المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات كتاب الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب الصف الثاني عشر-المسار الأكاديمي- ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات والمقادير الجبرية

الدرس الأول: نظريتا الباقي والعوامل

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$+5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $x^2+5x-14$، والباقي 0

b

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	$+48$
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $2x^2+5x+15$، والباقي 48

أتحقق من فهمي صفحة 13

a

$P(x)=4x^4-7x^3+5x^2+2 \qquad ,h(x)=x-1$

$P(1)=4(1)^4-7(1)^3+5(1)^2+2=4$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 4

b

$P(x)=3x^3+8x^2-3x-6 \qquad ,h(x)=x+3$

$P(1)=3(-3)^3+8(-3)^2-3(-3)-6=-6$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -6

c

$P(x)=-2x^3-5x^2+10x+9 \qquad ,h(x)=2x+8$

$P(1)=-2(-4)^3-5(-4)^2+10(-4)+9=17$

إذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي 17

أتحقق من فهمي صفحة 14

a

$P(x)=x^3-2x^2-13x-10$

$P(5)=(5)^3-2(5)^2-13(5)-10=0$

إذن، $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$

b	لتحليل $P(x)$ أقسمه على $(x - 5)$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} \times & x^2 & +3x & +2 & \\ \hline x & x^3 & +3x^2 & +2x & 0 \\ \hline -5 & -5x^2 & -15x & -10 & \end{array}$ $P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 2)$ $= (x-5)(x+2)(x+1)$
	أتحقق من فهمي صفحة 17
a	$P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$ عوامل الحد الثابت هي± 1، وعوامل المعامل الرئيس هي± 1، و± 5، الأصفار النسبية المحتملة للاقتران $P(x)$ هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{5}$ بالتعويض نجد أن $P(1) = 5 - 1 - 5 + 1 = 0$ إذن، (x-1) هو أحد عوامل $P(x)$ أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} \times & 5x^2 & +4x & -1 & \\ \hline x & 5x^3 & +4x^2 & -x & 0 \\ \hline -1 & -5x^2 & -4x & +1 & \end{array}$ $P(x) = (x-1)(5x^2 + 4x - 1)$ $= (x-1)(5x-1)(x+1)$ إذن، أصفار $P(x)$ هي: $1, -1, \frac{1}{5}$

b	$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ معامل الحد الرئيس يساوي1، فالأصفار المحتملة هي عوامل الحد الثابت، وهي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ بالتعويض نجد أن $Q(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0$ إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $Q(x)$ أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن. <table><tr><td>×</td><td>x³</td><td>+7x²</td><td>+14x</td><td>+8</td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>x⁴</td><td>+7x³</td><td>+14x²</td><td>+8x</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>-x³</td><td>-7x²</td><td>-14x</td><td>-8</td><td></td></tr></table> $Q(x) = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$ وبتعويض $x = -1$ في العامل التكعيبي نجد أن الناتج 0 ، نقسم $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ على $(x+1)$ <table><tr><td>×</td><td>x²</td><td>+6x</td><td>8</td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>x³</td><td>+6x²</td><td>+8x</td><td>0</td></tr><tr><td>+1</td><td>+x²</td><td>+6x</td><td>+8</td><td></td></tr></table> فنجد أن: $Q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 8)$ $= (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$ إذن، أصفار $Q(x)$ هي: $-1, 1, -2, -4$
	أتحقق من فهمي صفحة 19
a	$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ $x^2(x-1) - 9(x-1) = 0$ $(x-1)(x^2 - 9) = 0$ $(x-1)(x-3)(x+3) = 0$ $x = 1, x = 3, x = -3$ إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x = 1, x = 3, x = -3$

b	$x^3+3x^2-4=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm4$ بتعويض $x=1$ نجد: $1+3-4=0$ إذن، $x-1$ عامل من عوامل كثير الحدود x^3+3x^2-4 <table><tr><td>×</td><td>x²</td><td>+4x</td><td>+4</td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>+x³</td><td>+4x²</td><td>+4x</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>-x²</td><td>-4x</td><td>-4</td><td></td></tr></table>$x^3+3x^2-4=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0$ $\Rightarrow (x-1)(x+2)^2=0$ $\Rightarrow x=1, x=-2$ حلول هذه المعادلة هي $x=1, x=-2$

أتحقق من فهمي صفحة 20

	ليكن طول نصف قطر قاعدة هذه الاسطوانة هو r وارتفاعها h وحجمها V. $h=r+5$ $V=\pi r^2 h=\pi r^2(r+5)$ $\Rightarrow \pi r^2(r+5)=72\pi$ $\Rightarrow r^3+5r^2-72=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm18, \pm24, \pm36, \pm72$ بتعويض $r=3$ نجد: $27+45-72=0$ إذن، $r-3$ عامل من عوامل كثير الحدود r^3+5r^2-72 <table><tr><td>×</td><td>r²</td><td>+8r</td><td>+24</td><td></td></tr><tr><td>r</td><td>r³</td><td>+8r²</td><td>+24r</td><td>0</td></tr><tr><td>-3</td><td>-3r²</td><td>-24r</td><td>-72</td><td></td></tr></table>$r^3+5r^2-72=0 \Rightarrow (r-3)(r^2+8r+24)=0$ مميز $r^2+8r+24$ سالب، إذن: $\Rightarrow r=3$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة 3 cm، وارتفاعها 8 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 21

1

×	$2x^3$	$+x^2$	$+4x$	$+3$	
$3x$	$6x^4$	$+3x^3$	$+12x^2$	$+9x$	0
-4	$-8x^3$	$-4x^2$	$-16x$	-12	

الناتج: $2x^3 + x^2 + 4x + 3$

الباقي: 0

2

×	$-x^4$	$+2x^3$	$+x^2$	$-4x$	$+3$	
$-2x$	$2x^5$	$-4x^4$	$-2x^3$	$+8x^2$	$-6x$	12
$+1$	$-x^4$	$+2x^3$	$+x^2$	$-4x$	$+3$	

الناتج: $-x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3$

الباقي: 12

3

الباقي هو: $f(-1) = 8 - 2 - 53 - 37 - 6 = -90$

4

الباقي هو: $f(-\frac{4}{3}) = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 8 = -\frac{160}{27}$

5

$f(-7) = (-7)^3 - 37(-7) + 84 = 0$

إذن، $(x+7)$ عامل من عوامل $f(x)$.

6

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right) + 6 = 0$

إذن، $(2x-3)$ عامل من عوامل $f(x)$.

7

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

$f(-1) = -1 + 3 + 13 - 15 = 0 \quad \Rightarrow (x+1)$ عامل

×	x^2	$2x$	-15	
x	x^3	$2x^2$	$-15x$	0
1	x^2	$2x$	-15	

$f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 15)$

$f(x) = (x+1)(x-3)(x+5)$

8

$g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$

$g(2) = 16 - 56 + 52 + 6 - 18 = 0 \quad \Rightarrow (x-2)$ عامل

×	x^3	$-5x^2$	$3x$	9	
x	x^4	$-5x^3$	$3x^2$	$+9x$	0
-2	$-2x^3$	$10x^2$	$-6x$	-18	

$g(x) = (x-2)(x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm3, \pm9$

$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + 9 = 0 \quad \Rightarrow (x+1)$ عامل

×	x^2	$-6x$	9	
x	x^3	$-6x^2$	$9x$	0
1	x^2	$-6x$	9	

$g(x) = (x-2)(x+1)(x^2 - 6x + 9)$

$g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)^2$

9

$h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

$h(3) = 54 - 117 + 51 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \ (x-3)$ عامل

×	$2x^2$	$-7x$	-4	
x	$2x^3$	$-7x^2$	$-4x$	0
-3	$-6x^2$	$21x$	12	

$h(x) = (x-3)(2x^2 - 7x - 4)$

$h(x) = (x-3)(x-4)(2x+1)$

10

$q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

$= 3x^2(x-6) + 2(x-6)$

$= (3x^2 + 2)(x-6)$

11

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$

$1 - 4 - 7 + 10 = 0 \quad \Rightarrow \ (x-1)$ عامل

×	x^2	$-3x$	-10	
x	x^3	$-3x^2$	$-10x$	0
-1	$-x^2$	$3x$	10	

$(x-1)(x^2 - 3x - 10) = 0$

$(x-1)(x-5)(x+2) = 0$

$x = 1, x = 5, x = -2$

12

$$5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$$

$$3x^3 - 5x^2 - 47x - 15 = 0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

$-81 - 45 + 141 - 15 = 0 \implies (x+3)$ عامل

$\times$	$3x^2$	$-14x$	-5	
x	$3x^3$	$-14x^2$	$-5x$	0
3	$9x^2$	$-42x$	-15	

$$(x+3)(3x^2 - 14x - 5) = 0$$

$$(x+3)(3x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -3, x = -\frac{1}{3}, x = 5$$

13

$$3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$24 + 12 - 28 - 8 = 0 \implies (x-2)$ عامل

$\times$	$3x^2$	$9x$	4	
x	$3x^3$	$9x^2$	$4x$	0
-2	$-6x^2$	$-18x$	-8	

$$(x-2)(3x^2 + 9x + 4) = 0$$

$$x = 2, \qquad x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 48}}{2(3)}$$

$$x = 2, x = \frac{-9 + \sqrt{33}}{6}, x = \frac{-9 - \sqrt{33}}{6}$$

14

$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm 1, \pm 2$

$48 - 52 + 2 + 2 = 0 \implies (x-2)$ عامل

$\times$	$6x^2$	$-x$	-1	
x	$6x^3$	$-x^2$	$-x$	0
-2	$-12x^2$	$2x$	2	

$(x-2)(6x^2 - x - 1) = 0$

$(x-2)(3x+1)(2x-1) = 0$

$x = 2, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$

15

$f(x) = 4x^3 - 20x + 16$

أحد أصفار الاقتران هو $x = 1$، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)$

$\times$	$4x^2$	$4x$	-16	
x	$4x^3$	$4x^2$	$-16x$	0
-1	$-4x^2$	$-4x$	16	

$f(x) = (x-1)(4x^2 + 4x - 16)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 + 4x - 16 = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$x \approx 1.56, \quad x \approx -2.56$

16

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$

أحد أصفار الاقتران هو $x = -1$، إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$

$\times$	$4x^2$	$-16x$	15	
x	$4x^3$	$-16x^2$	$15x$	0
1	$4x^2$	$-16x$	15	

$f(x) = (x+1)(4x^2 - 16x + 15)$

صفراه الآخران هما جذرا المعادلة $4x^2 - 16x + 15 = 0$

$(2x-3)(2x-5) = 0$

$x = 1.5, x = 2.5$

17

$x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$

نفرض أن الحل الثالث هو $x = c$،

فتكون $(x-1), (x-4), (x-c)$ عوامل للمقدار $x^3 - 3x^2 + ax + b$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x-1)(x-4)(x-c)$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 4)(x-c)$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - cx^2 - 5x^2 + 5cx + 4x - 4c$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - (c+5)x^2 + (4+5c)x - 4c$

بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن:

معامل x^2: $-3 = -(c+5)$

$c + 5 = 3 \Rightarrow c = -2$

إذن، الحل الثالث هو $x = -2$

18

هذا يعني أن $f(1) = 2f(-1)$

$1 + a + 1 + 5 = 2(-1 + a - 1 + 5)$

$a + 7 = 2a + 6$

$a = 1$

19	حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته مضروبًا في ارتفاعه، افرض أن طول ضلع القاعدة هو x، فيكون الارتفاع $x+1$ $V = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $4 = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $12 = x^3 + x^2$ $x^3 + x^2 - 12 = 0$ $(2)^3 + (2)^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x-2)$ عامل $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} \times & x^2 & 3x & 6 & \\ \hline x & x^3 & 3x^2 & 6x & 0 \\ \hline -2 & -2x^2 & -6x & -12 & \end{array}$ $(x-2)(x^2+3x+6) = 0$ $x-2=0, x^2+3x+6=0$ المعادلة $x^2+3x+6=0$ ليس لها حل لأن مميزها سالب(-15)، فالحل الوحيد للمعادلة $x^3+x^2-12=0$ هو $x=2$ إذن، طول ضلع قاعدة المنحوتة هو $2\ m$، وارتفاعها $3\ m$
20	$(x-3)$ عامل من عوامل $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ إذن، $f(3) = 0$ $27a + 9b - 27 - 9 = 0$ $27a + 9b = 36$ بقسمة الطرفين على 9 ينتج أن: $3a + b = 4$

<table>
<tr><td>21</td><td>باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)$ يساوي -15، يعني أن $f(2) = -15$
$$8a + 4b - 18 - 9 = -15$$
$$8a + 4b = 12$$
بقسمة الطرفين على 4 ينتج أن: $2a + b = 3$</td></tr>
<tr><td>22</td><td>بطرح المعادلة الناتجة في السؤال 21 من المعادلة الناتجة في السؤال 20 نجد أن $a = 1$،
وبتعويض قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن $b = 1$</td></tr>
<tr><td>23</td><td>حجم الصندوق يساوي $2(x)(x^2 + 6x - 19)$، وهذا يساوي $48\ m^3$
$$2(x)(x^2 + 6x - 19) = 48$$
بقسمة الطرفين على 2، والتوزيع ينتج أن:
$$x^3 + 6x^2 - 19x = 24$$
$$x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$$
$(-3)^3 + 6(-3)^2 - 19(-3) - 24 = 0 \Rightarrow (x-3)$ عامل
<table>
<tr><td>$\times$</td><td>x^2</td><td>$9x$</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td>x^3</td><td>$9x^2$</td><td>$8x$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>$-3x^2$</td><td>$-27x$</td><td>-24</td><td></td></tr>
</table>
$$(x-3)(x^2 + 9x + 8) = 0$$
$$(x-3)(x+1)(x+8) = 0$$
$$x = 3, x = -1, x = -8$$
الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالبًا.
إذن، قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ \text{m}^3$ هي $3\ \text{m}$</td></tr>
</table>

24	بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل الثاني يكون تربيعيًا، ليكن هذا العامل الثاني: ax^2+bx+c $f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$ باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ هو -8، فإن $f(-1)=-8$ $(-1-3)(a-b+c)=-8$ $a-b+c=2$ لذلك أختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل $a=1, b=1, c=2$ فيكون الاقتران المطلوب هو: $f(x)=(x-3)(x^2+x+2)$ $f(x)=x^3-2x^2-x-6$
25	قسمت سهام عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x. الحل الصحيح هو: $f(x)=x(-8x^5+7x^4-3x^3+45x^2-1500x+16)$ عوامل الحد الثابت (16) هي: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16$ عوامل المعامل الرئيس(-8) هي: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm\frac{1}{4}\ ,\ \pm\frac{1}{8}$
26	بما أن المقسوم عليه كثير حدود من الدرجة الثانية، فإن الباقي سيكون من الدرجة الأولى على الأكثر. لنفرض هذا الباقي هو: $ax+b$ وناتج القسمة هو: $Q(x)$ $f(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$ $f(3)=4 \Rightarrow (3-3)(3+2)Q(3)+3a+b=4$ $\Rightarrow 3a+b=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $f(-2)=9 \Rightarrow (-2-3)(2+2)Q(-2)-2a+b=9$ $\Rightarrow -2a+b=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج: $5a=-5 \quad \Rightarrow a=-1$ وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $b=7$ إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $(x-3)(x+2)$ يساوي $-x+7$

الدرس الثاني: الكسور الجزئية

<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 26</th></tr>
<tr><td>a</td><td>

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-2)}$$

$$x=A(x-2)+B(x-3)$$

$$x=3 \Rightarrow 3=A(3-2)+B(3-3) \quad \Rightarrow A=3$$

$$x=2 \Rightarrow 2=A(2-2)+B(2-3) \quad \Rightarrow B=-2$$

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-3)}+\frac{-2}{(x-2)}$$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{x^2+x-6}{(x-1)(x+4)(x+2)}$$

$$=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$x^2+x-6=A(x+2)(x+4)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+4)$$

$$x=1 \Rightarrow -4=15A \quad \Rightarrow A=-\frac{4}{15}$$

$$x=-4 \Rightarrow 6=10B \quad \Rightarrow B=\frac{3}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-6C \quad \Rightarrow C=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{-4}{15(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}+\frac{2}{3(x+2)}$$

</td></tr>
</table>

أتحقق من فهمي صفحة 28

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}$$

$$x^2+8x+4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$

$$x=2 \Longrightarrow 24=4C \Longrightarrow C=6$$

$$x=0 \Longrightarrow 4=-2B \quad \Longrightarrow B=-2$$

$$x=1 \Longrightarrow 13=-A+2+6 \quad \Longrightarrow A=-5$$

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{6}{(x-2)}$$

أتحقق من فهمي صفحة 30

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$21-7x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+5)$$

$$x=-5 \Rightarrow 56=28A \quad \Rightarrow A=2$$

$$x=0 \Longrightarrow 21=6+5C \quad \Longrightarrow C=3$$

$$x=1 \Longrightarrow 14=8+(B+3)(6) \quad \Longrightarrow B=-2$$

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{2}{x+5}+\frac{-2x+3}{x^2+3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 32

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}=3+\frac{9x+4}{x^2+x}=3+\frac{9x+4}{x(x+1)}$$

$$\frac{9x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}$$

$$9x+4=A(x+1)+Bx$$

$$x=0 \Longrightarrow 4=A \quad \Longrightarrow A=4$$

$$x=-1 \Rightarrow -5=-B \quad \Rightarrow B=5$$

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}=3+\frac{4}{x}+\frac{5}{(x+1)}$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 32	
1	$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$ $2x-5=A(x+3)+B(x+2)$ $x=-2 \Rightarrow -9=A \quad \Rightarrow A=-9$ $x=-3 \Rightarrow -11=-B \quad \Rightarrow B=11$ $\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{(x+2)}+\frac{11}{(x+3)}$
2	$\frac{2x+22}{x^2+2x}=\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}$ $2x+22=A(x+2)+Bx$ $x=0 \Rightarrow 22=2A \quad \Rightarrow A=11$ $x=-2 \Rightarrow 18=-2B \quad \Rightarrow B=-9$ $\frac{2x+22}{x^2+2x}=\frac{11}{x}+\frac{-9}{(x+2)}$
3	$\frac{4x-30}{x^2-8x+15}=\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-3)}$ $4x-30=A(x-3)+B(x-5)$ $x=5 \Rightarrow -10=2A \quad \Rightarrow A=-5$ $x=3 \Rightarrow -18=-2B \quad \Rightarrow B=9$ $\frac{4x-30}{x^2-8x+15}=\frac{-5}{(x-5)}+\frac{9}{(x-3)}$

4	$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ $6x^2-7x+10=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$ $x=2\Rightarrow 20=5A\quad\Rightarrow A=4$ $x=0\Rightarrow 10=4-2C\quad\Rightarrow C=-3$ $x=1\Rightarrow 9=8+(B-3)(-1)\quad\Rightarrow B=2$ $\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+1}$
5	$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{1-2x}$ $2-3x-4x^2=A(x-1)(1-2x)+Bx(1-2x)+Cx(x-1)$ $x=0\Rightarrow 2=-A\quad\Rightarrow A=-2$ $x=1\Rightarrow -5=-B\quad\Rightarrow B=5$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2-\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{4}C\quad\Rightarrow C=2$ $\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{1-2x}$
6	$\frac{x}{8x^2-10x+3}=\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{A}{(4x-3)}+\frac{B}{(2x-1)}$ $x=A(2x-1)+B(4x-3)$ $x=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{2}A\quad\Rightarrow A=\frac{3}{2}$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=-B\quad\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$ $\frac{x}{8x^2-10x+3}=\frac{3}{2(4x-3)}+\frac{-1}{2(2x-1)}$

7	$\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}=\dfrac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}$ $=\dfrac{A}{(x+3)}+\dfrac{B}{(x-5)}+\dfrac{C}{(2x+1)}$ $1=A(x-5)(2x+1)+B(x+3)(2x+1)+C(x+3)(x-5)$ $x=-3\Rightarrow 1=40A \quad \Rightarrow A=\dfrac{1}{40}$ $x=5\Rightarrow 1=88B \quad \Rightarrow B=\dfrac{1}{88}$ $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 1=-\dfrac{55}{4}C \quad \Rightarrow C=-\dfrac{4}{55}$ $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}=\dfrac{1}{40(x+3)}+\dfrac{1}{88(x-5)}-\dfrac{4}{55(2x+1)}$
8	$\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}=\dfrac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}$ $=\dfrac{A}{(x-2)}+\dfrac{B}{(x+2)}+\dfrac{C}{(2x-1)}$ $9x^2-9x+6=A(x+2)(2x-1)+B(x-2)(2x-1)+C(x-2)(x+2)$ $x=2\Rightarrow 24=12A \quad \Rightarrow A=2$ $x=-2\Rightarrow 60=20B \quad \Rightarrow B=3$ $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{15}{4}=-\dfrac{15}{4}C \quad \Rightarrow C=-1$ $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}=\dfrac{2}{(x-2)}+\dfrac{3}{(x+2)}+\dfrac{-1}{(2x-1)}$

9	$\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}=\frac{x^2-3x-5}{x^3-3x^2-4x+12}=\frac{x^2-3x-5}{(x-2)(x+2)(x-3)}$ $=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x-3)}$ $x^2-3x-5=A(x+2)(x-3)+B(x-2)(x-3)+C(x-2)(x+2)$ $x=2 \Rightarrow -7=-4A \quad \Rightarrow A=\frac{7}{4}$ $x=-2 \Rightarrow 5=20B \quad \Rightarrow B=\frac{1}{4}$ $x=3 \Rightarrow -5=5C \quad \Rightarrow C=-1$ $\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}=\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{-1}{(x-3)}$
10	$\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}=\frac{(x-3)^2}{x(x+4)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+4)}+\frac{C}{(x-4)}$ $(x-3)^2=A(x+4)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x+4)$ $x=0 \Rightarrow 9=-16A \quad \Rightarrow A=-\frac{9}{16}$ $x=-4 \Rightarrow 49=32B \quad \Rightarrow B=\frac{49}{32}$ $x=4 \Rightarrow 1=32C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{32}$ $\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$
11	$\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}$ $7x-3=A(x-4)+B$ $x=4 \Rightarrow 25=B \quad \Rightarrow B=25$ $x=0 \Rightarrow -3=-4A+25 \quad \Rightarrow A=7$ $\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7}{x-4}+\frac{25}{(x-4)^2}$

12	$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$ $1=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$ $x=-1 \Rightarrow 1=9A \quad \Rightarrow A=\frac{1}{9}$ $x=2 \Rightarrow 1=3C \quad \Rightarrow C=\frac{1}{3}$ $x=0 \Rightarrow 1=\frac{4}{9}-2B+\frac{1}{3} \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{9}$ $\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{9(x+1)}+\frac{-1}{9(x-2)}+\frac{1}{3(x-2)^2}$
13	$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$ $2x^2-x-6=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$ $x=0 \Rightarrow -6=4A \quad \Rightarrow A=-\frac{3}{2}$ $x=-2 \Rightarrow 4=-2C \quad \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow -5=-\frac{27}{2}+3B-2 \quad \Rightarrow B=\frac{7}{2}$ $\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{-3}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}+\frac{-2}{(x+2)^2}$
14	$\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$ $x-3=A(x^2+3)+(Bx+C)(x)$ $x=0 \Rightarrow -3=3A \quad \Rightarrow A=-1$ $x=1 \Rightarrow -2=-4+B+C \quad \Rightarrow B+C=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $x=-1 \Rightarrow -4=-4+B-C \Rightarrow B-C=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $(1)+(1) \quad \Rightarrow 2B=2 \quad \Rightarrow B=1, C=1$ $\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$

15	$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{A}{x-5}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+25}$ $x^2+2x+40=A(x^2+5x+25)+(Bx+C)(x-5)$ $x=5 \Rightarrow 75=75A \quad \Rightarrow A=1$ $x=0 \Rightarrow 40=25-5C \quad \Rightarrow C=-3$ $x=1 \Rightarrow 43=31-4B+12 \quad \Rightarrow B=0$ $\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{1}{x-5}+\frac{-3}{x^2+5x+25}$
16	$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$ $=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}$ $\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}=\frac{A}{x+6}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+36}$ $-30x^2+36x+648=A(x^2-6x+36)+(Bx+C)(x+6)$ $x=-6 \Rightarrow -1080-216+648=108A \quad \Rightarrow A=-6$ $x=0 \Rightarrow 648=-216+6C \quad \Rightarrow C=144$ $x=1 \Rightarrow 654=-186+7B+1008 \quad \Rightarrow B=-24$ $\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-6}{x+6}+\frac{-24x+144}{x^2-6x+36}$

17	$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}$ $\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+5)}$ $-14x-58=A(x+5)+B(x+3)$ $x=-3 \Rightarrow 42-58=2A \quad \Rightarrow A=-8$ $x=-5 \Rightarrow 70-58=-2B \quad \Rightarrow B=-6$ $\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-8}{(x+3)}+\frac{-6}{(x+5)}$
18	$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$ $=x^2+\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}$ $\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ $2x^2+x+5=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$ $x=2 \Rightarrow 15=5A \quad \Rightarrow A=3$ $x=0 \Rightarrow 5=3-2C \quad \Rightarrow C=-1$ $x=1 \Rightarrow 8=6-B+1 \quad \Rightarrow B=-1$ $\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{3}{x-2}+\frac{-x-1}{x^2+1}$

19	$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x+a)}$ $1=A(x+a)+B(x-a)$ $x=a \quad \Rightarrow 1=2aA \quad \Rightarrow A=\frac{1}{2a}$ $x=-a \quad \Rightarrow 1=-2aB \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{2a}$ $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}+\frac{-1}{2a(x+a)}$
20	$\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}\;\frac{3p}{(x+3)^2}=\frac{p(x+3)-3p}{(x+3)^2}$ $\Rightarrow p(x+3)-3p=5x$ $x=-2 \Rightarrow p-3p=-10$ $\Rightarrow p=5$
21	$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{px-37}{9(x^2+2)}-\frac{p}{9(x-1)}+\frac{8p}{3(x-1)^2}$ $=\frac{(px-37)(x-1)^2-p(x-1)(x^2+2)+24p(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$ $\Rightarrow 9(x^2+8x+7)=(px-37)(x-1)^2-p(x-1)(x^2+2)+24p(x^2+2)$ $x=1 \Rightarrow 144=72p$ $\Rightarrow p=2$

<table>
<tr><td>22</td><td>

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{A}{(11-7x)}+\frac{B}{(7-4x)}$$

$$2000(4-3x)=A(7-4x)+B(11-7x)$$

$$x=\frac{11}{7}\quad\Rightarrow-\frac{10000}{7}=\frac{5}{7}A\quad\Rightarrow A=-2000$$

$$x=\frac{7}{4}\quad\Rightarrow\frac{32000}{7}=-\frac{5}{4}B\quad\Rightarrow B=2000$$

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{(11-7x)}+\frac{2000}{(7-4x)}$$

</td></tr>
<tr><td>23</td><td>

اقتران أعلى درجة حرارة هو $\frac{2000}{7-4x}$، اقتران أدنى درجة حرارة هو $\frac{2000}{11-7x}$.

</td></tr>
<tr><td>24</td><td>

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{(t+2)}+\frac{B}{(t-1)}+\frac{C}{(t+1)}$$

$$t^2-5t+6=A(t-1)(t+1)+B(t+2)(t+1)+C(t+2)(t-1)$$

$$t=-2\quad\Rightarrow 20=3A\quad\Rightarrow A=\frac{20}{3}$$

$$t=1\quad\Rightarrow 2=6B\quad\Rightarrow B=\frac{1}{3}$$

$$t=-1\quad\Rightarrow 12=-2C\quad\Rightarrow C=-6$$

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{1}{3}}{(t-1)}+\frac{-6}{(t+1)}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{1}{3}(t+1)-6(t-1)}{(t^2-1)}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{(t+2)}+\frac{\frac{-17}{3}t+\frac{19}{3}}{(t^2-1)}$$

نعم يمكن.

</td></tr>
</table>

25	$\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}$ $=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$
26	$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$ $2x^2+6x-5=A(x-2)^2+B(x-2)+C$ $x=2 \quad \Rightarrow 15=C \quad \Rightarrow C=15$ $x=3 \quad \Rightarrow 31=A+B+15 \quad \Rightarrow A+B=16 \ldots\ldots\ldots(1)$ $x=1 \quad \Rightarrow 3=A-B+15 \quad \Rightarrow A-B=-12 \ldots\ldots\ldots(2)$ $(1)+(2) \Rightarrow 2A=4 \Rightarrow A=2, B=14$ $\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$
27	$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{3x^3+12x-20}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}$ $=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+2)}+\frac{D}{(x+2)^2}$ $3x^3+12x-20=A(x-2)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-2)^2+D(x-2)^2$ $x=2 \quad \Rightarrow 28=16B \quad \Rightarrow B=\frac{7}{4}$ $x=-2 \quad \Rightarrow -68=16D \quad \Rightarrow D=-\frac{17}{4}$ $x=0 \quad \Rightarrow -20=-8A+7+8C-17 \quad \Rightarrow -4A+4C=-5 \ldots\ldots\ldots(1)$ $x=4 \quad \Rightarrow 220=72A+63+24C-17 \quad \Rightarrow 36A+12C=87 \ldots\ldots(2)$ $9\times(1)+(2) \Rightarrow 48C=42 \Rightarrow C=\frac{7}{8}, A=\frac{17}{8}$ $\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$

28	الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حين أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$. تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو الآتي: $$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$
29	$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ $ax+b=A(x+1)+B(x-1)$ $x=1 \Rightarrow a+b=2A \Rightarrow A=\frac{a+b}{2}$ $x=-1 \Rightarrow -a+b=-2B \Rightarrow B=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$
30	تتنوع الإجابات. هذا مثال لإجابة محتملة: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x^2-x-3)}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x-3)(x+1)}$ $=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+1}$ $=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{5}{3(2x-3)}+\frac{1}{2(x+1)}$

اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	a
2	d
3	a
4	d
5	d
6	$3x^3-10x^2-9x+4=(x+1)(x-4)(3x-1)$
7	$8x^4+2x^3-53x^2+37x-6=(x-2)(x+3)(2x-1)(4x-1)$
8	$x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$ $x=-1, x=2, x=3$
9	$x^3+16x^2-3x=5x^2-18x+27$ $x=1, x=-3, x=-9$
10	$8m+4-20-6=16-8+2m+8 \Rightarrow m=5$
11	$\frac{6}{(x+3)(x+1)}=\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+3}$
12	$\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}=\frac{-6}{x}+\frac{11}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$
13	$\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}=3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}$
14	$\frac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}=\frac{-1}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+10}{2(x^2+2)}$

15	$\frac{7x-5}{(x-a)(x-3)} = \frac{-9}{x-a} + \frac{b}{x-3}$ $b = 16, a = 2$
16	$x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow (x+2)(x^2+3x-1) = 0$ مجموع الحلين الآخرين لهذه المعادلة هو -3
17	$f(x) = -x^3 + 32x^2 - 224x + 768 = (x-24)(-x^2+8x-32)$
18	ليكن طول الخزان y وعرضه x وارتفاعه h وحجمه V ومساحة سطحه الكلية A $y = 2x+1 \quad , \quad h = x+1$ $V = xyh = x(x+1)(2x+1)$ $\Rightarrow x(x+1)(2x+1) = 30$ $\Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0$ $\Rightarrow (x-2)(2x^2+7x+15) = 0$ عرض الخزان 2 m، وطوله 5 m، وارتفاعه 3 m $A = 2(xh + yh + xy) = 2(6+15+10) = 62$ مساحة الحديد اللازم لصنعه $62\ \text{m}^2$

الوحدة الثانية: المتطابقات والمعادلات المثلثية

الدرس الأول: المتطابقات المثلثية 1

مسألة اليوم صفحة 38	
	$s = \dfrac{h \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\theta} = \dfrac{h\cos\theta}{\sin\theta} = h\cot\theta$
أتحقق من فهمي صفحة 40	
	$\sec\theta = -\dfrac{3}{2}$, $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow \tan\theta > 0$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \Longrightarrow \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
أتحقق من فهمي صفحة 40	
a	$\sin x\,(\csc x - \sin x) = \sin x \csc x - sin^2 x$ $= \sin x\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) - sin^2 x$ $= 1 - sin^2 x$ $= cos^2 x$
b	$1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = \dfrac{\cos x\,(1+\sin x) + \sin x\,(1+\sin x) + cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$ $= \dfrac{\cos x\,(1+\sin x) + \sin x + sin^2 x + cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}$ $= \dfrac{\cos x\,(1+\sin x) + \sin x + 1}{\cos x\,(1+\sin x)}$ $= \dfrac{(\cos x + 1)(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)}$ $= 1 + \sec x$

c	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec x = \cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$
	أتحقق من فهمي صفحة 41
a	$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$ $= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ $= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x}$ $= \csc^2 x - \cot x\csc x$
	أتحقق من فهمي صفحة 44
a	$\text{Cot}\, x\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}\times\cos x$ $= \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ $= \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$ $= \frac{1}{\sin x} - \sin x$ $= \csc x - \sin x$
b	$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ $= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$ $= \frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$ $= \frac{\sin x}{1+\cos x}$

c	$\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-cos^2x}$ $=\frac{2}{1-cos^2x}$ $=\frac{2}{sin^2x}$ $=2csc^2x$
	أتحقق من فهمي صفحة 44
	$(\tan x+\cot x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{sin^2x+cos^2x}{\cos x\sin x}\right)^2$ $=\left(\frac{1}{\cos x\sin x}\right)^2=\frac{1}{cos^2x\ sin^2x}$ $sec^2x+csc^2x=\frac{1}{cos^2x}+\frac{1}{sin^2x}=\frac{sin^2x+cos^2x}{cos^2x\ sin^2x}$ $=\frac{1}{cos^2x\ sin^2x}$ بما أن الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.
	أتحقق من فهمي صفحة 46
a	$\cos 75°=\cos(45°+30°)$ $=cos45°cos30°-sin45°sin30°$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
b	$\tan\frac{\pi}{12}=tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ $=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

c	$\sin 80° \cos 20° - \cos 80° \sin 20° = \sin(80° - 20°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 47
a	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
b	$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 47
1	$\sin\theta = \frac{1}{3}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta > 0$, $\cot\theta > 0$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$
2	$\tan\theta = -\frac{3}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \sec\theta < 0$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \sec\theta = -\sqrt{1 + tan^2\theta} = -\sqrt{1 + \frac{9}{49}} = -\frac{\sqrt{58}}{7}$

3	$\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} = -\frac{3}{5}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$
4	$\sec\theta = \frac{9}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{4}{9}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{16}{81}} = -\frac{\sqrt{65}}{9}$
5	$\cos x \tan x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \sin x$
6	$\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\sin x}$ $= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cos x}$ $= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$ $= \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \tan x$

7	$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x}+cos^2x=\dfrac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}}+cos^2x$ $=\sin^2 x+cos^2x$ $=1$
8	$\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}+\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin x}$ $=\tan x-1+\cot x-1$ $=\tan x+\cot x-2$
9	$\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+cos^2x-1}{\sin x\cos x}$ $=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$ $=2$
10	$\dfrac{\sec x-\cos x}{\tan x}=\dfrac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$ $=\dfrac{1-cos^2x}{\sin x}$ $=\dfrac{sin^2x}{\sin x}$ $=\sin x$
11	$\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x)=-\cot x\cos x-\sin x$ $=-\dfrac{\cos x}{\sin x}\times\cos x-\sin x$ $=\dfrac{-cos^2x-sin^2x}{\sin x}$ $=\dfrac{-1}{\sin x}=-\csc x$

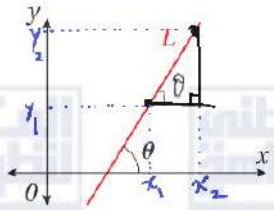
12	$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+cos^2x$ $=1+2\sin x\cos x$
13	$\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-cos^2x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}$ $=\dfrac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}$ $=\dfrac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}\times\dfrac{(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)}=\dfrac{\sin^2 x-cos^2x}{(\sin x-\cos x)^2}$
14	$\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\times\dfrac{1-\sin x}{1-\sin x}=\dfrac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$ $=\dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}=\left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2=(\sec x-\tan x)^2$
15	$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x-\cos^2 x$
16	$\dfrac{1}{1-\sin x}-\dfrac{1}{1+\sin x}=\dfrac{1+\sin x-1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}=2\tan x\sec x$
17	$\ln\lvert\tan x\rvert=\ln\left\lvert\dfrac{\sin x}{\cos x}\right\rvert=\ln\dfrac{\lvert\sin x\rvert}{\lvert\cos x\rvert}=\ln\lvert\sin x\rvert-\ln\lvert\cos x\rvert$
18	$\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+\ln\lvert\sec x-\tan x\rvert=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert\lvert\sec x-\tan x\rvert$ $=\ln\lvert(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)\rvert$ $=\ln\lvert\sec^2 x-\tan^2 x\rvert=\ln 1=0$
19	$\sin 165°=\sin(180°-165°)$ $=\sin 15°$ $=\sin(45°-30°)$ $=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

20	$\tan 195^\circ = \tan(195^\circ - 180^\circ)$ $= \tan 15^\circ$ $= \tan(60^\circ - 45^\circ)$ $= \dfrac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$
21	$sec\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = sec\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$ $= \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}$ $= \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$
22	$\sin\dfrac{17\pi}{12} = \sin\left(\pi + \dfrac{5\pi}{12}\right) = -\sin\dfrac{5\pi}{12} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ $= -\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
23	$\sin\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{5\pi}{18} + \cos\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18} = \sin\left(\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{5\pi}{18}\right) = sin\dfrac{6\pi}{18} = sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
24	$\dfrac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 40^\circ \tan 10^\circ} = \tan(40^\circ - 10^\circ) = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

25	$a^2+4=5 \quad \Rightarrow \quad a=-1$ لأن النقطة في الربع الثاني $\left(-\frac{1}{4}\right)^2+b^2=1 \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ لأن النقطة في الربع الثالث $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos\alpha=-\frac{1}{4}, \tan\alpha=\sqrt{15}$ $\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{5}}, \tan\beta=-2$ $f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}-\frac{2}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}-2}{4\sqrt{5}}$
26	$g(\alpha-\beta)=cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1-2\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}$
27	$h(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$
28	$n=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{60^\circ}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+30^\circ\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}cos30^\circ+cos\frac{\theta}{2}sin30^\circ}{\sin\frac{\theta}{2}}$ $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}cot\frac{\theta}{2}$
29	$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{cos(x+h)-cos(x)}{h}$ $=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$ $=\frac{\cos x\cos h-\cos x}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}$ $=-\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$

30	$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{1}{2}$
31	$\sin(A+B)+\sin(A-B)$ $=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $=2\sin A\cos B$
32	$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$ $=\sin A+\cos A$
33	$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$ $=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$ $=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C}{\cos B\cos C}-\frac{\cos B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\cos A}{\cos C\cos A}-\frac{\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$ $=\tan A-\tan B+\tan B-\tan C+\tan C-\tan A=0$
34	$\cos(x+y)\cos(x-y)$ $=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$ $=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$ $=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$ $=\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\cos^2 x\sin^2 y$ $=\cos^2 x-\sin^2 y$

35



نفرض نقطتين على المستقيم L إحداثياهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ كما هو موضح بالشكل،

ميل المستقيم L يساوي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وظل الزاوية θ يساوي: $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

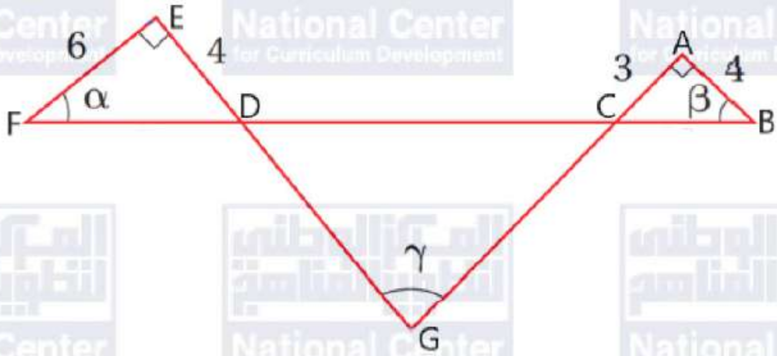
إذن، ميل المستقيم يساوي ظل زاوية ميله، أي: $m = \tan\theta$

36

$$\psi = \theta_2 - \theta_1$$

$$\tan\psi = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

37



الزاوية ACB والزاوية DCG متقابلتان بالرأس،فهما متساويتان في القياس، وكذلك الزاويتان EDF و CDG،

إذن:

قياس الزاوية DCG يساوي $90° - \beta$ وقياس الزاوية CDG يساوي $90° - \alpha$

$$\gamma + 90° - \beta + 90° - \alpha = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha + \beta$$

$$\tan\gamma = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{4}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{17}{6}$$

38	$$2\cot(\alpha-\beta)=\frac{2}{\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}$$ $$=\frac{2\big(1+(x+1)(x-1)\big)}{(x+1)-(x-1)}$$ $$=\frac{2(1+x^2-1)}{2}$$ $$=x^2$$
39	$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$ $$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$ $$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$ $$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
40	الخطأ منذ بداية الحل، وذلك في تطبيق القانون. الحل الصحيح هو: $$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}$$ $$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$ $$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)$$

الدرس الثاني: المتطابقات المثلثية 2

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 50</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$\tan\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{5}{3}\cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\cos\theta\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{34}{9}\cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{34}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{\sqrt{34}}}{1+\frac{3}{\sqrt{34}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{\sqrt{34}+3}}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 52</td></tr>
<tr><td>a</td><td>

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 = -\frac{1}{9}$$

</td></tr>
</table>

	$\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}} = 4\sqrt{5}$	
c	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \dfrac{-\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}} = \dfrac{-\sqrt{5}}{-\frac{1}{4}} = 4\sqrt{5}$	طريقة ثانية للحل:
	أتحقق من فهمي صفحة 52	
	$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$ $= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$ $= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$ $= 2\sin\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta$ $= 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta$	
	أتحقق من فهمي صفحة 53	

$$sin^4x\, cos^2x = (sin^2x)^2\, cos^2x$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos^2 2x}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1+\cos 4x}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)$$

$$= \frac{1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x}{16}$$

$$= \frac{1}{16}(1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x)$$

أتحقق من فهمي صفحة 54

$$\cos 112.5^\circ = \cos\frac{225^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 225^\circ}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 55

a	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - -\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{10}}$
b	$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{21}}{10}}$
c	$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{21}}{5}}{1 - \frac{\sqrt{21}}{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{21}}{5 - \sqrt{21}}}$
أتحقق من فهمي صفحة 56	
	$\sin 7x \cos x = \frac{1}{2}(\sin(7x - x) + \sin(7x + x)) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 8x)$
أتحقق من فهمي صفحة 57	
	$\cos 3x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x + 2x}{2}\cos\frac{3x - 2x}{2} = 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$
أتحقق من فهمي صفحة 58	
a	$\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin 2x$
b	$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 58	

1	$\sin\theta = \frac{5}{13}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{25}{169}\right) = \frac{119}{169}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$
2	$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{6}{9}\right) - 1 = \frac{1}{3}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$

3	$\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = 2\sin\theta$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + 4\sin^2\theta = 1$ $\Rightarrow 5\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{3}{5}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$
4	$\csc\theta = -\sqrt{5} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta < 0$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

5	$\cot\theta = \frac{2}{3}$, $\sin\theta > 0$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \frac{4}{9}\sin^2\theta = 1$ $\Rightarrow \frac{13}{9}\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{4}{13}\right) - 1 = -\frac{5}{13}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$

6	$\sec\theta = 3 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$, $\sin\theta > 0$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1 = -\frac{7}{9}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
7	$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ $= \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2$ $= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$ $= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$ $= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

8	$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ $= \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2$ $= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$ $= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$ $= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$
9	$\cos^4 x\ \sin^2 x = (cos^2 x)^2\ sin^2 x$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2x}{4}\right)$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right)$ $= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)$ $= \frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x\cos 4x)$ $= \frac{1}{16}\left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)\right)$ $= \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$
10	$\cos 22.5° = \cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

11	$\sin 195° = -\sin(195° - 180°)$ $= -\sin 15° = -\sin\frac{30°}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$ $= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
12	$\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}$ $= -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = 1-\sqrt{2}$
13	$a^2 + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad a = -1$ لأن النقطة في الربع الثاني $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ لأن النقطة في الربع الثالث $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos\alpha = -\frac{1}{4}, \tan\alpha = \sqrt{15}$ $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \tan\theta = -2$ $g(2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$
14	$g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$
15	$f(2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$

16	$h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$
17	$\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(2x-3x)+\sin(2x+3x))$ $= \frac{1}{2}(\sin(-x)+\sin(5x))$ $= \frac{1}{2}(-\sin x+\sin(5x))$ $= \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$
18	$\sin x\sin 5x = \frac{1}{2}(\cos(x-5x)-\cos(x+5x))$ $= \frac{1}{2}(\cos(-4x)-\cos(6x))$ $= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$
19	$3\cos 4x\cos 7x = \frac{3}{2}(\cos(4x-7x)+\cos(4x+7x))$ $= \frac{3}{2}(\cos(-3x)+\cos(11x))$ $= \frac{3}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$
20	$\sin x - \sin 4x = 2\cos\frac{x+4x}{2}\sin\frac{x-4x}{2}$ $= 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{-3x}{2}$ $= -2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$
21	$\cos 9x - \cos 2x = -2\sin\frac{9x+2x}{2}\sin\frac{9x-2x}{2} = -2\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{7x}{2}$

22	$\sin 3x + \sin 4x = 2\sin\frac{3x+4x}{2}\cos\frac{3x-4x}{2}$ $= 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{-x}{2}$ $= 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$
23	$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{2}{2}\times\frac{10.8}{\sin\theta\cos\theta}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{21.6}{\sin 2x}\times\sec x = \frac{21.6\sec x}{\sin 2x}$
24	$L = \frac{10.8}{\sin 30^\circ\cos^2 30^\circ} = 28.8\ cm$
25	$\cos 10x = \cos 2(5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$
26	$\frac{1}{2}(\sin x\sin 2x + 2\cos^3 x) = \frac{1}{2}(2\sin^2 x\cos x + 2\cos^3 x)$ $= \frac{1}{2}\times 2\cos x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x$
27	$\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1$ $= 2\cos^2 x + 2\cos x$ $= 2\cos x\,(\cos x + 1)$
28	$\sin 3x = sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$ $= 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$ $= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$ $= 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$ $= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$ $= 3\sin x - 4\sin^3 x$

29	$\tan 3x = \tan(2x + x) = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$ $= \dfrac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\tan x}$ $= \dfrac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$ $= \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
30	$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$
31	$\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$
32	$\cos^2 2x = (\cos 2x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$
33	$\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \dfrac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)}$ $= \dfrac{2}{(\tan x + \cot x)}$ $= \dfrac{2}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}}$ $= \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ $= \sin 2x$
34	$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $= \dfrac{1 - cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ $= \dfrac{1 - \left(cosx\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)}{1 + \left(osx\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

35	$\cot^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}=\frac{\sec x+1}{\sec x-1}$
36	$\frac{1}{2}(ln\lvert 1-\cos 2x\rvert-ln2)=\frac{1}{2}ln\frac{\lvert 1-\cos 2x\rvert}{2}$ $=\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{1-\cos 2x}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}ln\lvert\sin^2 x\rvert=ln\lvert\sin x\rvert$
37	$\sin\theta=\frac{y}{1}=y\ \ ,\cos\theta=\frac{x}{1}=x$ $A=2xy=2\sin\theta\cos\theta$
38	$A=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$
39	$\cos 4x=1-2\sin^2 2x=1-2(2\sin x\cos x)^2=1-8\sin^2 x\cos^2 x$
40	$\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+cos2x)^2$ $=\frac{1}{4}(1+2cos2x+\cos^2 x)$ $=\frac{1}{4}\left(1+2cos2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(1+2cos2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$ $=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2cos2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$ $=\frac{1}{8}(3+4cos2x+\cos 4x)$

الدرس الثالث: حل المعادلات المثلثية

	مسألة اليوم صفحة 61
	$M(\theta)=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{64}\Rightarrow\frac{160000\sin^2\theta}{64}=625$ $\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ$
	أتحقق من فهمي صفحة 63
a	$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
b	$\cos x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
	أتحقق من فهمي صفحة 64
a	$\sin x=0.23$ $x\approx0.23+2k\pi\ ,\ x\approx2.91+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
b	$\tan x=-10$ $x\approx-1.47+k\pi\ ,$ k عدد صحيح
	أتحقق من فهمي صفحة 66
a	$5\sin x=3\sin x+\sqrt{3}\Rightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح

b	$2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ عدد صحيح k
	أتحقق من فهمي صفحة 67
a	$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, 1$ $x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6} \ , \quad x = \frac{\pi}{2}$
b	$\sin x \cos x = 2\sin x \Rightarrow \sin x \cos x - 2\sin x = 0$ $\Rightarrow \sin x(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \ , \ \cos x = 2$ (تُهمل) $x = 0 \ , \ x = \pi$
	أتحقق من فهمي صفحة 69
a	$2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$ $\Rightarrow -2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ $\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ $\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$ $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ , \ \cos x = -2$ (تُهمل) $x = \frac{\pi}{3} \ , \ x = \frac{5\pi}{3}$
b	$2\sin 2x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 4\sin x\cos x - 3\sin x = 0$ $\Rightarrow \sin x(4\cos x - 3) = 0$ $\Rightarrow \sin x = 0 \ , \ \cos x = \frac{3}{4}$ $x = 0 \ , \ x = \pi \ , \ x \approx 0.72 \ , \ x \approx 5.56$
	أتحقق من فهمي صفحة 70

$$\cos x - \sin x = 1 \Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x = 1$$
$$\Rightarrow 1 - 2\sin x \cos x = 1$$
$$\Rightarrow -2\sin x \cos x = 0$$
$$\Rightarrow \sin x = 0, \cos x = 0$$

$x = 0 \quad , \quad x = \dfrac{3\pi}{2}$ (بقية الحلول لا تحقق المعادلة الأصلية)

أتحقق من فهمي صفحة 71

$$2\cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \qquad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ , \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + (0)\pi = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{6} + (1)\pi = \frac{7\pi}{6}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + (0)\pi = \frac{5\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6} + (1)\pi = \frac{11\pi}{6}$$

حلول المعادلة هي:

$$x = \frac{\pi}{6} \ , \qquad x = \frac{5\pi}{6} \ , \quad x = \frac{7\pi}{6} \ , \qquad x = \frac{11\pi}{6}$$

أتحقق من فهمي صفحة 72

	$2\cos\frac{x}{2}-1=0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\quad \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ $\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi\ ,\quad x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi$ $x=\frac{2\pi}{3}+4(0)\pi=\frac{2\pi}{3}$ $x=\frac{10\pi}{3}+4(0)\pi=\frac{5\pi}{6}$ حلول المعادلة هي: $x=\frac{2\pi}{3}\ ,\quad x=\frac{10\pi}{3}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 72
1	$2\sin x+3=2 \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$ $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
2	$1-\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
3	$\sin x=-0.3$ $x=3.45+2k\pi\ ,\ x=5.98+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
4	$\cos x=0.32$ $x=1.25+2k\pi\ ,\ x=5.04+2k\pi\ ,$ k عدد صحيح
5	$\tan x=5$ $x=1.37+k\pi\ ,$ k عدد صحيح

6	$\sec^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \sec^2 x = 2 \Rightarrow \sec x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;,\; x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \;,\; x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,$ k عدد صحيح
7	$\cot x + 1 = 0 \Rightarrow \cot x = -1 \Rightarrow \tan x = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \;,$ k عدد صحيح
8	$\csc^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \csc^2 x = 4 \Rightarrow \csc x = \pm 2 \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;,\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;,\; x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ k عدد صحيح
9	$3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;,\; x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,$ k عدد صحيح
10	$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$ $\Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$ $\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ $\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, 1$ $x = \frac{7\pi}{6} \;,\quad x = \frac{11\pi}{6} \;,\quad x = \frac{\pi}{2}$

11	$3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0 \quad \Rightarrow (3\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$ $x = 0.34 \;, \qquad x = 2.8$
12	$2\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$ $\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, 0$ $x = \frac{\pi}{2} \;, \qquad x = \frac{3\pi}{2} \;, \qquad x = \frac{2\pi}{3} \;, \qquad x = \frac{4\pi}{3}$
13	$\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0 \Rightarrow (\tan^2 x - 9)(\tan^2 x - 4) = 0$ $\Rightarrow \tan^2 x = 4, 9$ $\Rightarrow tan\, x = \pm 2, \pm 3$ $x = 1.11 \;, \qquad x = 2.03 \;, \qquad x = 4.25 \;, \qquad x = 5.18$ $x = 1.25 \;, \qquad x = 1.89 \;, \qquad x = 4.39 \;, \qquad x = 5.03$
14	$\sin x + 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \sin x\,(1 + 2\cos x) = 0$ $\Rightarrow \sin x = 0\,, \cos x = -\frac{1}{2}$ $x = 0 \;, \qquad x = \pi \;, \qquad x = \frac{2\pi}{3} \;, \qquad x = \frac{4\pi}{3}$
15	$\tan^2 x\cos x = \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x\cos x - \tan^2 x = 0$ $\Rightarrow \tan^2 x\,(\cos x - 1) = 0$ $\Rightarrow tan\, x = 0\,, \cos x = 1$ $x = 0 \;, \qquad x = \pi$

16	$2\cos^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow 2(1-\sin^2 x) + \sin x = 1$ $\Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$ $\Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ $\Rightarrow sin\, x = -\frac{1}{2}, \sin x = 1$ $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$
17	$\tan^2 x - 2\sec x = 2 \Rightarrow \tan^2 x - 2\sec x - 2 = 0$ $\Rightarrow \sec^2 x - 1 - 2\sec x - 2 = 0$ $\Rightarrow \sec^2 x - 2\sec x - 3 = 0$ $\Rightarrow (\sec x - 3)(\sec x + 1) = 0$ $\Rightarrow \sec x = 3, \sec x = -1$ $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}, \cos x = -1$ $x = \pi$, $x = 1.23$, $x = 5.05$
18	$\csc^2 x = \cot x + 3 \quad \Rightarrow \csc^2 x - \cot x - 3 = 0$ $\Rightarrow \cot^2 x + 1 - \cot x - 3 = 0$ $\Rightarrow \cot^2 x - \cot x - 2 = 0$ $\Rightarrow (\cot x - 2)(\cot x + 1) = 0$ $\Rightarrow \cot x = 2, \cot x = -1$ $\Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}, \tan x = -1$ $x = 0.46$, $x = 3.61$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$
19	$\sin 2x = 3\cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 3$ $\Rightarrow 2x = 1.25, 2x = 4.39, \quad 2x = 7.53, \quad 2x = 10.67$ $x = 0.62$, $x = 2.2$, $x = 3.77$, $x = 5.34$

20	$4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$ $\Rightarrow 2\sin x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$ $\Rightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}, \cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
21	$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$, $0° \le \theta \le 360°$ $F = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0°$
22	$F = 0.25 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 0.25 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$, $\theta = 300°$
23	$F = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 1 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180°$
24	$y = 4e^{-3t}\sin 2\pi t$ $y = 0 \Rightarrow 4e^{-3t}\sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \sin 2\pi t = 0$ $\Rightarrow 2\pi t = 0 + 2k\pi, 2\pi t = \pi + 2k\pi$ $t = k$, $t = \frac{1}{2} + k$, k عدد صحيح
25	$\sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$ $\Rightarrow \cos x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$

26	$\tan\frac{x}{2} - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ $\Rightarrow \sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 0$ $\Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left(1 - 2\cos^2\frac{x}{2}\right) = 0$ $\Rightarrow \sin\frac{x}{2} = 0, \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \sin\frac{x}{2} = 0, \cos\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{x}{2} = 0 \;, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \;, \quad \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$ $x = 0 \;, \quad x = \frac{\pi}{2} \;, \quad x = \frac{3\pi}{2}$
27	$2\sin^2 x = 2 + \cos 2x \quad \Longrightarrow 2\sin^2 x = 2 + 1 - 2\sin^2 x$ $\Rightarrow 4\sin^2 x - 3 = 0$ $\Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} \;, \quad x = \frac{5\pi}{6} \;, \quad x = \frac{7\pi}{6} \;, \quad x = \frac{11\pi}{6}$

28	$2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow 2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right) - 3\cos\frac{x}{2} = 0$ $\Rightarrow -2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$ $\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} - 2 = 0$ $\Rightarrow \left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\cos\frac{x}{2} + 2\right) = 0$ $\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{x}{2} = -2$ (تُهمل) $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$
29	$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \;\Rightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x$ $\Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
30	$\cos 2x = \cos x \;\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \cos x$ $\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 =$ $\Rightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) =$ $\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = 1$ $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$

31	$\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$ $\tan^2 x + k = 2\tan x$ $\tan^2 x - 2\tan x + k = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4k$ $\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4k < 0 \Rightarrow k > 1$ إذا كان $k > 1$ فإن المميز يكون سالبًا، والمعادلة لا حل لها.
32	$\tan^2 x - 2\tan x - 8 = 0$ $(\tan x - 4)(\tan x + 2) = 0$ $\tan x = 4$ أو $\tan x = -2$ $x = 1.33$, $x = -1.82$, $x = -1.11$, $x = 2.03$
33	$\sin(\cos x) = 0$ $\Rightarrow \cos x = \cdots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ لكن لا يوجد حل للمعادلة ... $\cos x = \cdots, -2\pi, -\pi, \pi, 2\pi,$ لأن $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
34	$\tan x + \cot x = 5$ $\tan x + \frac{1}{\tan x} - 5 = 0$ $\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$ $\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ $x = 1.37$, $x = 4.51$, $x = 0.21$, $x = 3.35$

اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	b
2	b
3	d
4	c
5	d
6	b
7	d
8	b
9	b
10	d
11	$3\cos 37.5° \sin 37.5° = \frac{3}{2}\sin 75°$ $= \frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}150° = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-\cos 150°}{2}}$ $= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$
12	$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} = 2cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right) = 2cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

13	$\cos 255° - \cos 195° = -2\sin\left(\frac{255° + 195°}{2}\right)\sin\left(\frac{255° - 195°}{2}\right)$ $= -2\sin 225° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
14	$A = (20\cos x)(20\sin x) = 200(2\cos x\sin x) = 200\sin 2x$
15	$\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y-x+y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y-x+y}{2}\right)}$ $= \frac{2\cos x\sin y}{2\cos x\cos y} = \tan y$
16	$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$ $= 4(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$ $= 4((\sin^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x + (\cos^2 x)^2)$ $= 4\left(\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - (\sin x\cos x)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\right)$ $= 4\left(\frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) - \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 + \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\right)$ $= 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right)$ $= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$ $= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$ $= 4 - 3\sin^2 2x$
17	$\frac{1}{2}(\ln\lvert 1 + \cos 2x\rvert - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{\lvert 1+\cos 2x\rvert}{2}$ $= \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+\cos 2x}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}\ln\lvert\cos^2 x\rvert = \ln\lvert\cos x\rvert$

18	$\sec 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} = \dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$
19	$\csc x - \cot x = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = tan\,\dfrac{x}{2}$
20	$\cos x = \dfrac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \dfrac{3}{5}$ $cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$
21	$\dfrac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \dfrac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{1}{\cos x}} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
22	$(\sin x + \cos x)^4 = ((\sin x + \cos x)^2)^2$ $= (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)^2$ $= (1 + 2\sin x\cos x)^2$
23	$\dfrac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \dfrac{\frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\tan y} - 1}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} \times \dfrac{\tan x\tan y}{\tan x\tan y}$ $= \dfrac{1 - \tan x\tan y}{\tan x + \tan y} = cot(x + y)$
24	$\dfrac{\sin x\sec x}{\tan x} = \dfrac{\sin x \times \frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$
25	$\ln\lvert\sec\theta\rvert = \ln\left\lvert\dfrac{1}{\cos\theta}\right\rvert = \ln\dfrac{1}{\lvert\cos\theta\rvert} = \ln 1 - \ln\lvert\cos\theta\rvert = -\ln\lvert\cos\theta\rvert$

26	$\tan(-15^\circ) = -\tan 15^\circ = -\tan\frac{1}{2}(30^\circ)$ $= -\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -2+\sqrt{3}$
27	$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{1}{2}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{7\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
28	$\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 25^\circ} = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \tan 45^\circ = 1$
29	$\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} = cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\pi = -1$
30	$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ حلول هذه المعادلة هي الإحداثيات x لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الشكل المرفق، $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$
31	$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 2(5x) = \cos 10x$
32	$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$
33	نعلم أن: $\sin 4x = \sin\frac{8x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{2}}$ إذن: $\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{2}} = \pm\sin 4x$

34	$4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{4}$ $x \approx 0.85$, $x \approx 2.29$
35	$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 3 \Rightarrow 1 - \cos x = 3 + 3\cos x$ $\Rightarrow 4\cos x = -2$ $\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
36	$\cos x \sin x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\,(\cos x - 1) = 0$ $\Rightarrow \sin x = 0, \cos x = 1$ $x = 0$, $x = \pi$
37	$\sin x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x\,(1 - 2\sin x) = 0$ $\Rightarrow \sin x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$ $x = 0,$ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$
38	$\sin x - \cos x - \tan x = -1 \Rightarrow \sin x - \cos x - \tan x + 1 = 0$ $\Rightarrow \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) - (\tan x - 1) = 0$ $\Rightarrow \cos x\,(\tan x - 1) - (\tan x - 1) = 0$ $\Rightarrow (\cos x - 1)(\tan x - 1) = 0$ $\Rightarrow \cos x = 1, \tan x = 1$ $x = 0,$ $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$

39	$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow 2x = 0.85 + 2k\pi, \quad 2x = 2.29 + 2k\pi$ $\Rightarrow x = 0.425 + k\pi, \quad x = 1.145 + k\pi$ $x \approx 0.425\,, \quad 3.57\,, \quad 1.15\,, \quad 4.29$
40	$\tan 3x + 1 = \sec 3x \Rightarrow (\tan 3x + 1)^2 = \sec^2 3x$ $\Rightarrow \tan^2 3x + 2\tan 3x + 1 = \sec^2 3x$ $\Rightarrow \sec^2 3x + 2\tan 3x = \sec^2 3x$ $\Rightarrow \tan 3x = 0$ $\Rightarrow 3x = k\pi$ $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$ $x = 0\,, \quad x = \frac{2\pi}{3}\,, \quad x = \frac{4\pi}{3}$

الوحدة الثالثة: التفاضل وتطبيقاته

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

	مسألة اليوم صفحة 78
1	$x(t) = 8\sin t \quad \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 4\sqrt{3}\ cm$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \quad \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -4\ cm/s$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \quad \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -4\sqrt{3}\ cm/s^2$
2	بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = \frac{2}{3}\pi$
	أتحقق من فهمي صفحة 80
a	$f(x) = 5e^x + 3$ $f'(x) = 5e^x$
b	$f(x) = \sqrt{x} - 4e^x = x^{\frac{1}{2}} - 4e^x$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$
c	$y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$ $y' = \frac{dy}{dx} = 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$

	أتحقق من فهمي صفحة 82
a	$f(x)=\sqrt{x}+\ln(4x)=x^{\frac{1}{2}}+\ln 4+\ln x$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0+\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$
b	$f(x)=\ln(2x^3)=\ln 2+3\ln x$ $f'(x)=\frac{3}{x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 84
a	$y=\frac{\sin x}{2}+3\cos x=\frac{1}{2}\sin x+3\cos x$ $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos x-3\sin x$
b	$f(x)=x^2+\cos x+\sin\frac{\pi}{2}$ $f'(x)=2x-\sin x+0=2x-\sin x$
	أتحقق من فهمي صفحة 85
a	$f(x)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \quad \Rightarrow \; f'(x)=\frac{1}{2x}$ ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو : $f'(e)=\frac{1}{2e}$ معادلة المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$ $y=\frac{1}{2e}x$
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$ $y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 88
a	$s(t) = t^2 - 7t + 8$ $v(t) = 2t - 7 \quad \Rightarrow v(4) = 1 \text{ m/s}$ $a(t) = 2 \quad \Rightarrow a(4) = 2 \text{ m/s}^2$
b	$v(t) = 2t - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7}{2} \text{ s}$
c	$v(2) = -3 \text{ m/s}$ بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$
d	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8 \text{ m}$ $s(t) = 8 \quad \Rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \quad \Rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t-7) = 0 \quad \Rightarrow t = 0 \;, \qquad t = 7$ إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7 \text{ s}$، أي بعد 7 ثوانٍ من بدء حركته.
	أتحقق من فهمي صفحة 90
a	$s(t) = 7 \sin t$ $v(t) = 7 \cos t$ $a(t) = -7 \sin t$
b	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7\, m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = -7 \text{ m}, s = 7 \text{ m}$، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi \text{ s}$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7 \text{ m/s}$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $\lvert 7 \cos t \rvert = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيًا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $\lvert s(t) \rvert = 7 \to v(t) = 0$ (عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 90
1	$f'(x) = 2 \cos x - e^x$
2	$f'(x) = \frac{1}{4x} + \pi \sin x$
3	$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$ $\quad = \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $\quad = -3 \ln x + x^4$ $f'(x) = -\frac{3}{x} + 4x^3$

4	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$
5	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
6	$f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n \ln x$ $f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n}{x}$
7	$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$ ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$: $f'(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^\pi = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$: $y - \frac{1}{2}e^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)(x - \pi)$ $y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi + \frac{1}{2}e^\pi$
8	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^\pi$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^\pi} = \frac{-2}{-2+e^\pi} = \frac{2}{2-e^\pi}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{2}{2-e^\pi}(x - \pi) \quad \Rightarrow y = \frac{2}{2-e^\pi}x - \frac{2\pi}{2-e^\pi} + \frac{1}{2}e^\pi$
9	$f(x) = e^x - 2x \quad \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$ $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow e^x = 2 \quad \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$
10	$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$ عندما $x = \pi$، فإن: $y = f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = -1$ ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos \pi - \sin \pi = -1$ بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1 معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \quad \Rightarrow y = x - \pi - 1$ الإجابة الصحيحة هي b
11	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

12	$f'(x) = \frac{1}{x}$ ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو: $f'(e) = \frac{1}{e}$ معادلة المماس هي: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$ وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته.
13	بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$ معادلة العمودي على المماس: $y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = -ex + e^2 + 1$ لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته $0 = -ex + e^2 + 1$ $ex = e^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{e^2+1}{e} = e + \frac{1}{e}$
14	$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ $v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \Rightarrow v(5) = 40\ \text{m/s}$ $a(t) = 6t - 8 \Rightarrow a(5) = 22\ \text{m/s}^2$
15	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $\Longrightarrow t = \frac{5}{3}\ \text{s}\ , t = 1\ \text{s}$
16	$v(4) = 21\ \text{m/s}$ بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 4$
17	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0\ \text{m}$ $s(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$ $\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0$ $\Rightarrow t = 0$ العبارة التربيعية $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية. إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا.

18	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1 \text{ m}$
19	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0 \Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t \Rightarrow a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4 \text{ m/s}^2$
20	$s(t) = 4\cos t$ $v(t) = -4\sin t$ $a(t) = -4\cos t$
21	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \text{ m/s}$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$
22	من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 4 \text{ m}, s = -4\text{m}$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين 4 m/s، و-4 m/s ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان. نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرًا.
23	$y = e^x - ax$ $x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$ نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0,1)$ $\frac{dy}{dx} = e^x - a$ ميل المماس عند هذه النقطة هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$ معادلة معادلة المماس هي: $y - 1 = (1-a)(x-0) \rightarrow y = (1-a)x + 1$

24	ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$ لكل x فإن $2e^x > 0$ و لكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$ بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أنّ $y' > 3$ إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.
25	الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أنّ $y = ke^0 = k$ ، أي أنّ إحداثيي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=0} = ke^0 = k$ معادلة المماس هي: $y - k = k(x - 0) \quad \Rightarrow y = kx + k$ ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \quad \Rightarrow \quad x = -1$ إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1,0)$
26	ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$ وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أنّ: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \quad \Rightarrow k^2 = 100 \quad \Rightarrow k = \pm 10$ ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$
27	$y = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$
28	$y = \log ax^2 = \log a + 2 \log x$ $\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$

29	$s(t) = 4 - \sin t$ $v(t) = -\cos t$ $a(t) = \sin t$
30	$v(t) = -\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$ ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3 \text{ m}$
31	$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أنَّ: $s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$ أي أن الجسيم يكون عند $s = 4 \text{ m}$ عندما يكون تسارعه صفرًا.

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

	مسألة اليوم صفحة 93
	$A(b)=\dfrac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ $A'(b)=\dfrac{(1+4b^{0.4})(9.6b^{-0.6})-(40+24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1+4b^{0.4})^2}$ $=\dfrac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$ $=\dfrac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 95
a	$f(x)=(x^3-2x^2+3)(7x^2-4x)$ $f'(x)=(x^3-2x^2+3)(14x-4)+(7x^2-4x)(3x^2-4x)$ $=14x^4-4x^3-28x^3+8x^2+42x-12+21x^4-28x^3-12x^3+16x^2$ $=35x^4-72x^3+24x^2+42x-12$
b	$f(x)=\ln x\cos x$ $f'(x)=(\ln x)(-\sin x)+(\cos x)\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x\sin x+\dfrac{\cos x}{x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 97
a	$f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$ $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$
b	$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$ $f'(x)=\dfrac{e^x(\cos x)-(\sin x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

	أتحقق من فهمي صفحة 98
a	$P(t)=\dfrac{500t^2}{2t+9}$ $P'(t)=\dfrac{(2t+9)(1000t)-(500t^2)(2)}{(2t+9)^2}=\dfrac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$
b	$P'(12)=\dfrac{9000(12)+1000(12)^2}{(24+9)^2}\approx 231.405$ إذن، عندما $t=12$ فإن عدد سكان هذه المدينة يزيد بمقدار 231 ألف نسمة لكل سنة.
	أتحقق من فهمي صفحة 100
a	$f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$ $f'(x)=\dfrac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\dfrac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$
b	$f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\dfrac{-\left(e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 102
a	$f(x)=x\cot x$ $f'(x)=(x)(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)=-x\csc^2 x+\cot x$
b	$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$ $f'(x)=\dfrac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$ $=\dfrac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 103
$f(x) = x\sin x$ $f'(x) = x\cos x + \sin x$ $f''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x$ $= 2\cos x - x\sin x$ $f'''(x) = -2\sin x - (x\cos x + \sin x)$ $= -3\sin x - x\cos x$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 103

1	$f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$ $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$
2	$f(x) = x^3\sec x$ $f'(x) = (x^3)(\sec x\tan x) + (\sec x)(3x^2)$ $= x^3\sec x\tan x + 3x^2\sec x$
3	$f(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$ $f'(x) = \dfrac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos x + x\sin x + \sin x}{\cos^2 x}$
4	$f(x) = e^x(\tan x - x)$ $f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$ $= e^x\tan^2 x + e^x\tan x - xe^x$
5	$f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$ $f'(x) = \dfrac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2} = \dfrac{-2\sin x}{e^x}$
6	$f(x) = x^3\sin x + x^2\cos x$ $f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$ $= x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x$

7	$f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+3\right)=x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}=\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
8	$f(x)=\frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ $f'(x)=\frac{(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)}{(1-\sec x)^2}$ $=\frac{2\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$
9	$f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}=\frac{2x-1}{x^2-3x}$ $f'(x)=\frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}=\frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$ $f'(x)=(x^3-x)\left((x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x)\right)$ $+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $=(x^3-x)(x^2+2)(2x+1)+(x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$ $+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$
11	$f(x)=(\csc x+\cot x)^{-1}=\frac{1}{\csc x+\cot x}$ $f'(x)=\frac{-1(-\csc x\cot x-\csc^2 x)}{(\csc x+\cot x)^2}$ $=\frac{\csc x\cot x+\csc^2 x}{(\csc x+\cot x)^2}$ $=\frac{\csc x\,(\cot x+\csc x)}{(\csc x+\cot x)^2}$ $=\frac{\csc x}{\cot x+\csc x}$
12	$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)$ $=5\times 2-1\times -3=13$

13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$
14	$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$
15	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ $f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$ $f''(x) = \frac{(x^2+4)^2(16) - (16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$ $= \frac{(16)(x^2+4) - (16x)(2)(2x)}{(x^2+4)^3}$ $f''(-2) = \frac{(16)(8) - (-32)(2)(-4)}{(8)^3} = -\frac{1}{4}$
16	$f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}} = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ $f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{144}$

17	$f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$ $f'(x)=\frac{-1(1+\sqrt{x})-(1-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $=\frac{-2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})-(1-x)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-2\sqrt{x}-2x-1+x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $=-\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $f'(x)=-\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}x^{-1/2}$ $f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $f''(4)=\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=\frac{1}{32}$ طريقة ثانية: يمكن تبسيط $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ بتحليل بسطه في صورة فرق بين مربعين واختصار العامل المشترك. $f(x)=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$ $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}x^{-1/2}$ $f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $f''(4)=\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=\frac{1}{32}$

18	$f(x)=\dfrac{1+x}{1+e^x}$ $f'(x)=\dfrac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ ميل المماس عند النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هو: $f'(0)=\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}(x-0)\quad\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$
19	$f(x)=e^x\cos x+\sin x$ $f'(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+\cos x$ ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو: $f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$ معادلة المماس هي: $y-1=2(x-0)\quad\Rightarrow y=2x+1$
20	$\dfrac{d}{dx}(\cot x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$ $=\dfrac{(\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$ $=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $=-\csc^2 x$
21	$\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ $=\dfrac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$ $=\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $=\sec x\tan x$

22	$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$ $= -\csc x \cot x$
23	$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^2}$
24	$f'''(x) = 2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
25	$f^{(4)}(x) = 2x + 1$ $f^{(5)}(x) = 2$ $f^{(6)}(x) = 0$
26	$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ $h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$
27	$y = e^x \sin x$ $\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$
28	$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$ $= 2e^x \cos x$ $= \frac{d^2y}{dx^2}$

29	$\csc\theta = \dfrac{r+h}{r} \quad \Rightarrow r + h = r\csc\theta$ $\Rightarrow h = r(\csc\theta - 1)$
30	$\dfrac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$ $\left.\dfrac{dh}{d\theta}\right\rvert_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$ $= 6371(-2\times\sqrt{3}) \approx -22070 \text{ km/rad}$
31	$f(x) = 9\ln x + \dfrac{1}{2x^2}$ $f'(x) = 9\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{-1(4x)}{4x^4}$ $= \dfrac{9}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ $= \dfrac{9x^2-1}{x^3}$ $= \dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$
32	$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$و$(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل الماس الأفقي، ويساوي صفرًا $P'(2) = 3\times\dfrac{1}{2} + 2\times 0 = \dfrac{3}{2}$
33	$Q'(7) = \dfrac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)} = \dfrac{1\times\frac{1}{4} - 5\times -\frac{2}{3}}{1} = \dfrac{43}{12}$

34	$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$ $= \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرًا، أي أنّ : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ ، وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان $e^x = 0$، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.
36	$y = \frac{x+1}{x-1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x+1 = y(x-1) \quad \Rightarrow x(1-y) = -y-1$ $\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$ $\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$ $= \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}$ $= \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} \quad = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} \quad = \frac{(x-1)^2}{-2} \quad = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

39	$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $f''(x) = \frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{x^6}$ $= \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6}$ $= \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$
40	$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$ $= x^4 \times \frac{-5 + 6\ln x}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$ $= -5 + 6\ln x + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1 = 0$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 106	
$P(t)=\dfrac{100}{1+e^{3-t}}$ $P'(t)=\dfrac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$ $P'(3)=\dfrac{100}{4}=25$ أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 3 أيام بمعدل 25 طالبًا/يوم	
أتحقق من فهمي صفحة 108	
a	$f(x)=\tan 3x^2$ $f'(x)=6x\sec^2(3x^2)$
b	$f(x)=e^{\ln x}=x$ $f'(x)=1$
c	$f(x)=\ln\cot x$ $f'(x)=\dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$
أتحقق من فهمي صفحة 109	
a	$f(x)=\sqrt[5]{(x^2-1)^2}=(x^2-1)^{\frac{2}{5}}$ $f'(x)=\dfrac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x)=\dfrac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$
b	$f(x)=\sqrt{\cos x}$ $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
c	$f(x)=(\ln x)^5$ $f'(x)=5(\ln x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $=\dfrac{5(\ln x)^4}{x}$

	أتحقق من فهمي صفحة 111
a	$f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1) = (\cos(7x^3+6x-1))^2$ $f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$ $= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$ $= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$
b	$f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ $f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2\big(4(x^2+1)^3(2x)\big)$ $= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$
	أتحقق من فهمي صفحة 112
a	$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ $f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1)$ $+ (x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$
b	$f(x) = \dfrac{(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'(x) = \dfrac{e^{2x}\times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}} = \dfrac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-\sin\pi - 2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}} = 0$ ميل المماس يساوي صفرًا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسيًا وميله غير معرف.
	أتحقق من فهمي صفحة 113
a	$U(x) = 80\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+4}}$ $U'(x) = 80 \times \dfrac{\dfrac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+4}}} = \dfrac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x+1}}$
b	$U'(20) = \dfrac{200}{(64)^2}\sqrt{\dfrac{64}{41}} \approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبًا
	أتحقق من فهمي صفحة 115

a	$f(x) = \pi^{\pi x}$ $f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1}\ln\pi$
b	$f(x) = 6^{1-x^3}$ $f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$
c	$f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$ $f'(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$
أتحقق من فهمي صفحة 116	
a	$f(x) = \log \sec x$ $f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}$
b	$f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$ $f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$
أتحقق من فهمي صفحة119	
$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$ $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ $x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad , \quad y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$	

أتدرب وأحل المسائل صفحة 120	
1	$f(x)=e^{4x+2}$ $f'(x)=4e^{4x+2}$
2	$f(x)=50e^{2x-10}$ $f'(x)=100e^{2x-10}$
3	$f(x)=\cos(x^2-3x-4)$ $f'(x)=-(2x-3)\sin(x^2-3x-4)=(3-2x)\sin(x^2-3x-4)$
4	$f(x)=10x^2e^{-x^2}$ $f'(x)=(10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right)+\left(e^{-x^2}\right)(20x)=20xe^{-x^2}(1-x^2)$
5	$f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=-\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$
6	$f(x)=x^2\tan\dfrac{1}{x}$ $f'(x)=(x^2)\left(-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}\right)+\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)(2x)$ $=-\sec^2\dfrac{1}{x}+2x\tan\dfrac{1}{x}$
7	$f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$ $f'(x)=3+5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2=3+10\pi^2x\sin(\pi x)^2$
8	$f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)=\ln(1+e^x)-\ln(1-e^x)$ $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{e^x}{1-e^x}=\dfrac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f(x)=(\ln x)^4$ $f'(x)=\dfrac{4}{x}(\ln x)^3$
10	$f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$ $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}+\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

11	$f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x} = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x) = \dfrac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$
12	$f(x) = \dfrac{3^{2x}}{x}$ $f'(x) = \dfrac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2} = \dfrac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$
13	$f(x) = 2^{-x}\cos \pi x$ $f'(x) = (2^{-x})(-\pi \sin \pi x) + (\cos \pi x)(-\ln 2)2^{-x}$ $= -\pi\, 2^{-x}\sin \pi x - 2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$
14	$f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$ $f'(x) = \dfrac{\frac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2} = \dfrac{10 - 10\ln 4\log_4 x}{x^2 \ln 4}$
15	$f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ $f'(x) = 2\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1 \times \dfrac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ $= 2 \times \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \times \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$ $= 2 \times \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \times \dfrac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$ $= \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$
16	$f(x) = \log_3(1+x\ln x)$ $f'(x) = \dfrac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)} = \dfrac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$
17	$f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$ $f'(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$
18	$f(x) = \tan^4(\sec(\cos x)) = (\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x) = 4(\tan(\sec(\cos x)))^3 \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x)$ $\times (-\sin x)$ $= -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

19	$f(x)=4e^{-0.5x^2}$ $f(-2)=4e^{-0.5(-2)^2}=\frac{4}{e^2}$ $f'(x)=-4xe^{-0.5x^2}$ ميل المماس هو: $m=f'(-2)=-4(-2)e^{-0.5(-2)^2}=\frac{8}{e^2}$ معادلة المماس هي: $y-\frac{4}{e^2}=\frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y=\frac{8}{e^2}x+\frac{20}{e^2}$
20	$f(x)=x+\cos 2x$ $f(0)=0+\cos(0)=1$ $f'(x)=1-2\sin 2x$ ميل المماس هو: $m=f'(0)=1-2\sin 2(0)=1$ معادلة المماس هي: $y-1=1(x-0) \Rightarrow y=x+1$
21	$f(x)=2^x$ $f(0)=2^0=1$ $f'(x)=(\ln 2)2^x$ ميل المماس هو: $m=f'(0)=(\ln 2)2^0=\ln 2$ معادلة المماس هي: $y-1=(\ln 2)(x-0) \Rightarrow y=(\ln 2)x+1$
22	$f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$ $f(3)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ $f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)+\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ ميل المماس هو: $m=f'(3)=(2)(0)+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y+2=-\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$
23	$A(x)=f\left(g(x)\right)$ $A'(x)=f'\left(g(x)\right)\times g'(x)$ $A'(5)=f'\left(g(5)\right)\times g'(5)$ $=f'(-2)\times g'(5)$ $=4\times 6=24$

24	$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1})(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\dfrac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$
25	$A(t)=Ne^{0.1t}$ $A'(t)=0.1Ne^{0.1t}$ $A'(3)=0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k)=0.1Ne^{0.1k}$ $0.2=0.1Ne^{0.1k}$ $e^{0.1k}=\dfrac{0.2}{0.1N}=\dfrac{2}{N}$ $0.1k=\ln\dfrac{2}{N} \Rightarrow k=10\ln\dfrac{2}{N}$
27	$f(x)=\sin\pi x$ $f'(x)=\pi\cos\pi x$ $f''(x)=-\pi^2\sin\pi x$ $f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x$
28	$f(x)=\cos(2x+1)$ $f'(x)=-2\sin(2x+1)$ $f''(x)=-4\cos(2x+1)$ $f'''(x)=8\sin(2x+1)$ $f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$ $f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$
29	$f(x)=\cos x^2$ $f'(x)=-2x\sin x^2$ $f''(x)=(-2x)(2x\cos x^2)+(\sin x^2)(-2)$ $=-4x^2\cos x^2-2\sin x^2$

30	$y = e^{\sin x}$ $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$ ميل المماس هو: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{x=0} = e^{\sin 0} \cos 0 = 1$
31	$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$ إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098g كل يوم عندما $t = 2$
32	$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$ $v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177$ cm/s
33	$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.24 \cos 2.4t = 0$ $\Rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\|\sin 2.4t\| = 1$ أي أن : $\sin 2.4t = 1, \quad \sin 2.4t - 1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1 \quad , \quad s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو −0.1 cm
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t$ $a(t) = 0 \quad \Rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

35	$\frac{dy}{dt} = 2t \;, \qquad \frac{dx}{dt} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$ نقطة التماس: $x = 1 + 2 = 3 \;, \; y = (1)^2 - 1 = 0$ معادلة المماس: $y - 0 = 2(x - 3) \;\Rightarrow\; y = 2x - 6$
36	$\frac{dy}{dt} = 2t \;, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$ نقطة التماس: $x = -\frac{1}{2} \;, \; y = (-1)^2 - 4 = -3$ معادلة المماس: $y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; y = -4x - 5$

37	$\frac{dy}{dt} = \sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ نقطة التماس: $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ معادلة المماس: $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$
38	$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2\sec^2 t \tan t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2}\cot t$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ نقطة التماس: $x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1 \quad , \quad y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ معادلة المماس: $y + 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39	$\frac{dy}{dt} = 2\sin t$, $\frac{dx}{dt} = 2(1-\cos t)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1-\sqrt{2}$
40	$h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$و$(0,5)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$و$(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$
41	$p(x) = g(f(x))$ $p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ $p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$و$(0,5)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$و$(2,4)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$

42	$y=\ln(ax+b)$ $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}$ ليكن إحداثيا P هما (x_1,y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: $\frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=x_1}=\frac{a}{ax_1+b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1+b}=1$ $\Rightarrow a=ax_1+b$ $\Rightarrow x_1=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}$ المقدار $(1-\frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a,b موجبين. إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1
43	$y=f(x)=\ln(ax+b)$ $y'=f'(x)=\frac{a}{ax+b}$ ميل المماس عند $P(0,2)$ يساوي 1، أي أنّ: $f'(0)=1$ $f'(0)=\frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$ $f(0)=\ln b=2\Rightarrow b=e^2$ $\Rightarrow a=b=e^2$
44	أفترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(x_1,\ y_1)$، بتعويض قيمة كل من a، و b نجد أن: $f(x)=\ln(e^2x+e^2)=\ln(e^2(x+1))=\ 2+\ln(x+1)$ $f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x_1)=\frac{1}{x_1+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=1$ $y_1=f(x_1)=f(1)=\ln(e^2+e^2)=\ln(2e^2)=\ln 2+\ln e^2\ =\ln 2+2$ إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1,\ 2+\ln 2)$.
45	$\frac{dy}{dt}=2\ ,\qquad \frac{dx}{dt}=2t$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$

46	ميل المماس عند النقطة $(a^2, 2a)$: $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\frac{1}{a}} = -a$ معادلة العمودي على المماس : $y - 2a = -a(x - a^2) \quad \Rightarrow \quad y = -ax + a^3 + 2a$
47	لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته: $0 = -ax + a^3 + 2a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a^3 + 2a}{a} = a^2 + 2$ لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$: $y = -a(0) + a^3 + 2a = a^3 + 2a$ مساحة المثلث: $A = \frac{1}{2}\lvert a^2 + 2\rvert\lvert a^3 + 2a\rvert$ $= \frac{1}{2}\lvert a^2 + 2\rvert\lvert a(a^2 + 2)\rvert$ $= \frac{1}{2}\lvert a(a^2 + 2)^2\rvert$ $= \frac{1}{2}\lvert a\rvert(a^2 + 2)^2$
48	$y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$
49	$y = e^x\sin^2 x\cos x = (e^x\sin^2 x)(\cos x)$ $\frac{dy}{dx} = (e^x\sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\big((e^x)(2\sin x\cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\big)$ $= -e^x\sin^3 x + 2e^x\cos^2 x\sin x + e^x\cos x\sin^2 x$

50	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$ $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}=0$ $\Rightarrow \cos 3t=0 \Rightarrow 3t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$ $x_A=\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $y_A=\sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.
51	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y، أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t=0 \Rightarrow 2t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ $x_B=\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ $y_B=\sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
52	عند نقطة الأصل $x=y=0$ أي أنّ: $\sin 2t=\sin 3t=0$ تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t=0$، وعندها يكون ميل المماس: $m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=0}=\frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)}=\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\frac{3}{2}$ كما تتحققان أيضًا عندما $t=\pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\pi}=\frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi}=\frac{3\cos\pi}{2\cos 0}=\frac{-3}{2}$

53	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \dfrac{2t-2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \dfrac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t-2)(2t-2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \dfrac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$
54	$v(t) = 0 \quad \Rightarrow 2t - 2 = 0 \quad \Rightarrow t = 1$ $s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$ $a(1) = \dfrac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \dfrac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$
55	الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$ $s(t) = \ln(1.9) \quad \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9)$ $\Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$ $\Rightarrow t^2 - 2t = 0$ $\Rightarrow t(t-2) = 0$ $\Rightarrow t = 0 \ , \quad t = 2$ يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم صفحة 123
$\tan\theta = \dfrac{4x}{x^2+252}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $\sec^2\theta \times \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{\left(1+\dfrac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$ $= \dfrac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 125	
a	$x^2+y^2=13$ $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y}$
b	$2x+5y^2=\sin y$ $2+10y\dfrac{dy}{dx}=\cos y\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}(10y-\cos y)=-2$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2}{10y-\cos y}$

أتحقق من فهمي صفحة 127	
a	$3xy^2 + y^3 = 8$ $6xy\dfrac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y^2}{6xy + 3y^2}$
b	$\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$ $\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right)\sec^2(x-y) = 6xy^2\dfrac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\dfrac{dy}{dx} = 6xy^2\dfrac{dy}{dx} + 2y^3$ $\dfrac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x-y)) = \sec^2(x-y) - 2y^3$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x-y)}$
c	$x^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$ $2x = \dfrac{(x+y)\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$ $2x(x+y)^2 = x - x\dfrac{dy}{dx} + y - y\dfrac{dy}{dx} - x - x\dfrac{dy}{dx} + y + y\dfrac{dy}{dx}$ $2x\dfrac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - 2x(x+y)^2}{2x} = \dfrac{y - x(x+y)^2}{x}$
أتحقق من فهمي صفحة 128	
a	$y^2 = \ln x \Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2xy}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(e,1)} = \dfrac{1}{2e}$

b	نجد قيمة y عندما $x=6$ $(y-3)^2 = 4(6-5) \Rightarrow (y-3)^2 = 4$ $\Rightarrow y-3 = \pm 2$ $\Rightarrow y = 5\,, y = 1$ باشتقاق طرفي العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$ ميل المماس عند النقطة الأولى هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$ وميل المماس عند النقطة الثانية هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1$

أتحقق من فهمي صفحة 130

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

بتعويض $x=2$، و$y=3$ ينتج أنّ:

$$3(2)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} - 3(2)\frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

إذن، معادلة المماس هي:

$$y-3 = -\frac{1}{7}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$$

أتحقق من فهمي صفحة 131

$$xy + y^2 = 2x \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+2\times\frac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 132

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 132	
1	$x^2 - 2y^2 = 4$ $2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$
2	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$ $\frac{-2x}{x^4} + \frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^4} \times \frac{y^4}{-2y} = -\frac{y^3}{x^3}$
3	$(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$ $2(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 50\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right)$ $\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$
4	$e^x y = xe^y$ $(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x) = (x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$ $\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$

5	$3^x = y - 2xy$ $3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$ $\frac{dy}{dx}(1-2x) = 2y + 3^x \ln 3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1-2x}$
6	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
7	$x = \sec\frac{1}{y}$ $1 = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = -y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$
8	$(\sin\pi x + \cos\pi y)^2 = 2$ $2(\sin\pi x + \cos\pi y)^1\left(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}\right) = 0$ $\frac{dy}{dx}(\pi\sin\pi y)(\sin\pi x + \cos\pi y) = (\pi\cos\pi x)(\sin\pi x + \cos\pi y)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(\pi\cos\pi x)(\sin\pi x + \cos\pi y)}{(\pi\sin\pi y)(\sin\pi x + \cos\pi y)} = \frac{\cos\pi x}{\sin\pi y}$

9	$\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5$ $\frac{y^2(1)-x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)}{y^4}+\frac{2y\frac{dy}{dx}(x)-1(y^2)}{x^2}=0$ $\frac{y^2-2xy\frac{dy}{dx}}{y^4}=-\frac{2xy\frac{dy}{dx}-y^2}{x^2}$ $x^2(y^2-2xy\frac{dy}{dx})=-y^4(2xy\frac{dy}{dx}-y^2)$ $2xy^5\frac{dy}{dx}-2x^3y\frac{dy}{dx}=y^6-x^2y^2$ $(2xy^5-2x^3y)\frac{dy}{dx}=y^6-x^2y^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-x^2y^2}{2xy^5-2x^3y}=\frac{y^2(y^4-x^2)}{2xy(y^4-x^2)}=\frac{y}{2x}$
10	$x+y=\cos xy$ $1+\frac{dy}{dx}=-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)\sin xy$ $\frac{dy}{dx}(-x\sin xy-1)=1+y\sin xy$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy+1}$
11	$x^2+y^2=\ln(x+y)^2$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$ $x+y\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$ $\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)=1-x^2-xy$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}$

12	$\sin x \cos y = x^2 - 5y$ $(\sin x)\left(-\sin y \dfrac{dy}{dx}\right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}(\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$
13	$2y^2 + 2xy - 1 = 0$ أجد قيمة y عندما $x = \frac{1}{2}$: $2y^2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2y^2 + y - 1 = 0$ $\Rightarrow (2y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}, y = -1$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $4yy' + 2xy' + 2y = 0$ $y' = \dfrac{-y}{2y + x}$ $y'\vert_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{3}$ $y'\vert_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = \dfrac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{3}$

14	$y^3 + 2x^2 = 11y$ أجد قيمة x عندما $y = 1$: $1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنَّ: $3y^2y' + 4x = 11y'$ $y' = \dfrac{4x}{11 - 3y^2}$ $y'\|_{(-\sqrt{5},1)} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$ $y'\|_{(\sqrt{5},1)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
15	$x^2 + y^2 = 25$ $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $2(3) + 2(-4)\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(3,-4)} = \dfrac{3}{4}$
16	$x^2y = 4(2 - y)$ $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = -4\dfrac{dy}{dx}$ $4\dfrac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(2,1)} = -\dfrac{1}{2}$
17	$e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$ $e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\dfrac{\pi}{2} - e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0$

18	$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5$ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}(1)\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(8,1)}=-\frac{1}{2}$
19	$x^2+xy+y^2=13$ $2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$ $-8-4\frac{dy}{dx}+3+6\frac{dy}{dx}=0$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(-4,3)}=\frac{5}{2}$ معادلة المماس هي: $y-3=\frac{5}{2}(x+4) \Rightarrow y=\frac{5}{2}x+13$
20	$x+y-1=\ln(x^2+y^2)$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$ بالتعويض ينتج أنّ: $1+\frac{dy}{dx}=2$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)}=1$ معادلة المماس هي: $y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1$
21	$x+y=\sin y$ $1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1+\cos y}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin y\frac{dy}{dx}}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y\left(\frac{1}{-1+\cos y}\right)}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$

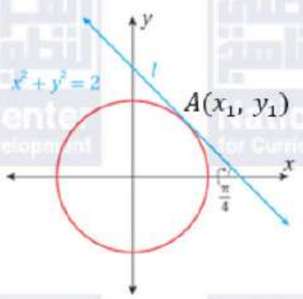
22	$4y^3 = 6x^2 + 1$ $12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} = \frac{y - 2x\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^3} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
23	$xy + e^y = e$ $x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y\left(1 + e^y\frac{-y}{x + e^y}\right)}{(x + e^y)^2}$ $= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$ $= \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$
24	$(x - 6)(y + 4) = 2$ $(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4) = 0$ $(7 - 6)\frac{dy}{dx} + (-2 + 4) = 0 \;\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(7,-2)} = -2$ إذن ميل العمودي على المماس هو $\frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \;\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

25	$3x^2+2xy+y^2=6$ $6x+2x\frac{dy}{dx}+2y+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-3x-y}{x+y}$ $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{-3x-y}{x+y}=0 \Rightarrow -3x-y=0 \Rightarrow y=-3x$ $3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6 \Rightarrow 6x^2=6 \Rightarrow x=\pm 1$ إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1,-3),(-1,3)$
26	$x+y^2=1$ $1+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$ ميل المستقيم $x+2y=0$ هو $-\frac{1}{2}$ $\frac{-1}{2y}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=1$ $\Rightarrow x+(1)^2=1 \Rightarrow x=0$ النقطة المطلوبة هي $(0,1)$
27	$y^3=x^2$ $3y^2\frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}, y\neq 0$ ميل المستقيم $y+3x-5=0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ $\frac{2x}{3y^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow 2x=y^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2$ $y^3=x^2 \Rightarrow y^3=\frac{1}{4}y^4 \Rightarrow 1=\frac{1}{4}y \Rightarrow y=4$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x=8$ النقطة المطلوبة هي $(8,4)$

28	$x^2+y^2=25 \Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $y''=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{y^2}=\frac{x\left(-\frac{x}{y}\right)-y}{y^2}$ $=\frac{-\frac{x^2}{y}-y}{y^2}=\frac{-x^2-y^2}{y^3}=\frac{-(x^2+y^2)}{y^3}=\frac{-25}{y^3}$
29	$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10 \ ,x>0\,,y>0$ $\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0 \Rightarrow \frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$ $\Rightarrow \left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$ $x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$ $=\frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}=\frac{y}{x}$ يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفرًا إلاّ إذا كان $y = x$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.

30	$x^2+y^2=100$ $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ $-\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}\ \Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}x$ $x^2+y^2=100\ \Rightarrow\ x^2+\left(-\dfrac{4}{3}x\right)^2=100$ $\Rightarrow \dfrac{25}{9}x^2=100$ $\Rightarrow\ x^2=36\ \Rightarrow x=\pm 6$ إذا كانت $x\ =6$، فإن $y=-\frac{4}{3}(6)=-8$ وإذا كانت $x\ =-6$، فإن $y=-\frac{4}{3}(-6)=8$ إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6,-8),(-6,8)$
31	$y\ =\ln x\,,\, x>0$ بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن: $e^y\ =\ x$ باشتقاق الطرفين ضمنيًا بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $e^y\dfrac{dy}{dx}\ =1\Rightarrow\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^y}$ بتعويض $e^y\ =\ x$ ينتج أنّ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$
32	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sec^2 t}{\cos t}=-\sec^3 t$ $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sec^3\dfrac{\pi}{4}=-2\sqrt{2}$

33	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{-e^{-t}}=e^t(-3t^2-1)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(e^t)(-6t)+(-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}=e^{2t}(1+6t+3t^2)$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{t=0}=e^0(1)=1$
34	$x^3+y^3=6xy$ $y=x \Rightarrow x^3+x^3=6x^2$ $\Rightarrow x^3=3x^2$ $\Rightarrow x^2(x-3)=0$ $\Rightarrow x=0\,,\quad x=3$ نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$ $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6x\frac{dy}{dx}+6y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(3,3)}=\frac{6-9}{9-6}=-1$ معادلة المماس هي: $y-3=-(x-3) \Rightarrow y=-x+6$

35	بما أنّ المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx}=0$ $$\frac{2y-x^2}{y^2-2x}=0 \Rightarrow 2y-x^2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2$$ $$x^3+y^3=6xy \Rightarrow x^3+\frac{1}{8}x^6=3x^3$$ $$\Rightarrow \frac{1}{8}x^6-2x^3=0$$ $$\Rightarrow x^6-16x^3=0$$ $$\Rightarrow x^3(x^3-16)=0 \Rightarrow x=0\,, x=\sqrt[3]{16}$$ $$\Rightarrow y=0\,, y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$ النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $\left(\sqrt[3]{16},\frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$
36	 لتكن نقطة التماس $A(x_1,\ y_1)$ باشتقاق طرفي العلاقة $x^2+y^2=2$ بالنسبة إلى x نجد أنّ: $$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$ إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x_1}{y_1}$ لكن ميل المماس l هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ إذن، $-\frac{x_1}{y_1}=-1 \Rightarrow x_1=y_1$ وبتعويض $(x_1,\ y_1)$ في المعادلة المعطاة نجد أنّ: $$x_1{}^2+y_1{}^2=2$$ وبتعويض $x_1=y_1$ في هذه المعادلة نجد أنّ: $$x_1{}^2+x_1{}^2=2 \Rightarrow 2x_1{}^2=2 \Rightarrow x_1{}^2=1 \Rightarrow x_1=1$$ إذن، نقطة التماس هي: $A(1,1)$، ومعادلة المماس l هي: $$y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$
37	$$x^2-y^2=1 \Rightarrow 2x-2y\frac{dy}{dx}=0$$ $$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$
38	$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$$

39	$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$ المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان، لأنه من نص السؤال: $y=\tan t$ و $x=\sec t$ ومنه فإن $\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$
40	$\frac{dy}{dx}=2 \Rightarrow \frac{x}{y}=2 \Rightarrow x=2y$ $x^2-y^2=1 \Rightarrow (2y)^2-y^2=1$ $\Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
41	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ نفرض نقطة التماس هي (x_1,y_1) فيكون ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$ معادلة المماس: $y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$ المقطع x والمقطع y للمماس: $x=0 \Rightarrow y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \Rightarrow y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ $y=0 \Rightarrow y_1=\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1) \Rightarrow x=x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$ مجموع المقطعين: $y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}=y_1+2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1$ $=\left(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1}\right)^2$ $=\left(\sqrt{k}\right)^2=k$

الدرس الخامس: المعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 135

$$S = \frac{\sqrt{hm}}{19} = \frac{\sqrt{170m}}{19} = \frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$$

معدل التغير المعطى: $\frac{dm}{dt} = -2 \text{ kg/month}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{m=70}$

العلاقة بين الكتلة ومساحة سطح الجسم: $S = \frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}}\frac{dm}{dt}$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{m=70} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}} \times -2$$

$$\approx -0.082 \text{ cm}^2/\text{month}$$

أتحقق من فهمي صفحة 137

ليكن حجم الكرة V وطول نصف قطرها r

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 80 \text{ cm}^3/\text{s}$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$

حجم البالون الكروي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=6} = 4\pi(6)^2 \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$$

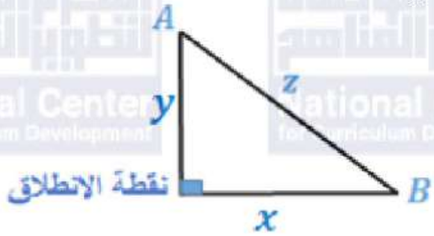
$$80 = 144\pi \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6} = \frac{80}{144\pi}$$

$$= \frac{5}{9\pi} \text{ cm/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 139

ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي y ، و بعد B عن نقطة الانطلاق يساوي x، والبعد بين A، و B يساوي z



معدلات التغير المعطاة:
$$\frac{dx}{dt} = 40\text{km/h}\,, \quad \frac{dy}{dt} = 45 \text{ km/h}$$

معدل التغير المطلوب:
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$$

بعد ساعتين من الحركة يكون:
$$x = 40 \times 2 = 80 \text{ km} \;, y = 45 \times 2 = 90 \text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:
$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = \frac{80 \times 40 + 90 \times 45}{\sqrt{6400 + 8100}}$$
$$= \frac{7250}{10\sqrt{145}} = \frac{725}{\sqrt{145}} \approx 60.21 \text{ km/h}$$

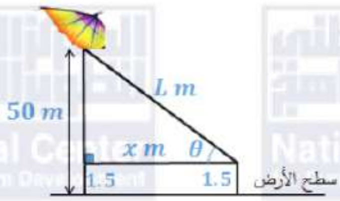
الحل بطريقة ثانية:

بعد t ساعة من الحركة يكون:
$$x = 40t \text{ km} \;, y = 45t \text{ km}$$

من نظرية فيثاغورس:
$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$z = \sqrt{(40t)^2 + (45t)^2} = \sqrt{3625}\, t$$
$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$
$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} \approx 60.21 \text{ km/h}$$

أتحقق من فهمي صفحة 141

ليكن طول الخيط L وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي θ ، و بعد الطائرة أفقيًا هو x .



المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}$

$$\tan\theta = \frac{50-1.5}{x} = \frac{48.5}{x}$$

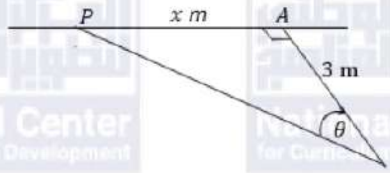
$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2} \times \frac{x^2}{L^2} = \frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100} = -\frac{48.5(2)}{(100)^2} \approx -0.0097 \text{ rad/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 143



لتكن الأبعاد والقياسات كما في الشكل أعلاه

المعطى:
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = -8\pi \text{ rad/min}$$

المطلوب:
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

نجد قيمة $\sec^2\theta$ عندما $x = 1$

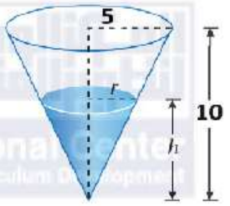
$$x = 3\tan\theta \Rightarrow 1 = 3\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = 3 \times \frac{10}{9} \times -8\pi = -\frac{80\pi}{3}$$

سرعة بقعة ضوء المصباح على الجدار هي $-\frac{80\pi}{3}$ m/min عندما تبعد $1\ m$ عن A ، أثناء حركتها مقتربة من النقطة A

أتحقق من فهمي صفحة 144



ليكن حجم الماء في الخزان V ونصف قطر قاعدته r وارتفاعه h

المعطى: $\frac{dV}{dt} = \pi \text{ m}^3/\text{min}$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}$

من التشابه: $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \rightarrow r = \frac{1}{2}h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{1}{16} \text{ m/min}$$

إذن، يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}$ m/min عندما يكون ارتفاعه 8 m

أتدرب وأحل المسائل صفحة 145	
1	ليكن طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه P وطول قطره R المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3\text{cm/s}, \quad \frac{dx}{dt} = 2\text{cm/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=20,y=50}$ $A = xy \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ $\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = 20(-3) + 50(2) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$

2	$P = 2x + 2y \quad \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$ $\Rightarrow \left.\frac{dP}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = 2(2) + 2(-3) = -2 \text{ cm/s}$
3	$R^2 = x^2 + y^2$ $2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ $\sqrt{(20)^2 + (50)^2}\ \left.\frac{dR}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = 20(2) + 50(-3)$ $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{x=20,y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}} \text{cm/s}$
4	في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر(لأن معدل تغير كل منهما سالب).
5	ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x المعطى: $\frac{dx}{dt} = 6 \text{ cm/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{t=4}$ بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب: $x = 10 + 6t$ ويكون حجمه: $V = x^3 = (10 + 6t)^3$ $\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2 \times 6$ $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{t=4} = 3(34)^2(6) = 20808 \text{ cm}^3/\text{s}$
6	لتكن مساحة سطح المكعب A بعد مرور t ثانية تصبح مساحة سطح المكعب: $A = 6x^2 = 6(10 + 6t)^2$ $\frac{dA}{dt} = 12(10 + 6t) \times 6$ $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{t=6} = 12(46)(6) = 3312 \text{ cm}^2/\text{s}$

7	ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h ، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m، ويكون حجمه: $$V = \pi r^2 h = \pi h$$ المعطى: $\frac{dV}{dt} = 500\text{L/min} = 0.5\ \text{m}^3/\text{min}$ المطلوب: $\frac{dh}{dt}$ العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع: $V = \pi h$ $$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$ $$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$ $$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \text{m/min}$$
8	$A = 2\pi r h = 2\pi h$ $$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$ $$= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\ \text{m}^2/\text{min}$$

9	ليكن حجم كومة الرمل V ، وارتفاعها h ، وطول نصف قطر قاعدتها r المعطى: $\frac{dV}{dt} = 10 \text{ m}^3/\text{min}$, $h = \frac{3}{8}(2r)$ المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4}$ $h = \frac{3}{8}(2r) \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}h$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$ $V = \frac{16}{27}\pi h^3$ $\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$ $10 = \frac{16}{9}\pi (4)^2 \frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{45}{128\pi} \text{ m/min}$ إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 مترًا لكل ثانية تقريبًا.
10	$r = \frac{4}{3}h$ $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$ $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{4}{3}\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{h=4} = \frac{4}{3} \times \frac{45}{128\pi} = \frac{15}{32\pi} \text{ m/min}$ إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 مترًا لكل ثانية تقريبًا.

11	لتكن A مساحة قاعدة الكومة، وطول نصف قطرها r المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{h=4}$ $A=\pi r^2$ $\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$ لكن $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{h=4}=\frac{15}{32\pi}$ من سؤال 10، لكن $h=\frac{3}{8}(2r)$ ، فعندما يكون الارتفاع 4 m يكون : $4=\frac{3}{8}(2r)\Rightarrow r=\frac{16}{3}$ $\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right\|_{h=4}=2\pi\times\frac{16}{3}\times\frac{15}{32\pi}=5\ \mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ إذن، تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ \mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ عندما يكون ارتفاعها 4 أمتار.
12	ليكن بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو x، وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو y، والبعد بين الطائرتين هو s. المعطى: $\frac{dy}{dt}=-600\ \mathrm{km/h}$ $\quad\frac{dx}{dt}=-450\ \mathrm{km/h}$ المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225,y=300}$ $s^2=x^2+y^2$ $2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$ $\frac{ds}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{s}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{x=225,y=450}=\frac{225(-450)+300(-600)}{\sqrt{(225)^2+(300)^2}}=-750\ \mathrm{km/h}$ إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 750 كيلومترًا في الساعة.

<table>
<tr><td>13</td><td>

نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

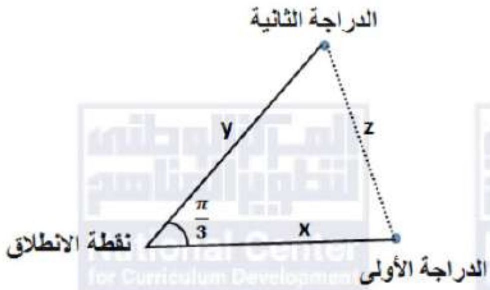
$$t_1 = \frac{x}{v_x} = \frac{225}{450} = 0.5\ h$$

$$t_2 = \frac{y}{v_y} = \frac{300}{600} = 0.5\ h$$

بما أن الطائرتين ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد نصف ساعة من لحظة رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما متوقع، ويجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار إحداهما أو في سرعتها على الأقل حتى لا تصلان إلى نقطة التقاء المسارين معًا في الوقت نفسه.

</td></tr>
<tr><td>14</td><td>

لتكن المسافات كما في الشكل أدناه:



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 20\text{ km/h}$ $\frac{dx}{dt} = 15\text{ km/h}$

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون: $x = 15t,\quad y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

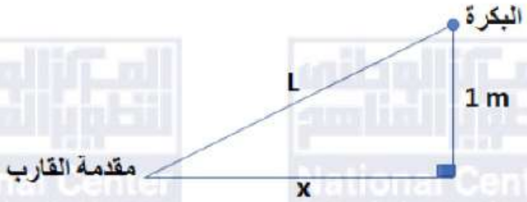
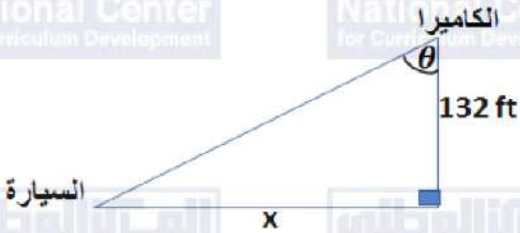
$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{13}t$$

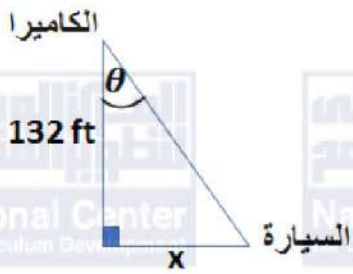
$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = 5\sqrt{13}\text{ km/h}$$

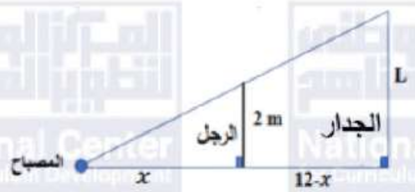
إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الاخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ كيلومتر كل ساعة

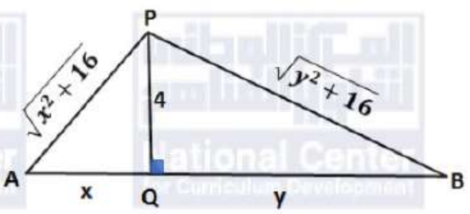
</td></tr>
</table>

15	لتكن الأبعاد كما في الشكل:  المعطى: $\frac{dL}{dt} = -1\ \mathrm{m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=8}$ $L^2 = x^2 + 1$ $2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ $\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x}\times\frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\times\frac{dL}{dt}$ $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8}\times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ \mathrm{m/s}$ إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}$ m/s
16	لتكن x كما في الشكل:  المعطى: $\frac{dx}{dt} = -264\ \mathrm{ft/s}$ المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{\theta=0}$ $\tan\theta = \frac{x}{132}$ $\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}\times\cos^2\theta$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2\ \mathrm{rad/s}$

17	لتكن x كما في الشكل:  بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح $\frac{dx}{dt} = 264 \text{ ft/s}$ المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{t=0.5 \text{ s}}$ بعد نصف ثانية: $x = 0.5 \times 264 = 132$ $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ $\tan\theta = \frac{x}{132}$ $\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$ $\left.\frac{d\theta}{dt}\right\|_{t=0.5 \text{ s}} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2(\frac{\pi}{4})$ $= 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \text{ rad/s}$ يزداد قياس الزاوية θ بسرعة 1 rad/s في تلك اللحظة.

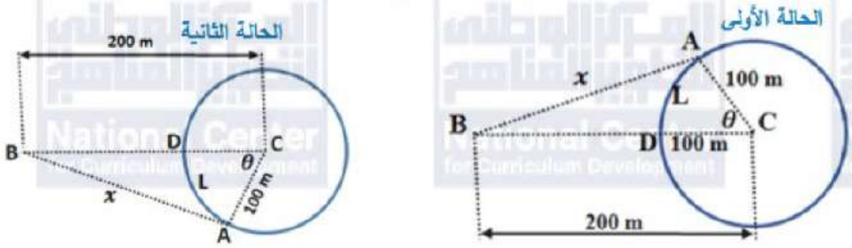
18	ليكن الجسيم عند النقطة $P\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ في أي لحظة، O نقطة الأصل، وليكن $PO = L$ المعطى: $\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10}$ units/s المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}}$ $L^2 = (x-0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right)^2$ $L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi x}{2}$ $2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}$ $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin \pi x\right)\frac{dx}{dt}$ عندما $x = \frac{1}{3}$ ، فإن: $L = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10}$ $= 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ إذن يزداد بعد الجسيم عن نقطة الأصل في تلك اللحظة بسرعة $\left(1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right)$ وحدة/ثانية
19	المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi$ rad/s المطلوب: $\frac{dx}{dt}$ $\cos\theta = \frac{x}{30} \quad \Rightarrow x = 30\cos\theta$ $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ $= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$
20	$\left.\frac{dx}{dt}\right\|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -600\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}$ cm/s

21	ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x ، وطول ظله على الجدار L  المعطى: $\frac{dx}{dt} = 1.6 \text{ m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8}$ من تشابه المثلثات: $\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \rightarrow L = \frac{24}{x}$ $\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$ $\left.\frac{dL}{dt}\right\|_{x=8} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6 \text{ m/s}$ إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية

22	لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:  المعطى: $\frac{dx}{dt} = 0.5 \text{ m/s}$ المطلوب: $\left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=3}$ طول الحبل: $AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$ عندما $x = 3$ فإن: $\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \Rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \Rightarrow y = \sqrt{33}$ $\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$ $\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$ $\left.\frac{dy}{dt}\right\|_{x=3} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m/s}$ إذن، تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}$ m/s

23

ليكن العداء عند A، وصديقه عند B، والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD.
توجد حالتان لموقع العداء كما في الرسمين الآتيين:



الحالة الأولى:

المعطى: (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7\text{ m/s}$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200\text{ m}}$

$$L = r\theta = 100\theta \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -0.07\text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

عندما $x = 200$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 = -\frac{7\sqrt{15}}{4}\text{ m/s}$$

الحالة الثانية:

عندئذ يتزايد طول القوس L، ويكون $\frac{dL}{dt} = 7\text{ m/s}$ ، ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07\text{ rad/s}$، وعليه فإن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 = \frac{7\sqrt{15}}{4}\text{ m/s}$$

إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

اختبار نهاية الوحدة صفحة 148	
1	C
2	B
3	D
4	D
5	C
6	A
7	d
8	d
9	$f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$ $f'(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$ $= e^x\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right)$
10	$f(x) = \frac{x}{\tan x}$ $f'(x) = \frac{(\tan x)(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$
11	$f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x\tan x$
12	$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{(\ln x)(e^x) - (e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$
13	$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$
14	$f(x) = 5^{2-x}$ $f'(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$

15	$f(x) = 10\sin 0.5x$ $f'(x) = 5\cos 0.5x$
16	$f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$ $= -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4}\right)$
17	$f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$ $f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2)+(\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$ $= -e^{-1.5x}(2x\sin x^2+1.5\cos x^2)$
18	$(fg)'(2) = f(2)g'(2)+g(2)f'(2)$ $= 3\times 2+1\times -4 = 2$
19	$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \frac{1\times -4-3\times 2}{(1)^2} = -10$
20	$(3f-4fg)'(2) = 3f'(2)-4(fg)'(2) = 3(-4)-4(2) = -20$
21	$f(x) = x^7\ln x$ $f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(7x^6) = x^6+7x^6\ln x$ $f''(x) = 6x^5+(7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(42x^5) = 13x^5+42x^5\ln x$

22	$f(x)=\frac{\cos x}{x}$ $f'(x)=\frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2}=\frac{-\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}$ $f''(x)=-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}$ $=\frac{-x^3\cos x+2x^2\sin x+2x\cos x}{x^4}$ $=\frac{-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x}{x^3}$
23	$f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ $f''(x)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}$ $=\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^3}$
24	$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ $f'(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-4)-(-4x)\left(2\times 2x(1+x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$ $=\frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$

25	$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2t}$$ ميل المماس: $$m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=4}=\frac{1}{8}$$ نقطة التماس: $$x=(4)^2=16\ ,\ \ y=4+2=6\ \ \Rightarrow\ (16,6)$$ معادلة المماس: $$y-6=\frac{1}{8}(x-16)\ \ \Rightarrow\ \ y=\frac{1}{8}x+4$$
26	$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos t}{-4\sin t}=-\frac{3}{4}\cot t$$ ميل المماس: $$m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}$$ نقطة التماس: $$x=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\ ,\ \ y=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \ \Rightarrow\ \left(2\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$ معادلة المماس: $$y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{4}\left(x-2\sqrt{2}\right)\ \ \Rightarrow\ \ y=-\frac{3}{4}x+3\sqrt{2}$$
27	$$y=x\ln x$$ ميل المماس: $$f'(x)=(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)=1+\ln x$$ $$f'(1)=1+\ln 1=1$$ معادلة المماس: $$y-0=1(x-1)\ \ \Rightarrow\ \ y=x-1$$
28	$$f'(x)=2\ \ \Rightarrow 1+\ln x=2$$ $$\Rightarrow\ \ln x=1$$ $$\Rightarrow x=e\ \ \Rightarrow y=e\ln e=e$$ النقطة المطلوبة هي (e,e)

29	$x(x+y)=2y^2 \;\Rightarrow\; x^2+xy=2y^2$ $\Rightarrow\; 2x+x\dfrac{dy}{dx}+y=4y\dfrac{dy}{dx}$ $\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y}{4y-x}$
30	$x=\dfrac{2y}{x^2-y}$ $1=\dfrac{2\dfrac{dy}{dx}(x^2-y)-2y(2x-\dfrac{dy}{dx})}{(x^2-y)^2}$ $(x^2-y)^2+4xy=2x^2\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^2-y)^2+4xy}{2x^2}$
31	$y\cos x=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; -y\sin x+\dfrac{dy}{dx}\cos x=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y\sin x}{-2y+\cos x}$
32	$2xe^y+ye^x=3 \;\Rightarrow\; 2xe^y\dfrac{dy}{dx}+2e^y+ye^x+e^x\dfrac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2e^y+ye^x}{2xe^y+e^x}$
33	$y^2=\dfrac{x^3}{2-x}$ $2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2-x)(3x^2)-(x^3)(-1)}{(2-x)^2}$ $2(-1)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2-1)(3)-(1)(-1)}{(2-1)^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=-2$ ميل المماس: $m=-2$ ميل العمودي على المماس: $m=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس : $y+1=\dfrac{1}{2}(x-1) \;\Rightarrow\; y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

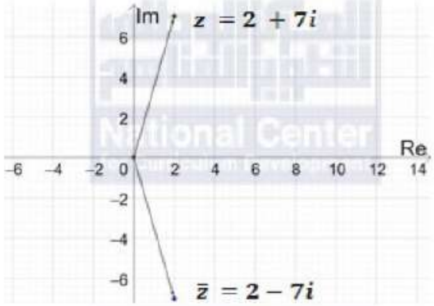
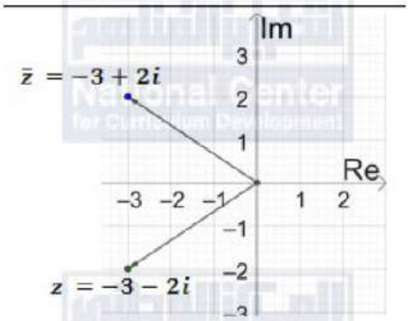
34	$x^2+3xy+y^2=x+3y$ $2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$ $4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(2,-1)}=0$ $y+1=0(x-2)\ \Rightarrow\ y=-1$	ميل المماس عند (2, -1): معادلة المماس:
35	$x^2e^y=1$ $x^2e^y\frac{dy}{dx}+2xe^y=0$ $\frac{dy}{dx}+2=0\ \Rightarrow\ \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)}=-2$ $y-0=-2(x-1)\ \Rightarrow\ y=-2x+2$	ميل المماس: معادلة المماس:
36	$p'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times1+3\times-2=-4$	
37	$p'(4)=f(4)g'(4)+g(4)f'(4)=1\times0+8\times0.5=4$	
38	$q'(7)=\frac{g(7)f'(7)-f(7)g'(7)}{\left(g(7)\right)^2}=\frac{4\times2-4\times-1}{(4)^2}=\frac{3}{4}$	
39	$R(t)=200(0.9)^t$ $\frac{dR}{dt}=200(0.9)^t\ln0.9$ $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{t=2}=200(0.9)^2\ln0.9\approx-17.1\text{ g/day}$	
40	$s(t)=10+\frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ $v(t)=\frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$ $a(t)=-25\pi^2\sin(10\pi t)$	

41	المعدلات المعطاة: سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1$ ft/s ، وسرعة الدراجة $\frac{dx}{dt} = 17$ ft/s المطلوب: $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{t=3}$ بعد t ثانية من مرور الدراجة يكون ارتفاع البالون فوق سطح الأرض هو: $y = 65 + t$ وتكون الدراجة قطعت مسافة أفقية هي: $x = 17t$ وتكون المسافة بين الدراجة والبالون هي s ومن نظرية فيثاغورس نجد أن: $s^2 = x^2 + y^2$ $s^2 = (17t)^2 + (65+t)^2$ $s = \sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65+t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}} = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}}$ $= \frac{290t + 65}{\sqrt{(17t)^2 + (65+t)^2}}$ $\left.\frac{ds}{dt}\right\|_{t=3} = \frac{290(3) + 65}{\sqrt{(17 \times 3)^2 + (65+3)^2}} = \frac{935}{85} = 11$ ft/s إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدمًا في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثوانٍ من لحظة مرور الدراجة تحت البالون.

الوحدة الرابعة: الأعداد المركبة

الدرس الأول: الأعداد المركبة

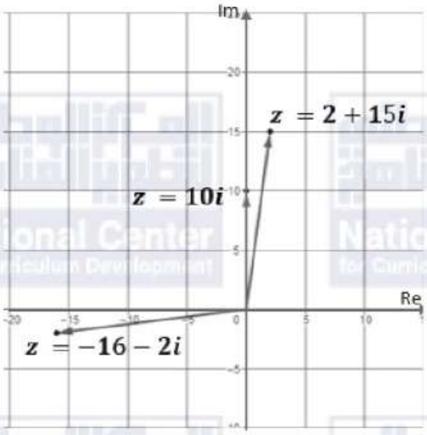
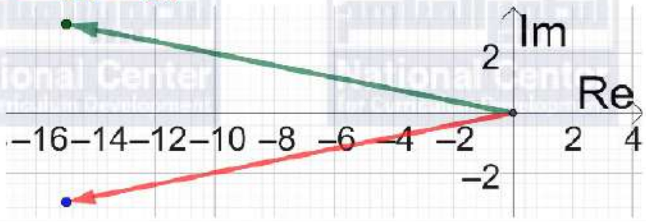
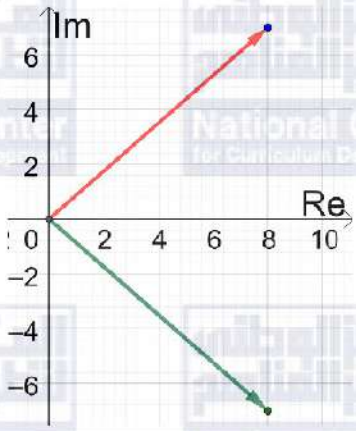
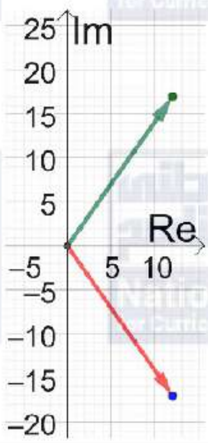
مسألة اليوم صفحة 152	
إذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة ما من مجموعات الأعداد، فإن: $\left(\sqrt{-1}\right)^2+1=-1+1=0$ وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلًّا للمعادلة $x^2+1=0$	
أتحقق من فهمي صفحة 153	
a	$\sqrt{-75}=\sqrt{-1\times 25\times 3}=\sqrt{-1}\times\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5i\sqrt{3}$
b	$\sqrt{-49}=\sqrt{-1\times 49}=\sqrt{-1}\times\sqrt{49}=7i$
أتحقق من فهمي صفحة 154	
a	$\sqrt{-27}\times\sqrt{-48}=\sqrt{-1\times 27}\times\sqrt{-1\times 48}$ $=i\sqrt{9\times 3}\times i\sqrt{16\times 3}$ $=i^2\sqrt{9\times 3\times 16\times 3}$ $=36i^2=-36$
b	$\sqrt{-50}\times -4i=\sqrt{-1\times 50}\times(-4i)$ $=5i\sqrt{2}\times(-4i)=-20\sqrt{2}i^2=20\sqrt{2}$
c	$i^{2021}=(i^2)^{1010}\times i=(-1)^{1010}\times i=i$
أتحقق من فهمي صفحة 156	
$x+5+(4y-9)i=12-5i \Rightarrow x+5=12$ و $4y-9=-5$ $\Rightarrow x=7\,,y=1$	

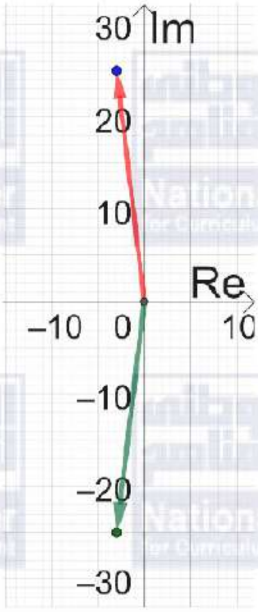
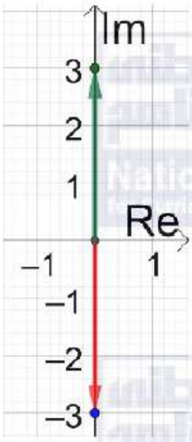
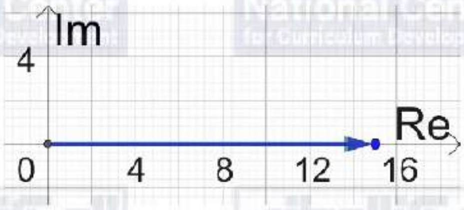
	أتحقق من فهمي صفحة 157
a	$z = 2 + 7i \ , \bar{z} = 2 - 7i$ 
b	$z = -3 - 2i \ , \bar{z} = -3 + 2i$ 
c	$z = -3i \ , \bar{z} = 3i$ 
	أتحقق من فهمي صفحة 158
a	$z = -3 - 6i\sqrt{2} \ \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(-3)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{81} = 9$
b	$z = -2i \ \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
c	$z = 4 + \sqrt{-20} = 4 + \sqrt{-1} \times \sqrt{20} = 4 + i\sqrt{20}$ $\Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$

أتحقق من فهمي صفحة 162	
a	$z = 8 + 2i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$
b	$z = -5 + 12i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$
c	$z = -2 - 3i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx -2.16$
d	$z = 8 - 8i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$

أتحقق من فهمي صفحة 164	
a	$\lvert z\rvert = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
b	$z = -4 - 4i$ $\Rightarrow r = \lvert z\rvert = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
c	$z = 2i$ $\Rightarrow r = \lvert z\rvert = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 164	
1	$\sqrt{-19} = \sqrt{-1 \times 19} = \sqrt{-1} \times \sqrt{19} = i\sqrt{19}$
2	$\sqrt{-\frac{12}{25}} = \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}i$
3	$\sqrt{-\frac{9}{32}} = \sqrt{-1 \times \frac{9}{32}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}i$
4	$\sqrt{-53} = \sqrt{-1 \times 53} = \sqrt{-1} \times \sqrt{53} = i\sqrt{53}$
5	$i^{26} = (i^2)^{13} = -1$
6	$i^{39} = (i^2)^{19} \times i = (-1)^{19} \times i = -i$
7	$(i)(2i)(-7i) = (2i^2)(-7i) = (-2)(-7i) = 14i$
8	$\sqrt{-6} \times \sqrt{-6} = \sqrt{-1 \times 6} \times \sqrt{-1 \times 6}$ $= i\sqrt{6} \times i\sqrt{6}$ $= 6i^2 = -6$
9	$\sqrt{-4} \times \sqrt{-8} = \sqrt{-1 \times 4} \times \sqrt{-1 \times 8}$ $= 2i \times 2\sqrt{2}i$ $= 4\sqrt{2}i^2 = -4\sqrt{2}$
10	$2i \times \sqrt{-9} = 2i \times \sqrt{-1 \times 9}$ $= 2i \times 3i$ $= 6i^2 = -6$
11	$\frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$
12	$\frac{8+\sqrt{-16}}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$
13	$\frac{10-\sqrt{-50}}{5} = \frac{10-5i\sqrt{2}}{5} = 2-i\sqrt{2}$

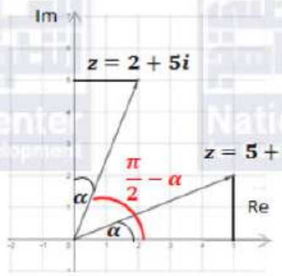
14	$z = 2 + 15i$ $\Rightarrow Re(z) = 2, Im(z) = 15$	
15	$z = 10i$ $\Rightarrow Re(z) = 0, Im(z) = 10$	
16	$z = -16 - 2i$ $\Rightarrow Re(z) = -16, Im(z) = -2$	
17	$z = -15 + 3i$, $\bar{z} = -15 - 3i$ 	
18	$z = 8 - 7i$, $\bar{z} = 8 + 7i$ 	
19	$z = 12 + 17i$, $\bar{z} = 12 - 17i$ 	

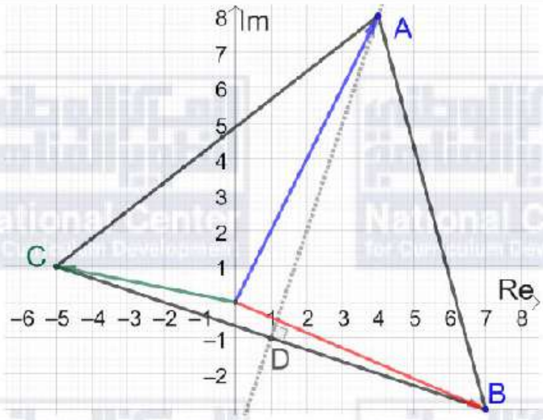
20	$z = -3 - 25i$, $\bar{z} = -3 + 25i$ 
21	$z = 3i$, $\bar{z} = -3i$ 
22	$z = 15$, $\bar{z} = 15$ 
23	$z = -5 + 5i$ $\bar{z} = -5 - 5i$ $\lvert z \rvert = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

24	$z = 3 + 3\sqrt{3}i$ $\bar{z} = 3 - 3\sqrt{3}i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = 6$
25	$z = 6 - 8i$ $\bar{z} = 6 + 8i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10$
26	$x^2 - 1 + i(2y-5) = 8 + 9i \quad \Rightarrow x^2 - 1 = 8$ و $2y - 5 = 9$ $\Rightarrow x = \pm 3$ و $y = 7$
27	$2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i \quad \Rightarrow 2x + 3y = 8$ و $x - 2y = -3$ $\Rightarrow x = 1$ و $y = 2$
28	$y - 3 + i(3x+2) = 9 + i\,(y-4) \quad \Rightarrow y - 3 = 9$ و $3x + 2 = y - 4$ $\Rightarrow y = 12$ و $x = 2$
29	$i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i \quad \Rightarrow 2x - 5y = 3$ و $3x + 5y = 7$ $\Rightarrow x = 2$ و $y = \frac{1}{5}$
30	$z = 1$ $Arg(z) = 0$
31	$z = 3i$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$
32	$z = -5 - 5i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4} \approx -2.36$
33	$z = 1 - i\sqrt{3}$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$

34	$z = 6\sqrt{3} + 6i$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$
35	$z = 3 - 4i$ $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.93$
36	$z = -12 + 5i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 2.75$
37	$z = -58 - 93i$ $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right) \approx -2.13$
38	$z = -4 + 2i$ $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) \approx 2.68$
39	$r = \lvert z \rvert = 2$ $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
40	$r = \lvert z \rvert = 3, \quad Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
41	$r = \lvert z \rvert = 7, Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
42	$r = \lvert z \rvert = 1, Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
43	$z = 6$ $\Rightarrow r = \lvert z \rvert = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6$ $Arg(z) = 0$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 6(\cos(0) + i\sin(0))$

44	$z = 1 + i$ $\Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
45	$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \quad \Rightarrow \bar{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$ $Arg(z_2) = Arg(\bar{z_1}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ $z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 40\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 20\sqrt{3} + 20i$ إذن، $z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$
46	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -10 + 10i$ إذن، $z = -10 + 10i$
47	بما أن z في الربع الثاني إذن $\bar{z}$ في الربع الثالث  فيكون قياس الزاوية الصغرى بينهما هو $\frac{\pi}{2}$
48	$z = -8 + 8i$ $\|z\| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = 8\sqrt{2}$
49	$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}$

50	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert = 8\sqrt{2}$
51	$\bar{z} = -8 - 8i \quad \rightarrow Arg(\bar{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$ أو نكتب مباشرة: $Arg(\bar{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$
52	$Arg(5+2i) = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ $Arg(-5-2i) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = -(\pi - \alpha) = -\pi + \alpha$
53	$Arg(5-2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\alpha$
54	$Arg(-5+2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \pi - \alpha$
55	 يوضح الرسم المجاور العلاقة بين سعة كل من العددين $z = 5 + 2i$ ، و $z = 2 + 5i$ $\mathrm{Arg}(2+5i) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$
56	$Arg(-2+5i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$
57	$z = 5 + im \quad , \quad \lvert z\rvert = 6 , \quad 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(5)^2 + (m)^2} = \sqrt{25 + m^2} = 6 \quad \rightarrow \; 25 + m^2 = 36 \quad \rightarrow m = \pm\sqrt{11}$ لكن $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول، ومنه $m = \sqrt{11}$
58	$z = 5 + 3ik \quad , \; \lvert z\rvert = 13$ $\lvert z\rvert = \sqrt{(5)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25 + 9k^2} = 13 \;\; \Rightarrow \; 25 + 9k^2 = 169 \quad \Rightarrow k = \pm 4$

59	$\lvert z_1 \rvert = r = 4\sqrt{5}, \quad Arg(z_1) = \tan^{-1}(2) = \theta$ (نستنتج هنا أن z_1 يقع في الربع الأول، ففي الأرباع الأخرى تكون السعة بإشارة سالبة أو تحتوي π) $\tan\theta = 2 \quad \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\ , \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{5}(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 4 + 8i$
60	$z_1 = 4 + 8i\ , z_2 = 7 - 3i\ , z_3 = -5 + i$  $AC = \sqrt{(4-(-5))^2 + (8-1)^2} = \sqrt{130}$ $AB = \sqrt{(4-7)^2 + (8-(-3))^2} = \sqrt{130}$ $BC = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-3-1)^2}$ $= \sqrt{160}$ ومنه فإن المثلث **ABC** متطابق الضلعين، نتّخذ **BC** قاعدةً له ونجد إحداثيي النقطة **D** نقطة منتصف القاعدة BC: $D\left(\frac{7-5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \rightarrow D(1,-1)$ ارتفاع هذا المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأس ومنتصف القاعدة وهو $\overline{AD}$ $AD = \sqrt{(4-1)^2 + (8--1)^2} = \sqrt{90}$ لتكن مساحة المثلث ABC **هي** A **فإن:** $A = \frac{1}{2} \times \sqrt{160} \times \sqrt{90} = 60$ إذن، مساحة المثلث **ABC** تساوي 60 وحدة مربعة.

الدرس الثاني: العمليات على الأعداد المركبة

مسألة اليوم صفحة 167
$A = -1 + 3i, \quad B = 3 + i$ $AB = (-1 + 3i)(3 + i)$ $\quad = -3 - i + 9i - 3 = -6 + 8i$ $\|AB\| = \sqrt{36 + 64} = 10$ $Arg(AB) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \approx 2.21$

أتحقق من فهمي صفحة 168	
a	$(7 + 8i) + (-9 + 14i) = -2 + 22i$
b	$(11 + 9i) - (4 - 6i) = 7 + 15i$

أتحقق من فهمي صفحة 169	
a	$-3i(4 - 5i) = -12i + 15i^2 = -15 - 12i$
b	$(5 + 4i)(7 - 4i) = 35 - 20i + 28i - 16i^2 = 35 + 8i + 16 = 51 + 8i$
c	$(3 + 6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27 + 36i$

أتحقق من فهمي صفحة 170	
a	$\frac{-4 + 3i}{1 + i} = \frac{-4 + 3i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$ $= \frac{-4 + 4i + 3i - 3i^2}{1 - i^2}$ $= \frac{-4 + 7i + 3}{1 + 1}$ $= \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$

b	$\frac{2-6i}{-3i}=\frac{2-6i}{-3i}\times\frac{i}{i}$ $=\frac{2i-6i^2}{-3i^2}$ $=\frac{2i+6}{3}=2+\frac{2}{3}i$
c	$\frac{7i}{4-4i}=\frac{7i}{4-4i}\times\frac{4+4i}{4+4i}$ $=\frac{28i+28i^2}{16-16i^2}$ $=\frac{28i-28}{16+16}$ $=\frac{28i-28}{32}=-\frac{7}{8}+\frac{7}{8}i$
	أتحقق من فهمي صفحة 172
a	$6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $=6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
b	$6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $=\frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)\right)$ $=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

<table>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 173</td></tr>
<tr><td>a</td><td>

$$\sqrt{-5-12i} = x + iy \;\Rightarrow\; -5-12i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$
$$\Rightarrow -5-12i = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$\Rightarrow -5 = x^2 - y^2 \;\text{ و }\; -12 = 2xy$$
$$y = -\frac{6}{x}$$
$$x^2 - y^2 = -5 \;\Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$$
$$\Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2+9)(x^2-4) = 0 \;\Rightarrow x = \pm 2$$

عندما $x = 2$ ، فإن $y = -3$، وعندما $x = -2$ ، فإن $y = 3$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $-2+3i$, $2-3i$

</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$$\sqrt{-9i} = x + iy \;\Rightarrow\; -9i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$
$$\Rightarrow -9i = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$\Rightarrow 0 = x^2 - y^2 \;\text{ و }\; -9 = 2xy$$
$$y = -\frac{9}{2x}$$
$$x^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$$
$$\Rightarrow 4x^4 - 81 = 0$$
$$\Rightarrow (2x^2+9)(2x^2-9) = 0 \;\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما: $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$, $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

</td></tr>
</table>

c	$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=x+iy \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}=x^2-y^2$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}=2xy$ $y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$ $x^2-y^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 16x^4+8x^2-3=0$ $\Rightarrow (4x^2-1)(4x^2+3)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$ عندما $x=\frac{1}{2}$ ، فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وعندما $x=-\frac{1}{2}$ ، فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$، إذن، الجذران التربيعيان للعدد المركب $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هما: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أتحقق من فهمي لمثال 6 صفحة 177

$$z^3-z^2-7z+15=0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1,\ \pm3, \pm5, \pm15$

بالتعويض، نجد أن العدد -3 يحقق المعادلة لأن: $(-3)^3-(-3)^2-7(-3)+15=0$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ:

$$z^3-z^2-7z+15=(z+3)(z^2-4z+5)=0$$

$$z=-3\ ,z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3, 2+i, 2-i$

أتحقق من فهمي لمثال 7 صفحة 177
$x = 2 \pm i$ $x - 2 = \pm i$ $(x-2)^2 = -1$ $x^2 - 4x + 4 = -1$ $x^2 - 4x + 5 = 0$ بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة $(x^2 + ax + b = 0)$ نجد أنّ: $a = -4, \quad b = 5$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 177	
1	$(7+2i)+(3-11i) = 10-9i$
2	$(5-9i)-(-4+7i) = 9-16i$
3	$(4-3i)(1+3i) = 4+12i-3i+9 = 13+9i$
4	$(4-6i)(1-2i)(2-3i) = (4-6i)(2-3i-4i-6)$ $= (4-6i)(-4-7i)$ $= -16-28i+24i-42$ $= -58-4i$
5	$(9-2i)^2 = 81-36i-4 = 77-36i$
6	$\frac{10}{3-i} = \frac{10}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$ $= \frac{30+10i}{9+1}$ $= \frac{30+10i}{10}$ $= 3+i$
7	$6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

8	$\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}\right)$ $=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$
9	$12\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $=\frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$
10	$11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)\right)$ $=22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
11	$(a+6i)+(7-bi)=-2+5i$ $a+7+(6-b)i=-2+5i \Rightarrow a+7=-2$ و $6-b=5$ $\Rightarrow a=-9\,,b=1$
12	$(11-ia)-(b-9i)=7-6i$ $11-b+(9-a)i=7-6i \Rightarrow 11-b=7$ و $9-a=-6$ $\Rightarrow b=4\,,a=15$

13	$(a+ib)(2-i)=5+5i$ $2a+b+(2b-a)i=5+5i \Rightarrow 2a+b=5$ و $2b-a=5$ $\Rightarrow b=3\,, a=1$ طريقة ثانية للحل: $a+ib=\dfrac{5+5i}{2-i}$ $=\dfrac{5+5i}{2-i}\times\dfrac{2+i}{2+i}$ $=\dfrac{10+5i+10i-5}{4+1}$ $=\dfrac{5+15i}{5}$ $=1+3i$ $\Rightarrow a=1\,, b=3$
14	$\dfrac{a-6i}{1-2i}=b+4i \Rightarrow \dfrac{a-6i}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+12}{5}+\dfrac{2a-6}{5}i=b+4i$ $\Rightarrow \dfrac{a+12}{5}=b\ ,\quad \dfrac{2a-6}{5}=4 \Rightarrow a=13$ بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أنّ: $b=5$ طريقة ثانية للحل: $a-6i=(b+4i)(1-2i) \Rightarrow a-6i=b+8+(-2b+4)i$ $\Rightarrow a=b+8\,,\quad -6=-2b+4$ $\Rightarrow b=5\,, a=13$

<table>
<tr>
<td>15</td>
<td>

$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$

الحل الثاني: نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية أولًا ثم نطبق القاعدة:

$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$

الحل الثالث: كتابة العددين بالصورة القياسية أولًا ثم إجراء عملية الضرب:

$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

$\Rightarrow \bar{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$\Rightarrow z\bar{z} = (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i) = 32 + 32 = 64$

الحل الرابع: نعلم أن حاصل ضرب أي عدد مركب بمرافقه يساوي مربع مقياسه،

وبما أن $|z| = 8$ ، فيكون: $z\bar{z} = 64$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>16</td>
<td>

$\sqrt{3 - 4i} = x + iy \quad \Rightarrow \; 3 - 4i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$

$\Rightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\Rightarrow 3 = x^2 - y^2$ و $-4 = 2xy$

$y = -\frac{2}{x}$

$x^2 - y^2 = 3 \quad \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0 \;\Rightarrow x = \pm 2$

عندما $x = 2$ ، فإن $y = -1$، وعندما $x = -2$ ، فإن $y = 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 - 4i$ هما: $-2 + i \;, \; 2 - i$

</td>
</tr>
</table>

17	$\sqrt{-15+8i} = x+iy \Rightarrow -15+8i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow -15+8i = x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow -15 = x^2-y^2$ و $8 = 2xy$ $y = \frac{4}{x}$ $x^2-y^2 = -15 \Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$ $\Rightarrow x^4+15x^2-16 = 0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ عندما $x = 1$ ، فإن $y = 4$، وعندما $x = -1$ ، فإن $y = -4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15+8i$ هما: $1+4i \quad , -1-4i$
18	$\sqrt{5-12i} = x+iy \Rightarrow 5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow 5-12i = x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow 5 = x^2-y^2$ و $-12 = 2xy$ $y = -\frac{6}{x}$ $x^2-y^2 = 5 \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$ $\Rightarrow x^4-5x^2-36 = 0$ $\Rightarrow (x^2+4)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ عندما $x = 3$ ، فإن $y = -2$، وعندما $x = -3$ ، فإن $y = 2$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5-12i$ هما: $3-2i \quad , -3+2i$

19	$\sqrt{-7-24i}=x+iy \Rightarrow -7-24i=x^2+2ixy+i^2y^2$ $\Rightarrow -7-24i=x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow -7=x^2-y^2$ و $-24=2xy$ $y=-\frac{12}{x}$ $x^2-y^2=-7 \Rightarrow x^2-\frac{144}{x^2}=-7$ $\Rightarrow x^4+7x^2-144=0$ $\Rightarrow (x^2+16)(x^2-9)=0 \Rightarrow x=\pm 3$ عندما $x=3$ ، فإن $y=-4$، وعندما $x=-3$ ، فإن $y=4$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$ هما: $-3+4i$, $3-4i$
20	$z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right), w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $zw=4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
21	$\frac{z}{w}=1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos(\frac{-7\pi}{12})+i\sin(\frac{-7\pi}{12})$
22	$\frac{w}{z}=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$
23	$1=1(\cos 0+i\sin 0)$ $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
24	$w^2=ww=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

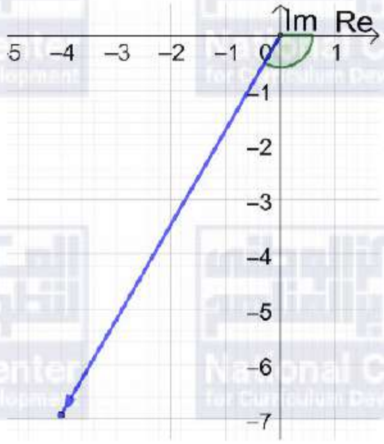
25	$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right)$ $= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
26	$z^2 + 104 = 20z \;\Rightarrow z^2 - 20z + 104 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$ $z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $10 + 2i$، و $10 - 2i$
27	$z^2 + 18z + 202 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2}$ $= \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$ $= \frac{-18 \pm 22i}{2} = -9 \pm 11i$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-9 + 11i$، و $-9 - 11i$
28	$9z^2 + 68 = 0 \;\Rightarrow z^2 = -\frac{68}{9} \;\Rightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{68}{9}} = \pm i\frac{\sqrt{68}}{3}$ إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $i\frac{\sqrt{68}}{3}$، و $-i\frac{\sqrt{68}}{3}$

29	$3z^3-2z^2+2z+1=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm\frac{1}{3}$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة لأن: $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0$ $z=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3z=-1\Rightarrow 3z+1=0$ إذن $(3z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $3z^3-2z^2+2z+1=(3z+1)(z^2-z+1)=0$ $\Rightarrow z=-\frac{1}{3}\ ,z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
30	$z^3+4z+10=5z^2\ \Rightarrow\ z^3-5z^2+4z+10=0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ بالتعويض، نجد أن العدد $z=-1$ يحقق المعادلة لأن: $(-1)^3-5(-1)^2+4(-1)+10=0$ إذن $(z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $z^3-5z^2+4z+10=(z+1)(z^2-6z+10)=0$ $\Rightarrow z=-1\ \ ,z=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm2i}{2}=3\pm i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-1,\ 3+i,\ 3-i$

31	$2z^3 = 8z^2 + 13z - 87 \Rightarrow 2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$ الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, \pm 29, \pm\frac{29}{2}, \frac{87}{2}, \pm 87$ بالتعويض، نجد أن العدد $z = -3$ يحقق المعادلة لأن: $2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$ إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أنّ: $2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z+3)(2z^2 - 14z + 29) = 0$ $\Rightarrow z = -3 \ \ , z = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4}$ $\Rightarrow z = -3 \ \ , z = \frac{14 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{14 \pm 6i}{4} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}i$ إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-3, \ \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i, \ \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$
32	$x = 2 \pm 5i$ $x - 2 = \pm 5i$ $(x-2)^2 = -25$ $x^2 - 4x + 4 = -25$ $x^2 - 4x + 29 = 0$ طريقة أخرى للحل: نعلم أنه إذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية $x^2 - bx + c = 0$، فإن: $b = h + k$، و $c = hk$ مجموع الجذرين يساوي: 4، وناتج ضربهما يساوي: $4 + 25 = 29$ إذن، المعادلة هي: $x^2 - 4x + 29 = 0$

33	$x = 7 \pm 4i$ $x - 7 = \pm 4i$ $(x-7)^2 = -16$ $x^2 - 14x + 49 = -16$ $x^2 - 14x + 65 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: 14، وناتج ضربهما يساوي: $49 + 16 = 65$ إذن، المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$
34	$x = -8 \pm 20i$ $x + 8 = \pm 20i$ $(x+8)^2 = -400$ $x^2 + 16x + 64 = -400$ $x^2 + 16x + 464 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: -16، وناتج ضربهما يساوي: $64 + 400 = 464$ إذن، المعادلة هي: $x^2 + 16x + 464 = 0$
35	$x = -3 \pm 2i$ $x + 3 = \pm 2i$ $(x+3)^2 = -4$ $x^2 + 6x + 9 = -4$ $x^2 + 6x + 13 = 0$ طريقة أخرى للحل: مجموع الجذرين يساوي: -6، وناتج ضربهما يساوي: $9 + 4 = 13$ إذن، المعادلة هي: $x^2 + 6x + 13 = 0$

36	$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \quad , \qquad z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15} \quad , \qquad z_3 = 2 - 2i$ $\lvert z_1 \rvert = \sqrt{12+4} = 4$ $\lvert z_2 \rvert = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$ $\lvert z_3 \rvert = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ $Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ $\left\lvert \frac{z_2}{z_1} \right\rvert = \frac{\lvert z_2 \rvert}{\lvert z_1 \rvert} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$
37	$\left\lvert \frac{1}{z_3} \right\rvert = \frac{\lvert 1 \rvert}{\lvert z_3 \rvert} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) = 0 - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$
38	$\bar{z}_2 = \sqrt{5} + i\sqrt{15} \ \rightarrow \lvert \bar{z}_2 \rvert = \lvert z_2 \rvert = 2\sqrt{5} \ , Arg(\bar{z}_2) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$ $\left\lvert \frac{z_3}{\bar{z}_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_3 \rvert}{\lvert \bar{z}_2 \rvert} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $Arg\left(\frac{z_3}{\bar{z}_2}\right) = Arg(z_3) - Arg(\bar{z}_2) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$

39	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$ إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$ 
40	$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$ $\sqrt{-4 - 4\sqrt{3}i} = x + iy \quad \Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2 y^2$ $\Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\Rightarrow -4 = x^2 - y^2$ و $-4\sqrt{3} = 2xy$ $y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}$ $x^2 - y^2 = -4 \quad \Rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$ $\Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow (x^2+6)(x^2-2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ عندما $x = \sqrt{2}$ ، فإن $y = -\sqrt{6}$، وعندما $x = -\sqrt{2}$ ، فإن $y = \sqrt{6}$، إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $\sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad , -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

41	بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن: $(a-3i)^2 = 55-48i \Rightarrow a^2-6ia-9 = 55-48i$ $\Rightarrow a^2-9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8$ و بما أن $b+ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن: $(b+ic)^2 = 55-48i \Rightarrow b^2+2ibc-c^2 = 55-48i$ $\Rightarrow b^2-c^2 = 55, 2bc = -48$ $\Rightarrow c = -\frac{24}{b} \Rightarrow b^2-\frac{576}{b^2} = 55$ $\Rightarrow b^4-55b^2-576 = 0$ $\Rightarrow (b^2-64)(b^2+9) = 0 \Rightarrow b = \pm 8$ عندما $b=8$ ، فإن $c=-3$، وعندما $b=-8$ ، فإن $c=3$ جذرا هذا العدد المركب هما $-8+3i$ و $8-3i$ وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i, b+ic)$ نلاحظ أنّ: $a=8, b=-8, c=3$ الحل الأسهل هو: بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو أيضًا جذر له، ومنه: بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن: $b=-a$ و $c=3$ ومنه: $(a-3i)^2 = 55-48i \Rightarrow a^2-6ia-9 = 55-48i$ $\Rightarrow a^2-9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = -8$
42	$x^3+x^2+15x = 225 \Rightarrow x^3+x^2+15x-225 = 0$ بما أن 5 جذر لهذه المعادلة، إذن $(x-5)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على: $x^3+x^2+15x-225 = (x-5)(x^2+6x+45) = 0$ $x = 5, x = \frac{-6\pm\sqrt{36-180}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{-144}}{2} = \frac{-6\pm 12i}{2} = -3\pm 6i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=5, x=-3+6i, x=-3-6i$
43	$x^3+7x^2-13x+45 = 0$ بما أن 9- جذر لهذه المعادلة، إذن $(x+9)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على: $x^3+7x^2-13x+45 = (x+9)(x^2-2x+5) = 0$ $x = -9, x = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{2\pm 4i}{2} = 1\pm 2i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=-9, x=1+2i, x=1-2i$

44	$3x(x^2+45)=2(19x^2+37) \Rightarrow 3x^3-38x^2-135x-74=0$ بما أن $(6-i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(6+i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(6-i)$، $(6+i)$: $x=6\pm i$ $x-6=\pm i$ $(x-6)^2=-1$ $x^2-12x+36=-1$ $x^2-12x+37=0$ ثم نقسم كثير الحدود $3x^3-38x^2-135x-74$ على $x^2-12x+37$ فنجد أنّ: $3x^3-38x^2-135x-74=(x^2-12x+37)(3x-2)=0$ $\Rightarrow x=\frac{2}{3}, x=6\pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=\frac{2}{3}, x=6+i\ , x=6-i$
45	$x^3+10x^2+29x+30=0$ بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(-2-i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2+i)$، $(-2-i)$: $x=-2\pm i$ $x+2=\pm i$ $(x+2)^2=-1$ $x^2+4x+4=-1$ $x^2+4x+5=0$ ثم نقسم كثير الحدود $x^3+10x^2+29x+30$ على x^2+4x+5 فنجد أنّ: $x^3+10x^2+29x+30=(x^2+4x+5)(x+6)=0$ $\Rightarrow x=-6, x=-2\pm i$ حلول هذه المعادلة هي: $x=-6, x=-2+i\ , x=-2-i$
46	الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4-11i$

47	$k = (4 - 11i)(4 + 11i) = 16 - 121i^2 = 16 + 121 = 137$
48	$(p + iq)^2 = p^2 + 2ipq + i^2q^2 = p^2 + 2ipq - q^2$
49	$(p + iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$ $\Rightarrow p^2 - q^2 = 45 \;,\; m = 2pq$ $\Rightarrow p^2 - q^2 = 45 \quad \Rightarrow (p + q)(p - q) = 45$ بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p + q)$ و $(p - q)$ عددان صحيحان موجبان أيضًا و $(p + q) > (p - q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين أحدهما أكبر من الآخر، لدينا ثلاث حالات لتحليل 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي: الحالة الأولى: $45 = 45 \times 1$ فإن: $p + q = 45$ و $p - q = 1$ ومنه: $p = 23$ و $q = 22$ أي أنّ: $m = 2pq = 1012$ الحالة الثانية: $45 = 15 \times 3$ فإن: $p + q = 15$ و $p - q = 3$ ومنه: $p = 9$ و $q = 6$ أي أنّ: $m = 2pq = 108$ الحالة الثالثة: $45 = 9 \times 5$ فإنّ: $p + q = 9$ و $p - q = 5$ ومنه: $p = 7$ و $q = 2$ أي أنّ: $m = 2pq = 28$ قيم m المطلوبة هي: $28, 108, 1012$
50	بما أن $(9 + 6i)^2 = 45 + 108i$، فإن: $(9 - 6i)^2 = 45 - 108i$ ومنه فإن جذري العدد المركب $(9 - 6i)^2 = 45 - 108i$ هما: $9 - 6i \;, -9 + 6i$
51	ليكن $z = x + iy$ ، إذن: $\bar{z} = x - iy$ $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \|z\|^2$

52	$\lvert z\rvert = 5\sqrt{5}$, $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ ليكن $z = x + iy$ بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول، ويكون $x = 2y$ $\Rightarrow z = 2y + iy$ $\lvert z\rvert = 5\sqrt{5}$ $(2y)^2 + y^2 = 125 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5, x = 10$ إذن، $z = 10 + 5i$ $\frac{z}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$ $p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9+16} = \frac{50-25i}{25} = 2 - i$ إذن، $p = 2, q = -1$ ويكون: $p + q = 1$

	$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$ بما أن $(8+6i)$ جذر لهذه المعادلة، فإن مرافقه $(8-6i)$ هو أيضًا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(8+6i)$، $(8-6i)$: $(8+6i)+(8-6i)=16$ $(8+6i)\times(8-6i)=64+36=100$ $\Rightarrow z^2-16z+100=0$ ثم نقسم كثير الحدود $z^3-20z^2+164z-400$ على $z^2-16z+100$ فنجد أنّ: $z^3-20z^2+164z-400=(z^2-16z+100)(z-4)=0$ $\Rightarrow z=4, z=8\pm 6i$ حلول هذه المعادلة هي: $z=4, z=8+6i, z=8-6i$ المعادلة الجديدة هي: $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ إذا عوضنا $z=x^2$ ، تتحول هذه المعادلة إلى $z^3-20z^2+164z-400=0$ إذن، حلول المعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة $z^3-20z^2+164z-400=0$ إذن، حلول هذه المعادلة هي: $x=\pm 2$ ، $x=\pm\sqrt{8+6i}$ ، $x=\pm\sqrt{8-6i}$
53	نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8+6i$ $\sqrt{8+6i}=h+ik \Rightarrow 8+6i=h^2-k^2+2ihk$ $\Rightarrow 8=h^2-k^2$ و $6=2hk$ $h=\frac{3}{k}$ $h^2-k^2=8 \Rightarrow h^2-\frac{9}{k^2}=8$ $\Rightarrow h^4-8h^2-9=0$ $\Rightarrow (h^2+1)(h^2-9)=0 \Rightarrow h=\pm 3 \Rightarrow k=\pm 1$ إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8+6i$ هما: $3+i$, $-3-i$ بالمثل نجد أنّ الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما: $3-i$, $-3+i$ ويكون للمعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ ستة حلول هي: $x=2, x=-2, x=3+i, x=3-i, x=-3+i, x=-3-i$

الدرس الثالث: المحل الهندسي في المستوى المركب

مسألة اليوم صفحة 180

المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $(-2+3i)$ مسافة تقل عن 4 وحدات، فتكون المتباينة المطلوبة هي:

$$|z-(-2+3i)|<4 \Rightarrow |z+2-3i|<4$$

أتحقق من فهمي صفحة 181

$$|z+5-4i|=7 \ \Rightarrow |z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات.

$$|z+5-4i|=7 \ \Rightarrow |x+iy+5-4i|=7$$
$$\Rightarrow |(x+5)+(y-4)i|=7$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7$$
$$\Rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات.

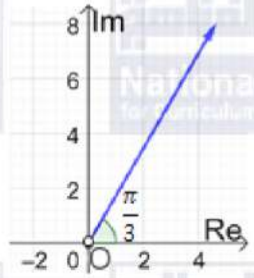
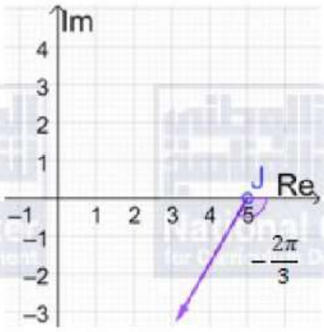
أتحقق من فهمي صفحة 183

$$|z+1|=|z-5i| \ \Rightarrow |z-(-1)|=|z-(5i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0),\ (0,5)$

$$|z+1|=|z-5i| \ \Rightarrow |x+iy+1|=|x+iy-5i|$$
$$\Rightarrow |(x+1)+iy|=|x+i(y-5)|$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-10y+25$$
$$\Rightarrow 2x+10y-24=0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

أتحقق من فهمي صفحة 185	
a	$Arg(z) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Arg\big(z-(0)\big) = \frac{\pi}{3}$ هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي 
b	$Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow Arg\big(z-(5)\big) = -\frac{2\pi}{3}$ هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي 

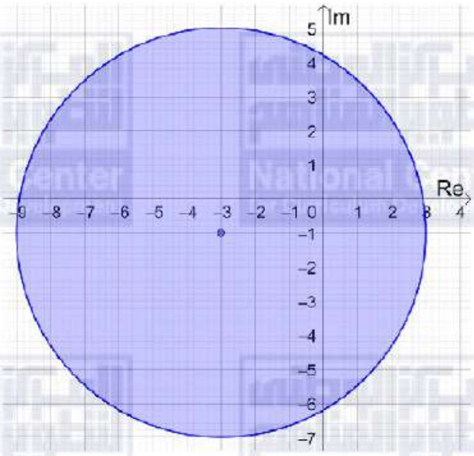
<table>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 188</th></tr>
<tr><td>a</td><td>

$|z+3+i| \leq 6$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| = 6$ وهو دائرة مركزها $(-3,-1)$، وطول نصف قطرها 6 وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها.



</td></tr>
<tr><td>b</td><td>

$|z+3+i| < |z-4|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| = |z-4|$

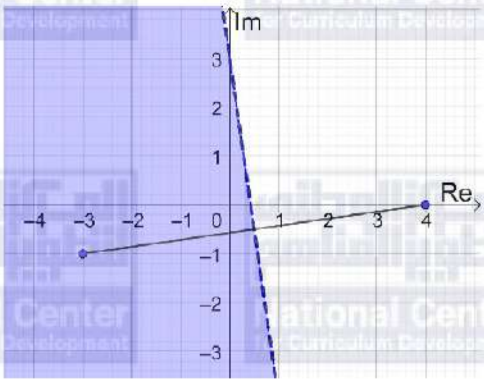
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3,-1)$و $(4,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

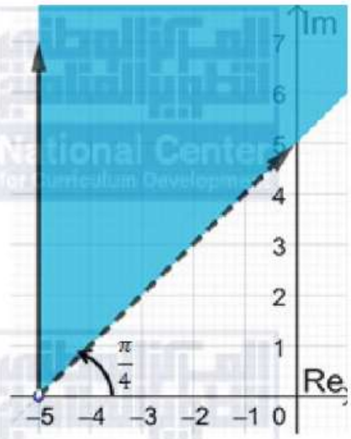
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الأصل مثلاً وتعويضها في المتباينة،

$|0+3+i| < |0-4| \Rightarrow \sqrt{10} < 4$ ✓

بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.



</td></tr>
</table>

c	$\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي. و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي: 

أتحقق من فهمي صفحة 189

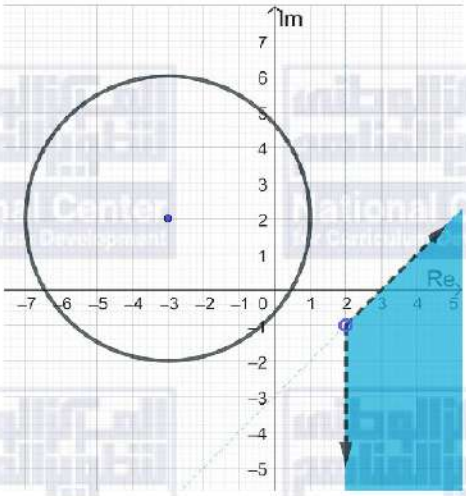
$|z+3-2i| \geq 4$, $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

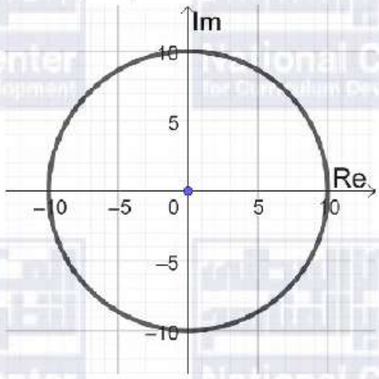
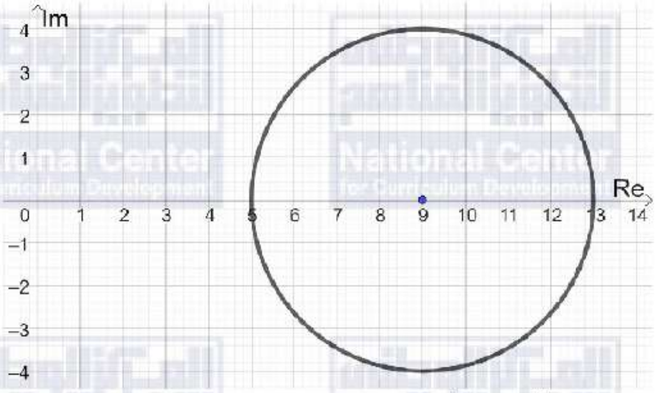
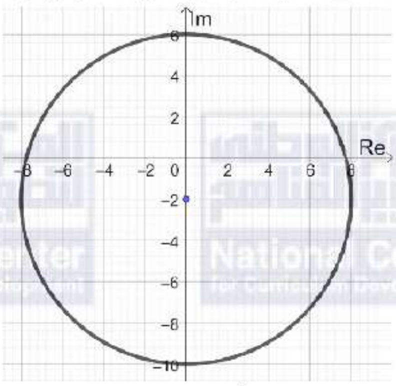
تمثّل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3,2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

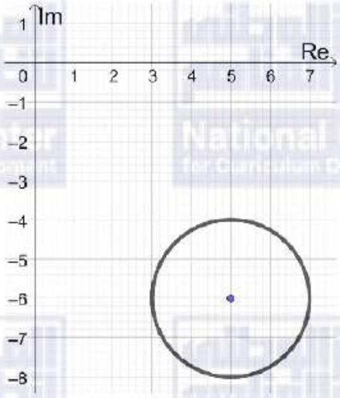
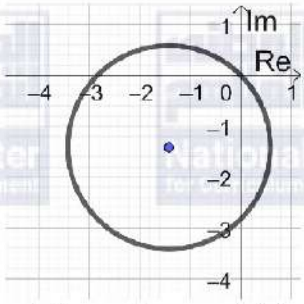
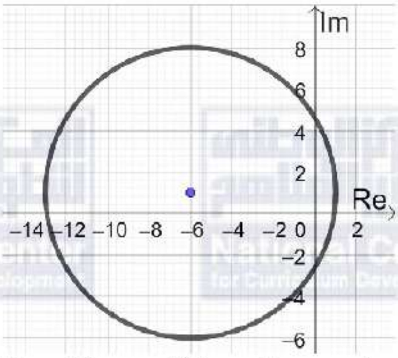
تمثّل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

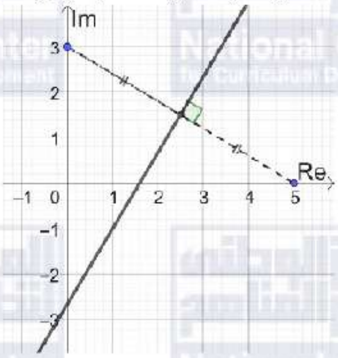
تمثّل المعادلة $\text{Arg}(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعًا.

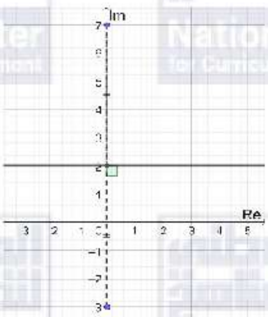
تمثّل المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها، وتمثّل المتباينة $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين. المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.



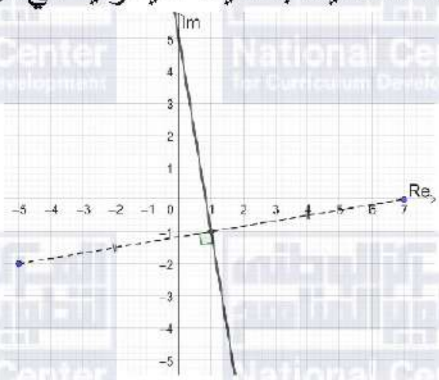
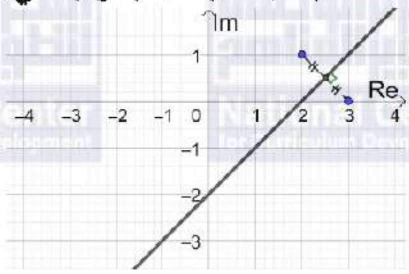
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 189
1	$\|z\| = 10 \Rightarrow \|z-(0+0i)\| = 10$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (0,0) وطول نصف قطرها 10 وحدات  $\|z\| = 10 \Rightarrow \|x+iy\| = 10 \Rightarrow x^2+y^2 = 100$
2	$\|z-9\| = 4 \Rightarrow \|z-(9+0i)\| = 4$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (9,0) وطول نصف قطرها 4 وحدات  $\|z-9\| = 4 \Rightarrow \|(x-9)+iy\| = 4 \Rightarrow (x-9)^2+y^2 = 16$
3	$\|z+2i\| = 8 \Rightarrow \|z-(0+2i)\| = 8$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات  $\|z+2i\| = 8 \Rightarrow \|x+i(y+2)\| = 8 \Rightarrow x^2+(y+2)^2 = 64$

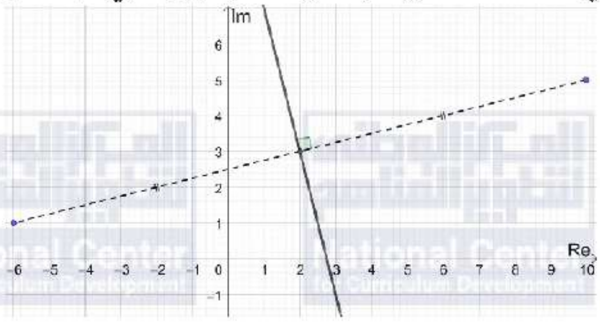
4	$\lvert z-5+6i\rvert=2 \quad \Rightarrow \lvert z-(5-6i)\rvert=2$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها وحدتان  $\lvert z-5+6i\rvert=2 \quad \Rightarrow \lvert (x-5)+i(y+6)\rvert=2 \quad \Rightarrow (x-5)^2+(y+6)^2=4$
5	$\lvert z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\rvert=2 \quad \Rightarrow \lvert z-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\rvert=2$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها وحدتان  $\lvert z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\rvert=2 \quad \Rightarrow \lvert (x+\sqrt{2})+i(y+\sqrt{2})\rvert=2$ $\Rightarrow (x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$
6	$\lvert z+6-i\rvert=7 \quad \Rightarrow \lvert z-(-6+i)\rvert=7$ المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات  $\lvert z+6-i\rvert=7 \quad \Rightarrow \lvert (x+6)+i(y-1)\rvert=7 \quad \Rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=49$

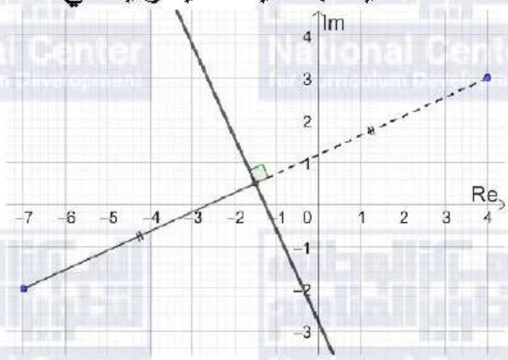
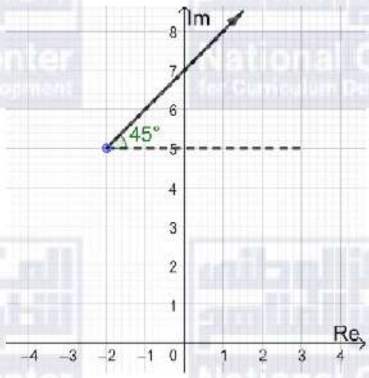
<table>
<tr>
<td>7</td>
<td>
$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |z-(5)| = |z-(3i)|$
هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5,0), (0,3)$
$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |(x-5)+iy| = |x+i(y-3)|$
$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
$\Rightarrow (x-5)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2$
$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2 = x^2+y^2-6y+9$
$\Rightarrow 10x-6y-16=0$
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$


</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>
$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |z-(-3i)| = |z-(7i)|$
هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3), (0,7)$
$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |x+i(y+3)| = |x+i(y-7)|$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$
$\Rightarrow x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$
$\Rightarrow x^2+y^2+6y+9$
$= x^2+y^2-14y+49$
$\Rightarrow 20y-40=0$
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:
$y=2$


</td>
</tr>
</table>

9	$\lvert z+5+2i\rvert = \lvert z-7\rvert \Rightarrow \lvert z-(-5-2i)\rvert = \lvert z-(7)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,0)$, $(-5,-2)$ $\lvert z+5+2i\rvert = \lvert z-7\rvert \Rightarrow \lvert (x+5)+i(y+2)\rvert = \lvert (x-7)+iy\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$ $\Rightarrow (x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$ $\Rightarrow x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$ $\Rightarrow 24x+4y-20=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$ 
10	$\lvert z-3\rvert = \lvert z-2-i\rvert \Rightarrow \lvert z-(3)\rvert = \lvert z-(2+i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,1)$, $(3,0)$ $\lvert z-3\rvert = \lvert z-2-i\rvert \Rightarrow \lvert (x-3)+iy\rvert = \lvert (x-2)+i(y-1)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$ $\Rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$ $\Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$ $\Rightarrow 2x-2y-4=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$ 

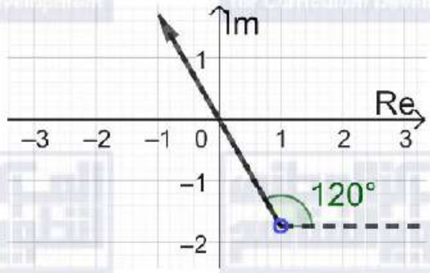
11	$\frac{\lvert z+6-i\rvert}{\lvert z-10-5i\rvert}=1 \quad \Rightarrow \lvert z+6-i\rvert=\lvert z-10-5i\rvert$ $\Rightarrow \lvert z-(-6+i)\rvert=\lvert z-(10+5i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,1),(10,5)$ $\lvert z+6-i\rvert=\lvert z-10-5i\rvert \Rightarrow \lvert(x+6)-i(y-1)\rvert=\lvert(x-10)+i(y-5)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$ $\Rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=(x-10)^2+(y-5)^2$ $\Rightarrow x^2+12x+36+y^2-2y+1=x^2-20x+100+y^2-10y+25$ $\Rightarrow 32x+8y-88=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $4x+y-11=0$ 

12	$\lvert z+7+2i\rvert = \lvert z-4-3i\rvert \;\Rightarrow \lvert z-(-7-2i)\rvert = \lvert z-(4+3i)\rvert$ هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-7,-2), (4,3)$ $\lvert z+7+2i\rvert = \lvert z-4-3i\rvert \;\Rightarrow \lvert (x+7)+i(y+2)\rvert = \lvert (x-4)+i(y-3)\rvert$ $\Rightarrow \sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$ $\Rightarrow (x+7)^2+(y+2)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2$ $\Rightarrow x^2+14x+49+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2-6y+9$ $\Rightarrow 22x+10y+28=0$ إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $11x+5y+14=0$ 
13	$\mathrm{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow \mathrm{Arg}(z-(-2+5i)) = \frac{\pi}{4}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. 

<table>
<tr><td>14</td><td>

$$\text{Arg}(z-1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3} \quad \rightarrow \text{Arg}\left(z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$$

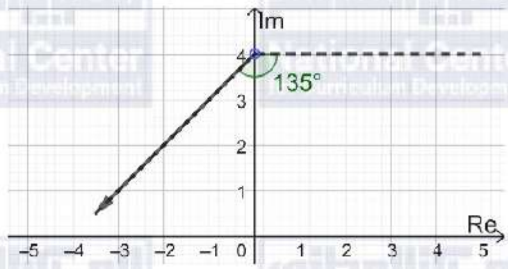
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



</td></tr>
<tr><td>15</td><td>

$$\text{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \text{Arg}\left(z-(4i)\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>16</td><td>

$|z-2| < |z+2|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2| = |z+2|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2,0)$ و $(2,0)$.

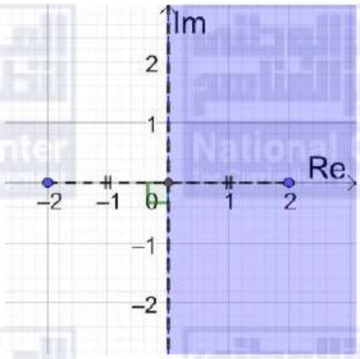
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 1+i$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|1+i-2| < |1+i+2| \Rightarrow |-1+i| < |3+i| \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{10}$ ✓

بما أن $z = 1+i$ حقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 1+i$

(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$)



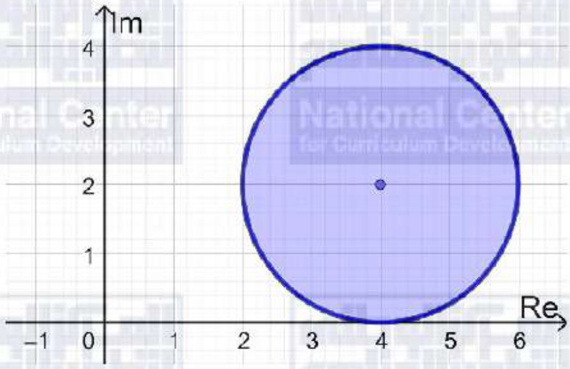
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>

$|z-4-2i| \leq 2 \Rightarrow |z-(4+2i)| \leq 2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4-2i| = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>18</td><td>

$|z-4| > |z-6|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4| = |z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$ و $(4,0)$.

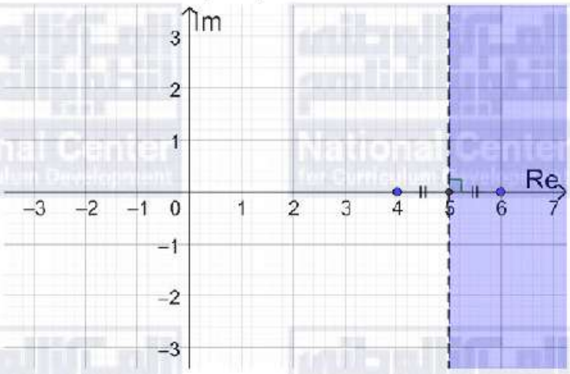
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-4| > |0-6| \rightarrow 2 > \sqrt{6}$ ✗

بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$.

(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$)

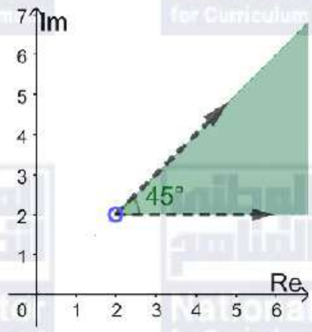


</td></tr>
<tr><td>19</td><td>

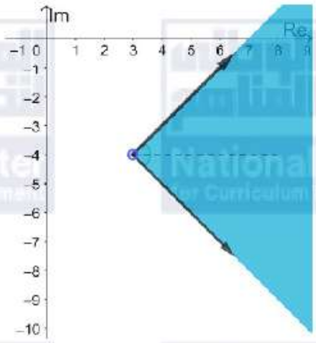
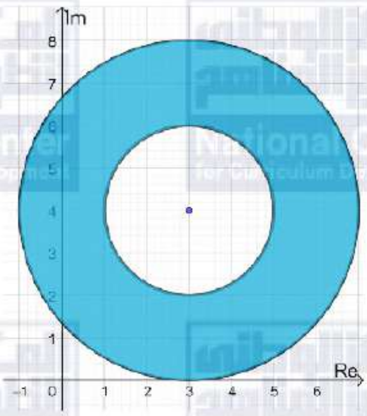
$0 < \text{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

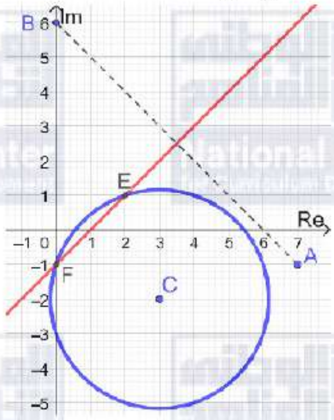
يمثّل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2-2i) = 0$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي.

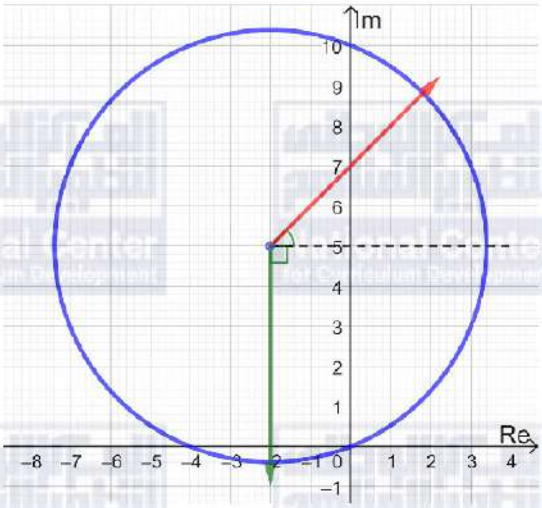
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.



</td></tr>
</table>

20	$-\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z-3+4i) \le \frac{\pi}{4}$ يمثّل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3+4i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3, -4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. و يمثّل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-3+4i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(3, -4)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المبيّن في الشكل: 
21	$2 \le \lvert z-3-4i \rvert \le 4 \;\; \Rightarrow 2 \le \lvert z-(3+4i) \rvert \le 4$ يمثّل منحنى المعادلة $\lvert z-(3+4i) \rvert = 2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. ويمثّل منحنى المعادلة $\lvert z-(3+4i) \rvert = 4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما. 

22	المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\lvert z-3+2i \rvert = \sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات، ومعادلتها الديكارتية هي: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $\lvert z-6i \rvert = \lvert z-7+i \rvert$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ، نستطيع إيجاد معادلته الديكارتية عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة: ميل القطعة المستقيمة التى طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ هو -1 ، فميل المنصف العمودي لها هو 1 $m=1,\ M(\frac{7}{2},\frac{5}{2}) \Rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2} \Rightarrow y=x-1$  لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا، نجد نقاط تقاطع المنحنيين: بالتعويض: $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ و $y=x-1$ $(x-3)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow (x-3)^2+(x-1+2)^2=10$ $\Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow 2x(x-2)=0$ $\Rightarrow x=0, x=2 \Rightarrow y=-1, y=1$ العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معًا هما: $z_1=-i, z_2=2+i$
23	$\lvert z-3 \rvert = \lvert z+2i \rvert \Rightarrow \lvert (x-3)+iy \rvert = \lvert x+i(y+2) \rvert$ $\Rightarrow (x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$ $\Rightarrow -6x+9=4y+4$ $\Rightarrow 6x+4y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\lvert z+3-i \rvert = \lvert z-1+5i \rvert \Rightarrow \lvert (x+3)+i(y-1) \rvert = \lvert (x-1)+i(y+5) \rvert$ $\Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$ $\Rightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$ $\Rightarrow 8x-12y-16=0$ $\Rightarrow 2x-3y=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بحل المعادلتين (1) و (2) نجد: $x=\frac{31}{26}$ و $y=-\frac{7}{13}$ ويكون العدد المركب الذي يحقق كلًّا من المعادلتين هو: $z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$

24	يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي و يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعًا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي و يمثل منحنى المعادلة $\|z+2-5i\|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ 

1) $|z-3| > |z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3| = |z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(3,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

$|0-3| > |0+2i| \rightarrow 3 > 2 \quad \checkmark$

بما أن العدد 0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل)

2) $|z+3-i| < |z-1+5i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3-i| = |z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1,-5)$ و $(-3,1)$.

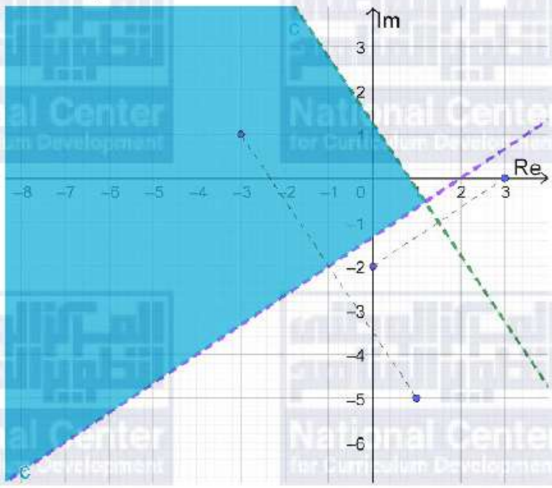
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

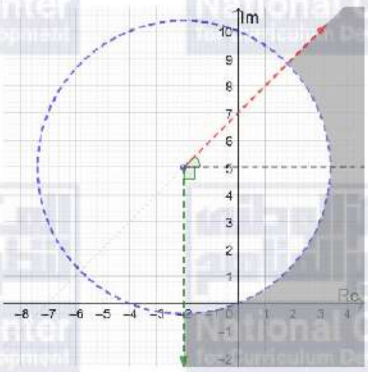
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة،

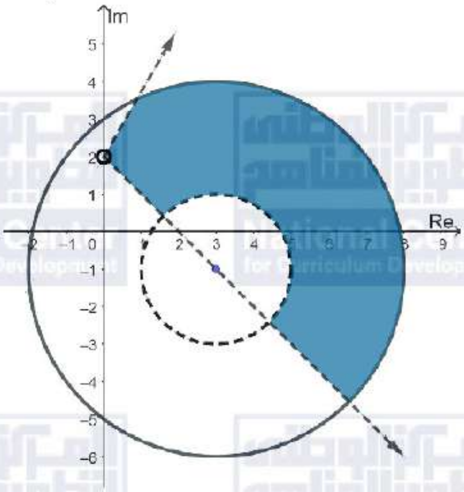
25 $|0+3-i| < |0-1+5i| \rightarrow \sqrt{10} < \sqrt{26} \quad \checkmark$

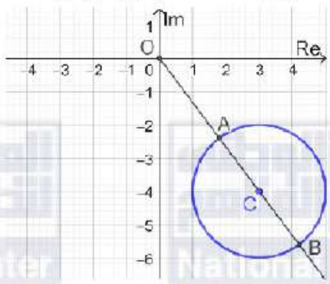
بما أن العدد 0 يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ (نقطة الأصل)

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



26	1) $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+2-5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. 2) $\|z+2-5i\| > \sqrt{29}$ ويمثل منحنى المعادلة $\|z+2-5i\| = \sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 

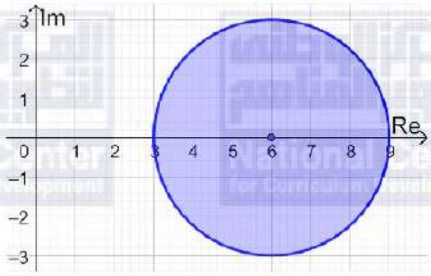
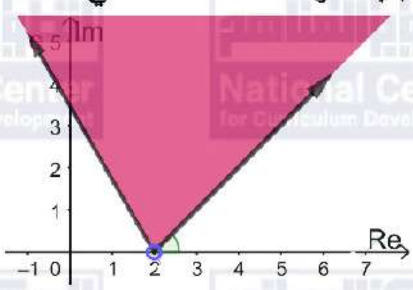
27	1) $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$ يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z-2i) = \frac{\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي. 2) $2 < \lvert z-3+i \rvert \leq 5$ ويمثل منحنى المعادلة $\lvert z-3+i \rvert = 5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 نرسمها متصلة بسبب وجود مساواة في المتباينة ويمثل منحنى المعادلة $\lvert z-3+i \rvert = 2$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 2 نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معًا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 
28	$\lvert z-(1+i) \rvert = 3$
29	نبدأ بالتحقق من أن المستقيم المرسوم هو فعلًا العمود المنصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$: ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان، معادلة المستقيم هي $y = 3-2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته، إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته: $\lvert z-(3+2i) \rvert = \lvert z-(-1) \rvert \Rightarrow \lvert z-3-2i \rvert = \lvert z+1 \rvert$
30	$\text{Arg}(z+1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$

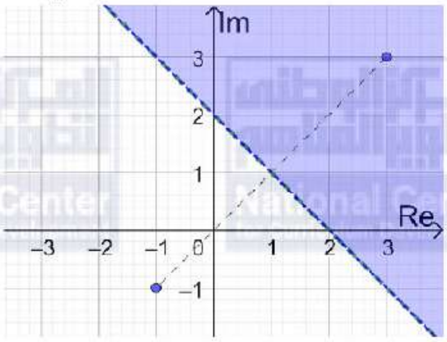
31	$r = \sqrt{(4-4)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{49} = 7$ $\lvert z - (4+i) \rvert \geq 7$
32	قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1 $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z+2-i) < 0$
33	الجزء المظلل يقع داخل دائرة مركزها $(-1, -2)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات وهي مرسومة متصلة فالمتباينة المرتبطة بها هي: $\lvert z-(-1-2i)\rvert \leq 3 \Rightarrow \lvert z = 1+2i\rvert \leq 3$ والمستقيم المرسوم متصل نجد أن ميله يساوي $\frac{6}{4}$ ، وميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6, 0), (0, -4)$ هو $\frac{-4}{6}$ فهما متعامدان ونلاحظ أن المستقيم يمر بالنقطة $(-5, -5)$ فمعادلته هي: $y + 5 = \frac{6}{4}(x+5)$، وإذا عوضنا إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين $(-6, 0), (0, -4)$، وهي $(-3, -2)$ نجد أنها تحققها، ما يعني أن المستقيم هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين $(-6, 0), (0, -4)$، والمنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة الأقرب إلى النقطة $(0, -4)$، فالمتباينة المرتبطة بهذا المستقيم هي: $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$. إذن، نظام المتباينات الذي يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المعطى هو: $\lvert z+1+2i\rvert \leq 3$ $\lvert z+6\rvert \geq \lvert z+4i\rvert$
34	$\lvert z-3+4i\rvert = 2 \Rightarrow \lvert z-(3-4i)\rvert = 2$ z يقع على الدائرة التي مركزها $(3, -4)$ وطول نصف قطرها 2 نفرض $z = x + iy$ فإن: $\lvert z\rvert$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي  من الشكل أعلاه نجد أن: $OC = \sqrt{9+16} = 5$ أقل قيمة لـ $\lvert z\rvert$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة A وهي: $\lvert z\rvert = OC - r = 5 - 2 = 3$ أكبر قيمة لـ $\lvert z\rvert$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة B وهي: $\lvert z\rvert = OC + r = 5 + 2 = 7$

35	$\lvert z-6\rvert = 2\lvert z+6-9i\rvert \Rightarrow \lvert x-6+iy\rvert = 2\lvert (x+6)+i(y-9)\rvert$ $\Rightarrow (x-6)^2+y^2 = 4((x+6)^2+(y-9)^2)$ $\Rightarrow x^2-12x+36+y^2 = 4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$ $\Rightarrow x^2+y^2+20x-24y+144=0$ $\Rightarrow (x+10)^2+(y-12)^2=100$ وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات.
36	$\mathrm{Arg}(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وهو الممثل بالشكل b. أما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحة والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة، وهو ليس صحيحًا والشكل d فسعة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة.

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	d
7	$\sqrt{45-28i}=x+iy \Rightarrow 45-28i=x^2-y^2+2ixy$ $\Rightarrow x^2-y^2=45 \quad ,2xy=-28 \Rightarrow y=-\frac{14}{x}$ $\Rightarrow x^2-\frac{196}{x^2}=45$ $\Rightarrow x^4-45x^2-196=0$ $\Rightarrow (x^2-49)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=\pm 7$ $\Rightarrow x=7, y=-2 \quad or\; x=-7, y=2$ الجذران التربيعيان للعدد $45-28i$ هما: $7-2i$، و $-7+2i$
8	$\lvert w\rvert=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{12}}\approx 0.76$ $Arg(w)=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right)=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-2.43$
9	$z+w=a-8+10i \Rightarrow \lvert z+\omega\rvert=\sqrt{(a-8)^2+100}=26$ $\Rightarrow (a-8)^2+100=676 \Rightarrow (a-8)^2=576 \Rightarrow a-8=\pm 24$ $\Rightarrow a=-16 \;\; or \;\; a=32$ ولأن $a<0$، فإنّ: $a=-16$.
10	$w=\frac{14-31i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}=\frac{104-65i}{9+4}=8-5i$

11	$(8-5i)^2+c(8-5i)+d=0 \Rightarrow 64-80i-25+8c-5ci+d=0$ $\Rightarrow 39+d+8c-i(80+5c)=0$ $\Rightarrow 39+d+8c=0\,,80+5c=0$ $\Rightarrow c=-16, d=89$ حل آخر: $w=8-5i \Rightarrow \bar{w}=8+5i$ $\Rightarrow c=-(w+\bar{w})=-16$ $\Rightarrow d=w\times\bar{w}=64+25=89$
12	$\lvert z-6\rvert\le 3$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\lvert z-6\rvert=3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلًا. أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها. 
13	$\frac{\pi}{4}\le \mathrm{Arg}(z-2)\le\frac{2\pi}{3}$ يمثّل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2)=\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي ويمثّل منحنى المعادلة $\mathrm{Arg}(z-2)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمه متصلًا بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه: 

14	$\|z+1+i\| > \|z-3-3i\|$ المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $\|z+1+i\| = \|z-3-3i\|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,3)$ و $(-1,-1)$. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا. نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة، $\|0+1+i\| > \|0-3-3i\| \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18}$ × بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$ 
15	$NO = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$ $MO = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$ إذن المثلث OMN متطابق الضلعين
16	باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN: $(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$ $\Rightarrow \cos\angle MON = -\dfrac{234-130}{130} = -\dfrac{4}{5}$
17	$A = \dfrac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON = \dfrac{1}{2}\times 65\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{39}{2}$

<table>
<tr><td>18</td><td>

$|z-8| > |z+2i|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-8| = |z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(8,0)$.

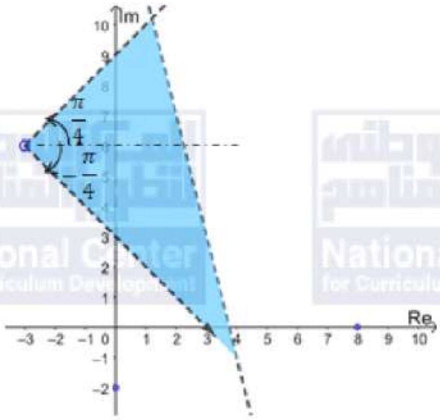
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا.

$-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+3-6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $\text{Arg}(z+3-6i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



</td></tr>
<tr><td>19</td><td>

$z = 5+2i \Rightarrow \bar{z} = 5-2i$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{5+2i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{25+20i-4}{25+4} = \frac{21+20i}{29} = \frac{1}{29}(21+20i)$$

</td></tr>
<tr><td>20</td><td>

$Arg(z) = \tan^{-1}\frac{2}{5}$

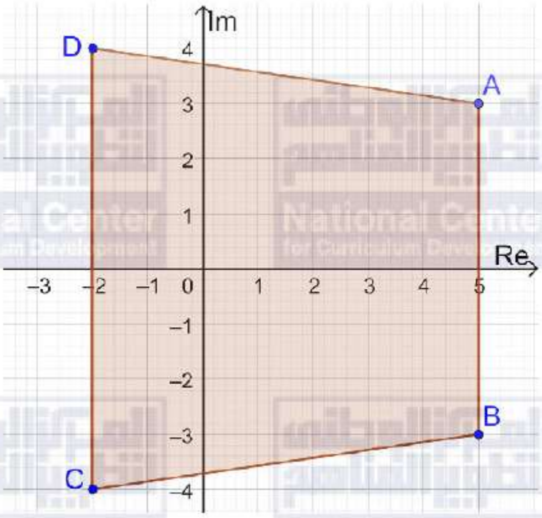
$Arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\frac{2}{5}$

$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \tan^{-1}\frac{20}{21}$

$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Arg(z) - Arg(\bar{z}) \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

</td></tr>
</table>

21	$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$ بما أن العدد $-2 + 4i$ هو حل لهذه المعادلة، إذن مرافقه $-2 - 4i$ يكون حلًّا أيضًا لها والمعادلة التربيعية التي لها هذان الجذران هي أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة المعطاة. مجموع الجذرين يساوي -4 ، وحاصل ضربهما 20 ، إذن، المعادلة هي: $z^2 + 4z + 20 = 0$ نقسم $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680$ على $z^2 + 4z + 20$ فنجد أنّ: $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = (z^2 + 4z + 20)(z^2 - 10z + 34) = 0$ لإيجاد جذور المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$ نستخدم القانون العام لحل هذه المعادلة التربيعية: $z = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{10 \pm 6i}{2} = 5 \pm 3i$ فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي: $5 + 3i , 5 - 3i , -2 - 4i$
22	 الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف، مساحته بالوحدات المربعة تساوي: $A = \frac{1}{2}(7)(6 + 8) = 49$
23	$0 \leq \text{Arg}(z - 3i) \leq \frac{\pi}{3}$
24	$z^2 + 2z + 10 = 0$ $\Delta = 4 - 40 = -36$ مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه

25	$z_1 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = -1+3i \Rightarrow \operatorname{Arg}(z_1) = \pi - \tan^{-1} 3 \approx 1.89$ $z_2 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = -1-3i \Rightarrow \operatorname{Arg}(z_2) = -(\pi - \tan^{-1} 3) \approx -1.89$
26	$u + 2v = 2i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $iu + v = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $i \times (2) + (1): v(2+i) = 5i \ \Rightarrow v = \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{10i+5}{4+1} = 1+2i$ $\Rightarrow u = 2i - 2(1+2i) = -2-2i$
27	المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب. والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة$(0, 2)$، وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة. فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور.