المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي
يوسف سليمان جرادات
إبراهيم عقلة القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237
06-5376266
P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor
feedback@nccd.gov.jo
www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2024/8)، تاريخ 2024/10/16 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2024/178) تاريخ 2024/11/17 م بدءًا من العام الدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 653 - 2

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2024/6/3454)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات (كتاب الطالب): الصف الحادي عشر، الفصل الدراسي الثاني.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2024
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)
1445 هـ / 2024 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاريّ، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقد روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها الموضوعات الرياضية الأكثر أهمية واستخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراسة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاسة من دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها سابقًا وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّة فقد تضمّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة

4

الاقترانات المثلثية

Trigonometric Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الاقترانات المثلثية أحد أكثر فروع الرياضيات استعمالًا في العلوم المختلفة؛ إذ يُمكِن عن طريقها نمذجة كثير من الظواهر العلمية، مثل: موجات الصوت والضوء. وكذلك إيجاد ارتفاع المَدِّ والجَزْر، وإنشاء الخرائط، فضلًا عن استعمالها في أنظمة الأقمار الصناعية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ ماهية دائرة الوحدة، والوضع القياسي للزاوية.
- ✓ إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة بالدرجات.
- ✓ تمثيل الاقترانات المثلثية $\sin x, \cos x, \tan x$ في الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ بيانيًّا في المستوى الإحداثي، واستنتاج خواصها.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◂ رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- ◂ تحويل قياس الزوايا من الدرجات إلى الراديان، وبالعكس.
- ◂ إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.
- ◂ تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد دورتها وسعتها ومجالها ومداها.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6 – 10) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

قياس الزاوية بالراديان

Angle Measure in radian

فكرة الدرس

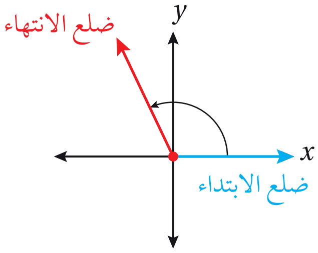
- رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس.

المصطلحات الراديان، الزوايا المُشترِكة، السرعة الخطية، السرعة الزاويَّة.

مسألة اليوم إذا كان طول عقرب الدقائق في الساعة المجاورة 6 cm، فكيف أجد المسافة التي يقطعها رأس عقرب الدقائق بعد مرور 15 دقيقة على حركته؟ أجد المسافة بطريقتين مختلفتين.

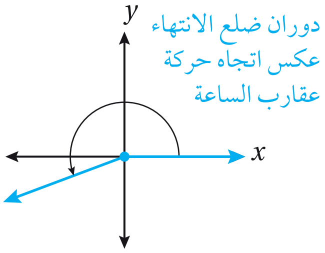
رسم الزاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الزاوية المرسومة في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي هي زاوية يقع رأسها عند نقطة الأصل $(0, 0)$، وضلع ابتدائها مُنطبِق على المحور x الموجب.

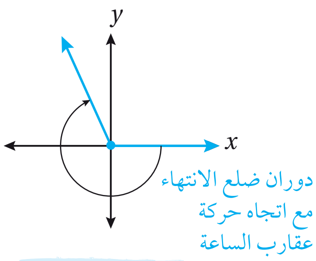


زاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ قياس الزاوية يصف مقدار الدوران واتجاهه اللازمين للانتقال من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء، وأنَّ قياس الزاوية يكون موجبًا إذا كان دوران ضلع الانتهاء عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وسالبًا إذا كان دوران ضلع الانتهاء مع اتجاه حركة عقارب الساعة.



زاوية قياسها موجب

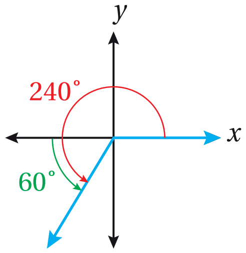


زاوية قياسها سالب

مثال 1

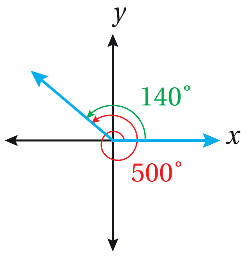
أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

1 **240°**



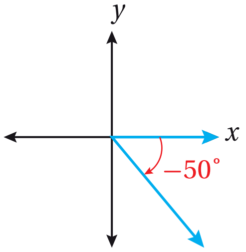
بما أنَّ الزاوية 240° تزيد على الزاوية 180° بمقدار 60°، فإنَّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران 60° عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، بدءًا بالجزء السالب من المحور x.

2 **500°**



بما أنَّ الزاوية 500° تزيد على الزاوية 360° بمقدار 140°، فإنَّ ضلع الانتهاء أكمل دورة كاملة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، ثم دار أيضًا 140° عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

3 **−50°**



بما أنَّ −50° زاوية سالبة، فإنَّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران 50° في اتجاه دوران عقارب الساعة، بدءًا بالجزء الموجب من المحور x.

أتحقَّق من فهمي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

a) 170° b) 650° c) −130°

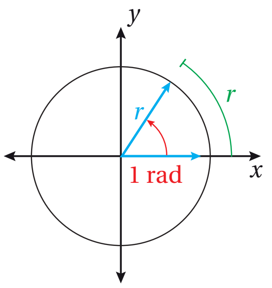
إرشاد

يُمكِن استعمال المنقلة لتمثيل الزوايا تمثيلًا دقيقًا. وفي حال كان الرسم تقريبيًّا فيُستعمَل التقدير لرسم الزوايا.

أتعلّم

إذا دار ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي دورة كاملة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، فإنَّه يصنع في أثناء دورته زوايا قياسها بين 0° و 360°، وإذا استمر في دورانه، فإنَّه يصنع زوايا قياسها أكبر من 360°

الراديان



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن قياس الزوايا بالدرجات، ويُمكِن أيضًا قياسها بوحدةٍ تعتمد على طول قوس الدائرة، وتُسمّى **الراديان** (radian). فقياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي، التي يُحدِّد ضلعُ انتهائها قوسًا من الدائرة، طوله مساوٍ لنصف قُطْر الدائرة، هو 1 راديان.

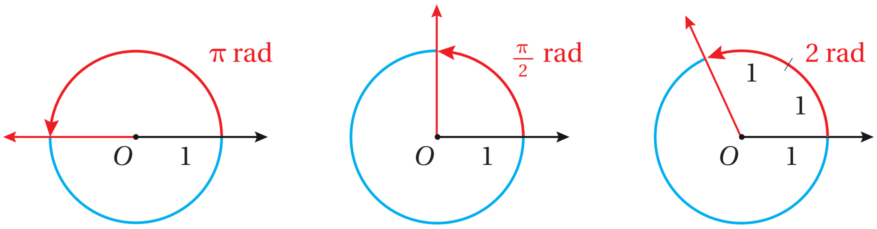
وبما أنَّ محيط الدائرة يساوي $2\pi r$، فإنَّ قياس زاوية الدورة الكاملة هو 2π راديان (عدد مرات تكرار r في $2\pi r$). وبذلك، فإنَّ القياس بالدرجات والقياس بالراديان مُرتبِطان بالمعادلة الآتية:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \qquad \text{or} \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

وهذا يعني أنَّ قياس الزاوية المستقيمة هو π rad، وأنَّ قياس الزاوية القائمة هو $\frac{\pi}{2}$ rad، وأنَّ قياس الزاوية التي يقابلها قوس طوله وحدتان هو 2 rad.

رموز رياضية

يُكتَب 1 راديان في صورة: 1 rad



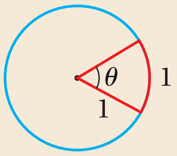
وبما أن $180^\circ = \pi$ rad، إذن $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$، $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad، ويمكن من خلال هاتين العلاقتين تحويل قياس أي زاوية من الدرجات إلى الراديان والعكس على النحو الآتي:

أتعلَّم

في الشكل التالي:

$\theta = 1$ rad

$\theta \approx 57.3^\circ$



مفهوم أساسي **التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس**

1) لتحويل قياس زاوية من الدرجات إلى الراديان أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

2) لتحويل قياس زاوية من الراديان إلى الدرجات أضرب في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$

مثال 2

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

1 140°

$$140^\circ = 140^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$$

$$= 140\cancel{^\circ} \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{^\circ}}\right)$$

$$= \frac{140\,\pi}{180} = \frac{7\pi}{9} \text{ rad}$$

2 $-\frac{\pi}{12}$

$$-\frac{\pi}{12} = -\frac{\cancel{\pi}}{12}\,\cancel{\text{rad}}\left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}\,\cancel{\text{rad}}}\right)$$

$$= -15^\circ$$

أتحقَّق من فهمي

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

a) 165°

b) $\frac{5\pi}{4}$

c) -80°

d) -6

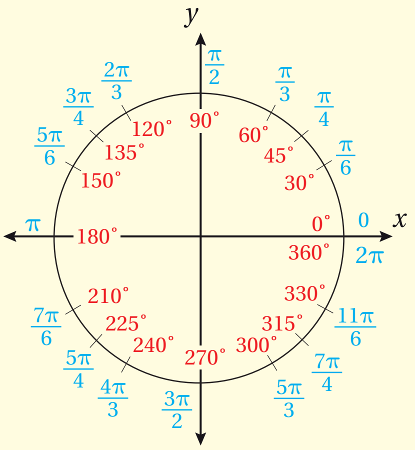
أتعلَّم

بوجه عام، تُحذَف كلمة (rad) عند التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. وحين يكون قياس الزاوية من دون وحدة، فهذا يعني أنَّ قياسها بوحدة راديان.

مفهوم أساسي

قياس الزوايا الخاصة بالدرجات والراديان

يُبيِّن الشكل المجاور القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة من 0° إلى 360° (من 0 rad إلى 2π rad).

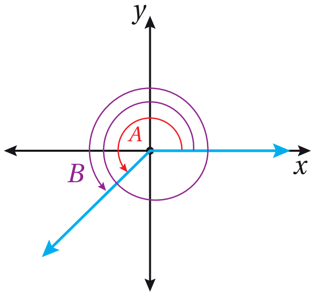


أتعلَّم

من المفيد حفظ القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة في الربع الأول، وللزاوية $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$؛ فقياسات الزوايا الأُخرى ما هي إلّا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

الزوايا المُشترِكة

يُطلَق على الزوايا في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه، لكنَّ قياساتها مختلفة، اسم **الزوايا المُشترِكة** (coterminal angles). فمثلًا، الزاويتان A وB في الشكل المجاور هما زاويتان مُشترِكتان.



مفهوم أساسي

الزوايا المُشترِكة

يُمكِن إيجاد زاوية مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع زاوية أُخرى عن طريق جمع أو طرح أحد مضاعفات الزاوية 360° أو 2π

بالدرجات

إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالدرجات لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360^\circ n$ هي زوايا مشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

بالراديان

إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالراديان لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 2n\pi$ هي زوايا مُشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

مثال 3

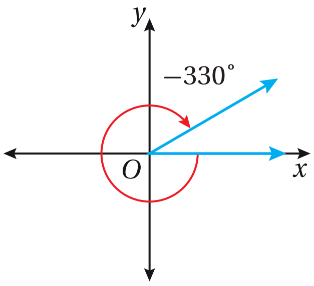
أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

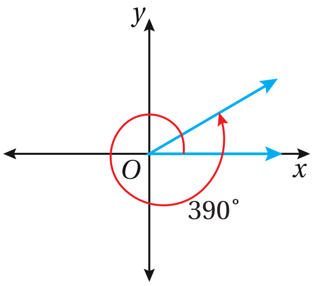
1 **30°**

$30^\circ + 360^\circ (1) = 390^\circ$ بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$30^\circ + 360^\circ (-1) = -330^\circ$ بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أمّا رسم كلٍّ من الزاويتين فهو:



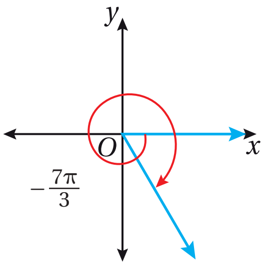


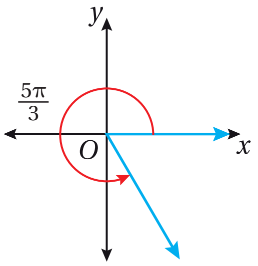
2 **$-\frac{\pi}{3}$**

$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = \frac{5\pi}{3}$ بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{7\pi}{3}$ بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أمّا رسم كلٍّ من الزاويتين فهو:





أتحقَّق من فهمي

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

a) 88°

b) -920°

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $-\frac{3\pi}{4}$

أتعلَّم

إذا كان الفرق بين أيِّ زاويتين من مضاعفات 360° أو 2π، فإنَّهما تكونان مُشترِكتين.

تطبيقات: طول القوس ومساحة القطاع

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ القوس جزء من الدائرة مُحدَّد بنقطتين عليها، وأنَّ القطاع هو الجزء المحصور بين قوس منها ونصفي القُطْرين اللذين يمرّان بطرفي القوس. وسأتعلَّم الآن إيجاد طول القوس ومساحة القطاع عندما يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان.

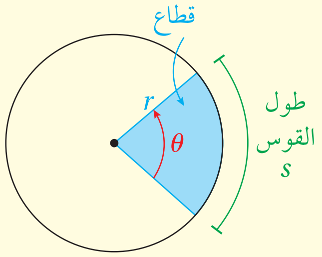
أتذكَّر

الزاوية المركزية في الدائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قُطْرين في الدائرة.

مفهوم أساسي

طول القوس ومساحة القطاع

طول القوس



بالكلمات: طول القوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي ناتج ضرب طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $s = r\theta$

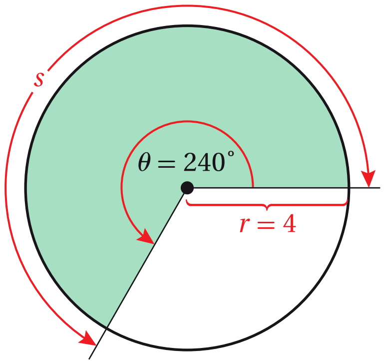
مساحة القطاع

بالكلمات: مساحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزية θ بالراديان في دائرة طول نصف قُطْرها r تساوي نصف ناتج ضرب مربع طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

مثال 4

يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية $240°$ في دائرة طول نصف قُطْرها 4 cm. أجد طول القوس ومساحة القطاع، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



لإيجاد طول قوس القطاع الدائري باستعمال الصيغة: $s = r\theta$، أُحوِّل قياس زاوية القطاع من الدرجات إلى الراديان.

الخطوة 1: أُحوِّل قياس الزاوية المركزية من الدرجات إلى الراديان.

بالضرب في $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$

$$240^\circ = 240^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{4\pi}{3}$$

الخطوة 2: أجد طول القوس.

صيغة طول القوس

$$s = r\theta$$

بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

$$= 4\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 16.8$$

إذن، طول القوس هو 16.8 cm تقريبًا.

الخطوة 3: أجد مساحة القطاع.

صيغة مساحة القطاع

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

$$= \frac{1}{2}(4)^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 33.5$$

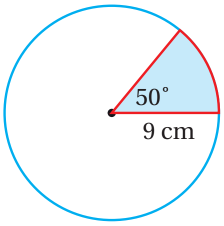
إذن، مساحة القطاع هي $33.5\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

تنبيه

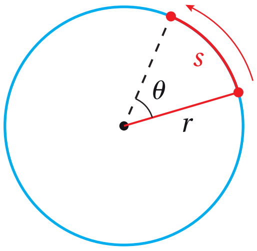
وحدة قياس طول القوس هي cm، وليس cm rad؛ لأنَّ الراديان نسبة بلا وحدة، وكذلك هو حال مساحة القطاع.

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية °50 في دائرة طول نصف قُطْرِها 9 cm. أجد طول القوس ومساحة القطاع، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



تطبيقات: الحركة الدائرية



إذا افترضْتُ أنَّ نقطة تتحرَّك على محيط دائرة كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِنني وصف حركتها باستعمال **السرعة الخطية** (linear velocity) التي تُمثِّل المُعدَّل الذي تتغيَّر فيه المسافة المقطوعة. فالسرعة الخطية هي المسافة المقطوعة مقسومة على المدَّة الزمنية المنقضية.

يُمكِنني أيضًا وصف حركة النقطة باستعمال **السرعة الزاويّة** (angular velocity) التي تُمثِّل المُعدَّل الذي يتغيَّر فيه قياس الزاوية المركزية. فالسرعة الزاويَّة هي قيمة التغيُّر في قياس الزاوية بالراديان مقسومة على الزمن المنقضي.

مفهوم أساسي

السرعة الخطية والسرعة الزاويّة

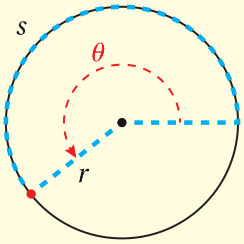
بافتراض أنَّ نقطة تتحرَّك بسرعة ثابتة على محيط دائرة، طول نصف قُطْرها r:

- إذا كان s هو طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الخطية v لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$v = \frac{s}{t}$$

- إذا كانت θ هي زاوية الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الزاويَّة ω لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

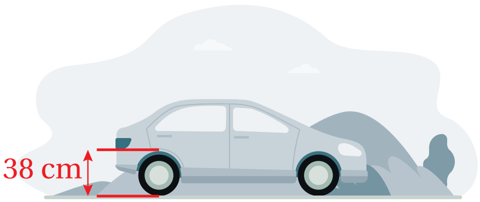


لغة الرياضيات

الحرف اليوناني ω يُقرَأ: أوميغا، وهو يُستعمَل للدلالة على السرعة الزاويَّة.

مثال 5 : من الحياة

سيّارة: إطار سيّارة يبلغ طول قُطْره **38 cm**، ويدور **9.3** دورات في الثانية:



1 **أجد السرعة الخطية للإطار بالسنتيمتر لكل ثانية.**

بما أنَّ قياس الدورة الكاملة 2π، فإنَّ 9.3 دورات تقابل زاوية الدوران θ التي قياسها $9.3 \times 2\pi$، أو $18.6\ \pi$ راديان.

السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$
بتعويض $s = r\theta$	$= \frac{r\theta}{t}$
بتعويض $r = 19, \theta = 18.6\ \pi, t = 1\text{ s}$	$= \frac{(19)(18.6\ \pi)\text{cm}}{1\text{ s}}$
بالتبسيط	$= \frac{353.4\ \pi\text{ cm}}{1\text{ s}}$

إذن، السرعة الخطية للإطار هي $353.4\ \pi$ cm/s.

أتعلّم

لإيجاد زاوية الدوران التي تقابل عددًا معيّنًا من الدورات، أضرب عدد الدورات في قياس الدورة الكاملة 2π

2 أجد السرعة الزاويّة للإطار بالراديان لكل ثانية.

السرعة الزاويّة $\omega = \frac{\theta}{t}$

بتعويض $t = 1 \text{ s} , \theta = 18.6\,\pi$ $= \frac{18.6\,\pi \text{ rad}}{1 \text{ s}}$

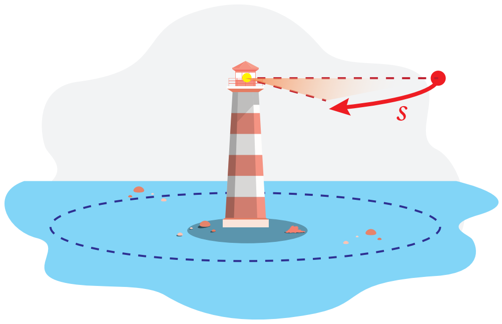
إذن، السرعة الزاويّة للإطار هي $18.6\,\pi$ rad/s، أو 58.4 rad/s تقريبًا.

أتعلَّم

عندما يتحرَّك جسم حركة دائرية، فإنَّ سرعته تقاس بالسرعة الخطية، في حين تقاس سرعة تغيُّر الزاوية بالسرعة الزاويَّة.

أتحقَّق من فهمي

منارة: تتوسَّط منارة قناة ماء، ويتحرَّك ضوؤها حركة دائرية بسرعة ثابتة. إذا أكمل ضوء المنارة دورة كاملة كل **10** ثوانٍ، فأجد السرعة الزاويَّة لضوئها في الدقيقة.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $450°$

2) $-900°$

3) $540°$

4) $-700°$

5) $-\frac{\pi}{6}$

6) $\frac{21\pi}{4}$

7) $\frac{7\pi}{6}$

8) $\frac{\pi}{9}$

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

9) $-225°$

10) $-135°$

11) $75°$

12) $500°$

13) $-\frac{\pi}{7}$

14) $\frac{5\pi}{12}$

15) 1.2

16) 4

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

17 $50°$

18 $135°$

19 $1290°$

20 $-150°$

21 $\frac{11\pi}{6}$

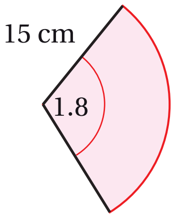
22 $-\frac{\pi}{4}$

23 $-\frac{\pi}{12}$

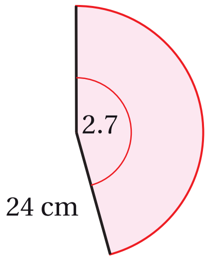
24 $\frac{7\pi}{6}$

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

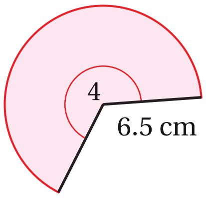
25



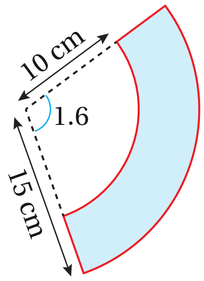
26



27



يُمثِّل الشكل المُظلَّل المجاور جزءًا من قطاع دائري:

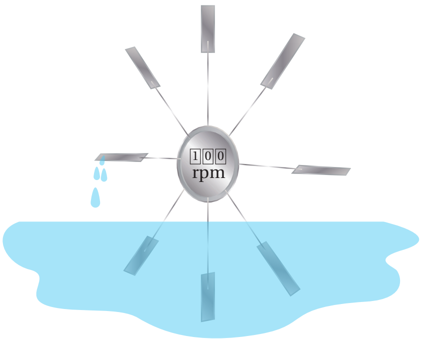


28 أجد مساحة هذا الشكل.

29 أجد محيط هذا الشكل.

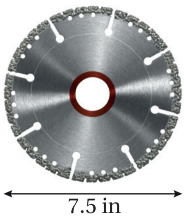
30 قطاع دائري مساحته $500\ \text{cm}^2$، وطول قوسه 20 cm، أجد قياس زاويته بالراديان.

31 **تيار ماء:** استعمل العلماء عجلة مجداف لقياس سرعة التيارات المائية بناءً علـى مُعدَّل الدوران. أجد سـرعة تيار مائي بالمتر لكل ثانيـة إذا دارت العجلة 100 دورة فـي الدقيقة، علمًا بأنَّ طول عجلة المجداف (المسـافة من مركـز الدائرة إلى طرف المجداف) هو 0.20 m



32 يُدوِّر طفـل حجرًا مربوطًا بطـرف حبل طولـه 3 ft بمُعدَّل 15 دورة في 10 ثوانٍ. أجد السـرعة الزاويَّة والسرعة الخطية للحجر.

قُطْر شفرة منشار ماسية دائرية الشكل 7.5 in، وهي تدور 2400 دورة في الدقيقة:



33 أجد السرعة الزاويَّة لهذه الشفرة بالراديان لكل ثانية.

34 أجد السـرعة الخطية لأسنان المنشـار عند ملامستها الرخام المراد قطعه.

معلومة

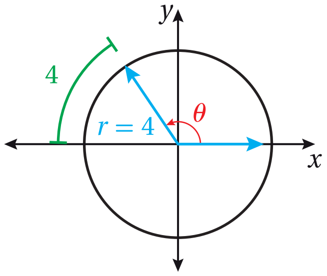
الشـفرة الماسـية هي شفرة منشـار تحتوي علـى ماسٍ مُثبَّـت بحافتها، وتُسـتعمَل لقطع المـواد الصُّلْبة، مثل: الرخام، وحجر البناء، وبلاط السيراميك.

مهارات التفكير العليا

تبرير: قطاع دائري طول قوسه بالسنتيمترات يساوي عدديًّا مساحته بالأمتار المربعة:

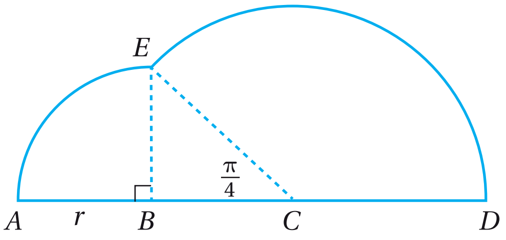
35 أجد نصف قُطْر القطاع الدائري، وأبرّر إجابتي.

36 أجد قياس زاوية القطاع، وأبرّر إجابتي.



37 **تبرير:** أجد قياس الزاوية θ في الشكل المجاور، وأبرّر إجابتي.

تحدٍّ: في الشـكل المجاور، ACD زاوية مسـتقيمة، وABE قطاع دائري مركزه B، ونصف قُطْـره r، وCED قطاع دائري مركزه C، و $\angle ABE$ قائمة، و $m\angle ACE = \frac{\pi}{4}$:



38 أُثبِت أنَّ طول $\overline{CD}$ هو $\sqrt{2}\, r$

39 أجد قياس $\angle ECD$ بالراديان.

40 أجد محيط الشكل ومساحته، علمًا بأنَّ $r = 10$ cm.

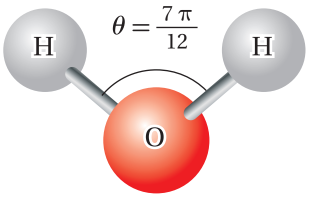
الدرس 2

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

فكرة الدرس إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.

المصطلحات الاقتـران المثلثي، قاطع التمـام، القاطع، ظل التمام، اقترانات المقلـوب، الزاوية الربعية، الزاوية المرجعية.

مسألة اليوم يتكوَّن جـزيء الماء من ذرَّة أكسـجين وذرَّتـي هيدروجين، وتتوسَّط ذرَّة الأكسـجين هذا الجزيء، ويكون قياس الزاوية θ بين رابطتي $O-H$ $\frac{7\pi}{12}$ تقريبًا. أجد $\cos\frac{7\pi}{12}$.

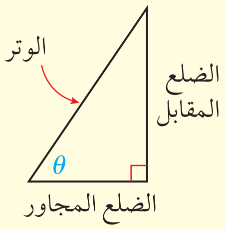


الاقترانات المثلثية

الاقتران المثلثي (trigonometric function) هو قاعدة معطاة باستعمال النسبة المثلثية. وتُستعمَل قياسات أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس زاوية حادَّة فيه لإيجاد النسب المثلثية الست التي تُحدِّد ستة اقترانات مثلثية.

مفهوم أساسي **جميع الاقترانات المثلثية في مثلث قائم الزاوية**

إذا مثَّلــت θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ الاقترانات المثلثية الستة تُعرَف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



قاطع التمام (cosecant) $\csc\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{المقابل}}$

الجيب (sine) $\sin\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{الوتر}}$

القاطع (secant) $\sec\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{المجاور}}$

جيب التمام (cosine) $\cos\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{الوتر}}$

ظل التمام (cotangent) $\cot\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{المقابل}}$

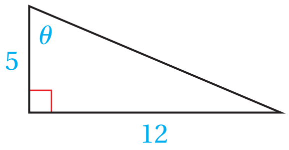
الظل (tangent) $\tan\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}}$

يُطلَق على اقترانات قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، اسم **اقترانات المقلوب** (reciprocal functions)؛ لأنَّها مقلوب نسب الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب، ويُمكِن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

مثال 1

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



الخطوة 1: أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = 5^2 + 12^2$ بتعويض $a = 5, b = 12$

$c^2 = 169$ بالتبسيط

$c = \pm\sqrt{169}$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$c = 13$ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا

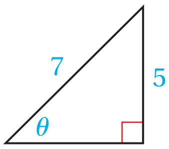
الخطوة 2: أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ.

$$\tan\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{12}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{5}{13} \qquad \sin\theta = \frac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}} = \frac{12}{13}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{5}{12} \qquad \sec\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المجاور)}} = \frac{13}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\text{(الوتر)}}{\text{(المقابل)}} = \frac{13}{12}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية باستعمال نقطة معلومة

يُمكِن تعميم تعريفات الاقترانات المثلثية الخاصة بالزاوية الحادَّة (في المثلث القائم الزاوية)، لتشمل أيَّ زاوية في الوضع القياسي.

أتعلَّم

يُمكِن اشتقاق العلاقات الآتية من تعريفات اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وظل التمام:

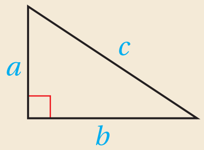
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أتذكَّر

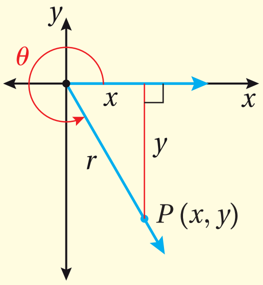
تنص نظرية فيثاغورس على أنَّ مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين؛ أيْ إنَّ:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

مفهوم أساسي



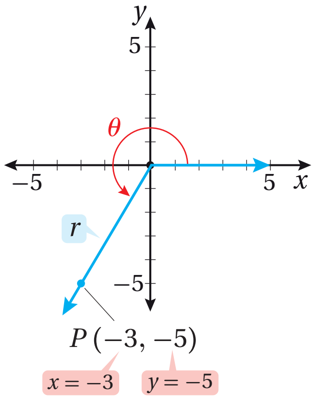
إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، والنقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ، و r يُمثِّل البُعْد بين النقطة P ونقطة الأصل، حيث: $r \neq 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، فإنَّ الاقترانات المثلثية للزاوية θ تُعرَّف كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

مثال 2

تقع النقطة $(-3, -5)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.



الخطوة 1: أرسم الزاوية θ، ثم أجد قيمة r.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$ بتعويض $x = -3, y = -5$

$= \sqrt{34}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب

الخطوة 2: أستعمل القِيَم: $x = -3, y = -5, r = \sqrt{34}$ لكتابة الاقترانات المثلثية الستة.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{-5} = -\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{-3} = -\frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

أتحقَّق من فهمي

تقع النقطة $(1, -3)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.

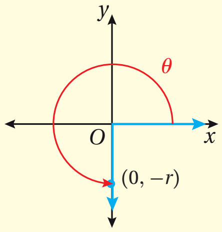
تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزاوية θ من دون معرفة قياسها. وسأتعلّم الآن طرائق إيجاد قِيَم هذه الاقترانات عندما يكون قياس الزاوية θ فقط معلومًا.

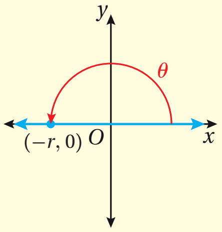
إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية

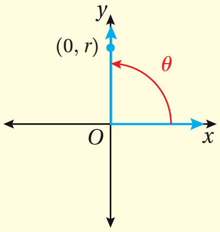
إذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الإحداثيين، فإنَّ هذه الزاوية تُسمّى **زاوية ربعية** (quadrantal angle).

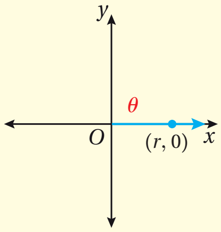
مفهوم أساسي

الزوايا الربعية









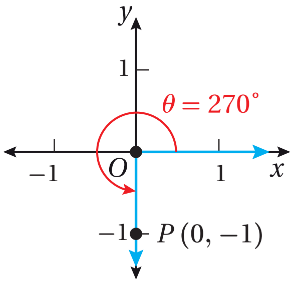
$\theta = 270^\circ$	$\theta = 180^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 0^\circ$
أو	أو	أو	أو
$\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad	$\theta = \pi$ rad	$\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 0$ rad

يُمكِن إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية باختيار نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية، ثم إيجاد الاقتران المثلثي عند تلك النقطة.

مثال 3

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

1 **cot 270°**



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية 270° على المحور y السالب، فأختار النقطة $P(0, -1)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

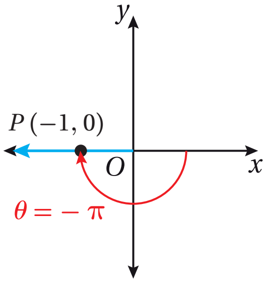
$$\cot(270^\circ) = \frac{x}{y}$$ اقتران ظل التمام

$$= \frac{0}{-1} = 0$$ بتعويض $x = 0, y = -1$

أتعلَّم

لتسهيل عملية الحساب، أختار نقطة تكون قيمة r عندها 1

2 $\csc(-\pi)$



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية $-\pi$ على المحور x السالب،

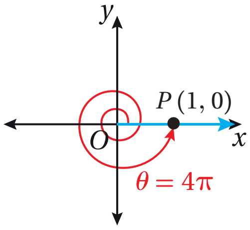
فأختار النقطة $P(-1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

$$\csc(-\pi) = \frac{r}{y}$$ اقتران قاطع التمام

$$= \frac{1}{0}$$ بتعويض $r = 1, y = 0$

غير مُعرَّف

3 $\cos 4\pi$



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية 4π على المحور x الموجب،

فأختار النقطة $P(1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

$$\cos(4\pi) = \frac{x}{r}$$ اقتران جيب التمام

$$= \frac{1}{1} = 1$$ بتعويض $x = 1, r = 1$

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الزوايا الربعية التي تشترك مع الزوايا الربعية في الدورة الكاملة، وتكون قياساتها مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

a) $\sin 3\pi$

b) $\tan 90°$

c) $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

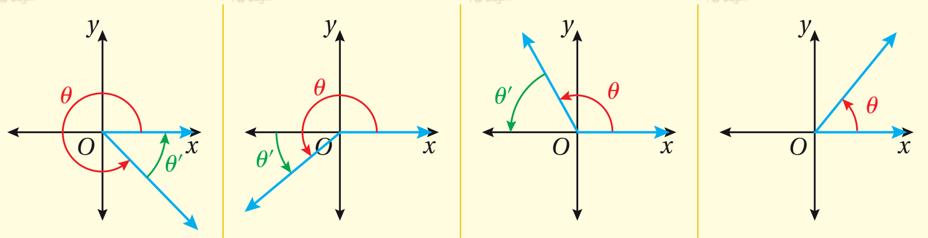
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإنَّ **الزاوية المرجعية** (reference angle) للزاوية θ هي الزاوية الحادَّة θ' المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. يُبيِّن الجدول الآتي العلاقة بين θ و θ' لأيِّ زاوية θ غير ربعية.

لغة الرياضيات

الرمز θ' يُقرَأ: ثيتا برايم.

مفهوم أساسي

الزوايا المرجعية



الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

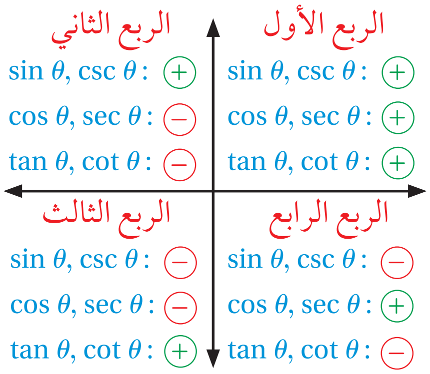
تُستعمَل الزوايا المرجعية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ، وتعتمد إشارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

أتَّبع الخطوات الآتية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ:

الخطوة 1: أجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 3: أستعمل الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ، لتحديد إشارة قيمة الاقتران المثلثي للزاوية θ، بالاستعانة بالمُخطَّط المجاور.



يُبيِّن الجدول الآتي قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة.

θ	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

أتعلَّم

بما أنَّ القِيَم الدقيقة للاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة: 30°, 45°, 60° معلومة، فإنَّه يُمكِن إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لجميع الزوايا التي تُمثِّل الزوايا الخاصة مرجعًا لها.

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

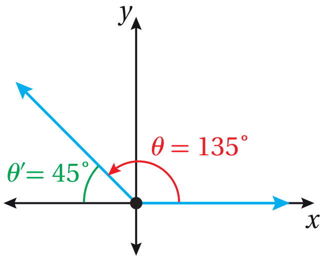
1 **sin 135°**

يقع ضلع انتهاء الزاوية 135° في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$\theta' = 180^\circ - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

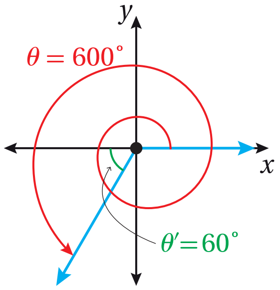
$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ $\theta = 135^\circ$

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ الجيب موجب في الربع الثاني



2 $\cos 600°$

بما أنَّ الزاوية 600° أكبر من الزاوية 360°، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية 600°، التي قياسها موجب، وأقل من 360°:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$600° + 360°\,(-1) = 240°$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية 240° في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\quad \theta' = \theta - 180°$

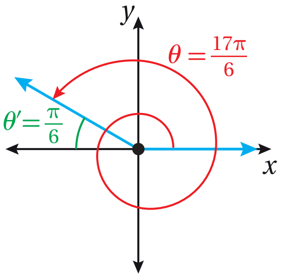
$\theta = 240°$ $\quad = 240° - 180°$

بالطرح $\quad = 60°$

جيب التمام سالب في الربع الثالث $\quad \cos 600° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

3 $\csc \frac{17\pi}{6}$

بما أنَّ الزاوية $\frac{17\pi}{6}$ أكبر من 2π، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\frac{17\pi}{6}$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$\frac{17\pi}{6} + 2\,(-1)\pi = \frac{5\pi}{6}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\quad \theta' = \pi - \theta$

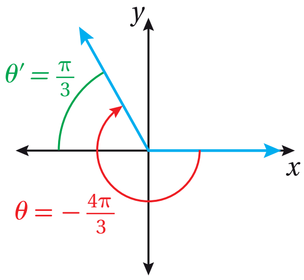
$\theta = \frac{5\pi}{6}$ $\quad = \pi - \frac{5\pi}{6}$

بالطرح $\quad = \frac{\pi}{6}$

قاطع التمام موجب في الربع الثاني $\quad \csc \frac{17\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6} = 2$

4 $\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

بما أنَّ الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ سالبة، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\,(1)\pi = \frac{2\pi}{3}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{2\pi}{3}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية	$\theta' = \pi - \theta$
$\theta = \frac{2\pi}{3}$	$= \pi - \frac{2\pi}{3}$
بالطرح	$= \frac{\pi}{3}$
ظل التمام سالب في الربع الثاني	$\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

أتحقّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 210°$

b) $\cos 510°$

c) $\sec 5\pi$

d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

إيجـاد قِيَم الاقترانات المثلثية لزاوية عُلم الربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها، وقيمة اقتران مثلثي أو أكثر لها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية إذا عُلِمت نقطة تقع على ضلع الزاوية θ، أو إذا عُلِم قياسها. وسأتعلَّم في المثال الآتي إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية إذا عُلِمت قيمة اقتران مثلثي أو أكثر للزاوية θ، والربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها.

مثال 5

إذا كان $\tan\theta = -4$، حيث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ.

أجد القِيَم الدقيقة للاقترانات الأُخرى بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.

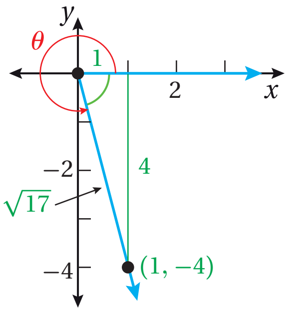
بما أنَّ $\tan\theta$ سالب و $\sin\theta$ سالب، فإنَّ الزاوية θ تقع في الربع الرابع، وهذا يعني أنَّ إشارة x موجبة وإشارة y سالبة.

وبما أنَّ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1}$، فأستعمل النقطة $(1, -4)$ لإيجاد قيمة r:

نظرية فيثاغورس	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
بتعويض $x = 1, y = -4$	$= \sqrt{(1)^2 + (-4)^2}$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب	$= \sqrt{17}$

أتعلَّم

يُمكِنني اختيار أيِّ قيمة لـ x و y بحيث يكون ناتج القسمة مساويًا لـ -4



أستعمل $x = 1, y = -4, r = \sqrt{17}$ لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية الأُخرى:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{17}}{-4} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17}$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان $\sec\theta = 2$، حيث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ.

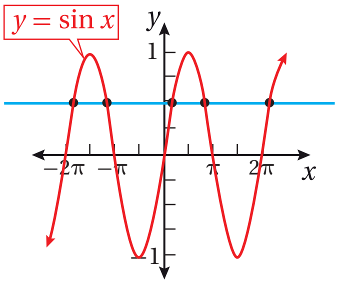
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد الاقتران العكسي لاقترانٍ إذا وفقط إذا كان الاقتران واحدًا لواحد، وهذا يعني أنَّ كل عنصر في مداه يرتبط بعنصر واحد فقط في مجاله، ويُمكِن التحقُّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتذكَّر

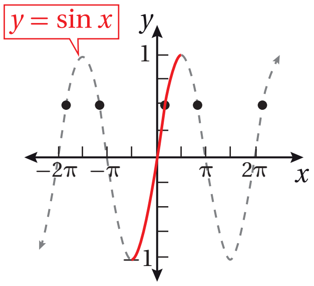
اقتران واحد لواحد هو اقتران لا يوجد في مجاله قيمتان مُرتبِطتان بالقيمة نفسها في المدى.

يُمكِن تحديد إذا كان الاقتران واحدًا لواحد أم لا باستعمال اختبار الخط الأفقي (أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة على الأكثر).



أُلاحِظ من الشكل المجاور أنَّ اقتران الجيب $y = \sin x$ فشل في اختبار الخط الأفقي؛ ما يعني أنَّه ليس اقتران واحد لواحد؛ لذا لا يُمكِن إيجاد اقتران عكسي له.

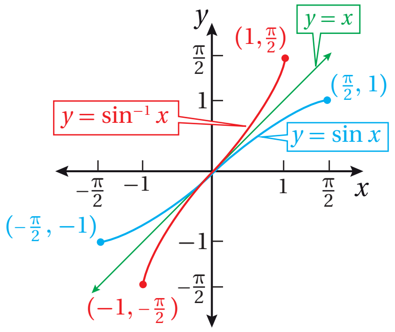
ولكنْ، لو اقتصر مجال اقتران الجيب على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ كما في الشكل الآتي، فإنَّه يصبح اقتران واحد لواحد لجميع قِيَم المدى $[-1, 1]$، عندئذٍ يُمكِن إيجاد اقتران عكسي لاقتران الجيب في المجال المُحدَّد، ويُسمّى معكوس اقتران الجيب $y = \sin^{-1} x$.



أتعلّم

تعلّمت سابقًا تمثيل الاقترانات المثلثية عندما تكون الزوايا بالدرجات في الفترة $[0°, 360°]$، وسأتعلّم في الدرس التالي تمثيل هذه الاقترانات المثلثية بالراديان كما في الشكل المجاور.

أمّا التمثيل البياني للاقتران $y = \sin^{-1} x$ فيُمكِن إيجاده بعكس منحنى اقتران الجيب في المجال المُحدَّد حول المحور $y = x$ كما في الشكل الآتي.



نتيجةً لما سبق؛ يُمكِن إيجاد معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل ضمن مجال مُحدَّد باستعمال تعريف الاقتران العكسي.

مفهوم أساسي

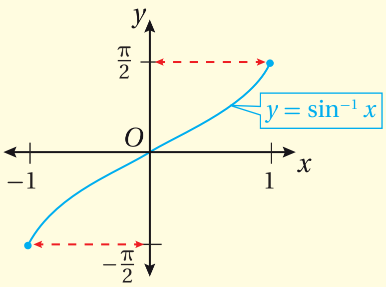
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

معكوس اقتران الجيب

$y = \sin^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، و $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

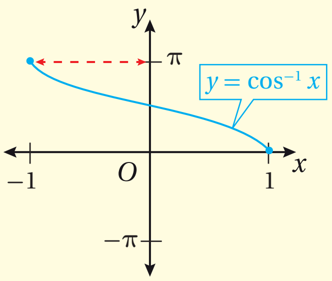


معكوس اقتران جيب التمام

$y = \cos^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\cos y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، و $0 \leq y \leq \pi$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[0, \pi]$.

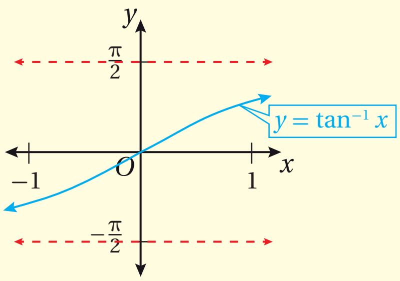


معكوس اقتران الظل

$y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$، حيث: $-\infty < x < \infty$ ، و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

المجال: $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



لإيجاد قيمة اقتران عكسي عند نقطة ما، تُعكَس قاعدة الاقتران الأصلي. فمثلًا، بما أنَّ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$، فإنَّ $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$.

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت)، في الفترة المعطاة إزاء كل منها:

① $\sin^{-1}\frac{1}{2}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{1}{2}$ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

② $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [0, \pi]$

الزاوية التي قيمة جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0, \pi]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

③ $\tan^{-1} 1, \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

الزاوية التي قيمة الظل لها 1 في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\cos^{-1} 0, \quad [0, \pi]$

c) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

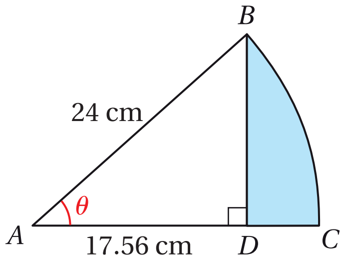
تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة، وإيجاد الاقتران العكسي لِقيَمها. ولكنْ، إذا أردْتُ إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لغير هذه الزوايا، فإنَّني أستعمل الآلة الحاسبة، وكذلك الحال إذا أردْتُ إيجاد الاقتران العكسي لِقيَم غير معروفة.

أتعلَّم

يُمكِن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية للزوايا بالراديان والدرجات؛ شرط ضبطها وَفق النظام المطلوب قبل البدء بعملية الحساب.

مثال 7

يُمثِّل الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا مركزه A، وقياس زاويته θ، وطول نصف قُطْره 24 cm. إذا كانت الزاوية ADB قائمة، وطول $\overline{AD}$ هو 17.56 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



1 قياس زاوية القطاع θ بالراديان.

يُمكِن إيجاد قياس الزاوية θ عن طريق إيجاد قيمة معكوس اقتران جيب التمام باستعمال الآلة الحاسبة:

اقتران جيب التمام $\cos\theta = \frac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}}$

بالتعويض $\cos\theta = \frac{17.56}{24}$

θ هي الزاوية التي نسبة جيب التمام لها $\frac{17.56}{24}$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{17.56}{24}\right)$

أضبط أولًا الآلة الحاسبة وَفق نظام راديان، ثم أجد $\cos^{-1}\left(\frac{17.56}{24}\right)$ كما يأتي:

SHIFT COS (17.56 ÷ 24) = 0.7500325712

إذن، قياس زاوية القطاع هو 0.75 تقريبًا.

أتذكَّر

عند كتابة قياس الزاوية من دون وحدة، فهذا يعني أنَّ القياس هو بوحدة راديان.

2 مساحة القطاع.

قانون مساحة القطاع $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

بتعويض $r = 24, \theta = 0.75$ $\approx \frac{1}{2}(24)^2(0.75)$

بالتبسيط ≈ 216

إذن، مساحة القطاع هي $216\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

3 مساحة المنطقة المظلَّلة.

يُمكِن إيجاد مساحة المنطقة المظلَّلة بطرح مساحة ΔABD من مساحة القطاع.

الخطوة 1: أجد مساحة ΔABD.

مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bc\sin\theta$

بتعويض $c = 24, b = 17.56, \theta = 0.75$ $= \frac{1}{2}(17.56)(24)\sin 0.75$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 144

إذن، مساحة ΔABD هي $144\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

أتذكَّر

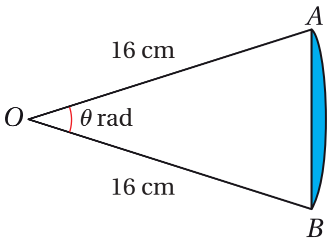
مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

الخطوة 2: أطرح مساحة ΔABD من مساحة القطاع.

$$216 - 144 = 72$$

إذن، مساحة المنطقة المظلَّلة هي $72\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

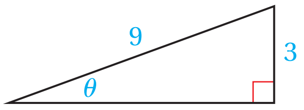


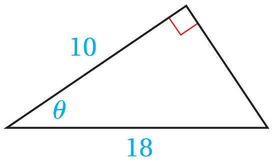
يمثّل الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا مركزه O، وقياس زاويته θ، وطول نصف قطره 16 cm. إذا كان طول القوس AB هو 9.6 cm، فأجد كلًّا مما يأتي:

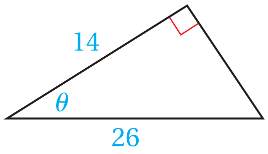
a) قياس زاوية القطاع θ بالراديان. **b)** مساحة القطاع. **c)** مساحة المنطقة المظلَّلة.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1


2


3


تقع النقطة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرســومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4 $(-12, 5)$

5 $(3, -3)$

6 $(-2, -5)$

7 $(3, 7)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

8 $\sec 135°$

9 $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

10 $\cot\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

11 $\cos\frac{7\pi}{4}$

12 $\sec\frac{15\pi}{4}$

13 $\csc(-630°)$

14 $\tan 7\pi$

15 $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\cos\theta = -\frac{7}{12}, \tan\theta > 0$

17 $\sec\theta = 5, \sin\theta < 0$

18 $\cot\theta = \frac{1}{4}, \sin\theta < 0$

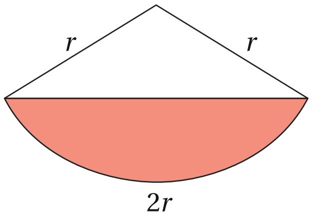
19 $\csc\theta = 2, \cos\theta > 0$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إن وُجِدَت):

20 $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

21 $\tan^{-1}(\sqrt{3}), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

22 $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), [0, \pi]$



يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا، طول نصف قُطْره r، وطول قوسه $2r$. إذا كانت مساحة الجزء المُظلَّل من القطاع $24\ \text{cm}^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 طول نصف قُطْر القطاع.

24 محيط الجزء المُظلَّل.

إذا كان $\cos\frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

25 $\cos\frac{13\pi}{12}$

26 $\cos\frac{11\pi}{12}$

27 $\cos\frac{-\pi}{12}$

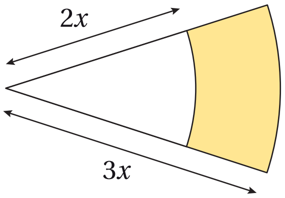
28 $\cos\frac{23\pi}{12}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

29 $\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2$

30 $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi$

مهارات التفكير العليا

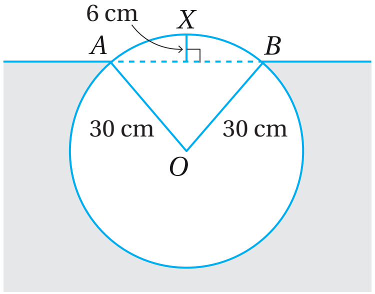


31 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز. إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75، ومساحة الجزء المُظلَّل $30\ \text{cm}^2$، فأجد قيمة x.

تبرير: أُثبِت كُلًّا ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

32 $\tan 210° + \tan 240° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

33 $\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$



34 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المقطع العرضي لقطعة خشب أسطوانية الشكل عائمة على الماء. إذا كان نصف قُطْر المقطع العرضي لقطعة الخشب 30 cm، وكانت النقطتان A وB على سطح الماء، وكان ارتفاع أعلى نقطة من هذه القطعة 6 cm فوق سطح الماء؛ فأجد النسبة المئوية للجزء من مساحة هذا المقطع الواقع تحت سطح الماء.

الدرس 3

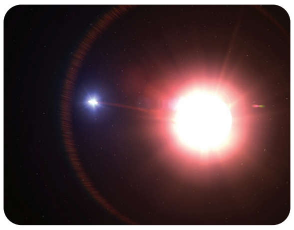
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا

Graphing Trigonometric Functions

فكرة الدرس تمثيل اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

المصطلحات السعة، الاقتران الدوري، الدورة، طول الدورة، الاقترانات الجيبية، خط الوسط، الحركة التوافقية البسيطة، التردُّد.

مسألة اليوم النجوم المُتغيِّرة هي نجوم يختلف سطوعها بشكل دوري، وأحد أكثرها شهرة هو آرلينوس، الذي يُمكِن حساب قيمة سطوعه بالاقتران: $b(t) = 7.9-2.1 \cos(\frac{\pi}{156}t)$، حيث t الزمن بالأيام. أجد السطوع الأقصى والسطوع الأدنى لهذا النجم.



تمثيل الاقتران: $f(x) = \sin x$، والاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا

تعلَّمْتُ سابقًا تمثيل الاقترانين المثلثيين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$ عندما تكون الزوايا بالدرجات في الفترة $[0°, 360°]$، وذلك بإنشاء جدول قِيَم للمُتغيِّرين x وy، وتمثيل كل زوج بنقطة في المستوى. ويُمكِن استعمال هذه الطريقة لتمثيل الاقترانين نفسيهما عند قياس الزوايا بالراديان في الفترة $[0, 2\pi]$.

مثال 1

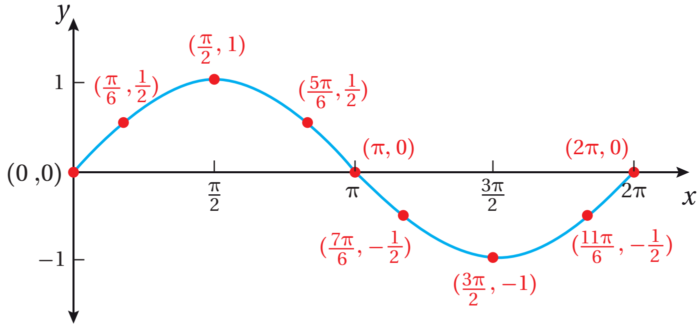
1 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	−0.5	−1	−0.5	0
(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{6}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{5\pi}{6}, 0.5)$	$(\pi, 0)$	$(\frac{7\pi}{6}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{11\pi}{6}, -0.5)$	$(2\pi, 0)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



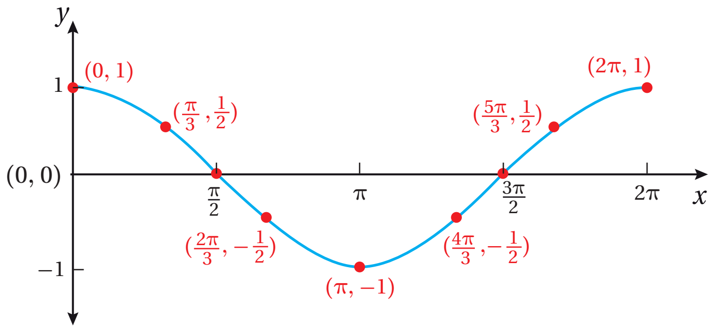
2 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	1	0.5	0	−0.5	−1	−0.5	0	0.5	1
(x, y)	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{3}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -0.5)$	$(\pi, -1)$	$(\frac{4\pi}{3}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{5\pi}{3}, 0.5)$	$(2\pi, 1)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



أتعلَّم

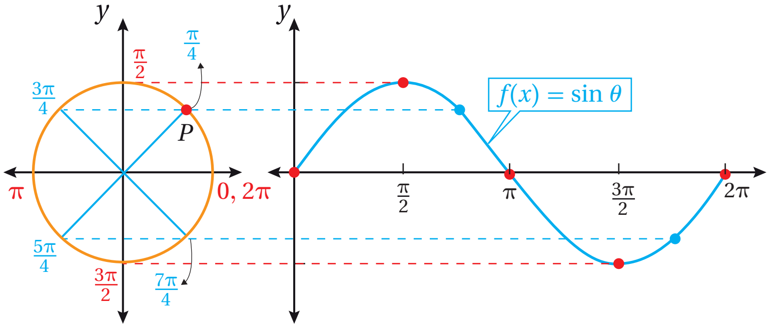
أُلاحِظ أنَّ منحنى اقتران جيب التمام هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى اقتران الجيب بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

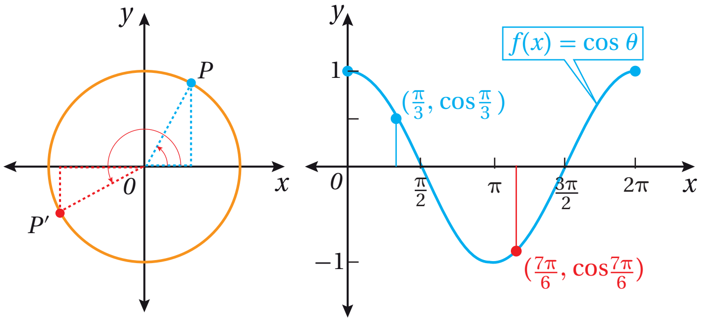
1 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

2 أُمثِّل الاقتران: $f(x) = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin\theta$ يربط بين قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي والإحداثي y للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاوية دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



أمّا التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \cos\theta$ فيربط بين قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي والإحداثي x للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاوية دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



في ما يأتي خصائص التمثيل البياني للاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$:

- مجال كلٍّ من الاقترانين هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مدى كلٍّ من الاقترانين هو الفترة $[-1, 1]$؛ لذا، فإنَّ القيمة الصغرى لكلٍّ منهما -1، والقيمة العظمى لكلٍّ منهما 1
- **سعة** (amplitude) منحنى الاقتران هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى، وتساوي 1 لكلٍّ من الاقترانين؛ لأنَّ:

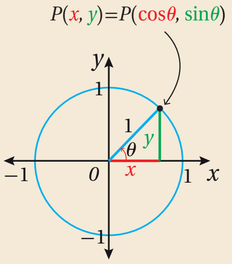
$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

- كلٌّ من الاقترانين هو **اقتران دوري** (periodic function)، وهذا يعني أنَّ التمثيل البياني لمنحنى كلٍّ منهما له نمط مُتكرِّر، وأنَّ أقصر جزء مُتكرِّر من التمثيل يُسمّى **الدورة** (cycle).

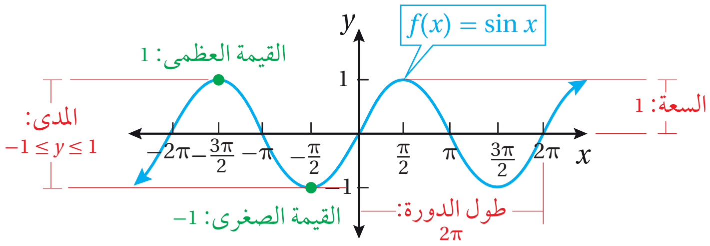
أتذكَّر

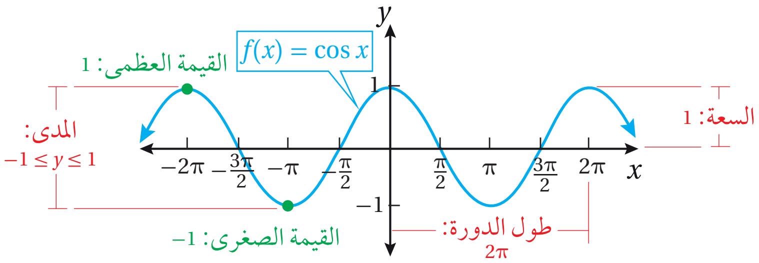
دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قُطْرها وحدة واحدة.

إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$.



- الطول الأفقي لكل دورة يُسمّى **طول الدورة** (period)، والتمثيل البياني للاقترانين يُظهِر أنَّ طول الدورة هو 2π.





الاقترانات الجيبية

الاقترانات الجيبية (sinusoidal functions) هي اقترانات الجيب وجيب التمام الناتجة من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$.

بوجه عام، فإنَّ الصورة العامة للاقترانات الجيبية هي:

$$g(x) = a \cos (bx - c) + d \qquad\qquad g(x) = a \sin (bx - c) + d$$

حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفرًا.

التمدُّد الرأسي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ المعامل a في الاقترانين: $g(x) = a \sin x$، و $g(x) = a \cos x$ يؤدي إلى توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، ومنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، وإذا كان $|a| < 1$، فإنَّ المعامل a يؤدي إلى تضييق رأسي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة a تُؤثِّر في سعة الاقترانات الجيبية.

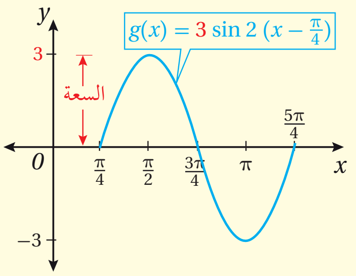
مفهوم أساسي

سعة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: سعة منحنى الاقتران الجيبي هي نصف المسافة بين قيمتيه العظمى والصغرى، أو نصف ارتفاع الموجة.

بالرموز: سعة كلٍّ من: $g(x) = a \sin (bx - c) + d$، و $g(x) = a \cos (bx - c) + d$، هي $|a|$.

مثال:



لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \sin x$، أو الاقتران الجيبي $g(x) = a \cos x$ بيانيًّا، أرسم نقاط تقاطع اقتران الجيب الرئيس، أو جيب التمام الرئيس مع المحور x، ثم أستعمل قيمة السعة $|a|$ لتحديد نقاط عظمى وصغرى للاقتران الجيبي، ثم أرسم الموجة التي تمرُّ بهذه النقاط.

أتعلَّم

يُطلَق على كلٍّ من نقاط تقاطع الاقتران الجيبي مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى، اسم **النقاط المفتاحية**.

مثال 2

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

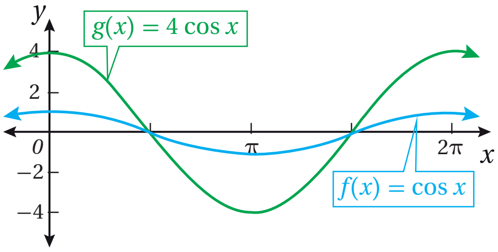
1 $\mathbf{g(x) = 4 \cos x}$

منحنى الاقتران $g(x) = 4 \cos x$ هو توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره 4، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $|4|$ ، أو 4

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في سعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران g.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

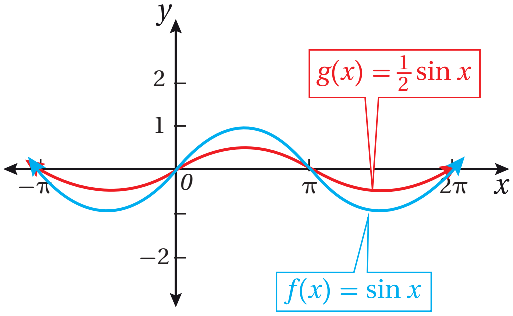
2 $\mathbf{g(x) = \frac{1}{2} \sin x}$

منحنى الاقتران: $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ هو تضييق رأسي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $\left|\frac{1}{2}\right|$ ، أو $\frac{1}{2}$

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \sin x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في سعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = 2\sin x$

b) $g(x) = \frac{1}{4}\cos x$

التمدُّد الأفقي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|b| < 1$، فإنَّ المعامل b في الاقترانين: $g(x) = \sin bx$، و $g(x) = \cos bx$ يؤدي إلى توسيع أفقي لمنحنى كلٍّ من الاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$، وإذا كان $|b| > 1$، فإنَّ المعامل b يؤدي إلى تضييق أفقي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة b تُؤثِّر في طول دورة الاقترانات الجيبية.

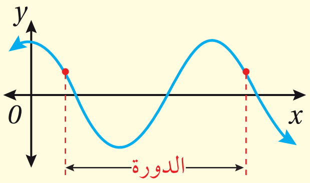
أتعلَّم

عند تحديد طول دورة الاقتران الجيبي من تمثيله البياني، فإنَّها تكون أقصر مسافة تحوي قِيَم الاقتران المختلفة جميعها.

مفهوم أساسي

طول دورة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: طول دورة الاقتران الجيبي هو المسافة بين مجموعتين مُتكرِّرتين من النقاط على منحناه.



بالرموز: طول دورة كلٍّ من: $g(x) = a\sin(bx - c) + d$، و $g(x) = a\cos(bx - c) + d$، هو $\frac{2\pi}{|b|}$، حيث: $b \neq 0$.

لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = \sin bx$، أو الاقتران الجيبي $g(x) = \cos bx$، أُحدِّد طول دورة الاقتران، ثم أجد النقاط المفتاحية لاقتران الجيب الرئيس أو اقتران جيب التمام، ثم أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية في $\frac{1}{b}$.

مثال 3

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

1 $g(x) = \sin \frac{x}{2}$

منحنى الاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ هو توسيع أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره 2، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

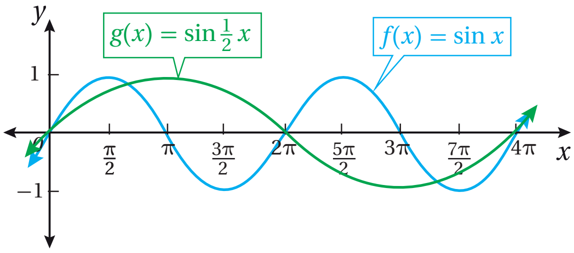
الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \sin x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 4\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في 2؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.

أتذكّر

الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = f(bx)$ ناتج من ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{b}$.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



إرشاد

يُمكِن التحقُّق من التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته 4π

2 $g(x) = \cos 2x$

منحنى الاقتران $g(x) = \cos 2x$ هو تضييق أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

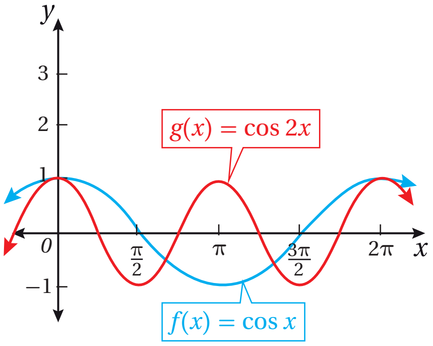
الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{2}$ ؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



إرشاد

يُمكِن التحقُّق من صحة التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \cos 2x$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته π.

أتحقَّق من فهمي

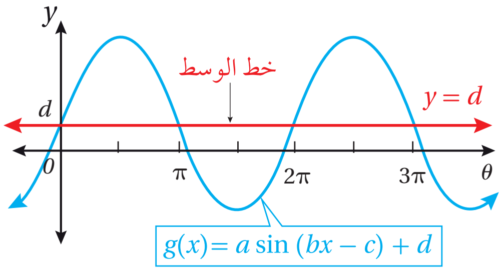
أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$

الانسحاب الرأسي للاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x) + c, c > 0$، هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى الأعلى، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى الأسفل. وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

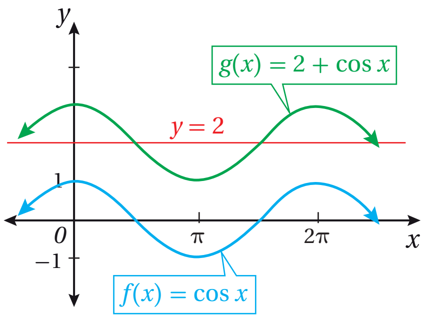


يتذبذب منحنيا الاقترانين الرئيسين: $f(x) = \sin x$، و $f(x) = \cos x$ حول المحور x، ولكنْ عند إجراء انسحاب رأسي للاقتران الجيبي، فإنَّ منحناه يتذبذب حول محور جديد يُسمّى **خط الوسط** (midline).

بوجه عام، فإنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \sin (bx - c) + d$، أو منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = a \cos (bx - c) + d$، هو $y = d$.

مثال 4

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ بيانيًّا.



منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، مزاحًا وحدتين إلى الأعلى. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أزيد الإحداثي y بمقدار 2 لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، واصلًا بينها بمنحنى.

ألاحِظ أنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو $y = 2$، وأنَّ النقاط المفتاحية تتذبذب حوله.

أتذكَّر

يزيد الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار وحدتين على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

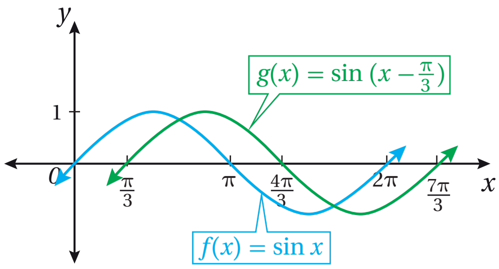
أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin x – 3$ بيانيًّا.

الانسحاب الأفقي للاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x+c), c>0$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليسار، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x-c)$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليمين. وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

مثال 5

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا.



منحنى الاقتران $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، مزاحًا $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أُضيف $\frac{\pi}{3}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، واصلًا بينها بمنحنى.

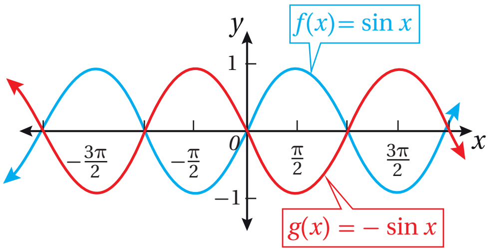
أتذكَّر

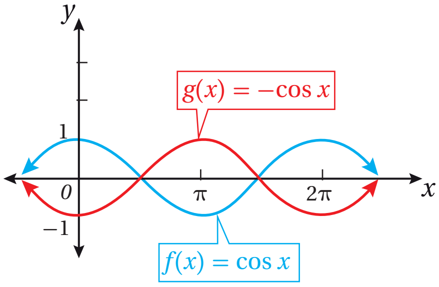
يزيد الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة على الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًّا.

انعكاس الاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تمثيل الاقترانات الجيبية في صورة $g(x) = a\sin(bx - c)+d$، وصورة $g(x) = a\cos(bx - c)+d$ إذا كانت $a > 0$. ولتحديد تأثير قيمة a عندما تكون $a < 0$، أتأمَّل التمثيل البياني لمنحنيي الاقترانين الآتيين: $g(x) = -\sin x$، و $g(x) = -\cos x$.





أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = -\sin x$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$ حول المحور x، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = -\cos x$ هو أيضًا انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$ حول المحور x.

بوجه عام، عندما تكون $a < 0$، فإنَّ منحنى الاقتران $g(x) = a\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $g(x) = a\cos(bx - c)+d$ يكونان انعكاسًا لمنحنى الاقتران: $g(x) = |a|\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $g(x) = |a|\cos(bx - c)+d$ على الترتيب حول خط الوسط $y = d$.

مثال 6

أجد السعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران $g(x) = -\frac{1}{2}\cos(x - \frac{3\pi}{2}) + 1$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

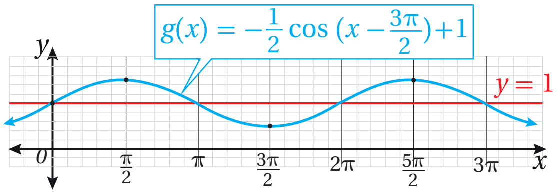
في هذا الاقتران: $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3\pi}{2}, d = 1$

السعة: $|a| = \frac{1}{2}$. طول الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$. معادلة خط الوسط: $y = 1$.

لتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أتَّبع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل خط الوسط $y = 1$ في المستوى الإحداثي.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $y = \cos x$ باستعمال النقاط المفتاحية.

- أعكس النقاط المفتاحية من الخطوة السابقة حول المحور x.
- أضرب الإحداثي y للنقاط المفتاحية في $\frac{1}{2}$؛ لتضييق سعة منحنى الاقتران رأسيًّا.
- أُضيف $\frac{3\pi}{2}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية؛ لإزاحة منحنى الاقتران $\frac{3\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين.
- أُضيف 1 إلى الإحداثي y؛ لإزاحة منحنى الاقتران وحدة إلى الأعلى.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

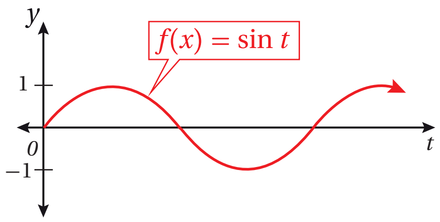


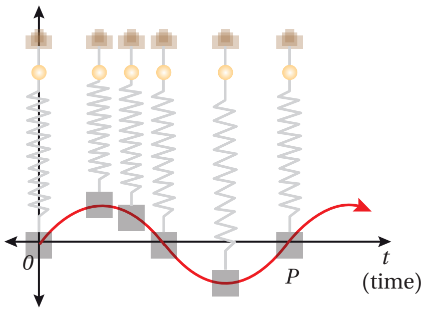
أتحقَّق من فهمي

أجد السـعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران: $g(x) = -2\sin(x - \pi) - 3$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

الحركة التوافقية البسيطة

تُستعمَل الاقترانات الجيبية لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية. فمثلًا، يُمكِن نمذجة حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة في زنبرك نمذجة دقيقة باستعمال المعادلة $f(x) = \sin t$. فعند افتراض أنَّ t هو الزمن المنقضي، يُلاحَظ أنَّ منحنى $f(x) = \sin t$ يرتفع وينخفض بصورة مُتكرِّرة مع مرور الزمن، فتعود الكتلة إلى موقعها الأصلي مرَّة بعد أُخرى.





مفهوم أساسي

إذا كانت المعادلة التي تصف الإزاحة y لجسم من موقع الاتزان مع الزمن t هي:

$$g(x) = a \sin \omega t \qquad \text{or} \qquad g(x) = a \cos \omega t$$

فإنَّ الجسم يكون في **حركة توافقية بسيطة** (simple harmonic motion)، عندئذٍ يُمكِن إيجاد ما يأتي:

- أقصى إزاحة للجسم، وهي تساوي سعة الاقتران $|a|$.
- الزمن الذي يُكمِل فيه الجسم دورة كاملة، وهو يساوي $\frac{2\pi}{\omega}$.
- **التردُّد** (frequency)، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن، وهو يساوي $\frac{\omega}{2\pi}$.

أتعلَّم

الفرق الرئيس بين المعادلتين اللتين تصفان الحركة التوافقية البسيطة هو نقطة البداية؛ فعندما $t = 0$، فإنَّ:

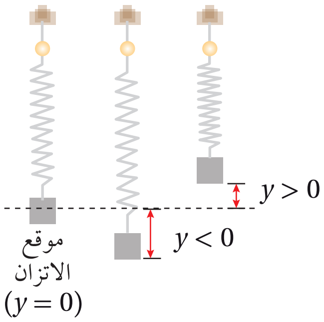
$g(x) = a \sin \omega(0) = 0$

$g(x) = a \cos \omega(0) = a$

وهذا يعني أنَّ الإزاحة من موقع الاتزان عند بدء الحركة في الحالة الأولى صفر، وأنَّها في الحالة الثانية a.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $g(x) = 10 \ \sin 4\pi t$ إزاحة كتلة مُعلَّقة في زنبرك بالسنتيمترات، حيث t الزمن بالثواني:



1 أجد أقصى إزاحة، ودورة الاقتران، والتردُّد لحركة الكتلة.

في هذا الاقتران: $a = 10, \omega = 4\pi$.

- أقصى إزاحة: $|a| = |10| = 10$.
- دورة الاقتران: $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

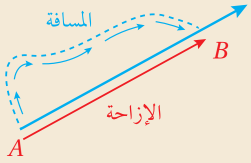
إذن، تُكمِل الكتلة دورة كاملة في $\frac{1}{2}$ ثانية.

- التردُّد: $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

إذن، تُكمِل الكتلة دورتين كاملتين في ثانية.

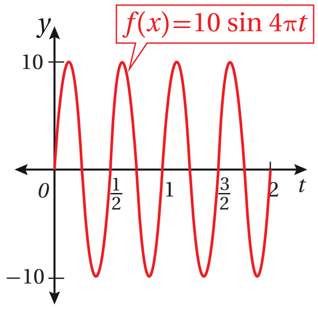
أتعلَّم

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بغَضِّ النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من أو تساوي الصفر. أمّا الإزاحة فهي أقصر مسافة بين نقطة البداية ونقطة النهاية، وقد تكون قيمتها موجبة، أو سالبة، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.



2 **أُمثِّل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن بيانيًّا.**

يُمكِنني تمثيل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $g(x) = 3\cos\frac{1}{2}\pi t$ إزاحة كتلة مُعلَّقة في زنبرك بالسنتيمترات، حيث t الزمن بالثواني:

a) أجد أقصى إزاحة، وطول الدورة، والتردُّد لحركة الكتلة.

b) أُمثِّل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن بيانيًّا.

تمثيل اقتران الظل

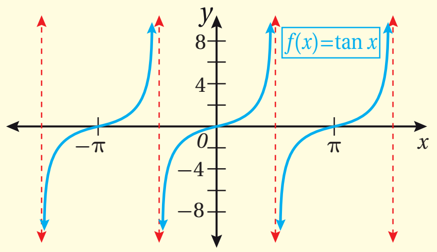
تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، ويُمكِنني استعمال الاستراتيجيات نفسها لتمثيل اقتران الظل. وبما أنَّ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، فإنَّ اقتران الظل يكون غير مُعرَّف عندما $\cos x = 0$؛ ما يعني أنَّ لمنحناه خطوط تقارب رأسية عندما $\cos x = 0$.

مفهوم أساسي

خصائص اقتران الظل

يمتاز الاقتران $f(x) = \tan x$ بالخصائص الآتية:

- طول الدورة هو π.
- المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، ما عدا $n\frac{\pi}{2}$، حيث n عدد صحيح فردي.
- المدى هو جميع الأعداد الحقيقية.



أتعلَّم

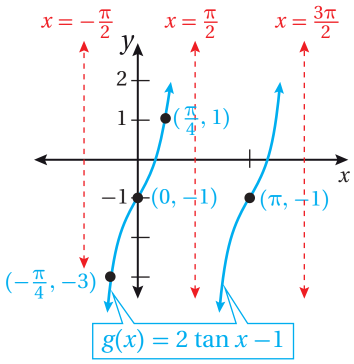
الصيغــة العامــة لاقتران الظل هي: $g = a\tan(bx - c) + d$، حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفرًا.

مثال 8

أُمثِّل منحنى الاقتران: $g(x) = 2\tan x - 1$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

في هذا الاقتران: $a = 2, b = 1, c = 0, d = -1$.

منحنى الاقتران $g(x) = 2\tan x - 1$ هو توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $f(x) = \tan x$، بمعامل مقداره 2، وإزاحة رأسية إلى الأسفل مقدارها 1؛ لذا أضرب الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران $f(x)$ في 2، ثم أطرح منه 1



مجال الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية، ما عدا $n\frac{\pi}{2}$، حيث n عدد صحيح فردي، ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منحنى الاقتران: $g(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد طول الدورة والسعة (إن وُجِدَت) لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

1 $g(x) = 3\sin x$

2 $g(x) = \cos 3x$

3 $g(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

4 $g(x) = 2 - \cos x$

5 $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$

6 $g(x) = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

7 $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$

8 $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$

9 $g(x) = -1 + \tan 2x$

أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل البياني المناسب له من بين التمثيلات البيانية a–f الظاهرة أدناه:

⑩ $g(x) = -2 + \sin(2x + \pi)$

⑪ $g(x) = -\sin(x + \pi)$

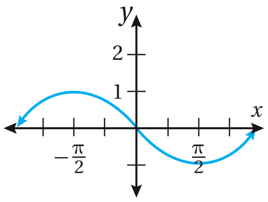
⑫ $g(x) = -3 + \cos x$

⑬ $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

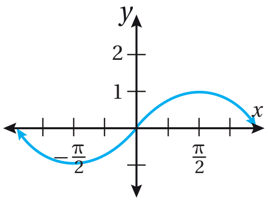
⑭ $g(x) = 1 + \sin \frac{1}{2} x$

⑮ $g(x) = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$

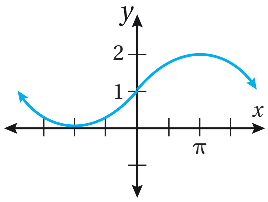
a)



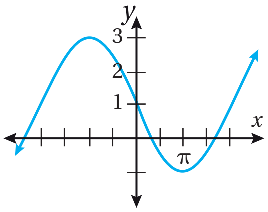
b)



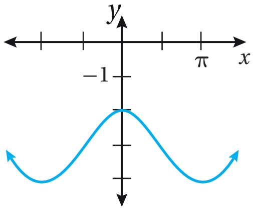
c)



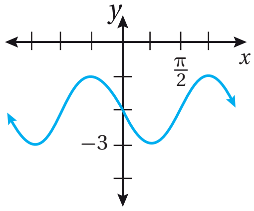
d)



e)



f)



أَصِف التحويلات الهندسية التي طُبِّقت على منحنى الاقتران f لينتج منحنى الاقتران g في كلٍّ ممّا يأتي:

⑯ $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

⑰ $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $g(x) = 3\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2$

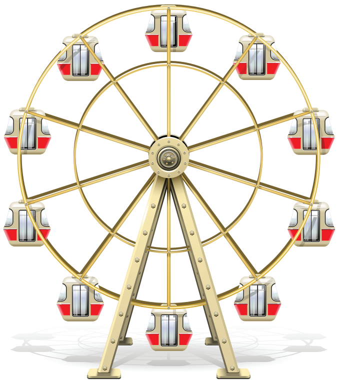
⑱ $f(x) = \sin 3x$, $g(x) = \sin 3(x + 3\pi) - 5$

⑲ $f(x) = \cos x + 9$, $g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

عجلة دوّارة: تُمثِّل المعادلة: $h = 25\sin\frac{\pi}{15}(t - 7.5) + 30$ الارتفاع عن سطح الأرض بالأقدام لشخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني:

⑳ أُمثِّل منحنى معادلة ارتفاع الشخص مع الزمن بيانيًّا.

㉑ ما أقصى ارتفاع للشخص وأدنى ارتفاع له عن سطح الأرض؟



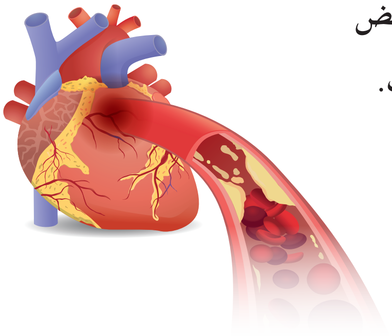
معلومة

قُطْر بعض العجلات الدوّارة كبير جدًّا؛ فقد يزيد على 200 m؛ ما يجعل عرباتها ترتفع عاليًا، فيتمكّن الرُّكّاب من مشاهدة المعالم المحيطة بهم.

معلومة

ضغط الدم هو قيمة تُعبِّر عن الضغط الذي تتعرَّض له شرايين الجسم من الدم، ويُمثِّل عاملًا مُهمًّا لإيصال الأكسجين والعناصر الغذائية إلى أنسجة الجسم المختلفة.

ضغط الدم: يزداد ضغط دم الإنسان في كل مرَّة ينبض فيها القلب، ثم ينخفض مع راحة القلب بين الضربات. ويُمكِن نمذجة ضغط دم أحد الأشخاص باستعمال الاقتران: $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$، حيث: $p(t)$ ضغط الدم بوحدة $mmHg$، و t الزمن بالدقائق:



22 أجد السعة، وطول الدورة، والتردُّد للاقتران p.

23 أُمثِّل منحنى الاقتران p بيانيًّا.

24 إذا كان هذا الشخص يمارس الرياضة، فكيف يُؤثِّر ذلك في طول الدورة والتردُّد للاقتران p؟

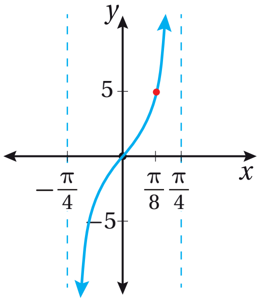
مهارات التفكير العليا

تبرير: أُميِّز الجملة الصحيحة من الجملة غير الصحيحة في ما يأتي، وأبرِّر إجابتي:

25 كل اقتران جيب في صورة $y = a_1 \sin(b_1 x - c_1) + d_1$ يُكتَب بوصفه اقتران جيب تمام في صورة $y = a_2 \cos(b_2 x - c_2) + d_2$.

26 طول دورة الاقتران $f(x) = \cos 8x$ يساوي أربعة أضعاف طول دورة الاقتران $g(x) = \cos 2x$.

27 **تحدٍّ:** أستعمل التمثيل البياني المجاور لكتابة قاعدة اقتران في صورة: $y = a \tan bx$.



28 **تحدٍّ:** أملأ الفراغ بما هو مناسب في ما يأتي لتصبح المعادلة صحيحة:

$$\cos(-2x + 6\pi) = \sin 2(x + \square)$$

معمل برمجية جيوجبرا

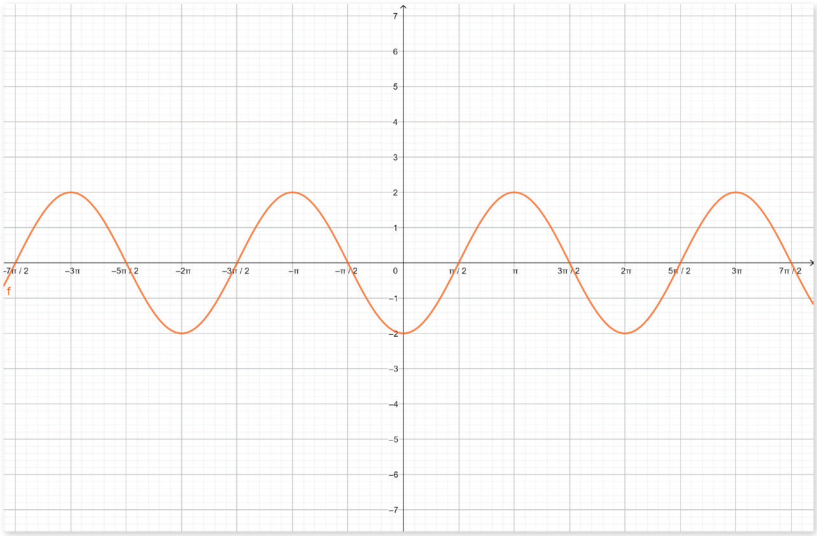
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا

Graphing Trigonometric Functions

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا باستعمال نظام الراديان.

نشاط

أُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 2\cos(x - \pi)$ باستعمال برمجية جيوجبرا.



1 أكتب الاقتران: $f(x) = 2\cos(x-\pi)$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter.

2 لتغيير قياسات الزوايا إلى نظام الراديان، أنقر أيقونة ، ثم أيقونة ، فتظهر قائمة في الجانب الأيمن من الشاشة.

3 أختار xAxis من القائمة، ثم أنقر المربع الصغير بجانب كلمة Distance: ؛ لتفعيل هذه الخانة.

4 بعد تفعيل خانة Distance: أستطيع اختيار التقسيم المناسب للمحور x. فمثلًا، أنقر السهم الصغير المجاور للكلمة، ثم أختار منه $\frac{\pi}{2}$: ☑ Distance: π/2

5 أُغيِّر وحدة القياس المُستعمَلة للتمثيل؛ بنقر السهم الصغير المجاور لكلمة Unit: ، ثم أختار الرمز π.

6 يُمكِنني إظهار جميع نقاط القِيَم العظمى والصغرى على منحنى الاقتران؛ بنقر A من شريط الأدوات، ثم اختيار Extremum ، ثم نقر منحنى الاقتران.

أتدرَّب

أُمثِّل كُلًّا من الاقترانات المثلثية الآتية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا:

1 $f(x) = 5\sin x$

2 $f(x) = \cos(3-x)$

3 $g(x) = 1-\sin(x-\frac{\pi}{6})$

4 $g(x) = 2-\cos x$

5 $g(x) = \frac{1}{2}\cos \pi x$

6 $g(x) = 4 + \tan 2x$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

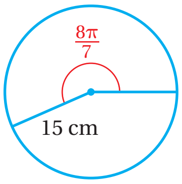
1 إذا كان $\cot \theta = 1$، فإنَّ $\tan \theta$ تساوي:

a) -1 **b)** 1 **c)** 0 **d)** 3

2 قياس الراديان الذي يساوي $56°$ هو:

a) $\frac{\pi}{15}$ **b)** $\frac{14\pi}{45}$ **c)** $\frac{7\pi}{45}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$

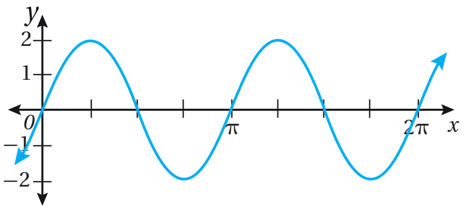
3 طول القـوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة المجـاورة، مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة هو:



a) 4.2 cm **b)** 17.1 cm

c) 53.9 cm **d)** 2638.9 cm

4 قاعدة الاقتران التي تُمثِّل المنحنى الآتي هي:



a) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$ **b)** $y = \frac{1}{4} \sin 2x$

c) $y = 2 \sin 2x$ **d)** $y = 4 \sin \frac{1}{2} x$

5 النقطة التي يوجد عندها قيمة عظمى للاقتران: $y = -4 \cos (x - \frac{\pi}{2})$ هي:

a) $(-\frac{\pi}{2}, 4)$ **b)** $(\frac{\pi}{2}, 4)$

c) $(0, 4)$ **d)** $(\pi, 4)$

6 أحد الآتية يُعَدُّ خط تقارب رأسيًّا لمنحنى الاقتران: $y = 3 \tan 4x$:

a) $x = \frac{\pi}{8}$ **b)** $x = \frac{\pi}{4}$

c) $x = 0$ **d)** $x = -\frac{\pi}{6}$

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في ما يأتي:

7 780° **8** − 570°

9 $\frac{\pi}{12}$ **10** $\frac{5\pi}{2}$

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

11 −720° **12** 315°

13 $\frac{13\pi}{8}$ **14** 3.5π

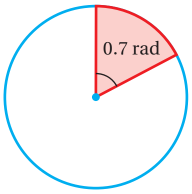
أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

15 −115° **16** 780°

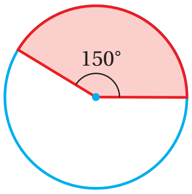
17 $-\frac{7\pi}{3}$ **18** $\frac{\pi}{9}$

أجد نصف قُطْر كل قطاع ممّا يأتي، علمًا بأنَّ مساحة القطاع 12 وحدة مربعة:

19



20



اختبار نهاية الوحدة

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

21 $\sec 300°$

22 $\tan 240°$

23 $\cos \frac{14\pi}{3}$

24 $\sec(-3\pi)$

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

25 $\cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta < 0$

26 $\sec\theta = 2, \sin\theta < 0$

أجد طول الدورة والسعة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

27 $g(x) = 3\cos\pi(x + \frac{1}{2})$

28 $g(x) = 2\sin(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6})$

29 $g(x) = 4\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

30 $g(x) = -5\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$

أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل المناسب له:

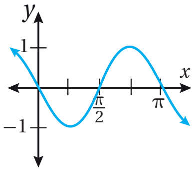
31 $g(x) = 3+\sin x$

32 $g(x) = -3+\cos x$

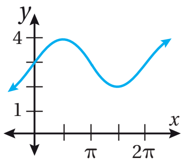
33 $g(x) = \sin 2(x-\frac{\pi}{2})$

34 $g(x) = \cos 2(x-\frac{\pi}{2})$

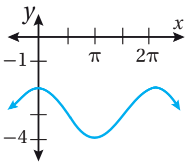
a)



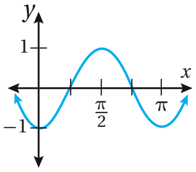
b)



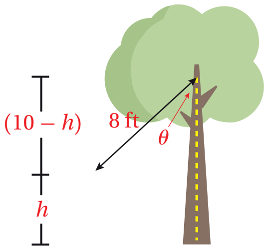
c)



d)



أرجوحة: يُمكِن تمثيل الارتفاع بالأقدام لأرجوحة فوق سطح الأرض بالاقتران: $h = -8\cos\theta + 10$، حيث يرتفع مربط الأرجوحة 10 أقدام فوق سطح الأرض، ويبلغ طول حبل الأرجوحة 8 أقدام، وتُمثِّل θ الزاوية التي يصنعها الحبل مع المحور الرأسي:



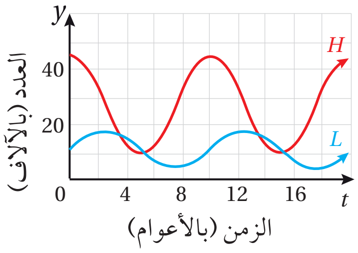
35 أجد ارتفاع الأرجوحة عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

36 أُمثِّل الاقتران h بيانيًّا.

غابات: إذا كان عدد حيوانات الوشق (المُفترِس) بالآلاف في إحدى الغابات يعطى بالمعادلة: $L = 11.5 + 6.5\sin\frac{\pi}{5}t$، وعدد الأرانب (الفريسة) بالآلاف يعطى بالمعادلة: $H = 27.5 + 17.5\cos\frac{\pi}{5}t$، حيث t الزمن بالأعوام، فأُجيب عمّا يأتي:

37 أجد نسبة عدد الأرانب إلى عدد الوشق بعد 5 أعوام.

38 أستعمل التمثيل البياني الآتي لتوضيح كيف تبدو التغيُّرات مُترابِطة في أعداد مجموعتي الحيوانات.



الوحدة
5

التكامل
Integration

ما أهمية هذه الوحدة؟

التكامل هو عملية مُعاكِسة للتفاضل، وله تطبيقات علمية وحياتية كثيرة. فمثلًا، يستعمل مُصمِّمو السيّارات التكامل لحساب قيمة تُسمّى مُؤشِّر الخطورة، ويُمكِن بها تقدير شِدَّة إصابة الرأس عند الاصطدام؛ بُغْيَةَ تقليل هذه القيمة، وجعل السيّارة أكثر أمانًا.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تحويل المقادير من الصورة الجذرية إلى الصورة الأُسّية، وبالعكس.
- ✓ إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة.
- ✓ رسم منحنيات كثيرات الحدود باستعمال المشتقة والتحويلات الهندسية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد التكامل المحدود والتكامل غير المحدود لاقترانات القوّة.
- خصائص التكامل المحدود.
- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران كثير حدود والمحور x.
- إيجاد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران كثير حدود والمحور x حول المحور x.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (20 – 15) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس

1

التكامل غير المحدود

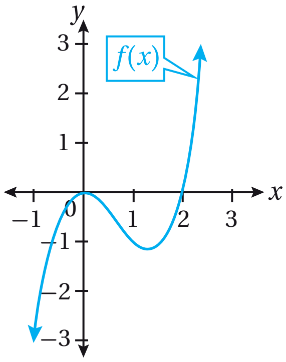
Indefinite Integral

فكرة الدرس

- تعرُّف التكامل بوصفه عملية عكسية للاشتقاق.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقتران القوَّة، والاقتران الثابت.

المصطلحات الاقتران الأصلي، التكامل غير المحدود، المُكامَل، ثابت التكامل، مُتغيِّر التكامل.

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، هل يُمكِنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمْتُ أنَّ مشتقته هي: $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟



الاقتران الأصلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان الاقتران معلومًا فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقته باستعمال قواعد الاشتقاق. ولكنْ، إذا كانت مشتقة الاقتران معلومة، فكيف يُمكِن معرفة الاقتران؟ في هذه الحالة، يتعيَّن استعمال طريقة عكسية تلغي المشتقة. وبكلمات أُخرى، إذا عُلِم الاقتران $f(x)$، فيجب إيجاد اقتران ما، وليكن: $F(x)$، بحيث $F'(x) = f(x)$، ويُسمّى $F(x)$ **اقترانًا أصليًّا** (primitive function) للاقتران $f(x)$.

أتذكَّر

يُرمَز إلى مشتقة الاقتران $F(x)$، بالنسبة إلى المُتغيِّر x، بالرمز $F'(x)$.

فمثلًا، إذا كان: $f(x) = 3x^2$، فإنَّ الاقتران: $F(x) = x^3$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، لكنَّها ليست الصورة الوحيدة له؛ فقد يكون في صورة: $F(x) = x^3 + 1$، أو صورة: $F(x) = x^3 - 3$؛ لأنَّ مشتقة كلٍّ منهما تساوي $3x^2$ (مشتقة الحدِّ الثابت تساوي صفرًا).

بوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران: $f(x)= 3x^2$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C = x^3 + C$، حيث C ثابت.

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الاقترانات الأصلية للاقتران الواحد.

مفهوم أساسي **الاقتران الأصلي**

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران المتصل $f(x)$، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مثال 1

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1 $f(x) = 5x^4$

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $5x^4$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 5 وبما أنَّ مشتقة x^5 تساوي $5x^4$، فإنَّ: $F(x) = x^5$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$. ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^5 + C$$

2 $f(x) = -8x^{-9}$

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $-8x^{-9}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -8 وبما أنَّ مشتقة x^{-8} تساوي $-8x^{-9}$، فإنَّ: $F(x) = x^{-8}$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$. ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^{-8} + C$$

أتحقَّق من فهمي أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 10x^9$

b) $f(x) = -11\,x^{-12}$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّه يُمكِن كتابة العلاقة بين الاقتران $f(x)$ والاقتران الأصلي له $G(x) = F(x) + C$ في صورة المعادلة الآتية:

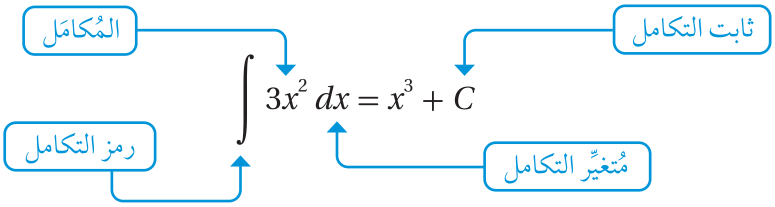
$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

يُمكِن التعبير عن هذه المعادلة من دون استعمال رمز المشتقة كالآتي:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** (indefinite integral) للاقتران $f(x)$، ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** (integrand)، ويُسمّى C **ثابت التكامل** (constant of integration)، أمّا dx فرمز يشير إلى أنَّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل** (variable of integration).

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:



$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

بما أنَّ: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$، فهذا يعني أنَّ: $F'(x) = f(x)$، وبهذه العلاقة بين المشتقة والاقتران الأصلي، يُمكِن التوصُّل إلى القواعد الآتية.

أتعلَّم

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنَّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

مفهوم أساسي

قواعد التكامل غير المحدود

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت 1) $\int k\, dx = kx + C$

تكامل اقتران القوَّة 2) $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صحة التكامل بإيجاد مشتقة الاقتران الناتج من التكامل.

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 7\, dx$

تكامل الثابت

$$\int 7\, dx = 7x + C$$

2 $\int x^{18}\, dx$

تكامل اقتران القوَّة

$$\int x^{18}\, dx = \frac{1}{18+1}\, x^{18+1} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{19} x^{19} + C$$

3 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

تعريف الأُسِّ السالب

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

بالتبسيط

$$= 2\, x^{\frac{1}{2}} + C$$

الصورة الجذرية

$$= 2\sqrt{x} + C$$

أتعلَّم

لإيجاد تكامل اقتران قوَّة، أَتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

- أُضيف 1 إلى الأُسِّ.
- أضرب في مقلوب الأُسِّ الجديد.

أتعلَّم

قبل البدء بعملية التكامل، أُعيد أوَّلًا كتابة المُكامَل في صورة $x^{m/n}$، مُستذكِرًا العلاقة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 9\,dx$ b) $\int x^{-4}\,dx$ c) $\int \sqrt[6]{x}\,dx$

خصائص التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيفية إيجاد تكامل غير محدود للثابت واقتران القوَّة. وسأتعلَّم الآن بعض الخصائص التي تُسهِّل عملية إيجاد تكامل الاقترانات التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي

خصائص التكامل غير المحدود

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت 1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

تكامل المجموع أو الفرق 2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x^{-\frac{3}{2}} + 2)\,dx$

تكامل المجموع $\int (x^{-\frac{3}{2}} + 2)\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int 2\,dx$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت $= \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 2x + C$

بالتبسيط $= -2\,x^{-\frac{1}{2}} + 2x + C$

2 $\int (6x^2 - 2x^{-3})\,dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الفرق $\int (6x^2 - 2x^{-3})dx = 6\int x^2\,dx - 2\int x^{-3}\,dx$

تكامل اقتران القوَّة $= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 2\left(\frac{1}{-2}x^{-2}\right) + C$

بالتبسيط $= 2x^3 + x^{-2} + C$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه كُتِب ثابت تكامل واحد فقط، هو C الذي يمثِّل الثابتين الناتجين من التكامل.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (2x^4 + 3x^{-3} - 7x^2)\, dx$

b) $\int (5x^{\frac{-3}{2}} + 3x^2)dx$

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البدء بعملية التكامل.

أتعلَّم

لا توجد قاعدة يمكن استخدامها لجميع تكاملات الضرب؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أضرِب المقدارين الجبريّين أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

مثال 4 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right) dx$

$$\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right) dx = \int (x^3+2)\, dx$$ بتوزيع الضرب على الجمع

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$ تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

2 $\int \frac{3x+2x^4}{x}\, dx$

$$\int \frac{3x+2x^4}{x}\, dx = \int \left(\frac{3x}{x}+\frac{2x^4}{x}\right) dx$$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int (3+2x^3)\, dx$$ بالتبسيط

$$= 3x + \frac{1}{2}x^4 + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

أتعلَّم

لا توجد قاعدة لتكامل القسمة؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَقسِم كل حدٍّ في البسط على المقام أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

3 $\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}\, dx$$ بالضرب

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (2x+3)(x-1)\,dx$ b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{2x^2+4}{x^2}\,dx$

تكامل $(ax+b)^n$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان: $f(x) = (3x-5)^5$، فإنَّه يُمكِن استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 15\,(3x-5)^4$.

إذا أردْتُ إيجاد التكامل غير المحدود: $\int (3x-5)^4\,dx$، فإنَّني أبدأ أولًا التفكير في الاقتران: $f(x) = (3x-5)^5$، الذي يزيد أُسُّه بمقدار 1 على درجة المُكامَل. وفي هذه الحالة، فإنَّ: $f'(x) = 15\,(3x-5)^4$. ولأنَّ هذا المُكامَل مضروب في 15؛ فإنَّ:

$$\int (3x-5)^4\,dx = \frac{1}{15}(3x-5)^5 + C$$

بوجه عام، يُمكِن إيجاد التكامل غير المحدود لأيِّ اقتران في صورة: $f(x) = (ax+b)^n$، باستعمال القاعدة الآتية:

أتعلَّم

ضربُ ناتج التكامل في $\frac{1}{15}$ يلغي العدد 15 الناتج من اشتقاق: $(3x-5)^5$.

مفهوم أساسي **تكامل $(ax+b)^n$**

إذا كان a و b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C,\quad n \neq -1$$

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x+7)^5\,dx$

$$\int (x+7)^5\,dx = \frac{1}{5+1}(x+7)^{5+1} + C$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{6}(x+7)^6 + C$$ بالتبسيط

2 $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx = \int (4x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{4\times\frac{1}{2}}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (3x-4)^6\, dx$

b) $\int \sqrt{x+1}\, dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
2. $f(x) = -x^{-2}$
3. $f(x) = -5$
4. $f(x) = 6x^5$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5. $\int 6x\, dx$
6. $\int (4x+2)\, dx$
7. $\int 2x^4\, dx$
8. $\int \frac{5}{x^3}\, dx$
9. $\int 2x^{\frac{3}{2}}\, dx$
10. $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\, dx$
11. $\int x^2(x-8)\, dx$
12. $\int \left(x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13. $\int \frac{4x^3-2}{x^3}\, dx$
14. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\, dx$
15. $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$
16. $\int x\sqrt{x}\, dx$
17. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$
18. $\int (x-1)(x-3)(x+1)\, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

19 $\int (x+7)^4 \; dx$

20 $\int \frac{3}{(10x+1)^2} \; dx$

21 $\int \frac{2}{\sqrt{10x+5}} \; dx$

إذا كان: $y = \sqrt[3]{2x+5}$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

22 أجد $\int y^2 \; dx$.

23 أُثبِت أنَّ: $\int y \, dx = \frac{3}{8} \, y^4 + C$.

24 **اختيار من مُتعدِّد:** $\int \frac{x^3-1}{x^2} \; dx$ يساوي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$

d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

مهارات التفكير العليا

25 **أكتشف الخطأ:** أوجد عامر ناتج التكامل: $\int (2x+1)(x-1) dx$، وكان حلُّه على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1) \; dx = \int (2x+1) \; dx \times \int (x-1) \; dx$$

$$= (x^2 + x)\left(\frac{1}{2} x^2 - x\right) + C$$

أكتشف الخطأ في حلِّ عامر، ثم أُصحِّحه.

26 **تحدٍّ:** أجد التكامل الآتي: $\int \frac{(2x-3)^3 \, (2x^2 - 5x + 3)}{x-1} \; dx$.

27 **تبرير:** إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q \right) \; dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، وأبرِّر إجابتي.

الدرس

2

الشرط الأوَّلي

Initial Condition

فكرة الدرس تعرُّف الشرط الأوَّلي، واستعماله لإيجاد قيمة ثابت التكامل.

المصطلحات الشرط الأوَّلي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق، و $S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

الشرط الأوَّلي، وإيجاد قاعدة الاقتران

يتطلَّب حَلُّ بعض المسائل إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّقها، وهذا يعني ضرورة تحديد قيمة ثابت التكامل C. يُمكِن تحديد هذه القيمة بتعويض نقطةٍ تُحقِّق الاقتران الأصلي، وتعطى عادةً في المسألة، وتُسمّى **الشرط الأوَّلي** (initial condition).

أتذكَّر

للاقتـران $f(x)$ عـدد لانهائي مـن الاقترانات الأصلية التي يُمكِن التعبير عنهـا بالصـورة الآتية: $G(x) = F(x) + C$، حيث: $f(x) = F'(x)$.

مثال 1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$f(x) = \int f'(x)\ dx$ $\quad$ $f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)\ dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت $\quad$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأوَّلي المعطى في المسألة، وهو النقطة $(2, 4)$ التي يمرُّ بها منحنى الاقتران، وتُحقِّق قاعدة الاقتران؛ أيْ أُعوِّض $x = 2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

قاعدة الاقتران $\quad$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$

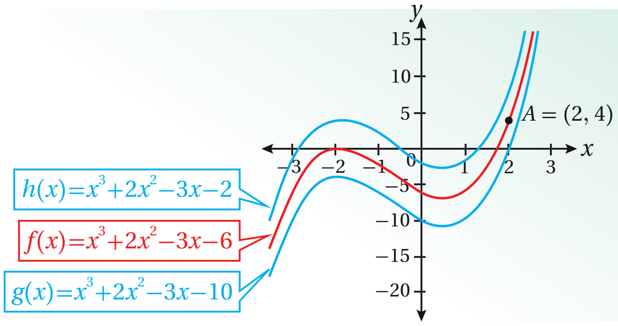
بتعويض $x = 2, f(2) = 4$ $\quad$ $4 = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + C$

بحَلِّ المعادلة لـ C $\quad$ $C = -6$

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور أنَّ الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي في المسألة هو: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$.



أتحقَّق من فهمي

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

يُستعمَل الشرط الأوَّلي كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

مثال 2 : من الحياة

التكلفة الحدِّيـة: يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي JD 583.

أتذكَّر

تُمثِّل التكلفة الحدِّية مشتقة اقتران التكلفة، وترتبط بالتكاليف التي تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج، خلافًا للتكلفة الثابتة التي لا تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $C'(x)$.

$$C(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\, dx \qquad C(x) = \int C'(x)\, dx$$

$$= x^3 - 30x^2 + 400x + K$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

أتعلَّم

بما أنَّ C يُمثِّل اقتران التكلفة، فإنَّني أستعمل K للتعبير عن ثابت التكامل.

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل K.

$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + K$ قاعدة الاقتران

$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400(1) + K$ بتعويض $x = 1, C(1) = 583$

$K = 212$ بحَلِّ المعادلة لـ K

إذن، اقتران التكلفة هو: $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$.

أتحقَّق من فهمي

التكلفة الحدِّية: يُمثِّـل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشـركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2200.

الشرط الأوَّلي: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة.

مثال 3

يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مسـتقيم، وتعطى سـرعته بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

بمـا أنَّ اقتـران الموقـع هو اقتران أصلـي لاقتران السـرعة، فإنَّـه يُمكِنني إيجاد موقع الجُسَـيْم بعـد t ثانية عـن طريـق التكامل.

أتذكَّر

اقتـران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السـرعة، واقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسـارع؛ أيْ إنَّ:

$$s'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع.

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$ بإيجاد تكامل اقتران السرعة

$$= \int (t + 2)\ dt$$ بتعويض $v(t) = t + 2$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَـيْم هو 11 m، فإنَّ $s(0) = 11$، وهذا يُعَدُّ شـرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C:

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$ اقتران الموقع

بتعويض $t = 0, s(0) = 11$

$$11 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C$$

بحَلِّ المعادلة

$$C = 11$$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$$

بتعويض $t = 8$

$$s(8) = \frac{1}{2}(8)^2 + 2(8) + 11$$

بالتبسيط

$$= 59$$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة هو: 59 m

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

يُمكِن إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران التسارع له. ولكنْ، يجب في هذه الحالة توافر شرطين أوَّليين لحَلِّ المسألة، يُستعمَلان لإيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع، وإيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران السرعة.

مثال 4

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، وكانت سرعته هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الخطوة 1: أجد اقتران السرعة.

- بما أنَّ اقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع، فإنَّه يُمكِنني إيجاد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية عن طريق التكامل:

بإيجاد تكامل اقتران التسارع

$$v(t) = \int a(t)\ dt$$

بتعويض $a(t) = 6t$

$$= \int 6t\ dt$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= 3t^2 + C_1$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ سرعة الجُسَيْم بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته هي 1 m/s، فإنَّ: $v(1) = 1$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

اقتران السرعة

$$v(t) = 3t^2 + C_1$$

بتعويض $t = 1, v(1) = 1$

$$1 = 3\,(1)^2 + C_1$$

بحَلِّ المعادلة

$$C_1 = -2$$

إذن، اقتران السرعة هو: $v(t) = 3t^2 - 2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

بتعويض $v(t) = 3t^2 - 2$

$$= \int (3t^2 - 2)\ dt$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= t^3 - 2t + C_2$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_2.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فإنَّ: $s(0) = 4$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2:

اقتران الموقع

$$s(t) = t^3 - 2t + C_2$$

بتعويض $t = 0, s(0) = 4$

$$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$$

بحَلِّ المعادلة

$$C_2 = 4$$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = t^3 - 2t + 4$.

أتذكَّر

يُرمَز إلى ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع بالرمز C_1؛ نظرًا إلى وجود ثابت تكامل آخر سينتج من تكامل اقتران السرعة.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

$s(t) = t^3 - 2t + 4$ اقتران الموقع

$s(2) = (2)^3 - 2(2) + 4$ بتعويض $t = 2$

$= 8$ بالتبسيط

إذن، موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة هو: 8 m

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

① $f'(x) = x - 3; (2, 9)$

② $f'(x) = x^2 - 4; (0, 7)$

③ $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2; (1, 9)$

④ $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2; (4, 11)$

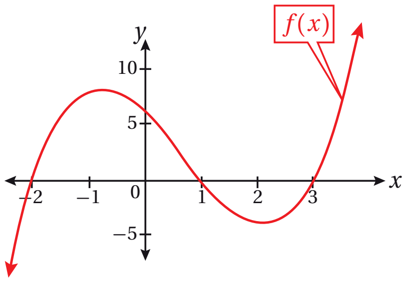
⑤ $f'(x) = (x + 2)^2; (1, 7)$

⑥ $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - x; (4, 0)$

⑦ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 5)$.

⑧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \frac{x^2 + 10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5, 2)$.

⑨ يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



بالـون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قُطْره y سنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t^{-\frac{2}{3}}, t > 0$، وكان نصف قُطْر البالون بعد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 قاعدة العلاقة y بدلالة t.

11 نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

12 **أشجار:** في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، وt عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

13 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

14 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، وكانت سرعته هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

15 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9-2t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها 2 m/s، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا

16 **تبرير:** تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a وb ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2,8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0,18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، وأبرّر إجابتي.

17 **تحدٍّ:** إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4-\frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الدرس 3

التكامل المحدود

Definite Integral

فكرة الدرس

- إيجاد التكامل المحدود لاقترانات القوَّة، والاقترانات المُتشعِّبة.
- إيجاد تكاملات باستعمال خصائص التكامل المحدود.

المصطلحات التكامل المحدود.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدِّية الشهرية (بالدينار) لكل درّاجة نارية يُنتِجها أحد مصانع الدرّاجات، حيث x عدد الدرّاجات المُنتَجة شهريًّا، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x درّاجة شهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 درّاجة إلى 600 درّاجة شهريًّا.

التكامل المحدود

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّ $\int f(x)\ dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، وتعلَّمْتُ أيضًا كيف أجد التكامل غير المحدود للاقتران الثابت واقتران القوَّة.

يُطلَق على: $\int_a^b f(x)\ dx$ اسم **التكامل المحدود** (definite integral) للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي له.

يُعرَّف التكامل المحدود: $\int_a^b f(x)\ dx$ على النحو الآتي:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

حدود التكامل من a إلى b.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي.

أتذكَّر

$F(x)$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

عند إيجاد التكامل المحدود لأيِّ اقتران $f(x)$، أُلاحِظ إلغاء ثابت التكامل C، وهذا يعني أنَّ الناتج هو نفسه بصرف النظر عن الاقتران الأصلي المُستعمَل:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= [(F(b) + C)] - [(F(a) + C)] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، وكان $F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

يُمكِن التعبير عن الفرق: $F(b) - F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

أتعلَّم

أستعمل الرمز: $F(x)\Big|_a^b$ بعد الانتهاء من عملية التكامل.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

① $\int_0^1 (2x-5)\ dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int_0^1 (2x-5)\ dx = (x^2-5x)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= ((1)^2-5(1)) - ((0)^2-5(0))$$

بالتبسيط

$$= -4$$

② $\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx = \int_{-4}^3 (4x-3x^2)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2x^2 - x^3)\Big|_{-4}^3$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2 - (3)^3) - (2(-4)^2 - (-4)^3)$$

بالتبسيط

$$= -105$$

أتذكَّر

لا يَلزم إضافةُ ثابت التكامل عند إيجاد ناتج التكامل المحدود.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

b) $\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)\ dx$

a) $\int_1^4 (8x-\sqrt{x})\ dx$

يُمكِن إيجاد قيمة مجهولة في تكامل محدود، مِثْل حدٍّ من حدوده، إذا عُلِمت قيمة هذا التكامل كما في المثال الآتي.

مثال 2

إذا كان: $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

التكامل المعطى	$\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$
الصورة الأُسِّية	$\int_1^k x^{-1/2}\, dx = 3$
تكامل اقتران القوَّة	$2x^{1/2} \Big\vert_1^k = 3$
الصورة الجذرية	$2\sqrt{x} \Big\vert_1^k = 3$
بالتعويض	$2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$
بالتبسيط	$2\sqrt{k} - 2 = 3$
بجمع 2 لطرفي المعادلة	$2\sqrt{k} = 5$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$\sqrt{k} = \frac{5}{2}$
بتربيع طرفي المعادلة	$k = \frac{25}{4}$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_0^k 6x^2\, dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

خصائص التكامل المحدود

تعرَّفْتُ سابقًا خصائص التكامل غير المحدود. والآن سأتعرَّف بعض خصائص التكامل المحدود.

خصائص التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت
1) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

تكامل المجموع أو الفرق
2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

التكامل عند نقطة
3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

التبديل بين حدَّي التكامل
4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

تجزئة التكامل
5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

أتعلَّم

في خاصية تجزئة التكامل، لا يُشترَط أنْ تكون $a < c < b$.

مثال 3

إذا كان: $\int_5^7 f(x)\,dx = 3, \int_0^5 g(x)\,dx = -4, \int_0^5 f(x)\,dx = 10$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\int_0^5 (4\,f(x) + g(x))\,dx$

تكامل المجموع
$$\int_0^5 (4\,f(x) + g(x))\,dx = \int_0^5 4\,f(x)\,dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت
$$= 4\int_0^5 f(x)\,dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

بالتعويض
$$= 4(10) + (-4)$$

بالتبسيط
$$= 36$$

2 $\int_5^0 5g(x)\,dx$

بالتبديل بين حدَّي التكامل
$$\int_5^0 5g\,(x)\,dx = -\int_0^5 5g\,(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت
$$= -5\int_0^5 g(x)\,dx$$

بالتعويض
$$= -5 \times -4$$

بالتبسيط
$$= 20$$

3 $\int_0^7 f(x)\ dx$

$$\int_0^7 f(x)\ dx = \int_0^5 f(x)\ dx + \int_5^7 f(x)\ dx$$ بتجزئة التكامل

$$= 10 + 3$$ بالتعويض

$$= 13$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 7$, $\int_{4}^{1} f(x)\ dx = 2$, $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 5$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\ dx$ b) $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$ c) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\ dx$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيف أستعمل خاصية التجزئة في إيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل هذه الخاصية في إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعِّبة إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ إذ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال 4

1 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\ dx$.

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^2 12\, dx + \int_2^4 3x^2\ dx$$ قاعدة تجزئة التكامل

$$= 12x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_2^4$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 12(2) - 12(1) + ((4)^3 - (2)^3)$$ بالتعويض

$$= 68$$ بالتبسيط

أتعلَّم

بما أنَّ الاقتران قد تشعَّب عندما $x = 2$، فإنَّني أُجزِّئ التكامل في هذه الحالة؛ لأنَّ فترة التكامل تحوي نقطة التشعُّب.

2 إذا كان: $f(x)=|x-1|$، فأجد قيمة: $\int_0^5 f(x)\,dx$.

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x)=|x-1|=\begin{cases}1-x & , x<1\\ x-1 & , x\geq 1\end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^5 (x-1)\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$=\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^5$$

بالتعويض

$$=\left(\left(1-\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(0-\frac{1}{2}(0)^2\right)\right)+\left(\left(\frac{1}{2}(5)^2-5\right)-\left(\frac{1}{2}(1)^2-1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$=\frac{17}{2}$$

أتذكَّر

يُطلَق على إعادة كتابة اقتران القيمة المُطلَقة في صورة اقتران مُتشعِّب **إعادةُ تعريف اقتران القيمة المُطلَقة**، ويكون ذلك بدراسة إشارة المقدار داخل القيمة المُطلَقة.

أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x & , x<1\\ 2x & , x\geq 1\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b) إذا كان: $f(x)=|x-3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلًا، مُعدَّل تغيُّر $f(x)$ بالنسبة إلى المُتغيِّر x هو $f'(x)$. ولكنْ، يكون مُعدَّل التغيُّر $f'(x)$ معلومًا في بعض الأحيان، ويتعيَّن معرفة مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x=a$ إلى $x=b$، الذي يُعبَّر عنه بالمقدار: $f(b)-f(a)$، عندئذٍ يُمكِن استعمال التكامل المحدود لإيجاد مقدار التغيُّر على النحو الآتي:

مقدار التغيُّر

مفهوم أساسي

إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$$

تبرز الحاجة إلى معرفة مقدار التغيُّر في كثير من التطبيقات الاقتصادية، مثل الحاجة إلى معرفة مقدار الزيادة في أرباح شركة زادت مبيعاتها من عدد مُعيَّن من القطع إلى عدد آخر.

مثال 5 : من الحياة

التغيُّر في الأرباح: يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

صيغة مقدار التغيُّر

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\, dx$$

بتعويض $a = 1000, b = 1100$

$$P(1100) - P(1000) = \int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)\, dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

بالتعويض

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2) - (165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

بالتبسيط

$$= 6000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز، فإنَّ أرباح الشركة ستزيد شهريًّا بمقدار JD 6000.

أتحقَّق من فهمي

أعتمد المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5، وأجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى **1500** جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو **1400** جهاز.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

① $\int_{-1}^{3} 3x^2\, dx$

② $\int_{-3}^{-2} 6\, dx$

③ $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

④ $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\, dx$

⑤ $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

⑥ $\int_{-2}^{3} (-x^2 + 4x - 5)\, dx$

⑦ $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2)\, dx$

⑧ $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx$

⑨ $\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

⑩ $\int_{1}^{4} x^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$

⑪ $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/3})\, dx$

⑫ $\int_{1}^{9} \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 dx$

⑬ $\int_{-1}^{4} |6 - 3x|\, dx$

⑭ $\int_{3}^{5} |x-2|\, dx$

⑮ $\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 1}{x + 1}\, dx$

⑯ إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x \leq 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x)\, dx$.

إذا كان: $\int_{1}^{2} f(x)\, dx = -4, \int_{1}^{5} f(x)\, dx = 6, \int_{1}^{5} g(x)\, dx = 8$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

⑰ $\int_{2}^{2} g(x)\, dx$

⑱ $\int_{5}^{1} (g(x) - 2)\, dx$

⑲ $\int_{1}^{2} (3f(x) + x)\, dx$

⑳ $\int_{2}^{5} f(x)\, dx$

㉑ $\int_{1}^{5} \left(f(x) - g(x)\right) dx$

㉒ $\int_{1}^{5} \left(4f(x) + g(x)\right) dx$

23 إذا كان: $\int_{1}^{m} (6x - 10)\ dx = 4$، فأجد قيمة الثابت m.

24 **تغيُّر التكلفة:** يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

25 **تلوُّث:** يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

مهارات التفكير العليا

26 **أكتشف الخطأ:** أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_{0}^{2} (x^2 + x)\ dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_{0}^{2} (x^2 + x)\ dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$= -\frac{14}{3}$$

✗

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أُصحِّحه.

27 **تبرير:** أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{1} x^n (1-x)\ dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ، حيث $n > 0$، وأبرِّر إجابتي.

28 **تحدٍّ:** إذا كان: $\int_{1}^{5} (2ax + 7)\ dx = 4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس 4

المساحات والحجوم
Areas and Volumes

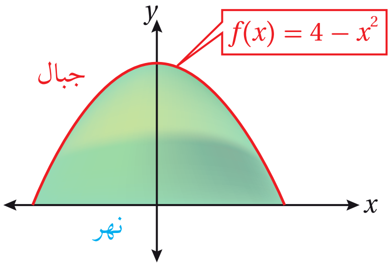
فكرة الدرس

- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x.
- إيجاد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x حول المحور x.

المصطلحات

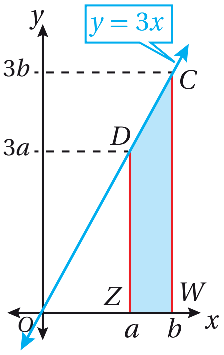
المجسم الدوراني.

مسألة اليوم



يُمثِّل الجزء المُظلَّل بالأخضر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها سلسلة من الجبال، ويُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحدَّ الفاصل بين سلسلة الجبال والمنطقة الزراعية، ويُمثِّل المحور x حافة النهر الذي يُطِلُّ على المنطقة الزراعية. أجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية، علمًا بأنَّ x وy مَقيسان بالكيلومتر.

المساحة



في الشكل المجاور، يُمكِن إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المستقيم $y = 3x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و$x = b$، وذلك بطرح مساحة ΔOZD من مساحة ΔOWC كما يأتي:

$$\frac{1}{2}(3b^2) - \frac{1}{2}(3a^2)$$

أُلاحِظ أنَّه يُمكِن التعبير عن الصيغة السابقة بالمقدار: $\frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$، ثم التعبير عن المساحة بين المستقيم $y = 3x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و$x = b$ بالتكامل الآتي:

$$\int_a^b 3x\,dx = \frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$$

وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد المساحة باستعمال التكامل.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ ارتفاع المثلث معطى بالقيمة الآتية: $y = 3x$.

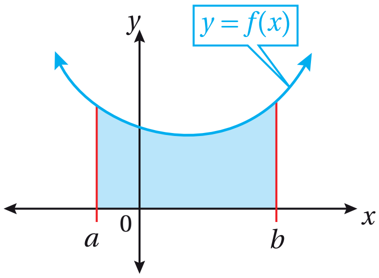
سأتعلَّم في هذا الدرس حالة من حالات إيجاد المساحة باستعمال التكامل، هي: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x. وهذه الحالة تنقسم إلى ثلاث حالات، هي:

- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور.
- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور.
- مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، وتقع فوق المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx\ ; a < b$$



مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

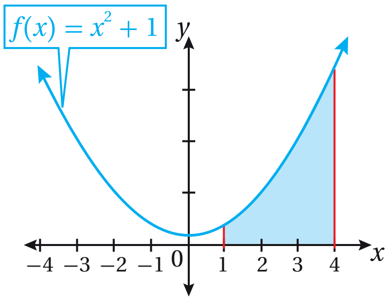
الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 4]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0$$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$$x^2 + 1 = 0$$ بتعويض $f(x) = x^2 + 1$

بما أنَّ $x^2 + 1 \neq 0$، فإنَّ منحنى الاقتران لا يتقاطع مع المحور x كما في الشكل المجاور.



أُفكِّر

لماذا $x^2 + 1 \neq 0$؟ أبرِّر إجابتي.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع فوق المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$ قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

$$= \int_1^4 (x^2 + 1)\ dx$$ بالتعويض $f(x) = x^2 + 1, a = 1, b = 4$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_1^4$

بالتعويض $= \left(\frac{1}{3}(4)^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)$

بالتبسيط $= 24$

إذن، المساحة هي: 24 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 3$.

أتعلَّم

يُمكِن تحديد أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x في فترة ما لا يقطع فيها محور x، من دون تمثيله بيانيًّا، عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر x في تلك الفترة في الاقتران؛ فإذا كانت النتيجة موجبة دلَّ ذلك على أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، وتقع أسفل المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx \,;\, a < b$$

أتعلَّم

بما أنَّ المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها تقع أسفل المحور x، فإنَّ قيمة التكامل الناتج ستكون عددًا سالبًا؛ لذا يُختار معكوس ناتج التكامل؛ لأنَّ المساحة لا يُمكِن أنْ تكون سالبة.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 5$، و $x = 2$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[2, 5]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر $f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = x^2 - 8x$ $\quad x^2 - 8x = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر $x(x - 8) = 0$

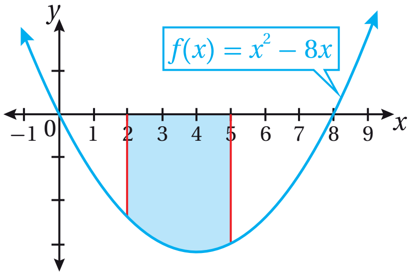
خاصية الضرب الصفري $x = 0 \quad \text{or} \quad x - 8 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x $\quad x = 8$

أتعلَّم

تحديد نقاط التقاطع مع المحور x يساعد على تحديد إذا كانت المنطقة فوق المحور x أو أسفل هذا المحور.

إذن، الإحداثي x لنقطتي تقاطع الاقتران $f(x)$ مع المحور x ليس ضمن الفترة المعطاة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 - 8x,\ a = 2,\ b = 5$

$$= -\int_2^5 (x^2 - 8x)\,dx$$

تكامل اقتران القوّة

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^5$$

بالتعويض

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(5)^3 - 4(5)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)^2\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 45$$

إذن، المساحة هي: 45 وحدة مربعة.

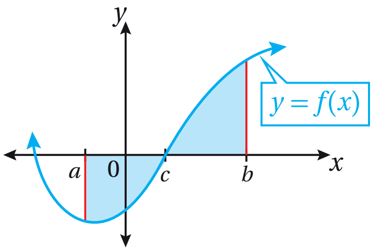
أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

أتعلَّم

يُمكِن تحديد أنَّ منحنى الاقتران هو أسفل المحور x في فترة ما لا يقطع فيها محور x، من دون تمثيله بيانيًّا، عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر x في تلك الفترة في الاقتران؛ فإذا كانت النتيجة سالبة دلَّ ذلك على أنَّ منحنى الاقتران هو أسفل المحور x.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور



قد يقع جزء من المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x أسفل هذا المحور، ويقع الجزء الآخر المُتبقّي منها فوقه كما في الشكل المجاور. وفي هذه الحالة، يُمكِن إيجاد المساحة بين منحنى هذا الاقتران والمحور x بتحديد المقطع x للاقتران، ثم إيجاد المساحة باستعمال القاعدة الآتية:

$$A = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال 3

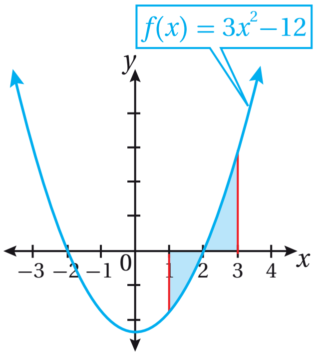
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 12$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 3$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 3]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر	$f(x) = 0$
بتعويض $f(x) = 3x^2 - 12$	$3x^2 - 12 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$x^2 - 4 = 0$
بتحليل الفرق بين مربعين	$(x+2)(x-2) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = -2 \qquad x = 2$

إذن، $x = 2$ يقع ضمن الفترة $[1, 3]$ كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المُتبقّي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله	$A = -\int_1^2 (3x^2 - 12)\, dx + \int_2^3 (3x^2 - 12)\, dx$
تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت	$= -(x^3 - 12x) \Big\|_1^2 + (x^3 - 12x) \Big\|_2^3$
بالتبسيط	$= (12x - x^3) \Big\|_1^2 + (x^3 - 12x) \Big\|_2^3$
بالتعويض	$= (12(2) - 2^3) - (12(1) - 1^3) + (3^3 - 12(3)) - (2^3 - 12(2))$
بالتبسيط	$= 12$

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = -3$.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

أُلاحِظ أنَّ المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها بين منحنى الاقتران والمحور x في الأمثلة السابقة محدودة بالمستقيمين: $x = a$، و $x = b$. ولكنْ، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنى الاقتران والمحور x، فإنَّه يَلزم عندئذٍ إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع الاقتران مع المحور x؛ لأنَّها تُمثِّل حدود التكامل.

مثال 4

1 **أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة الاقتران بالصفر

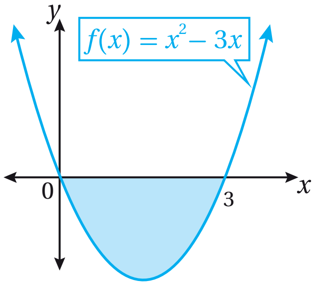
$x^2 - 3x = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 - 3x$

$x(x - 3) = 0$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 3$ بحَلِّ المعادلة لـ x

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو: $x = 0, x = 3$، كما في الشكل المجاور، وهذان الإحداثيان يُمثِّلان حدَّي التكامل.



أتعلَّم

بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقطع المحور x عندما $x = 0$، و $x = 3$، من دون وجود مستقيمات تُحدِّد المنطقة المطلوبة، فإنَّه يتعيَّن إيجاد التكامل المحدود من 0 إلى 3.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل السابق؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور	$A = -\int_a^b f(x)\, dx$
بالتعويض $f(x) = x^2 - 3x, a = 0, b = 3$	$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx$
تكامل اقتران القوَّة	$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right) \Big\|_0^3$
بالتعويض	$= -\left(\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2\right)\right)$
بالتبسيط	$= 4\frac{1}{2}$

إذن، المساحة هي: $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

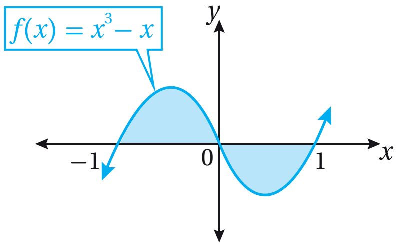
2 **أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقتران بالصفر	$f(x) = 0$
بتعويض $f(x) = x^2 - x$	$x^3 - x = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$x(x^2 - 1) = 0$
بتحليل الفرق بين مربعين	$x(x+1)(x-1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = -1 \quad \text{or} \quad x = 1$

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هــو: $x = -1, x = 0, x = 1$، كما في الشكل المجاور، وهذه الإحداثيات تُمثِّل حدود التكامل.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المُتبقِّي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \left(-\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right)$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

بالتعويض

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

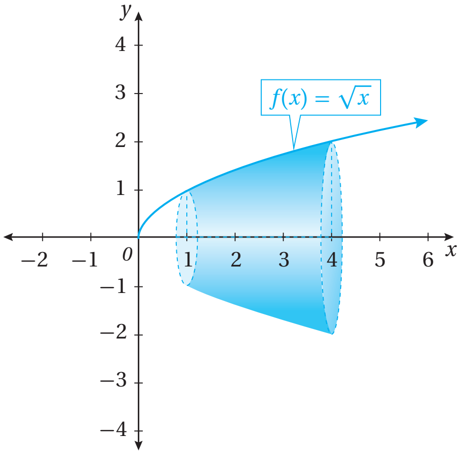
أتحقَّق من فهمي

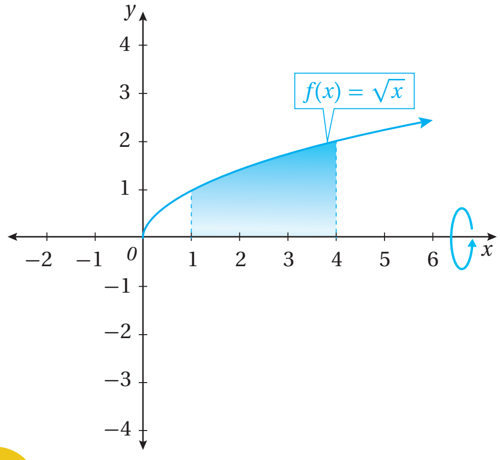
a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

الحجوم الدورانية

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$. إذا دارت المنطقة المحصورة بين المنحنى والمحور x، والمستقيمين $x = 1$ و $x = 4$ دورة كاملة حول المحور x، فإنَّ المجسَّم الناتج يُسمّى **المُجسَّم الدوراني** (solid of revolution)، ويُمكِن إيجاد حجم هذا المُجسَّم عن طريق التكامل.





مفهوم أساسي

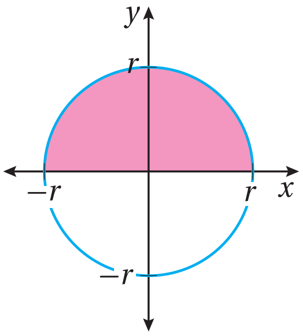
حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $y=f(x)$، والمحور x، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، حيث $a<b$ دورة كاملة حول المحور x، هو:

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx \qquad or \qquad V=\int_a^b \pi\,(\,f(x)\,)^2\,dx$$

مثال 5

أجد حجم الكرة الناتجة من دوران المنطقة المحصورة بين النصف العلوي من الدائرة في الشكل المجاور والمحور x حول المحور x إذا كانت معادلتها:

$$x^2+y^2=r^2$$



لإيجاد حجم الكرة الناتجة من دوران المنطقة المحصورة بين نصف الدائرة: $x^2+y^2=r^2$ والمحور x حول المحور x، أستعمل القاعدة الآتية: $V=\int_a^b \pi y^2\,dx$، لكنّي أُعيد أولًا ترتيب معادلة الدائرة في الصورة الآتية: $y^2=r^2-x^2$.

قاعدة حجم المُجسَّم الناتج من الدوران حول المحور x

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$

بتعويض $y^2=r^2-x^2\,,\,a=-r\,,\,b=r$

$$=\int_{-r}^{r} \pi\,(r^2-x^2)\,dx$$

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، والفرق

$$=\pi(r^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-r}^{r}$$

بالتعويض

$$=\Big(\pi(r^2\,(r)-\frac{1}{3}\,(r)^3\Big)-\Big(\pi(r^2\,(-r)-\frac{1}{3}\,(-r)^3\,)\Big)$$

بالتبسيط

$$=\frac{2}{3}\pi r^3+\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

إذن، حجم الكرة الناتجة هو $\frac{4}{3}\pi r^3$ وحدة مكعبة.

أتعلَّم

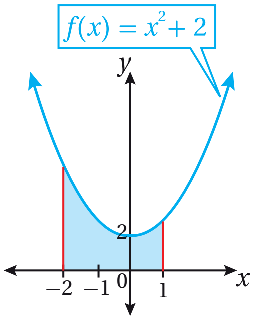
تُترَك الإجابة عادة بدلالة π.

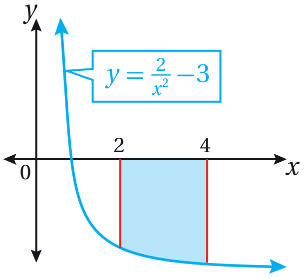
أتحقَّق من فهمي

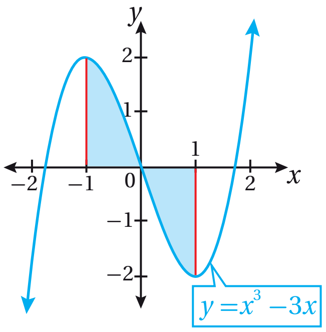
أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $y=x^2-1$ حول المحور x.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1


2


3


4 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

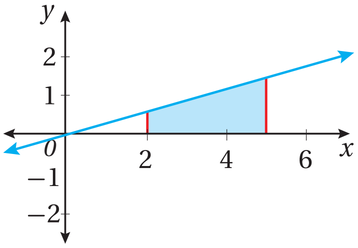
5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

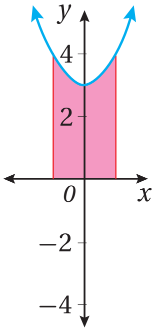
6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$.

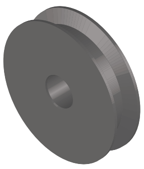
7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و $x = 5$.

9 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = 0.3x$، والمحور x والمستقيمين $x = 2$ و $x = 5$ حول المحور x.



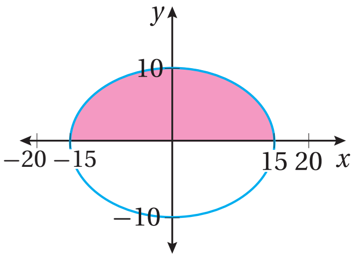




10 **هندسة صناعية:** صمَّم مهندس صناعي عجلة بكرة عن طريق تدوير المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^2 + 3$، والمحور x، والمستقيمين $x = -1$ و $x = 1$ حول المحور x. أجد حجم عجلة البكرة.

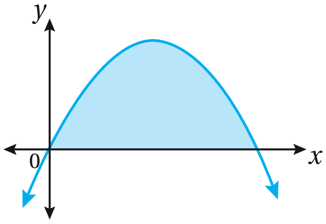
معلومة

نظرًا إلى خطورة لعبة كرة القدم الأمريكية؛ فإنَّ اللاعبين يرتدون أدوات وقاية خاصة، مثل: الخُوَذ، ووسائد الكتف، والقفافيز.



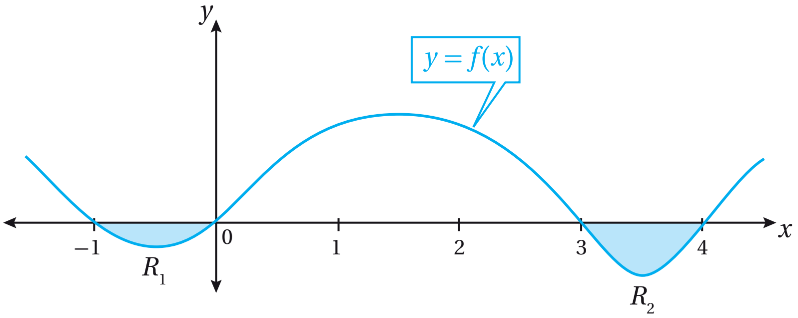
11 **كرة قدم أمريكية:** إذا دار النصف العلوي لمنحنى المعادلة: $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$ حول المحور x، فإنَّ المجسَّم الناتج يُشبِه كرة القدم الأمريكية. أجد حجم الكرة الناتجة من دوران المنطقة المحصورة بين النصف العلوي من منحنى المعادلة السابقة والمحور x حول محور x بالسنتيمترات المكعبة، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

مهارات التفكير العليا



12 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

13 **تبرير:** يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_{0}^{4} f(x)\, dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$، وأبرّر إجابتي.



معمل برمجية جيوجبرا

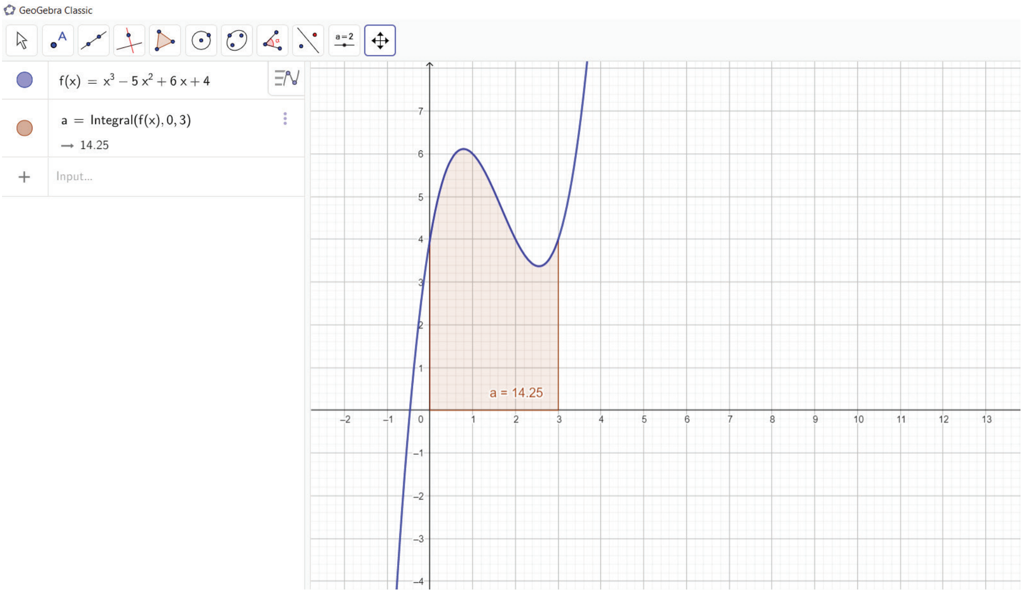
تطبيقات التكامل: المساحة

Applications of integration: Area

أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x بوصفها تكاملًا محدودًا، مع مراعاة تحويل إشارة الناتج السالبة إلى موجبة إذا وقعت المنطقة أسفل المحور x، ويجب تقسيم هذه المنطقة إلى جزأين إذا كان جزء منها فوق المحور x، وجزء آخر تحته، ثم حساب مساحة كل جزء على حِدَة، ثم جمع المساحتين معًا.

نشاط

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$.



GeoGebra Classic

f(x) = x³ − 5 x² + 6 x + 4

a = Integral(f(x), 0, 3)
→ 14.25

Input...

1. أكتب الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter.
2. لإيجاد المساحة بين الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$، أكتب في شريط الإدخال الصيغة الآتية: `Integral (f(x), 0, 3)`، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter.
3. أُلاحِظ تظليل المنطقة المطلوبة، وظهور قيمة التكامل على الشكل. ومنه، فإنَّ المساحة هي 14.25 وحدة مربعة.

أتدرَّب

1. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$.
2. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -\sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيم $x = 9$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ هي:

a) -2 **b)** $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ **d)** 2

2 $\int x\sqrt{3x}\;dx$ يساوي:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{5}\,x^{\frac{5}{2}}+C$ **b)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\,x^{\frac{5}{2}}+C$

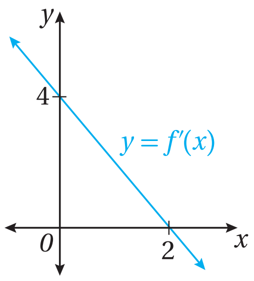
c) $2\sqrt{3x}+C$ **d)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\,x^{\frac{3}{2}}+C$

3 التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x)=4x-x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x-x^2)\,dx$ **b)** $\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$

c) $\int_1^0 (4x-x^2)\,dx$ **d)** $\int_0^1 (4x-x^2)\,dx$

4 يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، إذا كان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى وهي 12، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ هي:



a) $f(x)=x^2-4x+12$

b) $f(x)=4+4x-x^2$

c) $f(x)=8+4x-x^2$

d) $f(x)=x^2-4x+16$

5 إذا كان: $\int_0^2 kx\,dx=6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 **b)** 2

c) 3 **d)** 4

6 قيمة $\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ **b)** $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ **d)** $22\frac{1}{2}$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7 $\int_2^4 10x^3\,dx$

8 $\int_1^4 2\sqrt{x}\;dx$

9 $\int_9^{16} \frac{20}{\sqrt{x}}\,dx$

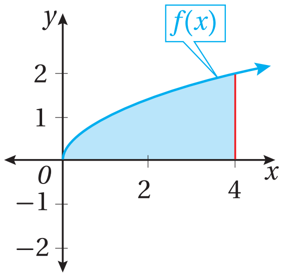
10 $\int_3^4 (6x^2-4x)dx$

11 $\int_0^1 (x^3-x)\,dx$

12 $\int_{-3}^{-1} \frac{x+1}{x^3}\,dx$

اختبار نهاية الوحدة

13 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ ، والمحور x، والمستقيمين $x = 0$ و $x = 4$ حول المحور x.



أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

14 $\int (8x-10x^2)\, dx$

15 $\int 3x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

16 $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

17 $\int \frac{4-x^2}{2+x}\, dx$

18 $\int (2x-3)^5\, dx$

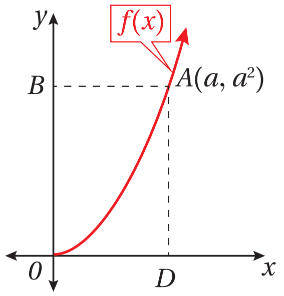
19 $\int \sqrt{x+1}\, dx$

20 $\int \left(\frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}\right) dx$

21 $\int (x^3-2x^2)\left(\frac{1}{x-2}\right) dx$

22 $\int (\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2})\, dx$

23 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$، حيث $x > 0$. إذا كانت إحداثيات النقطة $A(a, a^2)$، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيم $x = a$ تساوي ثلث مساحة المستطيل $ADOB$.



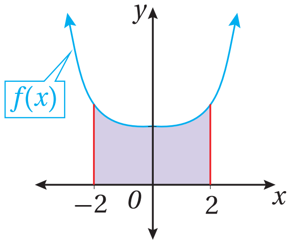
24 إذا كان: $f''(x) = (ax+b)^3$، حيث a و b ثابتان، فأجد $f(x)$.

بدأ جسيم الحركة في خطٍّ مستقيم من نقطة الأصل، وكانت سرعته في أيِّ لحظة t هي $(8 + 4t)$ m/s:

25 أجد موقع الجسيم بعد t ثانية.

26 أجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

27 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران: $f(x) = 2 + 0.1x^4$. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 2$ و $x = -2$.



28 إذا كان: $f'(x) = 2x + 6$، وكان لمنحنى $f(x)$ نقطة قيمة صغرى محلية تقع على المحور x، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$.

الوحدة
6

الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية
Logarithmic and Exponential Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل الأُسس واللوغاريتمات لنمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية التي تتضمَّن تزايدًا أو تناقصًا كبيرًا للقِيَم، مثل: الموجات الزلزالية، والنمو البكتيري. وسأتعرَّف في هذه الوحدة الاقتران الأُسِّي والاقتران اللوغاريتمي، والخصائص الجبرية لكلٍّ منهما، وبعض تطبيقاتهما الحياتية والعلمية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ قوانين الأُسس النسبية.
- ✓ حَلَّ معادلات أُسّية دون استعمال اللوغاريتمات.
- ✓ تمثيل الاقترانات بيانيًّا، وخصائصها.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ الاقتران الأُسِّي، وتمثيله البياني، وخصائصه.
- ◄ الاقتران اللوغاريتمي، وتمثيله البياني، وخصائصه.
- ◄ قوانين اللوغاريتمات.
- ◄ حَلَّ المعادلات الأُسِّية واللوغاريتمية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (26, 27) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

الاقترانات الأُسِّية

Exponential Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران الأُسِّي، وتمثيله بيانيًّا، وخصائصه.

المصطلحات الاقتران الأُسِّي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 325(0.25)^t$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث P مَقيسة بوحدة µg/mL. أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله.

الاقتران الأسّي

يسمّى الاقتران الذي يتضمن أسًّا متغيرًا لأساس ثابت أكبر من الصفر ولا يساوي 1 **اقترانًا أسيًّا** (exponential function)، ومن أمثلته:

$$f(x) = 3^x \quad , \quad f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad , \quad f(x) = (0.6)^x + 12$$

يسمّى الاقتران الأسي الذي على الصورة: $f(x) = b^x$ حيث $b > 0$، و $b \neq 1$ **الاقتران الأسي الرئيس.**

يُمكن استعمال تعريف الأُسس وخصائصها لإيجاد قيمة الاقتران الأُسِّي عند أيِّ قيمة معطاة.

مثال 1

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = 4^x , x = 3$

الاقتران المعطى	$f(x) = 4^x$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 4^3$
$4^3 = 64$	$= 64$

أتذكَّر

اقترانات القوَّة، مثل: $f(x) = x^3$، ليست اقترانات أُسِّية؛ لأنَّ المُتغيِّر موجود في الأساس، لا في الأُسِّ.

② $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, x = -2$

الاقتران المعطى $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

بتعويض $x = -2$ $f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$ $= 25$

أتذكَّر

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = 3^x, x = 4$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x = -1$

تمثيل الاقتران الأُسّي الرئيس باستعمال جدول قيم، وتحديد خصائصه من الرسم

يُمكِن تمثيل الاقتران الأُسِّي الرئيس الذي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 0$، و $b \neq 1$ بإنشاء جدول قِيَم، ثم تعيين الأزواج المُرتَّبة الناتجة من الجدول في المستوى الإحداثي، ثم توصيل النقاط بعضها ببعض عن طريق منحنى متصل.

يُمكِن أيضًا استعمال التمثيل البياني لاستكشاف خصائص الاقتران الأُسِّي الرئيس.

مثال 2

أمثّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدّد إذا كان متزايدًا أو متناقصًا، وإذا كان اقتران واحد لواحد أم لا:

① $f(x) = 2^x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

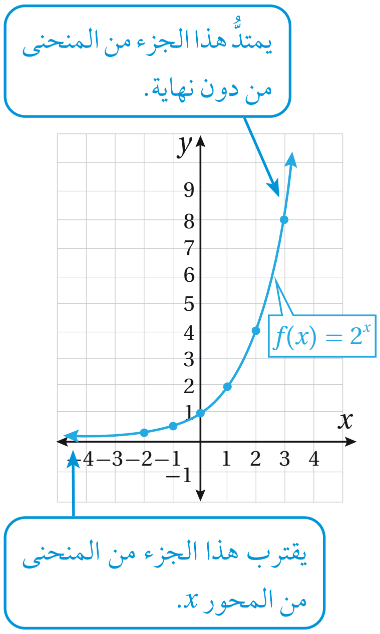
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$(-2, \frac{1}{4})$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$

أتذكَّر

$a^0 = 1$، حيث $a \neq 1$

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



يمتدُّ هذا الجزء من المنحنى من دون نهاية.

يقترب هذا الجزء من المنحنى من المحور x.

أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = 2^x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مدى الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران له خط تقارب أفقي هو المحور x.
- المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$، وبما أنَّ 2^x موجبة دائمًا، فإنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x؛ لأنَّ $y > 0$ دائمًا.
- الاقتران مُتزايِد؛ لأنَّه كلَّما زادت قِيَم x زادت قِيَم y.
- الاقتران واحد لواحد.

2 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

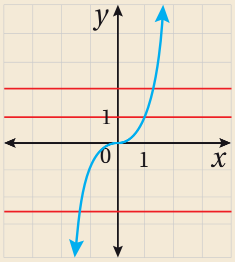
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(2, \frac{1}{4})$

أتذكَّر

- المجال هو مجموعة القِيَم التي توجد على المحور x، ويكون الاقتران مُعرَّفًا عندها.
- المدى هو مجموعة القِيَم التي توجد على المحور y، وتكون صورًا لقِيَم x الواقعة ضمن مجال الاقتران.
- خط التقارب هو خط مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران.

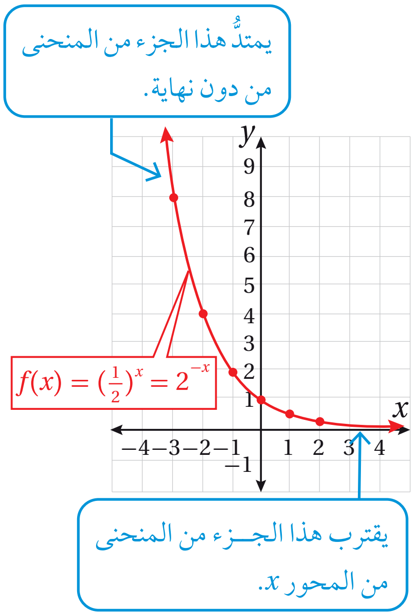
أتذكَّر

يُطلَق على الاقتران الذي يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله اسم اقتران واحد لواحد، ويُمكِن التحقُّق من ذلك عن طريق اختبار الخط الأفقي؛ إذ لا يوجد خط أفقي يُمكِنه قطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة واحدة.



الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مدى الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران له خط تقارب أفقي هو المحور x.
- المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$، وبما أنَّ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ موجبة دائمًا، فإنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x؛ لأنَّ $y > 0$ دائمًا.
- الاقتران $f(x)$ مُتناقِص؛ لأنَّه كلَّما زادت قِيَم x تناقصت قِيَم y.
- الاقتران واحد لواحد.

أتعلَّم

أكتب الاقتران: $f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ في صورة: $f(x) = b^{-x}$؛ لأنَّ $\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$، حيث $b \neq 1$.

أتحقَّق من فهمي

أمثِّل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، ثم أحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدِّد إذا كان متزايدًا أو متناقصًا، وإذا كان اقتران واحد لواحد أم لا:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ الاقتران: $f(x) = 2^x$ مُتزايِد، وأنَّ مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أُسِّي رئيس في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 1$ له الخصائص نفسها.

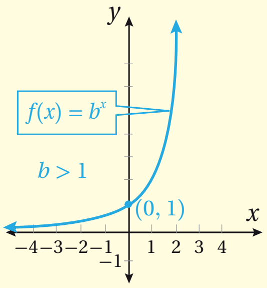
وأُلاحِظ أيضًا أنَّ الاقتران: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ مُتناقِص، وأنَّ مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أُسِّي رئيس في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $0 < b < 1$ له الخصائص نفسها.

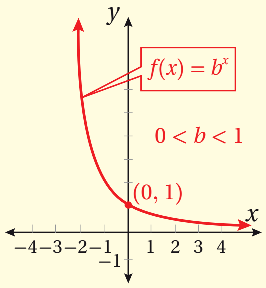
ملخَّص المفهوم

خصائص الاقتران الأُسِّي الرئيس

تتمثَّل خصائص الاقتران الأُسِّي الرئيس الذي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: b عدد حقيقي، و $b > 0$, $b \neq 1$ في ما يأتي:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x.
- الاقتران الأُسِّي يقطع المحور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$، ولا يقطع المحور x.
- اقتران واحد لواحد.





أتعلّم

لماذا يشترط أن تكون $b > 0$؟

تمثيل الاقترانات الأُسّية بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية، وتحديد خصائصها من الرسم

يُمكِن تطبيق التحويلات الهندسية (الانسحاب، والتمدُّد، والانعكاس) لتمثيل الاقتران الأُسِّي الذي في الصورة: $g(x) = ab^{x-h} + k$ بيانيًّا، حيث: a, b, h, k أعداد حقيقية، و $a \neq 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، وذلك بالبدء برسم منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = b^x$، ثم إجراء التحويلات على المنحنى؛ لينتج التمثيل البياني للاقتران $g(x)$.

يُمكِن تحديد خط التقارب الأفقي لأيِّ اقتران أُسِّي في صورة: $g(x) = ab^{x-h} + k$ عن طريق تمثيله البياني، ويُمكِن أيضًا تحديد مجال هذا الاقتران ومداه، وما إذا كان متزايدًا أم متناقصًا.

أتعلَّم

لرسم منحنى الاقتران: $f(x) = b^x$، أُعيِّن النقاط الآتية: $(0, 1), (1, b), (-1, \frac{1}{b})$، ثم أرسم منحنى يصل بينها، وأراعي خصائص منحنى الاقتران الأُسّي.

مثال 3

أُمثّل الاقتران $g(x) = 2(3^{x+2}) - 1$ بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه وخط التقارب الأفقي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

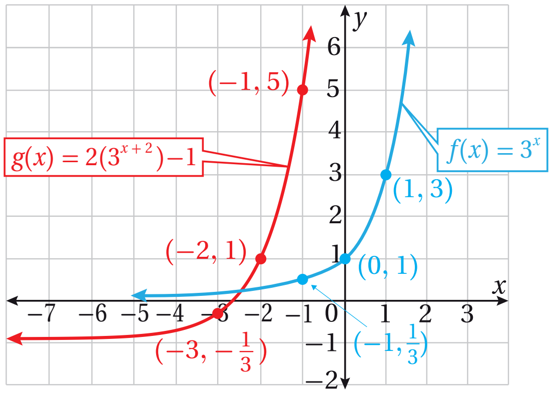
لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = 3^x$ باستعمال مجموعة من النقاط.

الخطوة 2: أَضرِب الإحداثي y لكل نقطة في 2؛ لتوسيع منحنى الاقتران رأسيًّا.

الخطوة 3: أطرح 2 من الإحداثي x لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدتين إلى اليسار.

الخطوة 4: أطرح 1 من الإحداثي y لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدة إلى الأسفل.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $g(x)$، أنّ:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $g(x)$ هو $y = -1$.
- مجال الاقتران $g(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $g(x)$ هو الفترة $(-1, \infty)$.
- الاقتران $g(x)$ متزايد.

أتحقّق من فهمي

أمثل كلًّا من الاقترانات الآتية، ثم أحدّد مجاله ومداه وخطّ التقارب الأفقي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

a) $g(x) = 4(2^x) + 12$

b) $h(x) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

يستفاد من الاقترانات الأُسِّية في كثير من التطبيقات الحياتية، مثل حساب عدد الكائنات الحيَّة التي تتكاثر سريعًا.

مثال 4 : من الحياة

معلومة

تُعَدُّ خنفساء الدقيق إحدى الآفات الضارَّة بالحبوب، وهي تعيش في مخازن الدقيق والقمح، حيث تتغذّى بهما، مُخلِّفةً رائحة كريهة مُميَّزة.

حشرات: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 30\ (2)^x$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيسِ دقيقٍ، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

1 أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع.

$f(x) = 30\ (2)^x$ الاقتران المعطى

$f(6) = 30(2)^6$ بتعويض $x = 6$

$= 1920$ بالتبسيط

إذن، عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع هو 1920 حشرة.

2 بعد كم أسبوعًا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

$f(x) = 30\ (2)^x$ الاقتران المعطى

$7680 = 30\ (2)^x$ بتعويض $f(x) = 7680$

$256 = (2)^x$ بالتبسيط

$(2)^8 = (2)^x$ $256 = (2)^8$

$x = 8$ بمساواة الأُسس

إذن، يصبح عدد الحشرات 7680 حشرة بعد 8 أسابيع.

أتحقَّق من فهمي

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 500\ (2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 4000 خلية؟

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = (11)^x , x = 3$
2. $f(x) = -5(2)^x , x = 1$
3. $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x , x = 2$
4. $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$
5. $f(x) = 3^x + 1, x = 5$
6. $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$

أُمثِّــل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

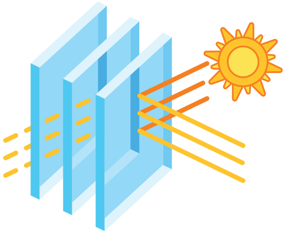
7. $f(x) = 4^x$
8. $f(x) = 9^{-x}$
9. $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$
10. $f(x) = (6)^x$

أمثل كلًّا من الاقترانات الآتية، ثم أحدّد مجاله ومداه وخطّ التقارب الأفقي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

11. $f(x) = 5^{x-1} + 2$
12. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$
13. $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$
14. $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 7000\ (1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

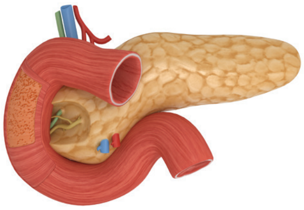
15. أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.
16. أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.
17. بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟



ضوء: يُمثِّـل الاقتران: $f(x) = 100\,(0.97)^x$ النسـبة المئوية للضوء المارِّ خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:

18 أجد النسبة المئوية للضوء المارِّ خلال لوح زجاجي واحد.

19 أجد النسبة المئوية للضوء المارِّ خلال 3 ألواح زجاجية.



سرطان البنكرياس: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$ النسـبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، مِمَّنْ هم في المرحلة المُتقدِّمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض:

20 أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض.

21 بعد كم سنةً تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟

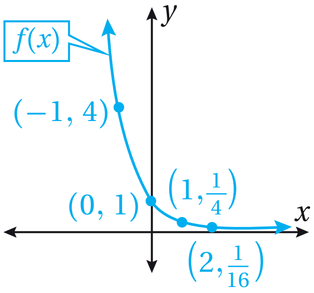
معلومة

يُصنَّف سرطان البنكرياس إلى أنـواع عديدة تبعًـا لنوع خلايا البنكرياس التي يصيبها. وأشهر هذه الأنواع هو سـرطان القناة البنكرياسية الذي يُكتشَف غالبًا في مراحل مُتقدِّمة؛ نتيجةً لعدم ظهور الأعـراض، أو ظهورها بصـورة بسـيطة فـي مراحل المرض الأولى.

مهارات التفكير العليا

22 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$.

أجد $f(3)$، وأبرِّر إجابتي.



23 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف؟ أبرِّر إجابتي.

$y = 5(3)^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$f(x) = 2(4)^x$

$y = 3^x$

24 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسِّيًّا، فأُثبِت أنَّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

الدرس 2

النمو والاضمحلال الأُسِّي
Exponential Growth and Decay

فكرة الدرس تعرُّف خصائص كلٍّ من اقتران النمو الأُسِّي، واقتران الاضمحلال الأُسِّي.

المصطلحات اقتران النمو الأُسِّي، عامل النمو، اقتران الاضمحلال الأُسِّي، عامل الاضمحلال، الربح المُركَّب، الأساس الطبيعي، الاقتران الأُسِّي الطبيعي، الربح المُركَّب المستمر.

مسألة اليوم بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني قرابة 2.6% سنويًّا، فأجد العدد التقريبي للسكّان عام 2030م.

اقتران النمو الأُسِّي

تزداد بعض الكمِّيات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، ويُمكِن إيجاد مقادير هذه الكمِّيات التي ازدادت بعد t فترة من الزمن باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1+r)^t$$

يُطلَق على هذا الاقتران اسم **اقتران النمو الأُسِّي** (exponential growth function)، حيث t الفترة الزمنية، و a الكمِّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة. أمّا أساس العبارة الأُسِّية $(1 + r)$ فيُسمّى **عامل النمو** (growth factor).

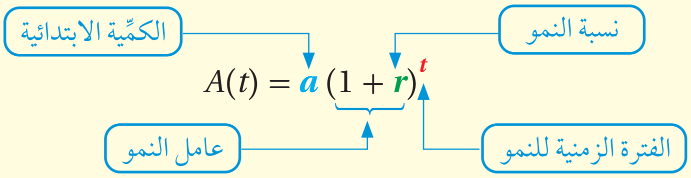
أتعلَّم

اقتران النمو الأُسِّي: $A(t) = a(1 + r)^t$ هو إحدى صور الاقتران الأُسِّي: $f(x) = ab^x$، حيث استُعمِل المقدار $(1 + r)$ بدلًا من b، واستُعمِل t بدلًا من x.

مفهوم أساسي **اقتران النمو الأُسِّي**

بالكلمات: اقتران النمو الأُسِّي هو كل اقتران أُسِّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:



$$A(t) = a\,(1+r)^t$$

مثال 1 : من الحياة

خِراف: في دراسة شملت إحدى مَزارع الأغنام، تبيَّن أنَّ عدد الخِراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويًّا:

1 أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخِراف بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 1524 خروفًا.

$$A(t) = a(1 + r)^t$$ اقتران النمو الأُسِّي

$$= 1524(1 + 0.31)^t$$ بتعويض $a = 1524, r = 0.31$

$$= 1524(1.31)^t$$ بالتبسيط

إذن، اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخِراف بعد t سنة هو: $A(t) = 1524(1.31)^t$.

2 أجد عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدْء الدراسة.

لإيجاد عدد الخِراف بعد 5 سنوات، أُعوِّض $t = 5$:

$$A(t) = 1524(1.31)^t$$ اقتران النمو الأُسِّي للخِراف

$$A(5) = 1524(1.31)^5$$ بتعويض $t = 5$

$$\approx 5880$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدْء الدراسة هو 5880 خروفًا تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيَّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًّا:

a) أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة.

اقتران الاضمحلال الأُسّي

كما هو الحال في النمو الأُسّي، يُمكِن تمثيل النقص في كمّية ما، بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

يُطلَق على هذا الاقتران اسم **اقتران الاضمحلال الأُسّي** (exponential decay function)، حيث t الفترة الزمنية، وa الكمّية الابتدائية، وr النسبة المئوية للاضمحلال في فترة زمنية مُحدَّدة. أمّا أساس العبارة الأُسّية $(1 - r)$ فيُسمّى **عامل الاضمحلال** (decay factor).

مفهوم أساسي

اقتران الاضمحلال الأُسّي

بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأُسّي هو اقتران أُسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = \overset{\text{الكمّية الابتدائية}}{a}\,\underbrace{(1 - \overset{\text{نسبة الاضمحلال}}{r})}_{\text{عامل الاضمحلال}}{}^{\overset{\text{الفترة الزمنية للاضمحلال}}{t}}$$

مثال 2 : من الحياة

مواد مُشِعَّة: تتناقص 20 g من أحد النظائر المُشِعَّة لعنصر الثوريوم (Th225) بنسبة 8% كل دقيقة نتيجة الإشعاع:

1 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثِّل كمّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقّية بعد t دقيقة.

اقتران الاضمحلال الأُسّي	$A(t) = a(1 - r)^t$
بتعويض $a = 20,\ r = 0.08$	$= 20(1 - 0.08)^t$
بالتبسيط	$= 20(0.92)^t$

إذن، اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثِّل كمّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقّية بعد t دقيقة هو: $A(t) = 20(0.92)^t$.

2 أجد كمِّيــة الثوريوم (بالغــرام) المُتبقِّية بعد 5 دقائــق، وأقرِّب إجابتي إلــى أقرب منزلتين عشريتين.

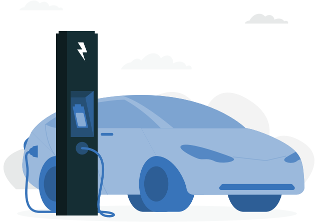
$$A(t) = 20(0.92)^t$$ اقتران الاضمحلال الأُسِّي للثوريوم

$$= 20(0.92)^5$$ بتعويض $t = 5$

$$\approx 13.18$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، كمِّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقِّية بعد 5 دقائق هي 13.18 g تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي



سيّارة: اشترت سوسن سـيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500. إذا كان ثمن السـيّارة يقلُّ بنسبة 5% سنويًّا، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

b) أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

معلومة

تحتوي السـيّارة الهجينة القابلة للشحن على مُحرِّك كهربائي، ومُحرِّك احتراق داخلي.

الربح المُركَّب

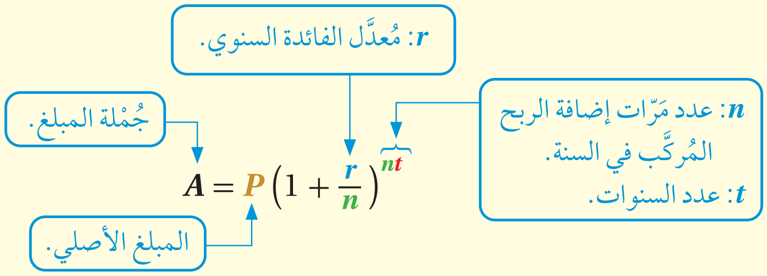
يستفاد من اقتران النمو الأُسِّي في تطبيقات حياتية عديدة، منها **الربح المُركَّب** (compound interest)؛ وهو الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يُسمّى رأس المال، والفوائد المستحقة سابقًا.

مفهوم أساسي

الربح المُركَّب

بالكلمات: يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:



$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

معلومة

يُستعمَل الربح المُركَّب في البنوك التجارية، خلافًا للبنوك الإسلامية التي تقوم على الاستثمار وَفق مبادئ الشريعة الإسلامية وأحكامها.

مثال 3

استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.46%، وتضاف كل 3 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

صيغة الربح المُركَّب $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

بتعويض $P = 9000, r = 0.0146, n = 4, t = 3$ $= 9000\left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4(3)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 9402.21

إذن، جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 9402.21 تقريبًا.

أتعلَّم

يستحق مبلغ الفائدة كل 3 أشهر؛ ما يعني أنَّه يضاف إلى المبلغ الأصلي 4 مرّات في السنة.

أتحقَّق من فهمي

استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

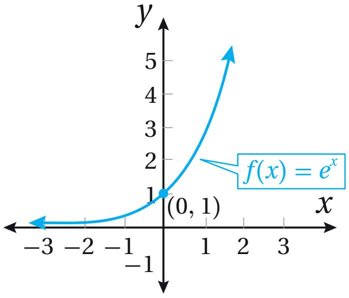
الاقتران الأُسِّي الطبيعي

في كثير من التطبيقات الحياتية، يكون الاختيار الأمثل لأساس الاقتران الأُسِّي هو العدد غير النسبي ...2.718281828 الذي يُسمّى **الأساس الطبيعي** (natural base)، ويُرمَز إليه بالرمز e. وفي هذه الحالة، يُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ **الاقتران الأُسِّي الطبيعي** (natural exponential function).

لغة الرياضيات

يُطلَق على الأساس الطبيعي أيضًا اسم العدد النيبيري.

ألاحِظ من الشكل المجاور أنَّ خصائص التمثيل البياني للاقتران الأُسِّي الطبيعي هي نفسها خصائص التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 1$.



مثال 4 : من الحياة

ذباب الفاكهة: وجدت باحثة بعد دراسة أجرتها على تكاثر ذباب الفاكهة، أنّ العدد التقريبي للذباب يُمكن تمثيله بالاقتران $Q(t) = 20e^{0.03t}$، حيث Q عدد الذباب بعد t ساعة.

1 أجد العدد الابتدائي لذبابات الفاكهة عند بدأ الدراسة.

الاقتران الأصلي $Q(t) = 20e^{0.03t}$

بتعويض $t = 0$ $Q(0) = 20e^{0.03(0)}$

أضرب $= 20e^{0}$

$e^0 = 1$ $= 20(1)$

أُبسّط $= 20$

إذن: العدد الابتدائي للذباب عند بدء الدراسة 20 ذبابة.

2 أجد عدد ذبابات الفاكهة بعد مرور 72 ساعة من بدء الدراسة.

الاقتران الأصلي $Q(t) = 20e^{0.03t}$

بتعويض $t = 72$ $Q(72) = 20e^{0.03(72)}$

أضربُ $= 20e^{2.16}$

أستعملُ الآلة الحاسبة ≈ 173

إذن: عدد ذبابات الفاكهة بعد مرور 72 ساعة 173 ذبابة تقريبًا.

أتحقّق من فهمي

يُمثّل الاقتران $P(t) = 34.706e^{0.0097t}$ عدد سكان مدينة بالمليون نسمة، بعد t سنة منذ المسح الإحصائي للمدينة في عام 2015

a) أجد عدد سكان المدينة في عام 2015

b) أجد عدد سكّان المدينة في عام 2030

معلومة

يُمكن لأنثى ذبابة الفاكهة أن تضع 100 بيضة يوميًّا، وتفقس هذه البيضات لتُصبح يرقات في أقلّ من 24 ساعة.

أتعلّم

لإيجاد القيمة $20e^{2.16}$ باستعمال الآلة الحاسبة؛ أضغطُ على الأزرار:

2 0 SHIFT e^x

2 . 1 6

= 173.42275

توجد تطبيقات عديدة للاقتران الأُسِّي الطبيعي، منها حساب **الربح المُركَّب المستمر** (continuously compounded interest)؛ وهو عملية حساب جُملة المبلغ بعد إضافة الربح المُركَّب إلى رأس المال عددًا لانهائيًّا من المَرّات في السنة.

مفهوم أساسي

الربح المُركَّب المستمر

بالكلمات: يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

r: مُعدَّل الفائدة المستمر.
t: عدد السنوات.

جُمْلة المبلغ.

$$A = P\,e^{\overbrace{rt}}$$

المبلغ الأصلي.

مثال 5

أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 10 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

صيغة الربح المُركَّب المستمر $A = Pe^{rt}$

بتعويض $P = 4500,\ r = 0.04,\ t = 10$ $= 4500e^{0.04(10)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 6713.21

إذن، جُمْلة المبلغ بعد 10 سنوات: JD 6713.21 تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

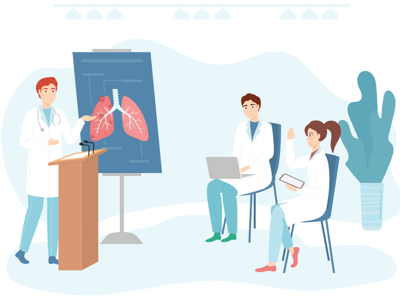
أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.2%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

أتعلَّم

لإيجاد قيمة $4500e^{0.4}$ باستعمال الآلة الحاسبة، أضغط على الأزرار الآتية:

4 5 0 0
SHIFT e^x
0 . 4 =
6713.2111393857

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل



يبلغ عدد الاشتراكات في مؤتمر طبي 150 طبيبًا وطبيبة هذه السنة، ويُتوقَّع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:

1. أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الاشتراكات بعد t سنة.
2. أجد عدد الاشتراكات المُتوقَّع بعد 5 سنوات.

استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

3. أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد من يستخدم الموقع بعد t سنة.
4. أجد عدد من يستخدم الموقع سنة 2025م.

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويًّا:

5. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.
6. أجد ثمن السيّارة بعد 3 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

بكتيريا: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العيِّنة:

7. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علمًا بأنَّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.
8. أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 7 ساعات.

9. **دجاج:** يَنْفُق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يوميًّا نتيجة إصابته بمرض ما. أجد العدد المُتبقّي منه بعد 5 أيام من بَدْء المرض، علمًا بأنَّ عدده الأوَّلي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10. أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.
11. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

⑫ أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.

⑬ أجد جُمْلة المبلغ بعد 6 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

يُمثل الاقتران $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة.

⑭ أجد عدد أسماك السلمون في النهر بعد 3 سنوات.

⑮ أُمثّـل الاقتـران $P(t)$ بيانيًّـا باسـتعمال برمجية جيوجيبرا.

معلومة

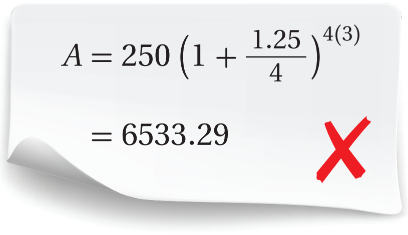
عندما تتعرّض أسـماك المياه المالحة للمياه العذبة يُمكن أن تنفجر خلاياها، أمّا السلمون فلديـه بعـض الخصائـص الفسـيولوجية والسـلوكية المدهشـة التـي تُمكّنـه من العيش في كلا البيئتين.

⑯ أودع حسـام مبلغ JD 9000 في حسـاب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مسـتمر مقدارها 3.6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 7 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

⑰ أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حسـاب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مسـتمر مقدارها 4.9%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات، وأقرّب إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين.

مهارات التفكير العليا

⑱ **أكتشـف الخطأ:** أوجد رامي جُمْلة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حسـاب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.25%، وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:



$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رامي، ثم أُصحِّحه.

⑲ **تحدٍّ:** اكتُشِفت 12 إصابة بالإنفلونزا الموسمية في إحدى البلدات، ولوحِظ أنَّ عدد الإصابات بهذا المرض في كل أسبوع يساوي ثلاثة أمثال عددها في الأسبوع السابق. أكتب اقترانًا يُمثِّل عدد الإصابات بهذا المرض بعد t أسبوعًا من اكتشاف حالات الإصابة الأولى.

الدرس

3

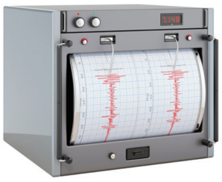
الاقترانات اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران اللوغاريتمي، وتمثيله بيانيًّا، وخصائصه.

المصطلحات الاقتران اللوغاريتمي للأساس b.

مسألة اليوم يُستعمَل الاقتران: $R = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ لحساب قوَّة زلزال وَفق مقياس ريختر، حيث I شِدَّة الزلزال المراد قياسه، و I_0 أقل شِدَّة للزلزال الذي يُمكِن للإنسان الإحساس به. ماذا يُمثِّل الرمز log في هذا الاقتران؟



الاقتران اللوغاريتمي، والعبارات اللوغاريتمية

أتعلَّم

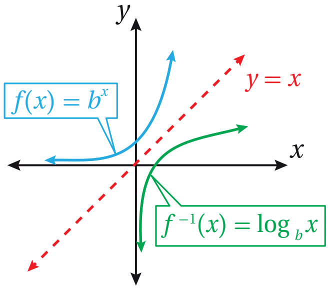
ألاحِظ أنَّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ أيَّ اقتران يجتاز اختبار الخط الأفقي هو اقتران واحد لواحد، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد اقتران عكسي له.

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد اقتران عكسي للاقتران الأُسِّي الذي صورته: $f(x) = b^x$، حيث: $b \neq 1, b > 0$.

يُطلَق على الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي: $f(x) = b^x$ اسم **الاقتران اللوغاريتمي للأساس b** (logarithmic function with base b)، ويُرمَز إليه بالرمز $g(x) = \log_b x$، ويُقرَأ: لوغاريتم x للأساس b.

إذن، إذا كان الاقتران: $f(x) = b^x$، حيث: $b \neq 1, b > 0$، فإنَّ $f^{-1}(x) = \log_b x$. ويُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للاقترانين معًا.



مفهوم أساسي

العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان: $x > 0, b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية

$$\log_b x = y$$

الأساس، الأُسُّ

إذا وفقط إذا

الصورة الأُسِّية

$$b^y = x$$

الأساس، الأُسُّ

يُمكِن استعمال تعريف اللوغاريتم لتحويل معادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأُسِّية.

مثال 1

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1 $\mathbf{\log_2 8 = 3}$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 2^3 = 8$

2 $\mathbf{\log_{23} 23 = 1}$

$\log_{23} 23 = 1 \rightarrow 23^1 = 23$

3 $\mathbf{\log_{10} \left(\frac{1}{100}\right) = -2}$

$\log_{10} \left(\frac{1}{100}\right) = -2 \rightarrow (10)^{-2} = \frac{1}{100}$

4 $\mathbf{\log_7 1 = 0}$

$\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = 1$

أتحقَّق من فهمي أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$

يُمكِن أيضًا استعمال تعريف اللوغاريتم لتحويل معادلة من الصورة الأُسِّية إلى الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

1 $\mathbf{8^3 = 512}$

$8^3 = 512 \rightarrow \log_8 512 = 3$

2 $\mathbf{25^{\frac{1}{2}} = 5}$

$25^{\frac{1}{2}} = 5 \rightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

3 $\mathbf{(5)^{-3} = \frac{1}{125}}$

$(5)^{-3} = \frac{1}{125} \rightarrow \log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$

4 $\mathbf{27^0 = 1}$

$27^0 = 1 \rightarrow \log_{27} 1 = 0$

أتذكَّر

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$ والصورة الأُسِّية: $b^y = x$ مُتكافِئتان.

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية

أستنتج من العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية أنَّ اللوغاريتم أُسٌّ، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية البسيطة باستعمال قوانين الأُسس.

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

① $\mathbf{\log_2 64}$

$\log_2 64 = y$ بافتراض أنَّ المقدار يساوي y

$2^y = 64$ الصيغة الأُسِّية

$2^y = 2^6$ $64 = 2^6$

$y = 6$ بمساواة الأُسس

إذن: $\log_2 64 = 6$

② $\mathbf{\log_{13}\sqrt{13}}$

$\log_{13}\sqrt{13} = y$ بافتراض أنَّ المقدار يساوي y

$13^y = \sqrt{13}$ الصيغة الأُسِّية

$13^y = 13^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$ بمساواة الأُسس

إذن: $\log_{13}\sqrt{13} = \frac{1}{2}$

③ $\mathbf{\log_{36} 6}$

$\log_{36} 6 = y$ بافتراض أنَّ المقدار يساوي y

$36^y = 6$ الصيغة الأُسِّية

$(6^2)^y = 6$ $36 = 6^2$

$6^{2y} = 6$ قانون قوَّة القوَّة

$2y = 1$ بمساواة الأُسس

$y = \frac{1}{2}$ بحَلِّ المعادلة

إذن: $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

④ $\mathbf{\log_{10} 0.1}$

$\log_{10} 0.1 = y$ بافتراض أنَّ المقدار يساوي y

$10^y = 0.1$ الصيغة الأُسِّية

$10^y = \frac{1}{10}$ $0.1 = \frac{1}{10}$

$10^y = 10^{-1}$ $\frac{1}{10} = 10^{-1}$

$y = -1$ بمساواة الأُسس

إذن: $\log_{10} 0.1 = -1$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_5 25$

b) $\log_8 \sqrt{8}$

c) $\log_{81} 9$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

يُمكِن استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات من الأمثلة السابقة.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان: $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

$b^0 = 1$	• $\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	• $\log_b b = 1$
$b^x = b^x$	• $\log_b b^x = x$
$\log_b x = \log_b x$	• $b^{\log_b x} = x, \; x > 0$

أتعلَّم

$\log_b 0$ غير مُعرَّف؛ لأنَّ $b^x \neq 0$ لأيِّ قيمة x.

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_3 1$

$\log_b 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$

2 $\log_{17} \sqrt{17}$

$\sqrt{17} = 17^{\frac{1}{2}}$	$\log_{17} \sqrt{17} = \log_{17} 17^{\frac{1}{2}}$
$\log_b b^x = x$	$= \frac{1}{2}$

3 $\log_5 5$

$\log_b b = 1$	$\log_5 5 = 1$

4 $7^{\log_7 5}$

$b^{\log_b x} = x$	$7^{\log_7 5} = 5$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$

b) $\log_{32} \sqrt{32}$

c) $\log_9 9$

d) $8^{\log_8 13}$

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي الرئيس بيانيًّا باستعمال جدول قيم، وتحديد خصائصه من الرسم

يُمكِن استعمال العلاقة العكسية بين الاقتران الأُسِّي والاقتران اللوغاريتمي لتمثيل منحنى الاقتران اللوغاريتمي الرئيس الذي في صورة: $f(x) = \log_b x$، حيث $b \neq 1, b > 0$.

مثال 5

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

① $f(x) = \log_2 x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

بما أنَّ المعادلة: $y = \log_2 x$ تُكافِئ المعادلة: $x = 2^y$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد الأزواج المُرتَّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة: $x = 2^y$.

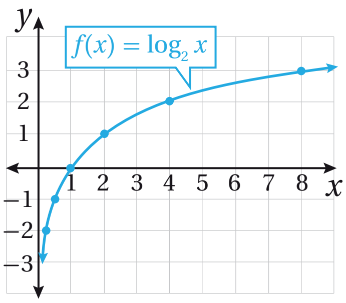
4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$x = 2^y$
2	1	0	-1	-2	y
$(4, 2)$	$(2, 1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{4}, -2)$	(x, y)

① أختار بعض قِيَم y.

② أجد قِيَم x المُناظِرة.

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_2 x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتزايِد.

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا إنشاء جدول القِيَم باختيار قِيَم للمُتغيِّر x تتناسب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي الرئيس الذي صورته: $f(x) = \log_b x$، ويَسْهُل عن طريقها استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

② $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

بما أنَّ المعادلة: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافِئ المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد الأزواج المُرتَّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$.

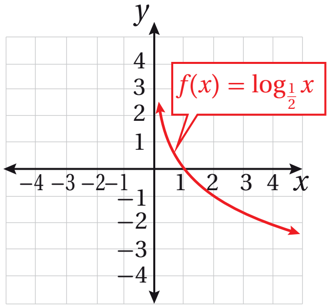
$x = (\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(4, -2)$	$(2, -1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, 2)$

① أختار قِيَمًا لـ y.

② أجد قِيَم x.

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتناقِص.

معلومة

ابن حمزة المغربي عالِم مسلم أبدع في علوم الرياضيات، ووضع حجر الأساس لعلم اللوغاريتمات.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدِّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

a) $f(x) = \log_3 x$

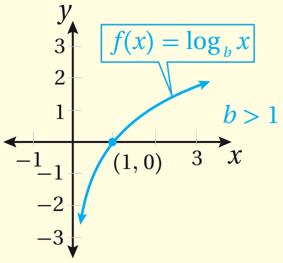
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

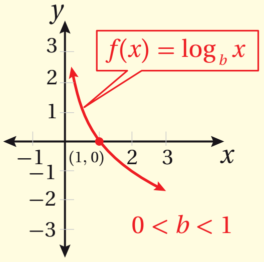
ألاحظ من المثال السابق أن الاقتران: $f(x) = \log_2 x$ متزايد، وأن مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، وله خط تقارب رأسي هو المحور y. وبوجه عام، فإن أي اقتران لوغاريتمي رئيس في صورة: $f(x) = \log_b x$، حيث $b > 1$ له الخصائص نفسها.

وألاحظ أيضًا أن الاقتران: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ متناقص، وأن مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، وله خط تقارب رأسي هو المحور y. وبوجه عام فإن أي اقتران لوغارتمي رئيس في صورة: $f(x) = \log_b x$، حيث $0 < b < 1$ له الخصائص نفسها.

مُلخَّص المفهوم **خصائص الاقتران اللوغاريتمي الرئيس**

تتمثّل خصائص الاقتران اللوغاريتمي الرئيس الذي في صورة: $f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي، $b > 0$، $b \neq 1$، في ما يأتي:





- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- الاقتران مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y.
- الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.

تمثيل الاقترانات اللوغاريتمية بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية، وتحديد خصائصها من الرسم

يُمكِن تطبيق التحويلات الهندسية (الانسحاب، والتمدُّد، والانعكاس) لتمثيل الاقتران اللوغاريتمي الذي على الصورة: $g(x) = a \log_b (x-h) + k$، حيث a, b, h, k : أعداد حقيقية، و $a \neq 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، وذلك بالبدء برسم منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = \log_b x$، ثم إجراء التحويلات على المنحنى؛ لينتج التمثيل البياني للاقتران $g(x)$.

يمكن تحديد خط التقارب الرأسي لأي اقتران لوغاريتمي في صورة: $g(x) = a \log_b (x - h) + k$ عن طريق تمثيله البياني، ويمكن أيضًا تحديد مجال هذا الاقتران ومداه، وما إذا كان متزايدًا أم متناقصًا.

أتعلّم

لرسم منحنى الاقتران: $f(x) = \log_b x$، أُعيِّن النقاط الآتية: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(\frac{1}{b}, -1)$، ثم أرسم منحنى يصل بينها، وأراعي خصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي.

مثال 6

أُمثّل الاقتران $g(x) = -3 \log_{10} (x - 1)$ بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه وخط التقارب الرأسي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا.

لتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$ بيانيًّا، أتّبع الخطوات الآتية:

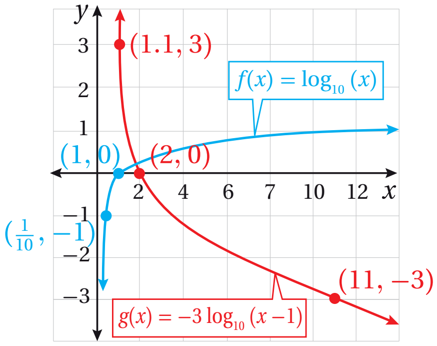
الخطوة 1: أُمثِّل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = \log_{10} (x)$ باستعمال مجموعة من النقاط.

الخطوة 2: أضرِب الإحداثي y لكل نقطة في -1؛ لعكس النقاط حول المحور x.

الخطوة 3: أضرِب الإحداثي y لكل نقطة في 3؛ لتوسيع منحنى الاقتران رأسيًّا.

الخطوة 4: أُضيف 1 إلى الإحداثي x لكل نقطة؛ لإزاحة منحنى الاقتران بمقدار وحدة إلى اليمين.

الخطوة 5: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



بالنظر إلى التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $g(x)$، ألاحظ أن:

- خط التقارب الرأسي للاقتران $g(x)$ هو $x = 1$.
- مجال الاقتران $g(x)$ هو الفترة $(1, \infty)$.
- مدى الاقتران $g(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- الاقتران $g(x)$ متناقص.

أتحقّق من فهمي

أُمثّل كلًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه وخط التقارب الرأسي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

a) $f(x) = \log_5 (x - 2)$

b) $f(x) = \log_2 x + 4$

c) $f(x) = \log_3 (x - 1) - 2$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1 $\log_7 343 = 3$

2 $\log_4 256 = 4$

3 $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

4 $\log_{36} 6 = 0.5$

5 $\log_9 1 = 0$

6 $\log_{57} 57 = 1$

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7 $2^6 = 64$

8 $4^{-3} = \frac{1}{64}$

9 $6^3 = 216$

10 $5^{-3} = 0.008$

11 $(51)^1 = 51$

12 $8^0 = 1$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

⑬ $\log_3 81$

⑭ $\log_{25} 5$

⑮ $\log_2 32$

⑯ $\log_{49} 343$

⑰ $\log_{10} 0.001$

⑱ $\log_{\frac{3}{2}} 1$

⑲ $\log_{\frac{1}{4}} 4$

⑳ $(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}}$

㉑ $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

㉒ $\log_a \sqrt[5]{a}$

㉓ $\log_{10} (1 \times 10^{-9})$

㉔ $8^{\log_8 5}$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

㉕ $f(x) = \log_5 x$

㉖ $g(x) = \log_4 x$

㉗ $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

㉘ $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

㉙ $f(x) = \log_{10} x$

㉚ $g(x) = \log_6 x$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، ثم أحدّد مجاله ومداه، وخط التقارب الرأسي، وأحدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا:

㉛ $f(x) = \log_3 (x - 2)$

㉜ $f(x) = 5 - 2\log_7 (x + 1)$

㉝ $f(x) = -3\log_4 (-x)$

㉞ أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32, 5)$.

㉟ أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(\frac{1}{81}, -4)$.

إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $P(a) = 10 + 20\log_5 (a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج. وتعني القيمة: $P(1) \approx 19$ أنَّ إنفاق JD 100 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المُنتَج:

36 أجد $P(4)$، و $P(24)$، و $P(124)$.

37 أُفسِّر معنى القِيَم التي أوجدْتُها في الفرع السابق.

مهارات التفكير العليا

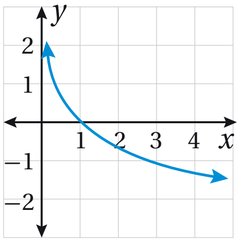
تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، وأبرّر إجابتي:

38 $f(x) = \log_3 (x)$

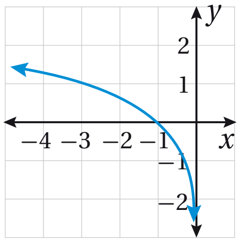
39 $f(x) = \log_3 (-x)$

40 $g(x) = -\log_3 x$

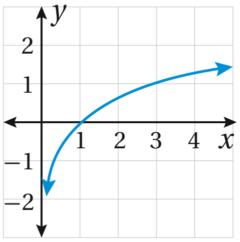
a)



b)



c)



41 **تحدّ:** أجد المقطع x للاقتران $f(x) = \log(x-k)$، حيث k ثابت.

42 **تبرير:** من دون استعمال الآلة الحاسبة، أُبيّن أيّ القِيَم الآتية أكبر. أُبرّر إجابتي:

$\log_5 28 \quad , \quad \log_6 32 \quad , \quad \log_7 40$

43 **أكتشف الخطأ:** كتبت منى المعادلة الأُسِّية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

$\log_4 (-3) = \frac{1}{64}$ ✗

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أُصحّحه.

الدرس

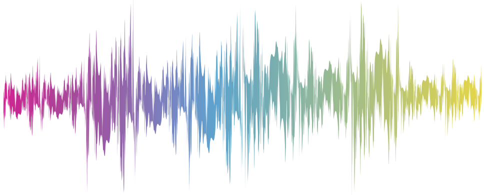
4

قوانين اللوغاريتمات

Laws of Logarithms

فكرة الدرس تعرُّف قوانين اللوغاريتمات.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $L = 10 \log_{10} R$ شِدَّة الصوت بالديسيبل، حيث R شِدَّة الصوت النسبية بالواط لكل متر مربع. أجد شِدَّة صوت بالديسيبل إذا كانت شِدَّته النسبية $100 \times 10^6 \text{ W/m}^2$



قوانين اللوغاريتمات

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الأُسس، ووظَّفْتُها في تبسيط مقادير أُسِّية، وإيجاد قيمة مقادير عددية. ومن ذلك: قوانين الضرب، والقسمة، وقوَّة القوَّة.

قانون ضرب القوى	قانون قسمة القوى	قانون قوَّة القوَّة
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, b \neq 0$	$(b^x)^y = b^{xy}$

بما أنَّه توجد علاقة عكسية بين اللوغاريتمات والأُسس، فإنَّه يُمكِن اشتقاق قوانين لوغاريتمات مُقابِلة لهذه القوانين.

مفهوم أساسي **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوَّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

يُمكِن استعمال قوانين اللوغاريتمات لإيجاد قِيَم مقادير لوغاريتمية.

مثال 1

إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$، وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $\log_a 15$

$3 \times 5 = 15$	$\log_a 15 = \log_a (3 \times 5)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= \log_a 3 + \log_a 5$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 1.59 + 2.32$
بالجمع	≈ 3.91

2 $\log_a \frac{3}{5}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_a \frac{3}{5} = \log_a 3 - \log_a 5$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 1.59 - 2.32$
بالطرح	≈ -0.73

3 $\log_a 125$

$125 = 5^3$	$\log_a 125 = \log_a (5^3)$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= 3 \log_a 5$
بتعويض $\log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 3(2.32)$
بالضرب	≈ 6.96

4 $\log_a \frac{1}{9}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_a \frac{1}{9} = \log_a 1 - \log_a 9$
$\log_a 1 = 0, 9 = 3^2$	$= 0 - \log_a 3^2$
بالطرح	$= -2 \log_a 3$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59$	$\approx -2(1.59)$
بالضرب	≈ -3.18

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد $\log_a 8$ عن طريق معطيات المثال باستعمال قوانين اللوغاريتمات؟ أُبرِّر إجابتي.

أُفكِّر

هل يُمكِن استعمال قانون القسمة لإيجاد ناتج $\frac{\log_a 5}{\log_a 3}$؟

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 14$ b) $\log_b \frac{2}{7}$ c) $\log_b 32$ d) $\log_b \frac{1}{49}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

يُمكِن أحيانًا كتابة مقدار لوغاريتمي بصورة مُطوَّلة تحوي مقادير لوغاريتمية عديدة، وذلك باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

مثال 2

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

① $\log_5 x^7 y^2$

$\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 7\log_5 x + 2\log_5 y$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

② $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}$

$\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= 2\log_7 (5x+3) - \log_7 4$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

③ $\log_4 \frac{xy^3}{z^2}$

$\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_4 x + \log_4 y^3 - \log_4 z^2$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_4 x + 3\log_4 y - 2\log_4 z$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

④ $\log_a\sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}}$

صورة الأُسّ النسبي	$\log_a\sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}} = \log_a\left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)$
قانون القسمة في اللوغاريتمات	$= \frac{1}{2}(\log_a x^2y^3 - \log_a a^5)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= \frac{1}{2}(\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a a^5)$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= \frac{1}{2}(2\log_a x + 3\log_a y - 5\log_a a)$
$\log_{\mathrm{a}} a = 1$	$= \frac{1}{2}(2\log_a x + 3\log_a y - 5)$
خاصية التوزيع	$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقـدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بـأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_2 a^2b^9$

b) $\log_5\frac{(x+1)^3}{8}$

c) $\log_3\frac{x^7y^3}{z^5}$

d) $\log_b\sqrt[3]{\frac{x^7b^2}{y^5}}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

تعلَّمْتُ في المثال السابق كتابة مقدار لوغاريتمي بالصورة المُطوَّلة، لكنَّني أحتاج أحيانًا إلى تحويل المقدار اللوغاريتمي من الصورة المُطوَّلة إلى الصورة المُختصَرة؛ أيْ كتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

مثال 3

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

1 $\mathbf{3\log_2 x + 4\log_2 y}$

$3\log_2 x + 4\log_2 y = \log_2 x^3 + \log_2 y^4$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$= \log_2 x^3 y^4$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

2 $\mathbf{5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z}$

$5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z = \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$= \log_a x^5 y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_a \left(\frac{x^5 y^{\frac{1}{3}}}{z^7}\right)$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_a \left(\frac{x^5 \sqrt[3]{y}}{z^7}\right)$ الصورة الجذرية

أتعلَّم

أتجنَّب الأخطاء الآتية عند كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المُطوَّلة أو الصورة المُختصَرة:

$$\xcancel{\begin{array}{c} \log_b(M+N) = \log_b M + \log_b N \\ \log_b(M-N) = \log_b M - \log_b N \\ \log_b(M \cdot N) = \log_b M \cdot \log_b N \\ \log_b(\frac{M}{N}) = \frac{\log_b M}{\log_b N} \\ \frac{\log_b M}{\log_b N} = \log_b M - \log_b N \\ \log_b(MN^p) = p\log_b(MN) \end{array}}$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_5 a + 3\log_5 b$

b) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

يستفاد من الاقترانات اللوغاريتمية وقوانينها في كثير من التطبيقات الحياتية، مثل تحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية المستغرقة في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات.

مثال 4 : من الحياة

نسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادَّة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافِئة لهذا الاختبار على مدار مُدَد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران: $M(t) = 85 - 25 \log_{10}(t + 1)$. أجد النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$، وأقرّب إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

المعادلة المعطاة $M(t)=85-25 \log_{10}(t+1)$

بتعويض $t = 19$ $M(19) = 85-25 \log_{10}(19+1)$

بالتبسيط $= 85-25 \log_{10}(20)$

$10 \times 2 = 20$ $= 85-25 \log_{10}(10 \times 2)$

قانون الضرب في اللوغاريتمات $= 85-25(\log_{10} 10 + \log_{10} 2)$

بتعويض $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 10 = 1$ $\approx 85-25((1)+0.3010)$

بالتبسيط $\approx 85-25(1.3010)$

بالتبسيط ≈ 52

إذن، النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها هي 52%

معلومة

فهم المعلومات وتنظيمها أوَّلًا يُسهِّلان عملية تذكُّرها واستعادتها في ما بعدُ.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10} 3 \approx 0.4771$، وأقرِّب إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$، وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $\log_a \frac{5}{6}$

2 $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

3 $\log_a \frac{1}{6}$

4 $\log_a 900$

5 $\log_a \frac{18}{15}$

6 $\log_a (6\,a^2)$

7 $\log_a \sqrt[4]{25}$

8 $(\log_a 5)(\log_a 6)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

9 $\log_a x^2$

10 $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$

11 $\log_a (\sqrt{x}\,\sqrt{y})$

12 $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$

13 $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

14 $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$

15 $\log_a (x+y-z)^7,\ x+y>z$

16 $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

⑰ $\log_a x + \log_a y$

⑱ $\log_b (x + y) - \log_b (x - y), x > y$

⑲ $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

⑳ $\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x+2), x > 2$

㉑ $2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z$

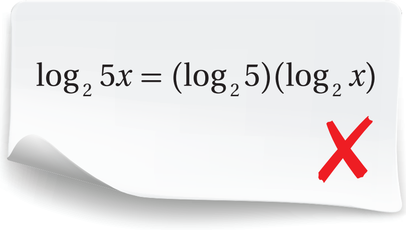
㉒ $\log_b 1 + 2 \log_b b$

㉓ **نمو:** يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 29 + 48.8 \log_6 (x + 2)$ النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل ذكر عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

مهارات التفكير العليا

㉔ **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $\frac{3}{2} = \frac{\log_a 216}{\log_a 36}$.

㉕ **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:



$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$ ✗

㉖ **تبرير:** أُثبِت أنَّ $\log_b (b-3) + \log_b (b^2 + 3b) - \log_b (b^2 - 9) = 1$، حيث: $b > 3$، وأبرِّر إجابتي.

الدرس

5

المعادلات الأُسِّية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Equations

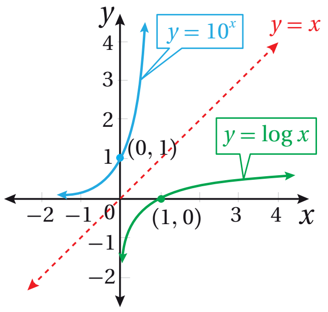
فكرة الدرس حَلُّ معادلات أُسِّية ولوغاريتمية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

المصطلحات اللوغاريتم الاعتيادي، اللوغاريتم الطبيعي، خاصية المساواة اللوغاريتمية، معادلة لوغاريتمية.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $A(t) = 10e^{-0.0862t}$ كتلة اليود (بالغرام) المُتبقِّية من عيِّنة كتلتها 10 g بعد t يومًا من بَدْء التفاعل. بعد كم يومًا سيظلُّ من العيِّنة 0.5 g؟

اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي

يُطلَق على اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ اسم **اللوغاريتم الاعتيادي** (common logarithm)، ويُكتَب عادةً من دون أساس.



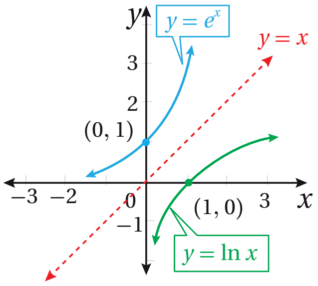
يُعَدُّ اقترانُ اللوغاريتم الاعتيادي: $y = \log x$ الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسِّي: $y = 10^x$؛ أيْ إنَّ:

$y = \log_{10} x$ إذا وفقط إذا $10^y = x \ , \ x > 0$

أمّا اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ فيُسمّى **اللوغاريتم الطبيعي** (natural logarithm)، ويُرمَز إليه بالرمز ln.

لغة الرياضيات

يدلُّ الرمز ln على اللوغاريتم الطبيعي، وهو اختصار لكلمتي (natural logarithm).



ويُعَدُّ اقترانُ اللوغاريتم الطبيعي: $y = \ln x$ الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي: $y = e^x$؛ أيْ إنَّ:

$y = \ln x$ إذا وفقط إذا $e^y = x \ , \ x > 0$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات على اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي، ويُمكِن استعمالها لإيجاد قيمة كلٍّ منهما، علمًا بأنَّ الآلة الحاسبة تحتوي زِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الاعتيادي هو log ، وزِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الطبيعي هو ln ، ويُمكِن بهما إيجاد القيمة التقريبية لكلٍّ من اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي، لأيِّ عدد حقيقي موجب.

مثال 1

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

① **$\log 2.7$**

أستعمل الآلة الحاسبة: log 2.7 = 0.4313637642

إذن: $\log 2.7 \approx 0.4$.

② **$\log (1.3 \times 10^5)$**

أستعمل الآلة الحاسبة: log (1.3 × 10 x■ 5) = 5.113943352

إذن: $\log (1.3 \times 10^5) \approx 5.1$.

③ **$\ln 17$**

أستعمل الآلة الحاسبة: ln 17 = 2.833213344

إذن: $\ln 17 \approx 2.8$.

أتحقَّق من فهمي

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 13$ b) $\log (3.1 \times 10^4)$ c) $\ln 0.25$

أتعلَّم

يوجد في بعض الآلات الحاسبة زِرُّ log■□ الذي يُستعمَل لإيجاد قيمة اللوغاريتم لأيِّ أساس b، حيث: $b > 0, b \neq 1$.

تغيير الأساس

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زِرَّين فقط للوغاريتمات، هما: log ، و ln . ولكنْ، كيف يمكن إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات الحاسبة؟

يمكن إيجاد ذلك بتغيير الأساس غير المرغوب فيه (الأساس 4 في هذه الحالة) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقيةً موجبةً، حيث: $a \neq 1, b \neq 1$، فإنَّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

مثال 2

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

① $\log_3 16$

صيغة تغيير الأساس $\log_3 16 = \dfrac{\log 16}{\log 3}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 2.52

أفكّر

إذا استعملْتُ اللوغاريتم الطبيعي بدلًا من اللوغاريتم الاعتيادي في الفرع 1 من المثال، فهل سيختلف الناتج؟ أُبرِّر إجابتي.

② $\log_{\frac{1}{2}} 10$

صيغة تغيير الأساس $\log_{\frac{1}{2}} 10 = \dfrac{\log 10}{\log \frac{1}{2}}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات $= \dfrac{\log 10}{\log 1 - \log 2}$

$\log 1 = 0, \log 10 = 1$ $= \dfrac{1}{-\log 2}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ -3.32

أفكّر

هل يُمكِنني حَلُّ الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

a) $\log_3 51$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

المعادلات الأُسِّية

تعلَّمْتُ سابقًا مفهوم المعادلة الأُسِّية؛ وهي معادلة تتضمَّن قوى أُسسها مُتغيِّرات، ويتطلَّب حَلُّها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسَّي الطرفين وَفق القاعدة الآتية:

إذا كان: $a^x = a^y$، فإنَّ $x = y$،

حيث: $a > 0, a \neq 1$.

فمثلًا، يمكن حَلُّ المعادلة: $3^{2x} = 81$ كما يأتي:

$$3^{2x} = 81$$ المعادلة الأصلية

$$3^{2x} = 3^4$$ بمساواة الأساسين

$$2x = 4$$ بمساواة الأُسس

$$x = 2$$ بحَلِّ المعادلة

ولكنْ، في بعض المعادلات الأُسِّية لا يمكن كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، مثل المعادلة: $3^x = 5$؛ لذا أستعمل **خاصية المساواة اللوغاريتمية** (property of logarithmic equality).

أتعلَّم

تُعْزى خاصية المساواة اللوغاريتمية إلى أنَّ الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران واحد لواحد؛ إذ يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله.

مفهوم أساسي

خاصية المساواة اللوغاريتمية

إذا كان x, y, b أعداد حقيقية موجبة، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

وتأسيسًا على ذلك، يُمكِن حَلُّ المعادلات الأُسِّية التي يتعذَّر كتابتها في صورة قوَّتين للأساس نفسه، وذلك بأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفي المعادلة، ثم استعمال قانون القوَّة في اللوغاريتمات.

مثال 3

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

1 $3^x = 20$

المعادلة الأصلية	$3^x = 20$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 3^x = \log 20$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$x \log 3 = \log 20$
بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 3$	$x = \frac{\log 20}{\log 3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 2.7268$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 2.7268$

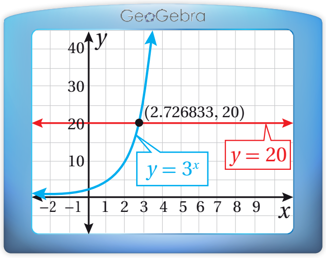
أتعلّم

يمكن حل الفرع 1 من المثال 5، بأخذ $\log_3$ لطرفَي المعادلة، لتكون النتيجة $x = \log_3 20$، ويمكن إيجاد قيمة x بتغير الأساس إلى الصورة الآتية:

$$x = \frac{\log 20}{\log 3}$$

الدعم البياني

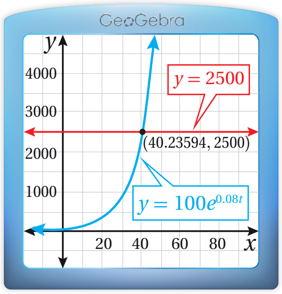
يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra)، لتمثيل المعادلتين $y = 3^x$، $y = 20$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x \approx 2.7268$.



2 $100\,e^{0.08t} = 2500$

المعادلة الأصلية	$100\,e^{0.08t} = 2500$
بالقسمة على 100	$e^{0.08t} = 25$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln e^{0.08t} = \ln 25$
$\log_b b^x = x$	$0.08t = \ln 25$
بقسمة طرفَي المعادلة على 0.08	$t = \frac{\ln 25}{0.08}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$t \approx 40.2359$

إذن: حلّ المعادلة هو $t \approx 40.2359$



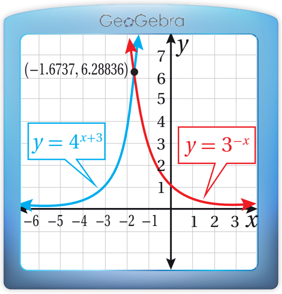
الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = 100\,e^{0.08t}$ ، $y = 2500$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ألاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x \approx 40.2359$.

3 $4^{x+3} = 3^{-x}$

المعادلة الأصلية	$4^{x+3} = 3^{-x}$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 4^{x+3} = \log 3^{-x}$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$(x + 3) \log 4 = -x \log 3$
خاصّية التوزيع	$x \log 4 + 3 \log 4 = -x \log 3$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x \log 4 + x \log 3 = -3 \log 4$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x (\log 4 + \log 3) = -3 \log 4$
بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 4 + \log 3$	$x = \dfrac{-3 \log 4}{\log 4 + \log 3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx -1.6737$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx -1.6737$



الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = 4^{x+3}$ ، $y = 3^{-x}$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ألاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x \approx -1.6737$.

4 $4^x + 2^x - 12 = 0$

المعادلة الأصلية	$4^x + 2^x - 12 = 0$
$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$	$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$
بافتراض أنّ $2^x = u$	$u^2 + u - 12 = 0$
بالتحليل	$(u+4)(u-3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$u = -4 \quad or \quad u = 3$
باستبدال 2^x بـ u	$2^x = -4 \qquad 2^x = 3$

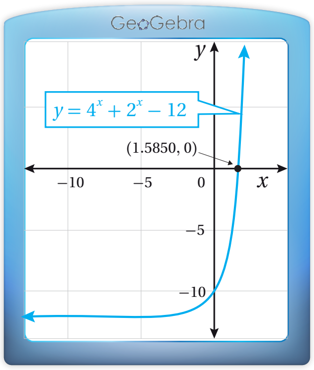
بمـا أنّ 2^x دائمًا موجبة لأيّ قيمة x؛ فإنّه لا يُمكن حلّ المعادلة $2^x = -4$، وسـيقتصر الحلّ على حلّ المعادلة $2^x = 3$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 2^x = \log 3$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$x \log 2 = \log 3$
بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 2$	$x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 1.5850$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 1.5850$

الدعم البياني

أُمثّل المعادلة $y = 4^x + 2^x - 12$، في المسـتوى الإحداثي، كما في التمثيل البياني المجاور. ألاحظ أنّ منحنى المعادلة يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط عندما $x \approx 1.5850$.



أتحقّق من فهمي

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $5^x = 8$

b) $4e^{2x} - 3 = 2$

c) $2^{x-1} = 3^{3x+2}$

d) $9^x + 3^x - 20 = 0$

تُستعمَل المعادلات الأُسِّية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 4 : من الحياة

نمو سكّاني: قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثِّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م. بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة؟

أتعلَّم

يُمثِّل $t = 0$ عام 2006م.

الاقتران الأصلي	$P(t) = 6.5\,(1.014)^t$
بتعويض $P(t) = 13$	$13 = 6.5\,(1.014)^t$
بقسمة طرفي المعادلة على 6.5	$2 = (1.014)^t$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln 2 = \ln(1.014)^t$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$\ln 2 = t \ln 1.014$
بحَلِّ المعادلة لـ t	$t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.014}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$t \approx 50$

إذن، سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة بعد 50 سنة تقريبًا من عام 2006م.

أتحقَّق من فهمي

اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 9 مليارات نسمة؟

المعادلات اللوغاريتمية

تُسمّى المعادلات التي تحوي متغيّرًا داخل تعبير لوغاريتمي **معادلة لوغاريتمية** (logarithmic equation)، ومن أمثلتها:

$$\log_2 x = 4 \qquad , \qquad \log x + \log(x+3) = 1$$

ولحلّ المعادلة اللوغاريتمية جبريًّا؛ أكتبها أولًا بدلالة لوغاريتم واحد في أحد طرفَي المعادلة، ثم أستعملُ خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

مثال 5

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

1 $\log_3 x = -2$

$\log_3 x = -2$ المعادلة الأصلية

$x = 3^{-2}$ بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$x = \frac{1}{3^2}$ تعريف الأُسس السالبة

$x = \frac{1}{9}$ بالتبسيط

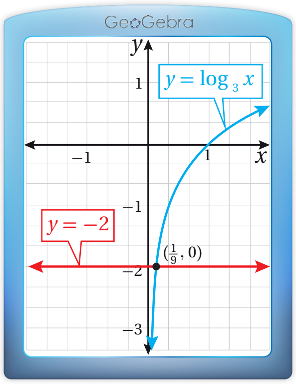
أتحقّق: للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

$$\log_3 \frac{1}{9} \overset{?}{=} -2$$

$$\log_3 3^{-2} \overset{?}{=} -2$$

$$-2 = -2 \quad ✓$$

إذن: حلّ المعادلة هو $x = \frac{1}{9}$



الدعم البياني

يُمكنني اســتعمال برمجية جيوجبــرا (GeoGebra) لتمثيــل المعادلتين $y = \log_3 x$ ، $y = -2$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَ المعادلتين يتقاطعان عندما $x = \frac{1}{9}$.

② $\log x + \log (x + 3) = 1$

المعادلة الأصلية	$\log x + \log (x + 3) = 1$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$\log(x (x + 3)) = 1$
بالتحويل إلى الصورة الأُسّية	$x(x + 3) = 10^1$
خاصّية التوزيع	$x^2 + 3x = 10$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^2 + 3x - 10 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(x - 2)(x + 5) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$x - 2 = 0$ or $x + 5 = 0$
بحلّ المعادلة	$x = 2$ $\quad$ $x = -5$

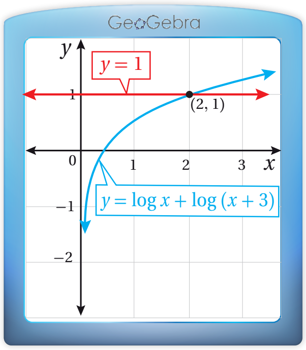
للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -5$	**عندما $x = 2$**
$\log (-5) + \log (-5+3) \overset{?}{=} 1$ ✗	$\log(2) + \log(2 + 3) \overset{?}{=} 1$
	$\log(2) + \log(5) \overset{?}{=} 1$
	$\log(2 \times 5) \overset{?}{=} 1$
	$\log 10 \overset{?}{=} 1$
	$1 = 1$ ✓

ألاحظ أنّ العدد -5 ليس حلًّا للمعادلة اللوغاريتمية؛ لأنّ ناتج تعويضه داخل اللوغاريتم عدد سالب، إذن: حلّ المعادلة هو $x = 2$

الدعم البياني

أُمثّل المعادلتين $y = \log x + \log(x + 3)$، $y = 1$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، عندما $x = 2$.



أتحقّق من فهمي

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

a) $5 + 2\ln x = 4$

b) $\log_5(x + 6) + \log_5(x + 2) = 1$

مثال 6 : من الحياة

كائنات حية: وجد العلماء أنّه يُمكن معرفة عمر عيّنة من كائن ميّت؛ وفقًا لنسبة الكربون 14 المتبقّية فيها عن طريق الاقتران: $A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$، حيث $A(p)$ عمر العيّنة بالسنوات، p النسبة المئوية (بالصورة العشرية) المتبقّية من الكربون 14 في العيّنة. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في جمجمة إنسان عمرها 2715 عامًا تقريبًا، وأُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

المعادلة الأصلية

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$$

بتعويض $A(p) = 2715$

$$2715 = \frac{\ln p}{-0.000121}$$

بالضرب التبادلي

$$-0.328515 = \ln p$$

بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$$p = e^{-0.328515}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$p \approx 0.72$$

إذن: النسبة المئوية من الكربون المتبقّية في الجمجمة 72%

معلومة

تحتوي أنسجة الكائنات الحية على نوعين من الكربون: الكربون 14 والكربون 12، وبعد موتها فإنّ كمّية الكربون 12 تبقى ثابتة، في ما تتناقص كمّية الكربون 14 بمقدار ثابت مع الزمن.

أتحقّق من فهمي

كشفت دراسة أنّ المجموعة الأخيرة من حيوان الماموث الصوفي قد لقيت حتفها قبل **4000** سنة تقريبًا في جزيرة نائية في المحيط القطبي الشمالي. أجد النسبة المئوية من الكربون **14** المتبقّية في أحدها. أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1. $\log 19$
2. $\log (2.5 \times 10^{-3})$
3. $\ln 3.1$
4. $\log_2 10$
5. $\log_3 e^2$
6. $\ln 5$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7. $\log_3 33$
8. $\log_{\frac{1}{3}} 17$
9. $\log_6 5$
10. $\log_7 \frac{1}{7}$
11. $\log 1000$
12. $\log_3 15$

أحُلُّ المعادلات الأُسّية الآتية، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13. $6^x = 121$
14. $-3e^{4x} = -27$
15. $5^{7x-2} = 3^{2x}$
16. $25^x + 5^x - 42 = 0$
17. $2(9)^x = 32$
18. $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

19 **كوالا:** تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وَفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$، حيث N العدد المُتبقّي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سـنة. بعد كم سنةً يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا؟

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

20 $\log (x + 5) - \log (x-3) = \log 2$

21 $\ln (x + 8) + \ln (x - 1) = 2 \ln x$

22 $\log_3 (\log_4 x) = 0$

23 $\ln x^2 = (\ln x)^2$

24 $2 \log 50 = 3 \log 25 + \log (x-2)$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 5 %:

25 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

26 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

إرشاد: صيغة جُمْلة المبلغ للربح المُركَّب المستمر هي: $A = Pe^{rt}$.

27 **فيزياء:** يُقاس الضغط الجوي P بوحدة الباسكال على ارتفاع مقداره H بالأمتار؛ باستعمال المعادلة $H = 15500(5-\log(P))$. أجد الضغط الجوي بالباسكال على قمة إفرست؛ إذا علمتُ أنّ ارتفاعها 8850 m عن سطح الأرض.

مهارات التفكير العليا

28 **تبرير:** أجد قيمة كلٍّ من k، و h إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x + 3}$، وأبرّر إجابتي.

29 **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلة: $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$.

30 **تبرير:** إذا كانت $\log_3 x = k \log_2 x,\ x > 0$؛ فأجد قيمة k وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية، وأُبرّر إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$

b) $y = 3$

c) $y = 1$

d) $y = 0$

2 حَلُّ المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0

b) $\frac{1}{e}$

c) 1

d) e

3 قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

a) -2

b) -1

c) 1

d) 2

4 أحد الآتية يُكافِئ المقدار:

$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$

b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$

d) $\log_a 27$

5 أحد الآتية يُكافِئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5 \log_a x - 3 \log_a y + 1$

b) $a \log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a \log_a x - 3 \log_a y$

d) $1 - 5 \log_a x - 3 \log_a y$

6 حَلُّ المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 8

7 قيمة $\log 10$ هي:

a) $2 \log 5$

b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$

d) 0

8 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإنَّ قيمة x هي:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

9 الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة:

$f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي،

و $b \neq 1, b > 0$، تمرُّ جميع منحنياتها بالنقطة:

a) $(1, 1)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$

d) $(0, 0)$

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة k:

10 $\log_5 16$

11 $\log_5 256$

اختبار نهاية الوحدة

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

12 $f(x) = 6^x$

13 $g(x) = (0.4)^x$

14 $h(x) = \log_7 x$

15 $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أحُلُّ المعادلات الآتية، وأقرّب إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16 $8^x = 2$

17 $-3e^{4x+1} = -96$

18 $11^{2x+3} = 5^x$

19 $49^x + 7^x - 72 = 0$

20 $\log_4 (x+3) + \log_4 (x-3) = 2$

21 استثمر سليمان مبلغ JD 2500 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريًّا. أجد جُمْلة المبلغ بعد 15 سنة.

22 أودع سعيد مبلغ JD 800 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.5%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

23 **فيروس:** انتشر فيروس في شبكة حواسيب وَفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، وt الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بعد t يومًا:

24 أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيِّنة.

25 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 أيام.

26 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 1400 خلية؟

27 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة ضعف العدد الأصلي؟

يقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى هيكتوباسكال (*hPa*)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر 1000 *hPa*، ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

28 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

29 عند أيِّ ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

30 **إعلانات:** يُمثِّل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و$x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 400000 من بيع المُنتَج. أجد $S(10)$، وأفسّر معنى الناتج.