = 4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-5)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات  المعادلة الديكارتية: $\lvert z+5i\rvert - 3 = 1 \quad \Rightarrow \lvert x+i(y+5)\rvert = 4 \quad \Rightarrow x^2+(y+5)^2 = 16$
2	$\lvert z-2+8i\rvert = 13 \quad \Rightarrow \lvert z-(2-8i)\rvert = 13$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة  المعادلة الديكارتية: $\lvert z-2+8i\rvert = 13 \quad \Rightarrow \lvert x-2+i(y+8)\rvert = 13$ $\Rightarrow (x-2)^2+(y+8)^2 = 169$

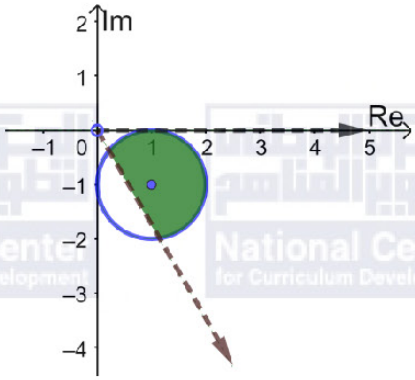
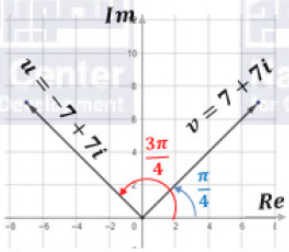
3	$\lvert z+4-3i\rvert = 7 \quad \Rightarrow \lvert z-(-4+3i)\rvert = 7$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات  المعادلة الديكارتية: $\lvert z+4-3i\rvert = 7 \quad \Rightarrow \lvert x+4+i(y-3)\rvert = 7$ $\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2 = 49$
4	$\lvert z+3+5i\rvert = \lvert z-i\rvert \ \Rightarrow \lvert z-(-3-5i)\rvert = \lvert z-(i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-3,-5), (0,1)$  $\lvert z+3+5i\rvert = \lvert z-i\rvert \ \Rightarrow \lvert (x+3)+i(y+5)\rvert = \lvert x+i(y-1)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ $\Rightarrow (x+3)^2+(y+5)^2 = x^2+(y-1)^2$ $\Rightarrow x^2+6x+9+y^2+10y+25 = x^2+y^2-2y+1$ $\Rightarrow 6x+12y+33 = 0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $2x+4y+11 = 0$

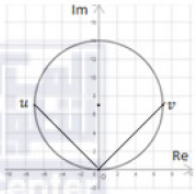
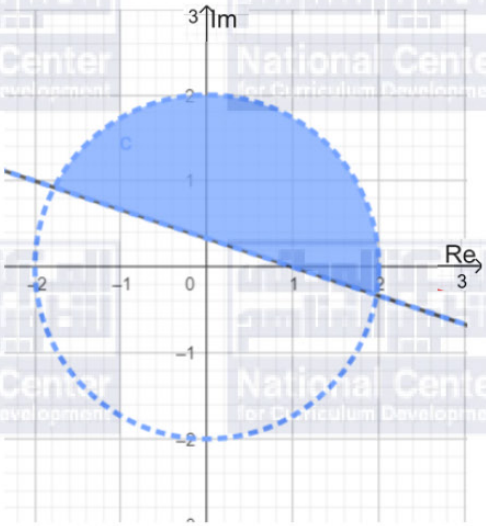
5	$\frac{\lvert z+3i\rvert}{\lvert z-6i\rvert}=1 \quad \Rightarrow \lvert z+3i\rvert=\lvert z-6i\rvert \quad \Rightarrow \lvert z-(-3i)\rvert=\lvert z-(6i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3),(0,6)$  $\lvert z+3i\rvert=\lvert z-6i\rvert \Rightarrow \lvert x+i(3+y)\rvert=\lvert x+i(y-6)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{x^2+(3+y)^2}=\sqrt{x^2+(y-6)^2}$ $\Rightarrow x^2+(3+y)^2=x^2+(y-6)^2$ $\Rightarrow x^2+6y+9+y^2=x^2+y^2-12y+36$ $\Rightarrow 18y-27=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $2y-3=0 \Rightarrow y=1.5$

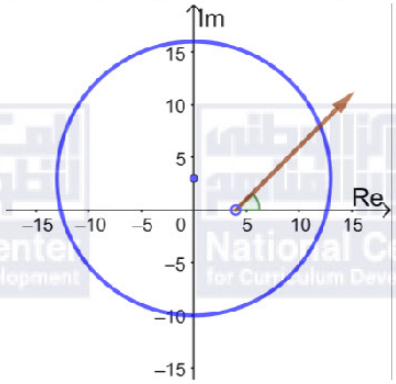
6	$\lvert 6-2i-z\rvert = \lvert z+4i\rvert \Rightarrow \lvert z-6+2i\rvert = \lvert z+4i\rvert$ $\Rightarrow \lvert z-(6-2i)\rvert = \lvert z-(-4i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6,-2),(0,-4)$  $\lvert z-6+2i\rvert = \lvert z+4i\rvert \Rightarrow \lvert x-6+i(y+2)\rvert = \lvert x+i(y+4)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+(y+4)^2}$ $\Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2 = x^2+(y+4)^2$ $\Rightarrow x^2-12x+36+y^2+4y+4 = x^2+y^2+8y+16$ $\Rightarrow 3x+y-6=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $3x+y-6=0$
7	$\text{Arg}(z+3) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Arg}\big(z-(-3)\big) = \frac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب 

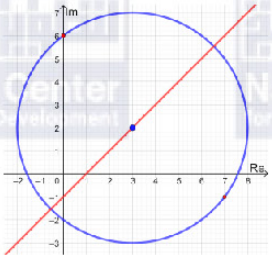
8	$\text{Arg}(z+3-2i)=\frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \text{Arg}\big(z-(-3+2i)\big)=\frac{2\pi}{3}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب 
9	$\text{Arg}(z+2+2i)=-\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \text{Arg}\big(z-(-2-2i)\big)=-\frac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,-2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب 
10	$0 \le \text{Arg}(z-3i) \le \frac{3\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3i)=\frac{3\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3i)=0$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي الموجب  المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كما في الشكل المجاور:

11	$\|z-2i\|>2 \quad \Rightarrow \|z-(2i)\|>2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z-2i\|=2$ ، وهو دائرة مركزها $(0,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي خارج الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة أكبر من طول نصف القطر. 
12	$\|z\| \le 8$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z\|=8$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 

13	$\lvert z-1+i\rvert \le 1$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-1+i\rvert = 1$ ، وهو دائرة (ترسم بخط متصل) مركزها $(1,-1)$ وطول نصف قطرها وحدة واحدة. أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة وعلى محيطها. $-\frac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}(z) < 0$ يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$ شعاعًا (بخط متقطع) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب. و يمثل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z) = 0$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي الموجب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هذه المتباينة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين أما المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا فهو كما في الشكل: 
14	$\mathrm{Arg}(z+2i) = \frac{3\pi}{4}$
15	$u = -7+7i \quad , \; v = 7+7i$  $Arg(u) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right) = \pi - \tan^{-1}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $Arg(v) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ قياس الزاوية الصغرى بين u، و v يساوي $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

16	الدائرة التي تمر بنقطة الأصل والنقطتين اللتين تمثلان u، و v ، تكون القطعة المستقيمة UV قطر لهذه الدائرة لأن الزاوية UOV قائمة فهي تقابل قطر الدائرة، ومركز الدائرة هو نقطة منتصف هذه القطعة وهي$(\frac{-7+7}{2}, \frac{7+7}{2})$ أي$(0,7)$، وطول نصف قطرها يساوي $\sqrt{(7-0)^2+(7-7)^2} = 7$ إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي: $\lvert z-7i\rvert = 7$ 
17	$u = -1-i \quad \Rightarrow u^2 = (1+i)^2 = 2i$ $\lvert z\rvert < 2$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z\rvert = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها وحدتان. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر. $\lvert z-u^2\rvert < \lvert z-u\rvert \quad \Rightarrow \lvert z-2i\rvert < \lvert z-(-1-i)\rvert$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-2i\rvert = \lvert z-(-1-i)\rvert$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(-1,-1)$و $(0,2)$ وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\lvert 0-2i\rvert < \lvert 0+1+i\rvert \rightarrow 2 > \sqrt{2}$ بما أن العدد $z = 0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$ المظللة في الرسم أدناه. 

18	$\lvert z-3i\rvert = 13$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة $Arg(z-4) = \frac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(4,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب أي أنّ ميله يساوي 1 ومعادلته هي : $y-0 = 1(x-4)$ أي: $y = x-4$  لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين: $y = x-4\,, y \geq 0, x \geq 0$ و $x^2+(y-3)^2 = 169$ بالتعويض: $x^2+(x-4-3)^2 = 169$ $2x^2-14x+49 = 169$ $x^2-7x-60 = 0$ $(x+5)(x-12) = 0$ $\Rightarrow x = 12 \Rightarrow y = 12-4 = 8$ العدد المركب الذي يحقق المعادلتين معًا هو: $z = 12+8i$

19	$\lvert z-3-2i\rvert = 5$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(3,2)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات ومعادلتها: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ $\lvert z-6i\rvert = \lvert z-7+i\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,6),(7,-1)$، الذي يمر بالنقطة $(3.5, 2.5)$ وميله 1، ومعادلته هي: $y-2.5=1(x-3.5)$ أي: $y = x-1$ لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين: $y=x-1$ و $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ بالتعويض: $(x-3)^2+(x-1-2)^2=25$ $2x^2-12x+18=25$ $2x^2-12x-7=0$ $x=\frac{6\pm5\sqrt{2}}{2}, \quad y=\frac{4\pm5\sqrt{2}}{2}$  العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معًا هما: $z_1=\frac{6+5\sqrt{2}}{2}+\frac{4+5\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2=\frac{6-5\sqrt{2}}{2}+\frac{4-5\sqrt{2}}{2}i$
20	المنحنى الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,1),(1,6)$ ومعادلته هي: $\lvert z-4-i\rvert = \lvert z-1-6i\rvert$ ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الأقرب إلى النقطة $(4,1)$، والخط الحدودي متصل، فإن المتباينة هي: $\lvert z-4-i\rvert \le \lvert z-1-6i\rvert$
21	المنحنى الحدودي هنا هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات ومعادلتها هي: $\lvert z-3i\rvert = 4$ ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الواقعة داخل الدائرة، ولأن المنحنى الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي: $\lvert z-3i\rvert < 4$
22	مركز الدائرة هو $(1, 4)$، وطول نصف قطرها 4 وحدات والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة فالمتباينة التي تصفها هي: $\lvert z-1-4i\rvert \le 4$ ولدينا شعاعان متصلان منطلقان من النقطة $(2, 3)$، السفلي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الأفقي، والعلوي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الأفقي وتم تظليل المنطقة المحصورة بينهما، فالمتباينة التي تصف هذه المنطقة هي $\frac{\pi}{4} \le Arg(z-2-3i) \le \frac{\pi}{2}$ إذن، نظام المتباينات الذي تمثله المنطقة المظللة هو: $\lvert z-1-4i\rvert \le 4 \quad , \quad \frac{\pi}{4} \le Arg(z-2-3i) \le \frac{\pi}{2}$