

التكامل

الفرع العلمي

حل جميع اسئلة
الوحدة

اتحقق من فهمي

اتدرب واحل المسائل

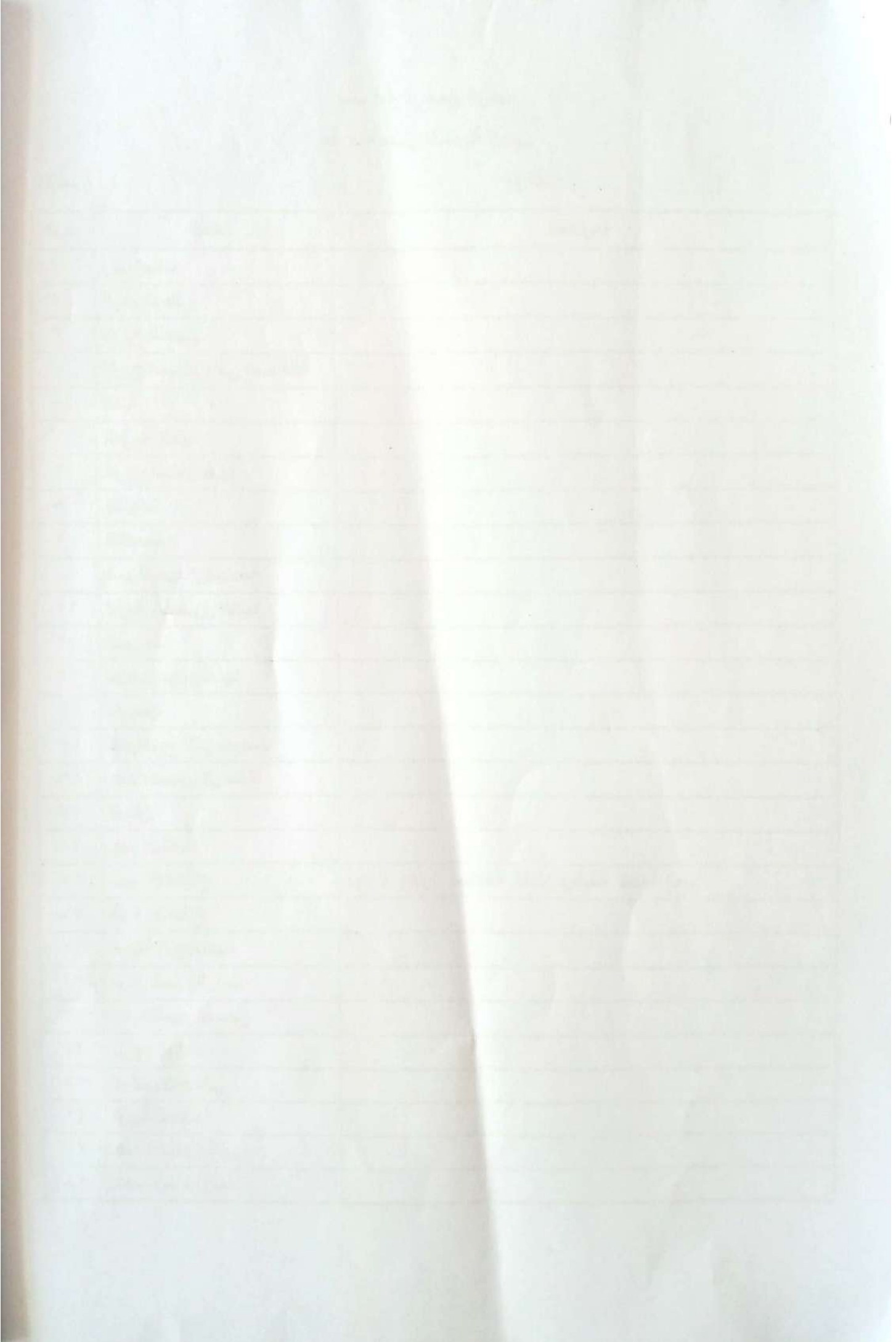
مهارات التفكير العليا

كتاب التمارين

مدرسة سمر الثانوية للبنين

راقت صافي 0785824464

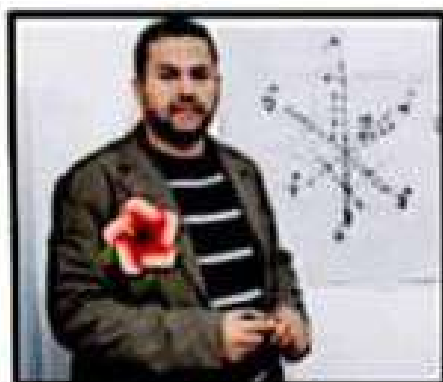
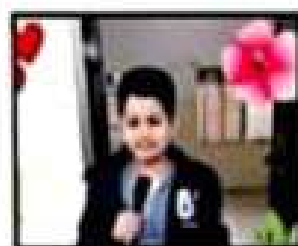




التكامل

الفرع العلمي

تكامل اقترانات خاصة



اتحلق من فهمي

اتكرب واهل المسائل

مهارات التفكير العليا

كتاب التمارين

مدرسة سمير الثانوية للبنين

رائد صفدي 0785824464

(1) جد كلاً من التكاملات الآتية :- (صفحة 10)

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x}) dx$	b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x} dx$	c) $\int \sqrt{e^{1-x}} dx$	d) $\int (\frac{x}{3} + 2\sqrt{x}) dx$
-------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	--

الحل :- نوزع التكامل

$$a) \frac{5x^3}{3} - \frac{3e^{7x}}{7} = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$$

تكميل ما طرح

$$b) \frac{8}{4} e^{4x} \Big|_0^{\ln 3} = 2 e^{4x} \Big|_0^{\ln 3}$$

كوصف

$$= 2e^{4 \ln 3} - 2e^{4(0)}$$

حساب القيم

$$= 2e^{\ln 3^4} - 2e^0$$

$$= (2)(3^4) - 2(1) = 162 - 2 = 160$$

نعالج الجذر

$$c) \int (e^{1-x})^{\frac{1}{2}} dx$$

ضرب قوتان

$$= \int e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} dx$$

تكميل

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} = -2e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} + C$$

نعالج الجذر

$$d) \int (\frac{x}{3} + 2\sqrt{x}) dx$$

نوزع التكامل

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + (2) \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$$

نعالج الباقي

راقب صوابك

(2) جد كلاً من التكاملات الآتية :- (صفحة 12)

a) $\int \cos(3x - \pi) dx$	b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx$	c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x) dx$
-----------------------------	------------------------------------	--

الحل :- تكامل مباشر

1) $\frac{1}{3} \sin(3x - \pi) + C$

2) $-\frac{1}{5} \cot(5x) + \frac{1}{2} e^{2x} + C$ توزيع/تكامل

3) $-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$ توزيع/تكامل

$(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3}) - (-\frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{4} \sin 0)$

$(-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2})) - (-\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{4}(0)) = (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$

(3) جد كلاً من التكاملات الآتية (صفحة 14)

a) $\int \cos^4 x dx$	b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x dx$	c) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$
-----------------------	---	---------------------------------

الحل :-

a) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ (مطابقة)
 حيث يتم كتابه المعكوف (4) على صورة معكوفه

رفعت صباغى

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int (\cos^2 x)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2 dx && \text{نربع } \frac{1}{2} \text{ ثم نربع المقدار داخل القوسا} \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx && \text{نكتب متطابقة } \cos^2 2x \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right) dx && \\
 &= \frac{1}{4} \left(x + (2)\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right) + C && \text{فوزع/تكام} \\
 &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C && \text{نبد} \\
 &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) dx &&& \text{متطابقة الضرب} \\
 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x) dx &&& \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\
 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} &&& \text{فوزع/تكام} \\
 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{4} \sin 0 \right) \right) &&& \text{نوجد حدود التكامل} \\
 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) - 0 \right) &&& \text{نضرب بـ } \frac{1}{2} \text{ للقوسا الداخلي} \\
 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{2\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16} &&& \text{نوجد المقامات}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{dx}{1 + \cos x} \cdot x \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} &&& \text{الضرب بالمرافق او نستخدم المتطابقة} \\
 \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx &&& 1 + \cos(\text{زاوية}) \rightarrow 2\cos^2 \left(\frac{\text{زاوية}}{2} \right) \\
 \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx &&& \text{متطابقة (لقام} \\
 &&& \text{وزع/بسط على المقام} \\
 = \int (\csc^2 x - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}) dx &&& \text{نضرب مع } \sin^2 x \\
 = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx &&& \text{مقلوب البس (الضرب} \\
 &&& \text{فوزع/تكام} \\
 \boxed{\text{راقب ضابغة}} = -\cot x + \csc x + C
 \end{aligned}$$

(4) حد كل من التكاملات الآتية ((صفحة 16))

a) $\int (\sin x - \frac{5}{x}) dx$	b) $\int \frac{5}{3x+2} dx$	c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} dx$	d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$
e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$	f) $\int \cot x dx$	g) $\int \frac{e^x}{e^x+7} dx$	h) $\int \csc x dx$

a) $-\cos x - 5 \ln|x| + C$

الحل : توضع/تكام مباشرة

b) $\frac{5}{3} \ln|3x+2| + C$

مباشرة على بقاىة

$\int \frac{a}{bx+k} dx = \frac{a}{b} \ln|bx+k|$

c) $\int (\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}) dx = \int (1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}) dx$

توضع/تكام على مقام

ثم

$= x - 7 \ln|x| + (2) \frac{x^{-1}}{-1} + C$

توضع/تكام

$= x - 7 \ln|x| - \frac{2}{x} + C$

بقاى لا

الب

d) $\ln|x^2+3x| + C$

متقة (مقام تقطع) متقة

البط مباشرة

e) $\frac{-1}{2} \int \frac{-2 \sin 2x}{1+\cos 2x} dx = \frac{-1}{2} \ln|1+\cos 2x| + C$

بقاى لبط ليصبح متقة

للمقام ، هنا نعمل (الطلع

منه ما داخله ليس الب

f) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

مقاطعة

متقة (مقام

تقطع البط مباشرة

انقضى صافى

g) $\ln|e^x + 7| + c$

منطقة (مقام تقطير لبط مباشرة

h) $\int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx$

$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx$

اجعل منطقة (مقام تقطير لبط

$= - \int \frac{-(\csc^2 x + \csc x \cot x)}{\csc x + \cot x} dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

نلاحظ ان منطقة المقام تقطير لبط والمقام أكثر من حد وتوجد حلال للنظام من المنطقة

(صفحة 17)

5) جد $\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx$

$$\begin{array}{r} x \\ x+1 \overline{) x^2 + x + 1} \\ \underline{-x^2 - x} \\ 1 \end{array}$$

الحل :- منطقة تقطير لبط

$\int (x + \frac{1}{x+1}) dx$

$\frac{x^2}{2} + \ln|1+x| + c$

6) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^3 f(x) dx$ منطقة

(b) إذا كان $f(x) = |1-x|$ جد $\int_{-2}^2 f(x) dx$ منطقة

(c) إذا كان $f(x) = |x^2 - 1|$ جد $\int_{-4}^0 f(x) dx$ منطقة

a)

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1+x) dx + \int_1^3 2x dx$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^1 + x^2 \Big|_1^3$$

الحل :- فترة التقاطع تمر بنقطة التغير

$$\begin{array}{cc} 1+x & 2x \\ \downarrow & \downarrow \\ -1 & 3 \end{array}$$

$= (1 + \frac{1}{2}) - (-1 + \frac{1}{2}) + 9 - 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 8$

أنت ضابط

$= 2 + 8$

$= 10$

b) $1-x=0$ $\frac{1-x}{+++}$ $\frac{x-1}{---}$ أكادح تعريف
 $x=1$ $\boxed{-2}$ $\boxed{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases} \rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(-2 - 2 \right) + \left(2 - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 4 + 0 + \frac{1}{2} = 5$$

$x^2-1=0$ $\frac{x^2-1}{+++}$ $\frac{1-x^2}{---}$ $\frac{x^2-1}{+++}$ أكادح تعريف
 $x=1, -1$ $\boxed{-4}$ $\boxed{0}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-4}^0 f(x) dx = \int_{-4}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^0 (1-x^2) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-4}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 4 \right) + \left(0 - 0 \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{52}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{56}{3}$$

أقرب صواب

7) تترك نفثاً من ناقلة بحرية متوقفاً بقعة دائرية الراس على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ مقدماً بعد t دقيقة من بدء السرب. إذا

كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$ جد $R(t)$ علماً بأن $R(0) = 0$

صفحة 20

الحل = $R(t) = \int R'(t) dt = \int \frac{21}{0.07t+5} dt$

جد C حيث $R(0) = 0$
 $R(t) = \frac{21}{0.07} \ln|0.07t+5| + C$

$R(0) = 300 \ln|0+5| + C$

$0 = 300 \ln 5 + C \rightarrow C = -300 \ln 5$

$\frac{21}{0.07} = 300$

بفرض صيغة C
 $R(t) = 300 \ln|0.07t+5| - 300 \ln 5$

نبدأ
 حيث الطرف
 نصفه
 ونوزعها
 على المقام
 $R(t) = 300 \left(\ln|0.07t+5| - \ln 5 \right) = 300 \ln \left| \frac{0.07t+5}{5} \right|$
 $= 300 \ln|0.014t+1|$

8) يتحرك جسم في مسار متقيم ونقطته تحت المتجهة

صفحة 23

بالاقتراح $v(t) = 3 \cos t$

a) إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل، جد موقع الجسم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة

b) جد ازاحة الجسم في الفترة $[0, 2\pi]$

c) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل = $s(t) = \int v(t) dt = \int 3 \cos t dt = 3 \sin t + C$

جد C حيث $s(0) = 0$
 $s(0) = 3 \sin 0 + C$

$0 = 0 + C$
 $C = 0$

$s(t) = 3 \sin t$

راقب صياغة

$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{6} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ m}$

$$b) S(2\pi) - S(0) = \int_0^{2\pi} 3 \cos t \, dt$$

$$= 3 \sin t \Big|_0^{2\pi} = 3 \sin 2\pi - 3 \sin 0 \\ = 3(0) - 3(0) = 0 \text{ m}$$

$$c) 3 \cos t = 0$$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



$$\int_0^{2\pi} |v(t)| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -v(t) \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} v(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3 \cos t \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3 \cos t \, dt$$

$$= 3 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3 \sin t \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= (3 \sin \frac{\pi}{2} - 3 \sin 0) - (3 \sin \frac{3\pi}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{2}) + 3 \sin 2\pi - 3 \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$= (3 - 0) - (-3 - 3) + 0 + 3$$

$$= 3 + 6 + 3 = 12 \text{ m}$$

امتحان

ثانيًا: اكتب واحدًا من المسائل

جدد كلاً من التفاضل والتكامل :- (صفحة 24)

$$1) \int (e^{2x-3} - \sqrt{x}) dx$$

$$2) \int (e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}) dx$$

$$3) \int (4\sin 5x - 5\cos 4x) dx$$

$$4) \int (3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}) dx$$

$$5) \int (\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}})^2 dx$$

$$6) \int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2) dx$$

$$7) \int (e^x + 1)^2 dx$$

$$8) \int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$$

$$9) \int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$$

$$10) \int (3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}) dx$$

$$11) \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$$

$$12) \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$13) \int \frac{\cos 2x dx}{\sin x \cos x + 4}$$

$$14) \int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$$

$$15) \int \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

$$16) \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) dx$$

$$17) \int (\frac{2}{x} - 2^x) dx$$

$$18) \int \sin 3x \cos 2x dx$$

$$19) \int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1} dx$$

$$20) \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx$$

$$21) \int (\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x \csc x) dx$$

$$22) \int (\sec x + \tan x)^2 dx$$

$$23) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$24) \int \frac{x^2}{x^3-3} dx$$

$$25) \int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x) dx$$

$$26) \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

انقضاء

$$1) \int (e^{2x-3} - x^{\frac{1}{2}}) dx$$

الحل :- نعالج الحذا

$$\frac{1}{2} e^{2x-3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} e^{2x-3} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

نوزع/تكامل ونعالج
الناذج

$$2) \int (e^{\frac{1}{2}x} - 3e^{-\frac{1}{2}x}) dx$$

نعالج
نوزع الحذا

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} = 2e^{\frac{1}{2}x} + 6e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

$$3) \frac{4}{5} \cos 5x - \frac{5}{4} \sin 4x + C$$

نوزع/تكامل

$$4) 3 \sec x - \frac{2}{5} \ln|x| + C$$

نوزع/تكامل

$$5) \int (e^x - 2 + \frac{1}{e^x}) dx = \int (e^x - 2 + e^{-x}) dx$$

فك التربع

$$e^x - 2x - e^{-x} + C = e^x - 2x - \frac{1}{e^x} + C$$

نوزع/تكامل

$$6) \frac{1}{3} \cos(5-3x) + 2x + \frac{4x^3}{3} + C$$

نوزع/تكامل

$$7) \int (e^{2x} + 2e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x + C$$

فك التربع

$$8) -e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$$

نوزع/تكامل

انتهى

9) $\int \left(\frac{x^4}{2x} - \frac{6}{2x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{x} \right) dx$ نوع ربط على مقام وين $\frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} - 3 \ln|x| = \frac{x^4}{8} - 3 \ln|x| + C$ نوع ربط كامل

10) $-\frac{3}{3} \cot(3x+2) + 5 \ln|x| = -\cot(3x+2) + 5 \ln|x| + C$ نوع ربط كامل

11) $\int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int (1 + e^{-x}) dx$ نوع ربط على مقام وين $\frac{1}{e^x}$
 $= x - e^{-x} + C = x - \frac{1}{e^x} + C$ نوع ربط كامل

12) $\ln|e^x + 4| + C$ متفرد مقام ربط ما حرج

13) $\int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x + 4} dx = \ln \left| \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right| + C$ متفرد مقام وجعل
 $= \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right) + C$ متفرد مقام ربط
 لا يمكن حلها
 حاد اظلم مقام موجب

14) $\frac{1}{-\frac{1}{3}} \ln \left| 5 - \frac{x}{3} \right| = -3 \ln \left| 5 - \frac{x}{3} \right| + C$ ما حرج، متفرد مقام x مقام $\frac{1}{3}$

15) $\int \frac{1}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} dx$ المرافق

$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$ نوع ربط على مقام
 $= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} \right) dx$
 $= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x) dx$ نوع ربط كامل

راقب صياغة $= \tan x + \sec x + C$

$$16) \int (\sec^2 x + e^x) dx$$

فك (الضرب) حد

$$(\sec^2 x)(\cos^2 x) = 1$$

$$\tan x + e^x + c$$

نوع/تكامل

$$17) 2|\ln|x|| - \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

نوع/تكامل

$$18) \int \frac{1}{2} (\sin x + \sin 5x) dx$$

مطابقة الضرب

$$\frac{1}{2} (-\cos x - \frac{1}{5} \cos 5x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c$$

نوع/تكامل

$$19) \int \frac{\frac{1}{3}(6x+9)}{3x^2+9x-1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x^2+9x-1| + c$$

احصل مشتقة المقام
تقطيع/ربط

$$20) \frac{\frac{1}{x^2+1} \cdot x^2 + x + 1}{-x^2+1}$$

$$\int (1 + \frac{x}{x^2+1}) dx$$

فك طويلا

$$\int (1 + \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}) dx$$

نوع/تكامل

$$x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

تربيع المقام
مادافله موجب

$$21) \int (\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}) dx$$

نوع/ربط المقام مع
مطابقات الضرب

$$= \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x) dx$$

نوع/تكامل

$$= -\cot x - \csc x - \cos x + c$$

$$22) \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x) dx$$

فك (الربط)

$$\int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) dx$$

مطابقة

$$\int (2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1) dx$$

نوع/تكامل

$$\boxed{\text{راقب ضابغة}} = 2 \tan x + 2 \sec x - x + c$$

$$23) \ln|e^x + e^{-x}| + C$$

مشتق مقام تقطع با حركه

$$24) \int \left(\frac{1}{3}\right) \frac{3x^2}{x^3-3} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3-3| + C$$

اجعل مشتق مقام تقطع

$$25) \int \left(9\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right) - \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right) - (6)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - 3 \sin 2x \right) dx$$

$$= \int (4 + 5 \cos 2x - 3 \sin 2x) dx$$

$$= 4x + \frac{5}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + C$$

نوع/استاد

$$26) \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

فرق مربعين مقامات

$$\int 1 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

حد مشتق كل من مقامات المقام

$$27) \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x dx$$

$$28) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$29) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx$$

$$30) \int_1^e \frac{8x dx}{x^2+1}$$

$$31) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos x dx$$

$$32) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x} dx$$

$$33) \int_0^3 (x-5^x) dx$$

$$34) \int_0^4 |x^2-4x+3| dx$$

$$35) \int_1^4 (3-|x-3|) dx$$

انتهى

الحل: تكامل مباشر

$$27) (2) \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi} = 4 \sin \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi}$$

$$= 4 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin 0$$

$$= (4)(1) - 4(0) = 4$$

28) $\sin x = 0$
 $x = 0, \pi, 2\pi$ إعادة تعريف

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx$$

$\begin{array}{c} \sin x \\ \text{+} \quad \text{+} \quad \text{+} \\ 0 \quad \pi \quad 2\pi \end{array}$
 $\begin{array}{c} -\sin x \\ \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \\ \pi \quad 2\pi \end{array}$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (-\cos \pi + \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi)$$

$$= (1+1) + (1+1) = 4$$

29) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3(\sec^2 x - 1) dx = 3(\tan x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ ملاحظة

نوع التكامل

$$= 3 \left[\left(\tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\tan \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 3 \left[\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{3} - \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

30) $\int_1^e \frac{4(2x)}{x^2+1} dx = 4 \ln |x^2+1| \Big|_1^e$ اجعل متغير التكامل

المعلم غير مهم

$$= 4 \ln(e^2+1) - 4 \ln(2)$$

$$= 4 \ln \left(\frac{e^2+1}{2} \right)$$

مضاعف اللوغاريتم

انتهى

$$31) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx$$

مطابقة الضرب

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

نوع التكامل

$$= \left(-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{8} \cos \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left(-\frac{1}{8} \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 0 \right)$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{8} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right) \right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$$

$$32) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x \sin^2 x dx$$

مطابقة مقام

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \pi - 6}{24}$$

$$33) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{\ln 5} \right) \Big|_0^3$$

نوع التكامل

$$\left(\frac{9}{2} - \frac{5^3}{\ln 5} \right) - \left(0 - \frac{1}{\ln 5} \right) = \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 5}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$$

انقضاء

34)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x=1 \text{ و } x=3$$

إعادة التعريف

$$\begin{array}{c} x^2 - 4x + 3 \\ + \quad + \quad + \quad + \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -x^2 + 4x - 3 \\ - \quad - \quad - \quad - \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 - 4x + 3 \\ + \quad + \quad + \quad + \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^4 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) + \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) - (9 - 18 + 9) \\ &= \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

35)

$$x-3=0$$

$$x=3$$

إعادة التعريف

$$\begin{array}{c} 3-x \\ + \quad + \quad + \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} x-3 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\int_1^4 (3 - |x-3|) dx$$

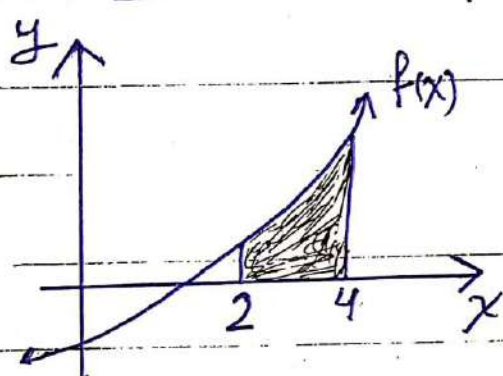
$$\begin{aligned} \int_1^4 (3 - |x-3|) dx &= \int_1^3 (3 - (3-x)) dx + \int_3^4 (3 - (x-3)) dx \\ &= \int_1^3 x dx + \int_3^4 (6-x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + \left(6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_3^4 \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) + (24 - 8) - \left(18 - \frac{9}{2} \right) \\ &= 4 + 16 - \frac{27}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

انتهى

(36) إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 0 \\ 4 - x, & x \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx$ الحل :-

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^2 + 4) dx + \int_0^1 (4 - x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= (0 + 0) - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) + \left(4 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \\ &= \frac{13}{3} + \frac{7}{2} = \frac{47}{6} \end{aligned}$$

(37) جد مساحة المنطقة الفطالة بين المحور x ومنحنى الدالة



$f(x) = e^{0.5x} - 2$ الحل :-

المنطقة موقوفة على محور x

وعرضها بين $x=2$ و $x=4$

محور x و $x=2$ و $x=4$

$$A = \int_2^4 f(x) dx$$

$$= \int_2^4 (e^{\frac{1}{2}x} - 2) dx = \left(2e^{\frac{1}{2}x} - 2x \right) \Big|_2^4$$

$$= (2e^2 - 8) - (2e - 4) = 2e^2 - 2e - 4$$

انتهت صياغة

38) إذا كان $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \ln 12$ جد قيمة a حيث $a > 0$

$$\int_a^{3a} \left(\frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln 12$$

$$(2x + \ln|x|) \Big|_a^{3a} = \ln 12$$

$$(6a + \ln 3a) - (2a + \ln a) = \ln 12$$

$$4a + \ln 3 = \ln 12$$

$$4a = \ln 12 - \ln 3$$

$$4a = \ln 4$$

$$a = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{1}{2} \ln 2$$

الحل:
نوزع $\frac{1}{x}$ على المقام ثم تكامل

نضرب ضارداً اللوغاريتم
حيث الطرح يحول
إلى قسمة

39) أثبت أن $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2} dx = \ln \sqrt{2}$ حيث $a \neq 0$

الحل =

اجعل $u = x^2 + a^2$ $\frac{1}{2} du = x dx$

$$\int_0^a \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \ln \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) \Big|_0^a = \ln \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2a^2 - \frac{1}{2} \ln a^2$$

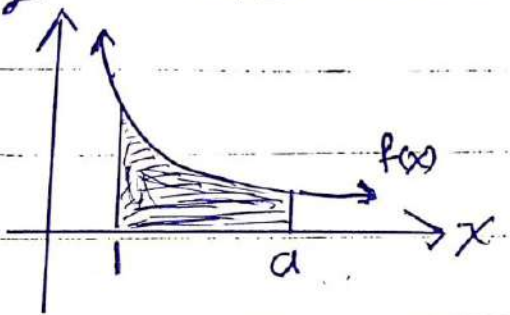
$$= \frac{1}{2} \ln \frac{2a^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2}$$

ضارداً
اللوغاريتم

راقب ضارباً

(40) يسر الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{4}{x}$ اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x وتقيمت $x=1$ و $x=a$ هي 10 وحدت مربعة حددت a



$$A = \int_1^a \frac{4}{x} dx = 10$$

$$4 \ln|x| \Big|_1^a = 10$$

$$4 \ln a - 4 \ln 1 = 10$$

$$4 \ln a = 10$$

$$\ln a = \frac{5}{2}$$

$$a = e^{\frac{5}{2}}$$

اخذ e للثبات

(41) اذا كان $f(x) = \int \cos(\frac{1}{2}x + \pi) dx$ وكان $f(\pi) = 3$ حدد $f(0)$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin(\frac{1}{2}x + \pi) + C$$

تكامل

$$f(x) = 2 \sin(\frac{1}{2}x + \pi) + C$$

بجاء ثابت التكامل من خلال الشرط $f(\pi) = 3$

$$f(\pi) = 2 \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) + C$$

$$3 = 2 \sin \frac{3\pi}{2} + C$$

$$3 = -2 + C$$

$$C = 5$$

$$f(x) = 2 \sin(\frac{1}{2}x + \pi) + 5$$

$$f(0) = 2 \sin \pi + 5$$

$$= 0 + 5 = 5$$

انتهى صواب

42) إذا كان $y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) dx$ وكان $y = 1$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

أثبت أنه يمكن كتابة y في صورة $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

الحل =

$$y = \int \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + C$$

بما أن

$$1 = \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + C$$

نستخدم شرط
للمعادلة C

$$1 = \frac{1}{2}(1) + C \rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \frac{1}{2}$$

تذكير

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - ax) = \sin ax$$

أو نعلم متطابقة
فرق زوايا

$$y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

43) يحل الاقتران $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل (هما) منحني الاقتران y

جد قاعدة الاقتران y إذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة

(0, 1)

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x}) dx$$

الحل =

$$y = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

بند ثابت/بما أن هذا الشرط عند $x = 0$ فإن $y = 1$

$$1 = \frac{1}{2} e^0 + 2e^0 + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

مراجعة سريعة

(44) إذا كان $\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} (9 + \sin 3x) dx = a\pi + b$ حدد قيمة a و b

$$\begin{aligned} & \text{الحل:} \\ & = \left(9x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} \\ & = \left(9\pi - \frac{1}{3} \cos 3\pi \right) - \left(\pi - \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} \right) \\ & = 9\pi + \frac{1}{3} - \pi + \frac{1}{6} \\ & = 8\pi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$$

$$a = 8, b = \frac{1}{2}$$

(45) ليكن $f'(x) = \cos^2 x$ ليكن $f(x)$ دالة الاقتران f إذا علمت ان منحناها يمر بنقطة

الأصل

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$f(x) = \int \cos^2 x dx$$

$$f(x) = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

نستخدم الشرط $f(0) = 0$ كما دنا بـ التكامل

$$f(0) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) + C$$

$$0 = \frac{1}{2} (0 + 0) + C$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

انتهت هنا

تتحرك جسم في مسار مستقيم وتقع على مسافة المتجهة بالاقتران

$v(t) = e^{-2t}$ إذا كان الموقع الابتدائي للجسم هو 3m عند

(46) موقع الجسم بعد 100 ثانية (47) موقع الجسم بعد 100 ثانية
الحل :-

$$\begin{aligned} 46) \quad S(t) &= \int v(t) dt = \int e^{-2t} dt \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2t} + C \end{aligned}$$

بشرطية التمام هذا الشرط $S(0) = 3$

$$S(0) = -\frac{1}{2} e^0 + C$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$S(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

$$47) \quad S(100) = -\frac{1}{2} e^{-200} + \frac{7}{2}$$

القيمة حاسبة

في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابات كبرى، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغير بمعدل $P'(t) = -0.5 e^{-0.03t}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة

(48) جد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t علماً بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان

(49) جد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح

$$48) \quad P(t) = \int P'(t) dt = \int -0.5 e^{-0.03t} dt$$

$$P(t) = \frac{0.5}{0.03} e^{-0.03t} + C$$

تقريب 17

$$500 = \frac{50}{3} e^0 + C$$

$$500 = 17 + C \rightarrow C = 483$$

بشرط C هذا الشرط

$$P(0) = 500$$

$$P(t) = 17 e^{-0.03t} + 483$$

$$(49) \quad P(10) = 17 e^{-0.3} + 483$$

$$\approx 496 \quad \text{القيمة حاسبة}$$

راقبت ضابطة

في التجربة لدواء جديد اعطى مريضاً لديه ورم حميد
حجمه 30 cm^3 تبين ان حجم الورم بعد t يوماً من
بدء التجربة يتغير بعدل $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مقياساً بوحدة
 cm^3/day

(50) جد قاعدة حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة
(51) جد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة
الحل:

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t}) dt$$

$$P(t) = 0.15t - \frac{0.9}{0.006} e^{0.006t} + C$$

جد C هذا الشرط $P(0) = 30$

$$P(0) = (0.15)(0) - 150e^0 + C$$

$$30 = -150 + C \rightarrow C = 180$$

$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

$$(51) \quad P(10) = (0.15)(10) - 150e^{0.06} + 180$$

$$= 1.5 - 150e^{0.06} + 180$$

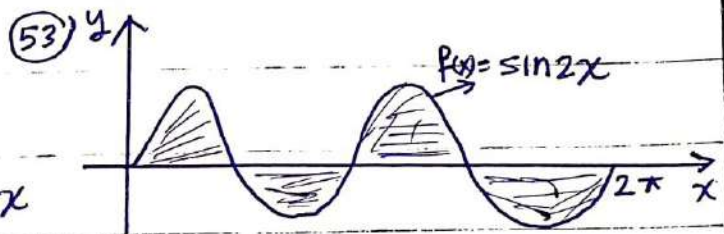
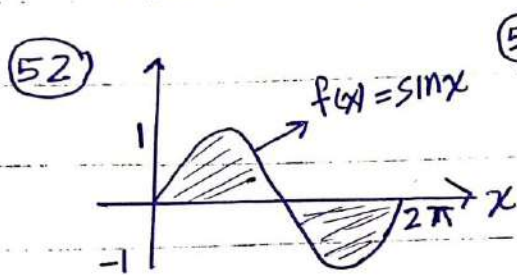
$$\approx 22.2 \text{ cm}^3$$

النتيجة

راقب صافي

ثالثاً :- مهارات التفكير العليا

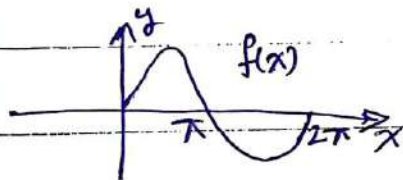
جد مساحة المنطقة المظلة في كل من التمثيلين البيانيين :-



الحل :-

نلاحظ وجود ما حاننا اصداهما فوق محور x واضربا تحت محور x (52)

ننقطة تقاطع مع محور x غير معروفه



$$\sin x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi$$

$$A = \int_0^{\pi} f(x) dx + - \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

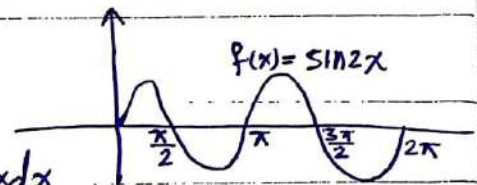
(53)

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

هذه المثلثية



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$\boxed{\text{مساحة المنطقة المظلة}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4$$

حد كل من المتكاملات الآتية ((تحدى))

54) $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$

55) $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx$

56) $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$

54) $\int \frac{\sec x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x - 1} dx$

$= \ln |\tan x - 1| + C$

الحل: نحاول جعل متقة المقام
تقطيع ربط، نقيم كل حد
على $\cos x$

متقة المقام نقطع ربط مباشرة

حل آخر: نخرج $\cos x$ كامل مقترن
من المقام

55) $\int \frac{\frac{\cot x}{\sin x}}{\frac{2}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x}} dx$

$\int \frac{\cot x \csc x}{2 \csc x + 1} dx$

$\int \frac{(\frac{1}{2}) - 2 \cot x \csc x}{2 \csc x + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln |2 \csc x + 1| + C$

نفذ فكره السؤال السابق، نقيم
كل حد على $\sin x$

اجعل متقة المقام نقطع ربط

56) $\int \frac{1}{3x \ln x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$

$= \frac{1}{3} \ln |\ln x| + C$

هذا هو الفكار بيق
وجعل متقة
المقام نقطع ربط

أقمت ضاوي

(57) إذا كان $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3} \right) dx = 0.5 \ln 5$ جد قيمة الثابت a حيث $a > 0$

الحل :- نوزع/نكامل

$$\left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|2x+3| \right) \Big|_1^a = \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\left(\ln a - \frac{1}{2} \ln(2a+3) \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 5 \right) = \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\ln a - \frac{1}{2} \ln(2a+3) + \frac{1}{2} \ln 5 = -\frac{1}{2} \ln 5$$

$$\ln a - \ln \sqrt{2a+3} = 0$$

نقسم كلا الطرفين

$$\ln \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$$

نأخذ e الطرفين

$$\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$$

نربع طرفي المعادلة

$$a^2 = 2a+3$$

نرتب

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

مقدار a هو 3

$$a = 3$$

$$a = -1$$

مرفوض

(58) أثبت بطريقتين مختلفتين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx = 0$

طريقة (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4x + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{والمطلوب}$$

النتيجة

طريقة (2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) dx$$

مطابقة

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} \sin 0$$

$$0 - 0 = 0$$

59) إذا كان $\int_{\frac{\pi}{4K}}^{\frac{\pi}{3K}} (1 - \pi \sin Kx) dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$ جد قيمة الثابت K

الحل :-

نوزع على π $\left(x + \frac{\pi}{K} \cos Kx\right) \Big|_{\frac{\pi}{4K}}^{\frac{\pi}{3K}} = \pi(7 - 6\sqrt{2})$

$$\left(\frac{\pi}{3K} + \frac{\pi}{K} \cos \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4K} + \frac{\pi}{K} \cos \frac{\pi}{4}\right) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\frac{\pi}{3K} + \frac{\pi}{2K} - \frac{\pi}{4K} - \frac{\pi}{\sqrt{2}K} = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\frac{\pi}{K} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

وحد المقامات داخل القوس للمعد 12

$$\frac{\pi}{K} \left(\frac{7 - 6\sqrt{2}}{12}\right) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\frac{\pi}{12K} = \pi \rightarrow 12\pi K = \pi \rightarrow K = \frac{\pi}{12\pi} \rightarrow K = \frac{1}{12}$$



يكون جسم في ما، متوقف وقطع حركته

المسافة بالامتداد $0 \leq t \leq 6$ و $v(t) = 2t + 4$
 $6 < t \leq 10$ و $20 - (t - 8)^2$

إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل $t = 0$ جد :-

(60) موقع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة

(61) موقع الجسم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة

الحل :-

$$s(t) = \int (2t + 4) dt = t^2 + 4t + C$$

(60) عند $t = 5$ لقاعدة لاولى

$$s(0) = 0 + 0 + C \rightarrow C = 0$$

بذ $C = 0$ صحيح $s(0) = 0$

$$\boxed{0 = C}$$

$$s(t) = t^2 + 4t + 0$$

$$s(5) = 25 + 20 = 45$$

راقب ضابط

(61)

$$S(t) = \int (20 - (t-8)^2) dt$$

$$S(t) = 20t - \frac{(t-8)^3}{3} + C$$

$t=4$ عند $6 < t \leq 10$ لقاسم $\frac{1}{3}$ ثانية

منا لا يجاد C اجد الموقع الابتدائي
الفترة صفر اجد $S(6)$ من قاسم الاول

$$S(6) = 36 + 24 = 60$$

$$S(6) = 20(6) - \frac{(6-8)^3}{3} + C$$

$$60 = 120 + \frac{8}{3} + C \rightarrow C = -\frac{188}{3}$$

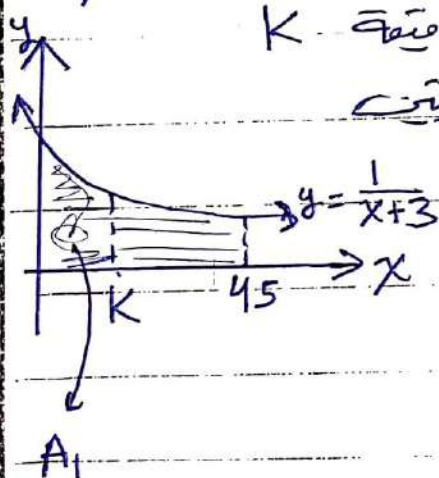
$$S(t) = 20t - \frac{(t-8)^3}{3} - \frac{188}{3}$$

$$S(9) = 20(9) - \frac{1}{3} - \frac{188}{3} = 180 - \frac{189}{3} = 180 - 63 = 117 \text{ m}$$

(62) بين الشكل (جوار) المنطقة المصورة بين منحني الاقتران $y = \frac{1}{x+3}$

والمحور x وفتحتين $x=0$ و $x=45$ حد منطقة K

التي تقسم المنطقة (ظللة) الى منطقتين متساويتين



$$A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^{45} = \ln 48 - \ln 3 = \ln 16$$

$$A_1 = \int_0^K \frac{1}{x+3} dx = \ln|x+3| \Big|_0^K = \ln(K+3) - \ln 3 = \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2} \ln 16 = \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

$$\ln 4 = \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

$$4 = \frac{K+3}{3}$$

$$K+3 = 12$$

اقتضايا

$$K = 9$$

اجمأ :- كتاب التعاريف

جد كلٍّ من المتكاملات التالية

$$1) \int 4e^{-5x} dx$$

$$2) \int (\sin 2x - \cos 2x) dx$$

$$3) \int \cos^2 x dx$$

$$4) \int \frac{e^x + 4}{e^{2x}} dx$$

$$5) \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x \right) dx$$

$$6) \int (3\cos 3x - \tan^2 x) dx$$

$$7) \int \cos x (1 + \csc^2 x) dx$$

$$8) \int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$$

$$10) \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$11) \int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx$$

$$12) \int \ln e^{\cos x} dx$$

$$13) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$14) \int \frac{3}{2x-1} dx$$

$$15) \int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx$$

$$1) \frac{-4}{5} e^{-5x} + C$$

الحل - نتكامل ما حرج

$$2) -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

نوع/متكامل

$$3) \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

متكامل

$$4) \int \left(\frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{4}{e^{2x}} \right) dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x}) dx$$

نوع/متكامل

$$\boxed{\text{مشتق صافي}}$$

$$= -e^{-x} - \frac{4}{2} e^{-2x} = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

$$5) \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} - 2e^x \right) dx$$

نقال (قوة المقام)

$$\int (\cot x \csc x - 2e^x) dx = -\csc x - 2e^x + C$$

$$6) \int (3 \cos 3x - (\sec^2 x - 1)) dx = \int (3 \cos 3x - \sec^2 x + 1) dx$$

مطابقة

$$= \frac{3}{2} \sin 3x - \tan x + x + C$$

$$= \sin 3x - \tan x + x + C$$

$$7) \int (\cos x + \cos x \csc^2 x) dx$$

فك (متر)

$$\int \left(\cos x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int (\cos x + \cot x \csc x) dx$$

نفسه

$$= \sin x - \csc x + C$$

$$8) \int \left(x - 1 + \frac{-2}{x+2} \right) dx$$

قوة مطوية

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+2 \overline{) x^2+x-4} \\ \underline{x^2+2x} \\ -x-4 \\ \underline{-x-2} \\ -2 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{2} - x - 2 \ln|x+2| + C$$

$$9) \int \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

نقال الجذر

$$= -2 e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

$$10) \int (\sec^2 x + x^{-2}) dx$$

مقابل/سب (المتر)

$$= \tan x + \frac{x^{-1}}{-1} = \tan x - \frac{1}{x} + C$$

$$11) \int \left(\frac{1}{3} \right) \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 3x^2| + C$$

المقابل/سب (المتر)

الاجا

انقضاء

$$12) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

مضادها اللوغاريتم

$$13) \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$$

متطابقة

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$14) \int \frac{3}{2} |n| 2x-1| + C$$

مبا حرج

$$15) \int \left(\frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2} x} - \frac{2 \cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x} \right) dx$$

نوع/بطا (لقيام)

$$\int (3 \csc^2 \frac{1}{2} x - 2 \cot \frac{1}{2} x \csc \frac{1}{2} x) dx$$

نوع/متكامل

$$= -\frac{3}{\frac{1}{2}} \cot \frac{1}{2} x + \frac{2}{\frac{1}{2}} \csc \frac{1}{2} x + C$$

$$= -6 \cot \frac{1}{2} x + 4 \csc \frac{1}{2} x + C$$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

$$16) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$17) \int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$$

$$18) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx$$

$$19) \int_{-1}^1 |3x-2| dx$$

$$20) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3 \sin x)^2 dx$$

$$21) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

$$22) \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x) dx$$

$$23) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} dx$$

راقب صياغة

$$24) \int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx$$

الحل: مشتقة (مقام تخطى/يريد)

$$16) \left| \ln(e^x + 4) \right|_0^1 = \ln(e+4) - \ln(1+4) \\ = \ln\left(\frac{e+4}{5}\right)$$

$$17) \left(\frac{1}{3} \ln|3x-2| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 4 - \frac{1}{3} \ln 1 = \frac{1}{3} \ln 4 - 0 = \frac{1}{3} \ln 4$$

مشتقة

$$18) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \left. -\frac{1}{4} \cos 2x \right|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ = -\frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4} \cos 0 \\ = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} (1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

إذا كان غير معرف

$$19) \begin{array}{ccc} 2-3x & & 3x-2 \\ \downarrow & \frac{2}{3} & \downarrow \\ -1 & & 1 \end{array}$$

$$3x-2=0 \\ x = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 |3x-2| dx = \int_{-1}^{\frac{2}{3}} (2-3x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (3x-2) dx \\ = \left(2x - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{\frac{2}{3}}^1 \\ = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - 2 \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) \\ = \frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} \\ = \frac{13}{3}$$

أقمت ضاوي

20) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6 \cos x \sin x + 9 \sin^2 x) dx$ فك/مربع
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + 3 \sin 2x + 9(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x))) dx$ مطابقات
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + 3 \sin 2x + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \cos 2x) dx$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 + 3 \sin 2x - 4 \cos 2x) dx$ كامل
 $= (5x - \frac{3}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= (\frac{5\pi}{4} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2}) - (0 - \frac{3}{2} \cos 0 - 2 \sin 0)$
 $= \frac{5\pi}{4} - 0 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{5\pi - 2}{4}$

21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= -\ln |\cos \frac{\pi}{4}| + \ln |\cos 0|$
 $= -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2$ الب

22) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4(\sin x \cos x)^2) dx$
 $\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4(\frac{1}{2} \sin 2x)^2) dx$
 $\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x dx$
 $= (\frac{1}{4} \sin 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{16}}$
 $= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin 0$
 $= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

انتهى

$$23) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + 2\sin x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} dx$$

فك أقواس ونعوض بـ
على مقام

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \tan^2 x) dx$$

مطابقة

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x - 1) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + 2\tan x \sec x - 1) dx$$

$$\begin{aligned} (2\tan x + 2\sec x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} &= (2\tan \frac{\pi}{4} + 2\sec \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) - (2\tan 0 + 2\sec 0 - 0) \\ &= (2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) - (0 + 2) \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$24) \begin{array}{r} 2 \\ 3x+2 \overline{) 6x+4} \\ \underline{6x+4} \\ -4 \end{array} \quad \text{مقسمة طولية}$$

$$\int_0^1 \left(2 + \frac{-4}{3x+2} \right) dx = \left(2x - \frac{4}{3} \ln |3x+2| \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(2 - \frac{4}{3} \ln 5 \right) - \left(0 - \frac{4}{3} \ln 2 \right)$$

$$= 2 - \frac{4}{3} \ln 5 + \frac{4}{3} \ln 2$$

$$= 2 + \frac{4}{3} (\ln 2 - \ln 5) = 2 + \frac{4}{3} \ln \frac{2}{5}$$

هذا هو الجواب
حيث لم
تأخذ

انتهى

(25) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 3 \\ 10-x & x > 3 \end{cases}$ جد قيمة $\int_1^5 f(x) dx$

الحل:-

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx + \int_3^5 (10-x) dx$$

$$= (x^2 + x) \Big|_1^3 + (10x - \frac{x^2}{2}) \Big|_3^5$$

$$= (9+3) - (1+1) + (50 - \frac{25}{2}) - (30 - \frac{9}{2}) = 30 - \frac{16}{2} = 22$$

(26) إذا كان $\int_1^K \frac{4}{2x-1} dx = 1$ جد قيمة ثابت K حيث $K > \frac{1}{2}$

الحل:-

$$\frac{4}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^K = 1$$

بكمال:

$$2 \ln(2K-1) - 2 \ln 1 = 1$$

$$\ln(2K-1) = \frac{1}{2} \quad \text{نأخذ } e \text{ طرفين}$$

$$2K-1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$2K = 1 + e^{\frac{1}{2}} \rightarrow K = \frac{1 + e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{e}}{2}$$

(27) إذا كان $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7}$ جد قيمة ثابت a حيث $a > 0$

$$(e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$$

الحل:- نوزع/نكامل

$$(e^{\ln a} - e^{-\ln a}) - (e^0 - e^0) = \frac{48}{7}$$

$$e^{-\ln a} = e^{\ln a^{-1}} = \frac{1}{a}$$

$$(a - \frac{1}{a}) - 0 = \frac{48}{7}$$

اضرب بـ $7a$

$$7a^2 - 7 = 48a$$

نرتب

$$7a^2 - 48a - 7 = 0$$

$$(7a+1)(a-7) = 0$$

$$7a+1=0 \rightarrow a = -\frac{1}{7}$$

$$a-7=0 \rightarrow a = 7$$

وبما أن $a > 0$ فـ $a = 7$

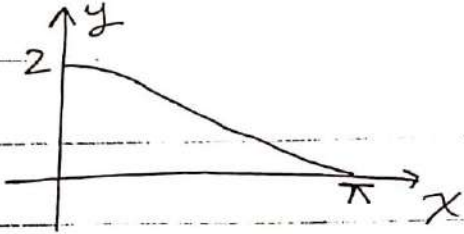
مرفوضها
 $a > 0$

انتهى الحل

(28) بيّن أن الشكل (المجاور جزءاً من منحنى الاقتتان $f(x) = 2 \cos^2 0.5x$

جد مساحة المنطقة (المحور y بين منحنى

الاقتتان و (محور x بين الاختارين) (موجبت



الحل:

$$A = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \frac{1}{2} x dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos x) dx$$

نفسه/تأمل

$$= (x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = (\pi + \sin \pi) - (0 + \sin 0)$$

$$= \pi + 0 - 0 - 0 = \pi$$

(29) في كل مما يأتي (المساحة الأولى للاقتتان $f(x)$ ونقطة صيرها

منحنى $y = f(x)$ - جعل المعلومات (مطابق لاجاد قايمة الاقتتان $f(x)$

(29) $f'(x) = e^{-x} + x^2$ و (0, 4) (30) $f'(x) = \frac{3}{x} - 4$ و (1, 0)

الحل:-

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^{-x} + x^2) dx$$

$$= -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + C$$

لايجاد C نستخدم الشرط

$$f(0) = -e^0 + 0 + C$$

$$4 = -1 + C$$

$$C = 5$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + 5$$

انتهى

$$30) f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{3}{x} - 4 \right) dx = 3 \ln|x| - 4x + C$$

$$f(1) = 3 \ln|1| - 4 + C$$

$$f(1) = 0 \text{ عن } \sqrt{\quad}$$

$$0 = -4 + C$$

$$C = 4$$

$$f(x) = 3 \ln|x| - 4x + 4$$

لتحريك جسم في ما، ف نقيم ونقطه سرعة لنتيجة بالافتراض

$$v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$$

(31) حدد الزاوية الجسم في الفترة $[0, 3]$

(32) حدد المسافة الكلية / المسافة التي قطعها الجسم في الفترة $[0, 3]$

الحل:

$$\begin{aligned} 31) \quad S(3) - S(0) &= \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^3 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left(-\frac{1}{2} \ln|1+t^2| \right) \Big|_0^3 = -\frac{1}{2} \ln 10 + \frac{1}{2} \ln 1 = -\frac{1}{2} \ln 10 \text{ m} \end{aligned}$$

32) ندرس المسار، نربط لو سرعة لأن (نقام دائماً موجباً)

$$-t = 0$$

$$t = 0$$

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^3 -v(t) dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{2t}{1+t^2} dt = \left(\frac{1}{2} \ln|1+t^2| \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{2} \ln 10 - \frac{1}{2} \ln 1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 10 = \ln \sqrt{10} \text{ m}$$

انقضاء صافي

نحسب المسافة التي قطعها الجسم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\therefore v(t) = 6 \sin 3t$$

(33) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

(34) المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل:

$$(33) s(\frac{\pi}{2}) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 3t dt$$

$$= \left(-\frac{6}{3} \cos 3t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-2 \cos 3t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2 \cos \frac{3\pi}{2} + 2 \cos 0$$

$$= 0 + 2 = 2$$

(34)

$$6 \sin 3t = 0$$

$$3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \dots$$

نلاحظ أن $v(t) = 0$ عند $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \dots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} v(t) dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -v(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6 \sin 3t dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6 \sin 3t dt$$

$$= \left(-2 \cos 3t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(2 \cos 3t \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = (-2 \cos \pi + 2 \cos 0) + (2 \cos \frac{3\pi}{2} - 2 \cos \pi)$$

$$= (2 + 2) + (0 + 2)$$

$$= 6 \text{ m}$$

المسافة الكلية

نحلل حجم في ما، متغير وقتاً - سرعة بالاقتران

$$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & 0 \leq t \leq 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t & t > 6 \end{cases} \quad (35)$$

إذا انطلق الجسم من نقطة الصفر عند موقعه بعد 40 ثانية من بدء الحركة

الحل :-

$$s(t) = \int (15 - \frac{1}{2}t) dt \quad \text{عند } t=40 \text{ (فترة } t > 6)$$

$$s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C$$

نتابع الى C حيث موقع الجسم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى

$$s(t) = \int (8t - t^2) dt = 4t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

$$s(0) = 0 - 0 + C$$

$$0 = C$$

$$s(t) = 4t^2 - \frac{t^3}{3}$$

$$s(6) = 144 - \frac{216}{3} = 72$$

$$s(0) = 0$$

نفساً في $s(t)$ (المقاسة بالـ m)

$$s(6) = 15(6) - \frac{1}{4}(36) + C$$

$$72 = 90 - 9 + C$$

$$C = -9$$

$$s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9$$

$$s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9$$

$$= 600 - 400 - 9$$

$$= 191 \text{ m}$$

انتهى

التكامل

الفرع العلمي

التكامل بالتعويض



اتصل من لهما

اتكرب واهل المسائل

مهارات التفكير العليا

كتاب التمارين

مدرسة سمر الثانوية للبنين

راحت صلي 0785824464

التحقق من فهمك

1) جد كلٍّ من التكاملات الآتية = صفحة 32

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3-5} dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x dx$

f) $\int x 2^{x^2} dx$

الحل: -
 a) $u = x^3 - 5$
 $\frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$
 $\int 4x^2 \sqrt{u} \frac{du}{3x^2} = \int \frac{4}{3} u^{\frac{1}{2}} du$
 $= (\frac{4}{3})(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}) + C$
 $= \frac{8}{9} (x^3 - 5)^{\frac{3}{2}} + C$
 $= \frac{8}{9} \sqrt{(x^3 - 5)^3} + C$

الحل: -
 c) $u = \ln x$
 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$
 $\int \frac{u^3}{x} x du = \int u^3 du$
 $= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$

الحل: -
 b) $u = \sqrt{x}$
 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$
 $\frac{dx}{dx} = 2u du$
 $\int \frac{1}{2u} e^u 2u du$
 $\int e^u du = e^u + C$
 $= e^{\sqrt{x}} + C$

الحل: -
 d) $u = \ln x$
 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$
 $\int \frac{\cos u}{x} x du$
 $= \int \cos u du$
 $= \sin u + C$
 $= \sin(\ln x) + C$

أقمت صاوي

e) $u = \cos 5x$ صنا فرض اللاحقة التي
تكون ليست (1)

$$\frac{du}{dx} = -5 \sin 5x \rightarrow dx = \frac{du}{-5 \sin 5x}$$

$$\int u^4 \sin 5x \frac{du}{-5 \sin 5x}$$

$$\int -\frac{1}{5} u^4 du$$

$$= -\frac{1}{5} \frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{25} \cos^5 5x + C$$

f) $u = x^2$ u-4
غير خطي

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x^2 u^4 \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^4 du$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$= \frac{u^5}{10} + C = \frac{x^5}{10} + C$$

(2) جد كل واحد من التكاملات التالية (صفحة 34)

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx$

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx$

a) $u = \sqrt{1+2x}$ وجود جذر
خطي

$$u^2 = 1+2x$$

$$2u du = 2dx$$

$$dx = u du$$

$$\int \frac{x}{u} (u du) = \int x du$$

نكتب x بدلالة u

نعود للفرضية

$$u^2 = 1+2x$$

$$x = \frac{u^2 - 1}{2}$$

$$\int \frac{u^2 - 1}{2} du$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C = \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} u + C$$

$$= \frac{(\sqrt{1+2x})^3}{6} - \frac{\sqrt{1+2x}}{2} + C$$

b) $u = x^4 - 8$ مشتق القوس
موجود
الحل :-

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\int x^7 u^3 \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4} \int x^4 u^3 du$$

نكتب x^4 بدلالة u

$$u = x^4 - 8$$

$$x^4 = u + 8$$

$$\frac{1}{4} \int (u+8) u^3 du$$

$$\frac{1}{4} \int (u^4 + 8u^3) du$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{u^5}{5} + 2u^4 \right) + C$$

$$\frac{1}{20} (x^4 - 8)^5 + \frac{1}{2} (x^4 - 8)^4 + C$$

انتهى

c) $u = 1 - e^x$

من أجل القوس جزء من
المتكامل موجود

نكتب e^{2x} بدلا من u

$$\frac{du}{dx} = -e^x \rightarrow dx = \frac{-du}{e^x}$$

$$u = 1 - e^x$$

$$\text{نجد } e^x = 1 - u$$

$$e^{2x} = 1 - 2u + u^2$$

$$= \int \frac{-e^{3x}}{u^2} \frac{du}{e^x} = - \int \frac{e^{2x}}{u^2} du$$

$$= - \int \frac{(1 - 2u + u^2)}{u^2} du$$

نوزع/نطالع (مقام)

$$= - \int (u^{-2} - \frac{2}{u} + 1) du = - (\frac{u^{-1}}{-1} - 2 \ln|u| + u) + c$$

$$= \frac{1}{u} + 2 \ln|u| - u = \frac{1}{1 - e^x} + 2 \ln|1 - e^x| - 1 + e^x + c$$

(3) حدد كلٍّ من المتكاملات التالية (صفحة 35)

a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

b) $\int x \sqrt[3]{(1-x)^2} dx$

الحل

a) $u = \sqrt[3]{x}$

موجود جزء من

$$u^3 = x$$

الآن
نضرب

$$3u^2 du = dx$$

$$\int \frac{3u^2 du}{x + u}$$

نكتب x بدلا من u

من الفرضية $x = u^3$

$$\int \frac{3u^2 du}{u^3 + u} = \int \frac{3u^2 du}{u(u^2 + 1)}$$

$$= \int \frac{3u}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{3}{2} \ln|u^2 + 1| = \frac{3}{2} \ln|\sqrt[3]{x^2} + 1| + c$$

انتهى

نعمل القسط
لأنه داخل موجود

b) $u = \sqrt[3]{1-x}$

موجود
جزء من

$$u^3 = 1 - x$$

$$3u^2 du = -dx$$

$$dx = -3u^2 du$$

$$\int x u^2 (-3u^2 du)$$

$$\int -3u^4 x du$$

نكتب x بدلا من u

من الفرضية $u^3 = 1 - x$

$$x = 1 - u^3$$

$$= \int -3u^4 (1 - u^3) du$$

$$= \int (-3u^4 + 3u^7) du$$

$$= -\frac{3}{5} u^5 + \frac{3}{8} u^8 + c$$

$$= -\frac{3}{5} \sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{(1-x)^8} + c$$

(4) ليكن الدفتران $P(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تعمل في أجهزة

الحاسوب، حيث x عدد القطع المباعة منها بالآلاف إذا كان

$P'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة. حدد $P(x)$ كلياً

بأن سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد

القطع المباعة فيها 400 قطعة. صفحة 37

الحل :-

$$P(x) = \int P'(x) dx = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} u &= 9+x^2 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{-135}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \left(\frac{-135}{2} \right) \left(2u^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= -135 \sqrt{u} + C$$

$$P(x) = -135 \sqrt{9+x^2} + C$$

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ P &= 30 \end{aligned}$$

$$30 = -135 \sqrt{9+16} + C$$

عندما $x=4$ لأنه
بالآلاف x

$$30 = -135(5) + C$$

$$C = 30 + 675$$

$$C = 705$$

$$P(x) = -135 \sqrt{9+x^2} + 705$$

أقف ضابحي

(صفحة 39)

(5) حد كلٍّ من التكاملين الآتيين

a) $\int \sin^3 x dx$

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$

الحل :

a) $\int \sin^2 x \sin x dx$

مطابقة
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int (1 - u^2) \sin x \frac{du}{\sin x}$

$\int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u + C$

$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$

b) $u = \sin x$

فرضي مع زوجي

$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \cos^5 x u^2 \frac{du}{\cos x} = \int \cos^4 x u^2 du$

$u = \sin x \rightarrow \cos^4 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
من المربعين
 $\cos^2 x = 1 - u^2$
نربع
 $\cos^4 x = 1 - 2u^2 + u^4$

$\int u^2 (1 - 2u^2 + u^4) du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du$

$= \frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{u^7}{7} = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C$

(صفحة 41)

(6) حد كلٍّ من التكاملات الآتية

a) $\int \tan^4 x dx$

b) $\int \cot^5 x dx$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x dx$

a) $\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx$

$= \int (\tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x) dx$

نفرض التكامل

$= \int (\tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx)$

نحل كل حد لوحده

$\int \tan^2 x \sec^2 x dx$

sec x زوجي

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u^2 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{1}{3} \tan^3 x$

$\int \tan^2 x dx$

مطابقة

$\int (\sec^2 x - 1) dx$

$\tan x - x$

التكامل

انقطة صافية

$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$

$$b) \int \cot^4 x \cot x dx$$

في حالة القوة فردية
أحسب واحدة فقط دون
الحالة المتبقية مع التنازل

$$\int (\cot^2 x)^2 \cot x dx = \int (\csc^2 x - 1)^2 \cot x dx$$

$$u = \csc x$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$$

$$\int (u^2 - 1)^2 \cot x \frac{du}{-\csc x \cot x} = \int \frac{-(u^2 - 1)^2}{\csc x} du$$

نكتب $\csc x$
على u

$$= \int \frac{-(u^4 - 2u^2 + 1)}{u} du = \int (-u^3 + 2u + \frac{1}{u}) du$$

نوزع على
المقام

$$= -\frac{u^4}{4} + u^2 - \ln|u| = -\frac{1}{4} \csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$$

$$c) \int \sec^4 x \tan^6 x dx$$

صاغة $\sec x$ فردية

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

نكتب $\sec^2 x$ على u
 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
 $= 1 + u^2$

$$\int \sec^4 x u^6 \frac{du}{\sec^2 x} = \int \sec^2 x u^6 du$$

$$= \int (1 + u^2) u^6 du = \int (u^6 + u^8) du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$$

$$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

راقب صياغة

(7) حد مرقع = مرقع المثلثية (صفحة 43)

a) $\int_0^2 x(x+1)^3 dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx$

a) $u = x+1$

$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$

$\int_1^3 x u^3 du = \int_1^3 u^3 (u-1) du$

$= \int_1^3 (u^4 - u^3) du = \left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{4} u^4 \right) \Big|_1^3$

$= \left(\frac{1}{5} (3)^5 - \frac{1}{4} (3)^4 \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right)$

$= \frac{243}{5} - \frac{81}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{242}{5} - \frac{80}{4} = \frac{242}{5} - 20 = \frac{142}{5}$

الحل:

مرقع المثلثية

عند $x=0$ فإن $u=0+1=1$

عند $x=2$ فإن $u=2+1=3$

نكتب x بدلالة u

= من الفرقية

$x = u - 1$

b) $u = \sec x + 2$

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

$dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$

مرقع المثلثية

عند $x=0$ فإن $u=1+2=3$

عند $x=\frac{\pi}{3}$ فإن $u=2+2=4$

$\int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x} = \int_3^4 \sqrt{u} du$

$= \int_3^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4 = \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (3)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3} (8) - \frac{2}{3} \sqrt{27}$

$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} (3\sqrt{3})$

$= \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

انتهى

اتدرب واحل المسائل

جد كلاً من التكاملات الآتية :-

1) $\int x^2 (2x^3 + 5)^4 dx$

2) $\int x^2 \sqrt{x+3} dx$

3) $\int x(x+2)^3 dx$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$

5) $\int \sin x \cos 2x dx$

6) $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$

7) $\int \sec^4 x dx$

8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

10) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

11) $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

12) $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$

13) $\int x^3 \sqrt{x+10} dx$

14) $\int (\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2}) dx$

15) $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$

16) $\int (1 + \sqrt{\sin x}) \cos^3 x dx$

17) $\int \sin x \sec^5 x dx$

18) $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$

الحل :-

1) $u = 2x^3 + 5$

$\frac{du}{dx} = 6x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$

$\int x^2 u^4 \frac{du}{6x^2} = \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{1}{30} (2x^3 + 5)^5 + C$

انقضاء وقت

متمنى لقرائيكم
موفقاً

2) $u = \sqrt{x+3}$

$u^2 = x+3$

$2u du = dx$

$\int x^2 u (2u du)$

$\int 2u^2 x^2 dx$

$\int 2u^2 (u^4 - 6u^2 + 9) du$

$\int (2u^6 - 12u^4 + 18u^2) du$

$= \frac{2}{7} u^7 - \frac{12}{5} u^5 + 6u^3 + C$

$= \frac{2}{7} \sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5} \sqrt{(x+3)^5} + 6 \sqrt{(x+3)^3} + C$

جزء خطي

التم

نكتب x^2 بدلالة u من الفرقية

نريد $x = u^2 - 3$

$x^2 = u^4 - 6u^2 + 9$

5) $\int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx$

نستطيع حله بـ مطابقة القوس

$u = \cos x$

هذا نوجد جزئيا

$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \sin x (2u^2 - 1) \frac{du}{-\sin x} = \int (1 - 2u^2) du$

$= u - \frac{2u^3}{3} + C$

$= \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + C$

6) $u = e^x + 1$

جزء من مشتقة المقام في البسط

$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$\int \frac{e^{3x}}{u} \frac{du}{e^x}$

$\int \frac{e^{2x}}{u} du$

نكتب e^{2x} بدلالة u من الفرقية

نريد $e^x = u - 1$

$e^{2x} = u^2 - 2u + 1$

$\int \frac{u^2 - 2u + 1}{u} du$

نريد البسط على المقام

$\int (u - 2 + \frac{1}{u}) du$

$\frac{u^2}{2} - 2u + \ln|u| + C$

$\frac{1}{2}(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) + C$

3) $u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$

$\int x u^3 du$

نكتب x بدلالة u من الفرقية

$x = u - 2$

$\int u^3 (u - 2) du$

$\int (u^4 - 2u^3) du = \frac{u^5}{5} - \frac{1}{2} u^4 + C$

$= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$

4) $u = \sqrt{x+4}$

$u^2 = x+4$

$2u du = dx$

$\int \frac{x}{u} 2u du$

نكتب x بدلالة u من الفرقية

$x = u^2 - 4$

$\int 2x du = \int 2(u^2 - 4) du$

$= \int (2u^2 - 8) du = \frac{2}{3} u^3 - 8u + C$

$= \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$

انتهى

7) $\int \sec^2 x \sec^2 x dx$

$\int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x (1 + u^2) \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int (1 + u^2) du$

$= u + \frac{u^3}{3} + C$

$= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$

a

8) $\int \tan x \sec^2 x dx$ مقلوب النسب $\sec x$ مقوة زوجي

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} = \int u du$

$= \frac{1}{2} u^2 + C$

$= \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

9) $u = \ln x$ الزاوية غير خطية

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$

$\int \frac{\sin u}{x} x du = \int \sin u du$

$= -\cos u + C$

$= -\cos(\ln x) + C$

10) $u = 1 + \sin^2 x$ متبقية مقام زوجي

$u = 1 + \sin^2 x$

$\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x$

$dx = \frac{du}{2 \sin x \cos x}$

$= \int \frac{\sin x \cos x}{u} \frac{du}{2 \sin x \cos x}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C$

$= \frac{1}{2} \ln |1 + \sin^2 x| + C$

راقب صياغة

11) $u = e^x + e^{-x}$ متبقية فوق أو موجود

$\frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{u^2} \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int 2u^{-2} du = -2u^{-1} = \frac{-2}{u} + C$

$= \frac{-2}{e^x + e^{-x}} + C$

12) $u = \sqrt{x+1}$

$u^2 = x+1$

$2u du = dx$

$\int \frac{-x}{(x+1)u} 2u du$

$\int \frac{1-u^2}{u^3} 2u du = \int \frac{2(1-u^2)}{u^2} du$

$= 2 \int (\frac{1}{u^2} - 1) du = 2 \int (u^{-2} - 1) du$

$= 2(\frac{u^{-1}}{-1} - u) = 2(\frac{-1}{u} - u) + C$

$= 2(\frac{-1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}) + C$

بدل خطي
نكتب x بدلالة u
 $x+1 = u^2$
 $-x = 1-u^2$

13) $u = \sqrt[3]{x+10}$

$u^3 = x+10$

$3u^2 du = dx$

$\int x u (3u^2 du)$

$\int 3u^3 x du$

$\int 3u^3 (u^3 - 10) du = \int (3u^6 - 30u^3) du$

$= \frac{3}{7} u^7 - \frac{15}{2} u^4 + C$

$= \frac{3}{7} \sqrt[7]{(x+10)^7} - \frac{15}{2} \sqrt[4]{(x+10)^4} + C$

بدل خطي
نكتب x بدلالة u
من الفرقية
 $x = u^3 - 10$

14) $u = \tan \frac{x}{2}$ قوة $\sec x$ زوجية

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}}$$

$$\int \sec^2 \frac{x}{2} u^7 \frac{du}{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}}$$

$$\int 2u^7 du = \frac{1}{4} u^8 + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^8 \frac{x}{2} + C$$

15) نوع 1/2 في المثال 1

$$= \int \left(\frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \cos x e^{\sin x}) dx$$

$$\int \sec^2 x dx + \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$= \tan x + \int \cos x e^u \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u du$$

$$= \tan x + e^u + C$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + C$$

16) $u = \sin x$ طريقة أخرى الجذر 3
هنا موجود

$$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1 + \sqrt[3]{u}) \cos^3 x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}}) \cos^2 x du$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}})(1 - u^2) du$$

$$= \int (1 - u^2 + u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{7}{3}}) du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10} u^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{3}{4} \sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10} \sin^{\frac{10}{3}} x + C$$

انتهى

17) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ مثال 1/2 الذي قوته ليس (1)

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x}{u^5} \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int -u^{-5} du = \frac{-u^{-4}}{-4}$$

$$= \frac{1}{4 u^4} = \frac{1}{4 \cos^4 x} + C$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$

18) نوع 1/2 في المثال 1

$$\int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\tan x}{\cos^3 x} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{\sin x}{\cos x \cos^2 x} + \tan x \sec^3 x \right) dx$$

$$\int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x) dx$$

$$\downarrow$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int u \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int u du$$

$$\frac{u^2}{2}$$

$$\frac{\tan^2 x}{2}$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

هذا آخر مثال
منه (3) احس مثال
منه $\sec x \tan x$
منه $u = \sec x$

$$u = \sec x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$\int \tan x u^3 \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$\int \frac{u^3}{\sec x} du$$

$$\int u^3 du$$

$$\frac{u^4}{4} = \frac{\sec^4 x}{4}$$



جد مسحة كل من التكاملات الآتية

19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2 dx$

21) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

22) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x dx$

23) $\int_0^2 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

24) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

25) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2} dx$

26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x} \sin x dx$

27) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x dx$

19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{\sin^2 2x} dx$ نستخدم المطابقة

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x |\sin 2x| dx$

$\sin 2x = 0$
 $2x = 0, \pi, 2\pi$
 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x dx$

نوجد زوايا أو
مطابقان لـ $\sin$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \sin x \cos x dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 x \cos x dx$

$u = \sin x$
 $\frac{du}{dx} = \cos x$
 $dx = \frac{du}{\cos x}$

محدد التكامل
 $u = \sin 0 = 0$ فإن $x = 0$
 $u = \sin \frac{\pi}{4}$ فإن $x = \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 du$
 $= \frac{2}{3} u^3 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - 0 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

20)

الحل :- الزاوية $\sin$ خطية

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

محدد التكامل

$u = 0$

عند $x = 0$ فإن

$u = \frac{\pi^2}{4}$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ فإن

$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin u \frac{du}{2x}$

$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cos 0$

$= -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$

القيمة العددية

القيمة العددية

≈ 0.891

21)

محتوى الجزر مشتقة
موجود جزئياً

موجود/مكامل

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2}{u^{\frac{1}{2}}} du$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}} du$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - 2 \right)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{8} - \sqrt{2} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$$

22)

محتوى الجزر موجود

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

موجود/مكامل
عند $x=0$
فان $u = \tan 0 = 0$
عند $x = \frac{\pi}{3}$
 $u = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x u^5 \frac{du}{\sec^2 x} = \int_0^{\sqrt{3}} u^5 du$$

$$\frac{1}{6} u^6 \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} (\sqrt{3})^6 - 0$$

$$= \frac{1}{6} (27) = \frac{9}{2}$$

انتهى

الآن عند

$$23) u = (x-1)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2(x-1) \rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$$

موجود/مكامل

عند $x=0$ فان $u=1$
عند $x=2$ فان $u=1$

$$\int_1^1 (x-1) e^u \frac{du}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \int_1^1 e^u du$$

محتوى الجزر موجود/مكامل متساوية

مشتقة محتوى الجزر موجود

24)

$$u = 2 + \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

عند $x=1$ فان $u=2+1=3$
عند $x=4$ فان $u=2+2=4$

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du = \int_3^4 2 u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4 = \frac{4}{3} \sqrt{4^3} - \frac{4}{3} \sqrt{3^3}$$

$$= \frac{4}{3} (8) - 4\sqrt{3} = \frac{32 - 12\sqrt{3}}{3}$$

$$25) u = 1 + x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{du}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx = \frac{2}{3\sqrt{x}} du$$

$$\int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2} \frac{2}{3\sqrt{x}} du$$

$$= \int_1^2 \frac{20}{3} u^{-2} du = \frac{-20}{3u} \Big|_1^2$$

$$= \frac{-20}{6} + \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

التي هي غير صالحة

26) $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

مرود/تكامل

$u = \cos 0 = 1$ فان $x = 0$ عند

$u = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فان $x = \frac{\pi}{6}$ عند

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 -2^u \sin x \frac{du}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 -2^u du$$

$$\left. \frac{-2^u}{\ln 2} \right|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \frac{-2^1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2} = \frac{2-2^2}{\ln 2}$$

قوة $\csc x$ زوجي

27) $u = \cot x$

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

مرود/تكامل

$u = \cot \frac{\pi}{2}$ فان $x = \frac{\pi}{2}$ عند

$u = 0$

$u = \cot \frac{\pi}{4}$ فان $x = \frac{\pi}{4}$ عند

$u = 1$

$$\int_1^0 -\csc^2 x u^5 \frac{du}{\csc^2 x}$$

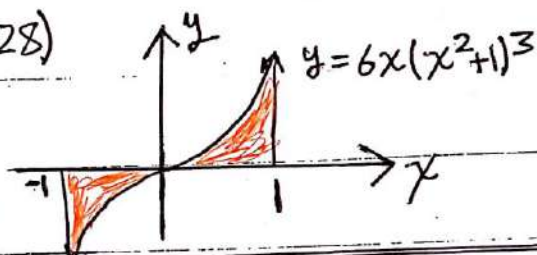
$$\int_1^0 -u^5 du = \left. \frac{-u^6}{6} \right|_1^0$$

$$= 0 + \frac{1}{6}$$

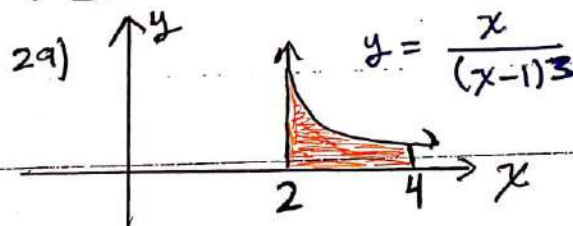
$$= \frac{1}{6}$$

احد من المنطقة المظلمة في كل من التمثيلات البيانية الآتية

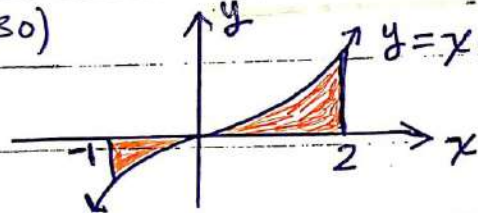
28)



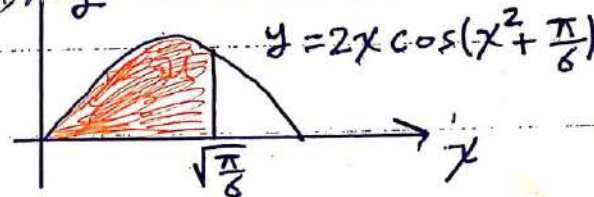
29)



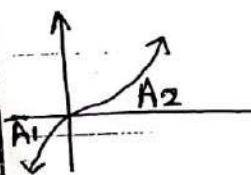
30)



31)



28)



$$A = A_1 + A_2$$

$$A = -\int_{-1}^0 6x(x^2+1)^3 dx + \int_0^1 6x(x^2+1)^3 dx$$

$$A = -\int_2^1 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_1^2 6xu^3 \frac{du}{2x}$$

$$A = \int_2^1 -3u^3 du + \int_1^2 3u^3 du$$

$$= \left. \frac{-3u^4}{4} \right|_2^1 + \left. \frac{3u^4}{4} \right|_1^2$$

$$= \left(-\frac{3}{4} + \frac{48}{4} \right) + \left(\frac{48}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{45}{2}$$

انقضاء

$$u = x^2 + 1$$

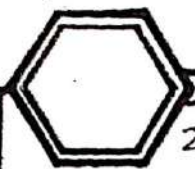
$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$u = 1$ فان $x = 0$ عند

$u = 2$ فان $x = 1$ عند

$u = 2$ فان $x = 1$ عند



29)

توجد منطقة واحدة فوق محور x

$$A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{x}{u^3} du = \int_1^3 \frac{u+1}{u^3} du = \int_1^3 (u^{-2} + u^{-3}) du$$

$$= \left(\frac{u^{-1}}{-1} + \frac{u^{-2}}{-2} \right) \Big|_1^3 = \left(-\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} \right) \Big|_1^3 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{18} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{18} + \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$$

$$u = x-1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

$$u=1 \text{ فإن } x=2$$

$$u=3 \text{ فإن } x=4$$

30)

توجد مناطق اثنى عشرية فوق محور x ومثلثة فوق محور y

$$A = \int_{-1}^0 -xe^{x^2} dx + \int_0^2 xe^{x^2} dx$$

$$A = -\int_1^0 xe^u \frac{du}{2x} + \int_0^4 xe^u \frac{du}{2x}$$

$$A = -\frac{1}{2} \int_1^0 e^u du + \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$$

$$= -\frac{1}{2} (e^u) \Big|_1^0 + \left(\frac{1}{2} e^u \right) \Big|_0^4 = -\frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} (e + e^4) \approx 27.658$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$x=0 \text{ فإن } u=0$$

$$x=2 \text{ فإن } u=4$$

$$x=-1 \text{ فإن } u=1$$

$$31) A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{8}}} 2x \cos(x^2 + \frac{\pi}{8}) dx$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{3}} 2x \cos u \frac{du}{2x}$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u du = \sin u \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

منطقة واحدة فوق محور x

$$u = x^2 + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$x=0 \text{ is } u = 0 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ is } u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

المنطقة واحدة

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$$

المنطقة واحدة

في كل ما يأتي (استعمل الطرق اللتان) $f(x)$ ونقطة يمر بها منحني $y = f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد ثابت التكامل $f(x)$

(32) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$ و (2 و 10)

(33) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}$ و (0 و $\frac{3}{2}$)

الحل:

(32) $f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx$

$$u = 4x^2 - 10$$

$$\frac{du}{dx} = 8x$$

$$dx = \frac{du}{8x}$$

$$f(x) = \int 2x u^2 \frac{du}{8x} = \frac{1}{4} \int u^2 du$$

$$f(x) = \frac{1}{12} (u^3 + C) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 + C$$

حيث C من شرط
 $f(2) = 10$

$$f(2) = \frac{1}{12} (16 - 10)^3 + C$$

$$10 = \frac{1}{12} (216) + C \rightarrow C =$$

$$10 = 18 + C$$

$$C = -8$$

$$f(x) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 - 8$$

(33) $f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx$

$$u = -0.2x^3$$

$$\frac{du}{dx} = -0.6x^2$$

$$dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{0.6} \int e^u du$$

$$f(x) = -\frac{5}{3} e^u + C = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + C$$

حيث C من شرط

$$f(0) = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = -\frac{5}{3} e^0 + C$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{5}{3} + C \rightarrow C = \frac{19}{6}$$

$$f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$

انتهت هنا

نصف الشكل (الحجم جزئياً من منحنى التقاطع $f(x) = x(x-2)^4$

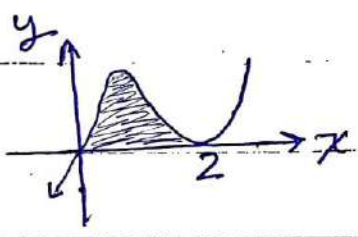


(34) جد إحداثي نقطة تماس التقاطع مع المحور x

(35) حصة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى التقاطع $f(x)$ والمحور x

الحل: $f(x) = 0$ (نصف التقاطع)
 $x(x-2)^4 = 0$
 $x=0$ $x=2$

وضا إلى من نقطة تقاطع $(2,0)$ على حين
 نقطة تقاطع $(0,0)$



$$A = \int_0^2 x(x-2)^4 dx$$

$$= \int_{-2}^0 x u^4 du$$

$$= \int_{-2}^0 (u+2) u^4 du$$

$$= \int_{-2}^0 (u^5 + 2u^4) du$$

$$= \left(\frac{u^6}{6} + \frac{2u^5}{5} \right) \Big|_{-2}^0$$

$$= 0 - \left(\frac{64}{6} - \frac{64}{5} \right) = \frac{32}{15}$$

(35)
 $u = x-2$
 $du = dx$
 $x=0$ is $u=-2$
 $x=2$ is $u=0$

أقمت ضابطاً

(36) يتحرك جسم في مسار متعرج ونقطته تحت التسارع بالوقت $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$ حيث ω ثابت إذا انطلق الجسم من نقطة الأصل، حدد موقعه بعد t ثانية.

الحل:-

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$= \int \sin \omega t \cos^2 \omega t dt$$

$$= \int \sin \omega t u^2 \frac{du}{-\omega \sin \omega t}$$

$$= -\frac{1}{\omega} \int u^2 du = -\frac{1}{\omega} \frac{u^3}{3} = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + c$$

بما $s(0) = 0$ نجد c حيث

$$s(0) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 0 + c$$

$$0 = -\frac{1}{3\omega} + c \rightarrow c = \frac{1}{3\omega}$$

$$s(t) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + \frac{1}{3\omega}$$

(37) يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز الدواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في

جسم مريض، حيث C مقبلة بالملليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3)

إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5 \text{ mg}/\text{cm}^3$

واخذ تغيره بمعدل $C'(t) = \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2}$ حدد $C(t)$

الحل:-

$$C(t) = \int C'(t) dt = \int \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2} dt$$

$$= \int \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{u^2} \frac{du}{-0.01 e^{-0.01t}}$$

$$= \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{1 + e^{-0.01t}} + K$$

$$C(0) = \frac{-1}{1+1} + K \rightarrow \frac{5}{10} = -\frac{1}{2} + K \rightarrow K = 1$$

راقب صياغة

$$C(t) = \frac{-1}{1 + e^{-0.01t}} + 1$$

$$\begin{aligned} u &= 1 + e^{-0.01t} \\ \frac{du}{dt} &= -0.01 e^{-0.01t} \\ dt &= \frac{du}{-0.01 e^{-0.01t}} \end{aligned}$$

بما K ثابت
 $C(0) = 0.5$

38) حد ميعة $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx$ فم اكتب الاجابة بالصيغة $\frac{a}{b} + c \ln d$ حيث a و b و d ثوابت موجبة.

الحل:

هذا ميعة (نقلم جزء فيه موجود في ميعة)

$$\int \frac{e^{4x}}{u} \cdot \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{u} du$$

$$u = e^x - 2$$

$$e^x = u + 2$$

$$e^{3x} = (u + 2)^3$$

$$\int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u} du = \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u} du$$

$$= \int_1^2 (u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}) du$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} + 3u^2 + 12u + 8 \ln u \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 12 + 24 + 8 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 3 + 12 + 8 \ln 1 \right)$$

$$= \frac{70}{3} + 8 \ln 2$$

39) اذا كان $P'(x) = \tan x$ وكان $f(3) = 5$ فم اكتب $f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right|$

الحل:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$f(x) = -\ln |\cos x| + C$$

$$f(3) = 5 \text{ حيث } C$$

$$f(3) = -\ln |\cos 3| + C$$

$$5 = -\ln |\cos 3| + C$$

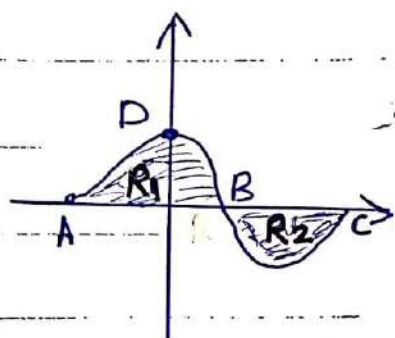
$$C = 5 + \ln |\cos 3|$$

$$f(x) = -\ln |\cos x| + 5 + \ln |\cos 3|$$

$$f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$$

اقتضاه

مسائل التفكير العليا



1) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الإحداثيات:

$f(x) = 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1}$ فأجب عن الأسئلة التالية تباعاً:

(40) حدد إحداثيات كل من نقاط A، B، و C، و D.

(41) حدد مساحة المنطقة المظلمة.

(42) يتضح أن المنطقة R_1 والمنطقة R_2 متساويتان.

الحل:

(40)

$$f(x) = 0$$

$$3 \cos x \sqrt{\sin x + 1} = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

يحدد نقاط تقاطع مع محور x

لنرى C و B و A

لنرى B و C، فنأخذ القيمتين موجبتين

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

أما A، فنأخذ أكبر قيمة سالبة وهي عند $x = -\frac{\pi}{2}$

$$A(-\frac{\pi}{2}, 0), B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0)$$

لنرى D، هنا $x = 0$

$$f(0) = 3 \cos 0 \sqrt{\sin 0 + 1}$$

$$= 3(1)(1) = 3$$

وعليه إحداثيات D هي (0, 3)

لنرى C، هنا $\cos x = 0$

هنا نأخذ القيم الموجبة والسالبة

أقمت ضابط

(41) $A = R_1 + R_2$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$= \int_0^2 3 \cancel{\cos x} \sqrt{u} \frac{du}{\cancel{\cos x}} + - \int_2^0 3 \cancel{\cos x} \sqrt{u} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int_0^2 3 u^{\frac{1}{2}} du + - \int_2^0 3 u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= (3)(\frac{2}{3}) u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + - (3)(\frac{2}{3}) u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^0$$

$$= 2\sqrt{u^3} \Big|_0^2 - 2\sqrt{u^3} \Big|_2^0$$

$$= 2\sqrt{8} - (0 - 2\sqrt{8}) = 4\sqrt{8} = 4\sqrt{2 \times 4} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x + 1 \\ \frac{du}{dx} &= \cos x \\ dx &= \frac{du}{\cos x} \end{aligned}$$

نقطة البداية

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ فإن } x = -\frac{\pi}{2} \text{ راد} \\ u &= 2 \text{ فإن } x = \frac{\pi}{2} \text{ راد} \\ u &= 0 \text{ فإن } x = \frac{3\pi}{2} \text{ راد} \end{aligned}$$

(42) $R_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

$R_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx = 4\sqrt{2}$

$$u = 1 + \sqrt[4]{x^3}$$

$$u = 1 + x^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$$

$$dx = \frac{du}{\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{4}} du$$

$$u = 1 + 1 = 2 \text{ فإن } x = 1 \text{ راد}$$

$$u = 1 + 8 = 9 \text{ فإن } x = 16 \text{ راد}$$

(43) $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx$ حل

$$\int_2^9 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{u} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{4}} du$$

$$\frac{4}{3} \int_2^9 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{u} du$$

$$\frac{4}{3} \int_2^9 \frac{u-1}{u} du = \frac{4}{3} \int_2^9 (1 - \frac{1}{u}) du$$

$$= \frac{4}{3} (u - \ln u) \Big|_2^9 = \frac{4}{3} [9 - \ln 9 - 2 + \ln 2]$$

$$= \frac{4}{3} (7 + \ln \frac{2}{9})$$

$$\begin{aligned} \text{من افتراضنا} \\ x^{\frac{3}{4}} &= u - 1 \end{aligned}$$

هذا كلاً من التكاملات الأولى

$$(46) \int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$$

$$(47) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(48) \int \sin 2x (1 + \sin x)^3 dx$$

$$(46) u = \ln(\ln x)$$

الحل =

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x} \rightarrow dx = x \ln x du$$

$$\int \frac{x \ln x du}{x \ln x u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

$$(47) u = \sin x + \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x - \sin x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x - \sin x}$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{u} \frac{du}{\cos x - \sin x} = \int \frac{-1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\sin x + \cos x| + C$$

$$(48) u = 1 + \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int 2 \sin x \cos x u^3 \frac{du}{\cos x}$$

$$\int 2 \sin x u^3 du$$

$$\sin x = u - 1$$

من الفرق

$$= \int 2(u-1)u^3 du = \int (2u^4 - 2u^3) du$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{2u^4}{4} = \frac{2u^5}{5} - \frac{u^4}{2} + C$$

$$= \frac{2(1+\sin x)^5}{5} - \frac{(1+\sin x)^4}{2} + C$$

راقب ضابو

كتاب التمارين

جد كلٍّ من التكاملات الآتية

$$1) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$2) \int (1 - \cos \frac{x}{2})^2 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$3) \int \csc^5 x \cos^3 x dx$$

$$4) \int x \sin x^2 dx$$

$$5) \int x^3 (x+2)^7 dx$$

$$6) \int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$$

$$7) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$8) \int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$$

$$9) \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$$

الحل:

$$1) u = x^2 + 4$$

مشتق الجزء من الأعلى موجود

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = (\frac{1}{2})(2) u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 4} + C$$

$$2) u = 1 - \cos \frac{x}{2}$$

مشتق الجزء من الأعلى موجود

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}$$

$$\int u^2 \sin(\frac{x}{2}) \frac{du}{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}} = \int 2u^2 du = \frac{2u^3}{3} = \frac{2}{3} (1 - \cos \frac{x}{2})^3 + C$$

انتهى

$$3) \int \frac{1}{\sin^5 x} \cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$$

مقلوب/سب
= المثلث

$$= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$$

موجة
نوع

$$u = \cot x$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int u^3 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C$$

$$= -\frac{\cot^4 x}{4} + C$$

$$4) u = x^2$$

الدائرة غير خطية

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \sin u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

$$5) u = x+2$$

وجود دالة خطية

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

$$\int x^3 u^7 du$$

$$u = x+2$$

$$\int (u-2)^3 u^7 du$$

$$x = u-2$$

$$\int (u^3 - 6u^2 + 12u - 8) u^7 du$$

$$\int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - \frac{6u^{10}}{10} + \frac{12u^9}{9} - \frac{8u^8}{8} + C$$

الوقت

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

$$6) \int \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x} dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{2} u}{x} x du = \frac{1}{2} \int u du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4} (\ln x)^2 + c$$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dx = x du$$

$$7) u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

$$\int \frac{e^u}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du = \int 2e^u du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$8) u = \ln 4x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{2}{x}} = \frac{x}{2} du$$

$$\int \frac{\sin u}{x} \frac{x}{2} du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cos u = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + c$$

$$9) u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^2 x \cos^3 u \frac{du}{\sec^2 x} = \int \cos^3 u du$$

$$= \int \cos^2 u \cos u du = \int (1 - \sin^2 u) \cos u du$$

$$v = \sin u$$

$$\frac{dv}{du} = \cos u \rightarrow du = \frac{dv}{\cos u}$$

$$\int (1 - v^2) \cos u \frac{du}{\cos u} = \int (1 - v^2) dv$$

$$= v - \frac{1}{3} v^3 = \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + c$$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

10) $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx$

11) $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx$

13) $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x dx$

الحل :-

وجود جذر خطي

10) $u = \sqrt{4x+1}$
 $u^2 = 4x+1$

$2u du = 4 dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} u du$

$u = 5$ فإن $x = 6$ ع

$u = 9$ فإن $x = 20$ ع

$\int_5^9 \frac{8x}{u} \cdot \frac{1}{2} u du = \int_5^9 4x du = \int_5^9 (u^2 - 1) du$

كتب $4x$ بـ u $4x = u^2 - 1$

$= \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \Big|_5^9 = \left(\frac{729}{3} - 9 \right) - \left(\frac{125}{3} - 5 \right) = \frac{592}{3}$

11) $u = \sqrt{x-1}$
 $u^2 = x-1$

$2u du = dx$

$u = 1$ فإن $x = 2$ ع

$u = 2$ فإن $x = 5$ ع

$\int_1^2 \frac{2u du}{1+u} = \int_1^2 \left(2 + \frac{-2}{u+1} \right) du$

$$\begin{array}{r} 2 \\ u+1 \overline{) 2u} \\ \underline{2u+2} \\ -2 \end{array}$$

$= (2u - 2 \ln|u+1|) \Big|_1^2$

$= (4 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2) = 2 + 2 \ln \frac{2}{3}$

• ٧٨٥٨٢٤٦٩٤

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات

12) $u = 1 + \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$u = 1 + 1 = 2$ فان $x = 0$ هو

$u = 1 + 0 = 1$ $x = \frac{\pi}{2}$ هو

$\int_2^1 \frac{2 \sin x \cos x}{u} \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 \frac{-2 \cos x}{u} du = \int_2^1 \frac{-2(u-1)}{u} du$

$= \int_2^1 \left(\frac{2-2u}{u} \right) du = \int_2^1 \left(\frac{2}{u} - 2 \right) du$

$= (2 \ln u - 2u) \Big|_2^1 = (2 \ln 1 - 2) - (2 \ln 2 - 4)$

$= -2 - 2 \ln 2 + 4 = 2 - 2 \ln 2$

جزء من المتكامل موجود.

نوجد الزوايا

13) متكامل القوس

من المتكامل موجود

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x} du$

$u = 2$ فان $x = 1$ هو

$u = 3$ فان $x = 4$ هو

$\int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du$

$= 2 \int_2^3 u^3 du = \left(\frac{u^4}{2} \right) \Big|_2^3$

$= \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$

14)

$v = \tan x$

$u = \tan x$
 $\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$u = \tan 0 = 0$ فان $x = 0$ هو

$u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ فان $x = \frac{\pi}{4}$ هو

$\int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int_0^1 e^u du = (e^u) \Big|_0^1$
 $= e - e^0 = e - 1$

15)

نوجد الزوايا فردية

$u = \cos x$
 $\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$

$u = 1$ فان $x = 0$ هو

$u = \frac{1}{2}$ فان $x = \frac{\pi}{3}$ هو

$\int_{\frac{1}{2}}^1 -u^2 \sin^3 x \frac{du}{\sin x}$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 -u^2 \sin^2 x du$

$= \int_{\frac{1}{2}}^1 -u^2 (1 - \cos^2 x) du$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 -u^2 (1 - u^2) du$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 (u^4 - u^2) du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$

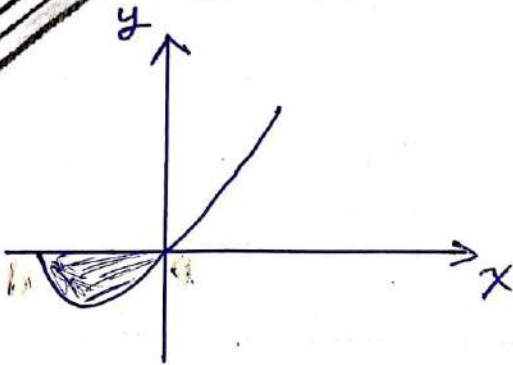
$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{24} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{480}$

انقضاء

(16) بيّن الشكل المجاور جزءاً من منحنى الإقتان

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

المنطقة المظلمة في هذا الشكل.



الحل:-

بند نقاط التقاطع مع محور x

$$f(x) = 0$$

$$x\sqrt{x+1} = 0$$

$$x=0 \quad x=-1$$

$$A = -\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1} dx$$

$$u = \sqrt{x+1}$$

$$u^2 = x+1$$

$$2u du = dx$$

$$u=0 \quad \text{عند } x=-1$$

$$u=1 \quad \text{عند } x=0$$

$$A = -\int_0^1 x u (2u du) = -\int_0^1 2u^2 x du$$

$$= -\int_0^1 2u^2 (u^2 - 1) du$$

$$= \int_0^1 (2u^2 - 2u^4) du = \left(\frac{2u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

الحل: x بدلا من u
من الفرضية $x = u^2 - 1$

في كل ما يأتي (مستطاع الامتحان للإقتان $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ استعمال المعلومات المعطاة لإيجاد قاسم الإقتان $f(x)$:

(17) $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x$ و $(\frac{\pi}{4}, 0)$

(18) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ و $(3, 1)$

رأفت صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$17) f(x) = \int f'(x) dx = \int 16 \sin x \cos^3 x dx$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16 \sin x u^3 \frac{du}{-\sin x} = \int -16 u^3 du$$

$$f(x) = -\frac{16 u^4}{4} = -4 u^4 = -4 \cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{بذو } C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos^4 \frac{\pi}{4} + C$$

$$0 = -1 + C \rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$f(x) = -4 \cos^4 x + 1$$

$$18) f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$$

$$u = x^2 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(2) u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} + C$$

$$f(2) = 1 \quad \text{بذو } C$$

$$f(2) = \sqrt{4+5} + C$$

$$1 = 3 + C \rightarrow C = -2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2$$

19) تتحرك جسم في مسار مستقيم وتقطع مسافة المتجهة بالاقتران
 $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ إذا كان (الموقع الابتدائي) للجسم هو 4 م
 حدد موقع الجسم بعد t ثانية

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2t}$$

$$s(t) = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = -(-2) u^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{u}} + C$$

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = \frac{2}{\sqrt{1+0}} + C$$

$$4 = 2 + C \rightarrow C = 2$$

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

انتهى

التحقق من فهمي

(أ) حدد كلاً من التكاملين الآتيين : صفحة 49

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$

الحل :

a) عوامل مقام كثير الحدود جزئية

$$\frac{x-7}{x^2-x-6} = \frac{x-7}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$x-7 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$-4 = 5A \quad \text{عند } x=3 \text{ فإن}$$

$$A = -\frac{4}{5}$$

$$-9 = -5B \quad \text{عند } x=-2 \text{ فإن}$$

$$B = \frac{9}{5}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx = \int \left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{4}{5} \ln|x-3| + \frac{9}{5} \ln|x+2| + C$$

b) عوامل مقام كثير الحدود جزئية

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x-1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$2 = 2A \quad \text{عند } x=1 \text{ فإن}$$

$$A = 1$$

$$-4 = -2B \quad \text{عند } x=-1 \text{ فإن}$$

$$B = 2$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| + 2 \ln|x+1| + C$$

انتهت صياغة

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx$

* b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx$

ا) عوامل المقام كجواب من أجل إيجاد صيغة التكامل

$$\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x+4 = A(x-1)^2 + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1)$$

$$5 = C \quad \text{عند } x=1$$

$$\frac{9}{2} = \frac{1}{4}A \rightarrow A=18 \quad \text{عند } x=\frac{1}{2}$$

$$4 = A+B-C \quad \text{عند } x=0$$

$$4 = 18+B-5 \rightarrow B=-9$$

$$\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{18}{2x-1} + \frac{-9}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{18}{2x-1} - \frac{9}{x-1} + 5(x-1)^{-2} \right) dx$$

$$= \frac{18}{2} \ln|2x-1| - 9 \ln|x-1| + \frac{5(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= 9 \ln|2x-1| - 9 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

الحل: مثال المقام

$$\frac{x^2-2x-4}{x(x^2-4x+4)} = \frac{x^2-2x-4}{x(x-2)(x-2)}$$

$$\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2}$$

$$\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x^2-2x-4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$-4 = 4A \rightarrow A=-1 \quad \text{عند } x=0$$

$$-4 = 2C \rightarrow C=-2 \quad \text{عند } x=2$$

$$-5 = A - B + C \quad \text{عند } x=1$$

$$-5 = -1 - B - 2$$

$$B=2$$

$$\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-2} - 2(x-2)^{-2} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-2| - \frac{2(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-2| + \frac{2}{x-2} + C$$

رأيتك في صفحتي

(3) جد كلٍّ من التكاملين التاليين : صفحة 52

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx$

a) احصلنا من التكامل

$$\frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$$

$$13 = 13A \rightarrow \boxed{A=1} \quad x=3 \text{ نس}$$

$$4 = 4A - 3C \quad x=0 \text{ نس}$$

$$4 = 4 - 3C$$

$$3C = 0 \rightarrow \boxed{C=0}$$

$$7 = 5A + (B+C)(-2) \quad x=1 \text{ نس}$$

$$7 = 5 + -2B$$

$$2B = -2 \rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-\frac{1}{2}(2x)}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

b) الحل : فصل المقام

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1} = \frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$7x^2-x+1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$$

$$9 = 3A \rightarrow \boxed{A=3} \quad x=-1 \text{ نس}$$

$$1 = A + C \quad x=0 \text{ نس}$$

$$1 = 3 + C \rightarrow \boxed{C=-2}$$

$$7 = A + 2(B+C) \quad x=1 \text{ نس}$$

$$7 = 3 + 2(B-2)$$

$$4 = 2B - 4 \rightarrow \boxed{B=4}$$

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1} \right) dx$$

$$= 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x^2-x+1| + C$$

رافعة صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

a) $\int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1} dx$

b) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} dx$

a) مـm

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2x^2-x-1 \overline{) 4x^3-5} \\ \underline{-4x^3+2x^2-2x} \\ -2x^2+2x-5 \\ \underline{-2x^2-x-1} \\ 3x-4 \end{array}$$

$$\frac{4x^3-5}{2x^2-x-1} = 2x+1 + \frac{3x-4}{2x^2-x-1}$$

$$\frac{3x-4}{2x^2-x-1} = \frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$3x-4 = A(x-1) + B(2x+1)$$

$$-1 = 3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \quad x=1$$

$$-\frac{11}{2} = -\frac{3}{2}A \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{11}{3}$$

$$\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1} dx = \int \left(2x+1 + \frac{11}{3} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \frac{11}{6} \ln|2x+1| - \frac{1}{3} \ln|x-1| + C$$

b) الحل مـm

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-x \overline{) x^2+x-1} \\ \underline{-x^2+x} \\ 2x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-x} = 1 + \frac{2x-1}{x^2-x}$$

مـm

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x} dx = \int \left(1 + \frac{2x-1}{x^2-x} \right) dx$$

$$= x + \ln|x^2-x| + C$$

رؤفـمـمـمـمـمـمـm

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

(5) حل مسألة التكامل الآتية : صفحة 54

a) $\int_3^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x - 10}{x^2 - 7x + 12} dx$

a) $\frac{2x+1}{x^2-4}$ $\frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}$

$$\begin{array}{r} 2x^3+x^2-2x-4 \\ -(2x^3-8x) \\ \hline x^2+6x-4 \\ -(x^2-4) \\ \hline 6x \end{array}$$

$\frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4} = 2x+1 + \frac{6x}{x^2-4}$

هذا مقام
القام مقام
بسطه
هذا المقام
البسط

$\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4} dx = \int_3^4 (2x+1 + \frac{6x}{x^2-4}) dx$

$= \int_3^4 (2x+1 + \frac{(3)(2x)}{x^2-4}) dx$

$= (x^2+x+3\ln|x^2-4|) \Big|_3^4$

$= (16+4+3\ln 5) - (9+3+3\ln 5)$

$20+3\ln 12 - 12-3\ln 5$

$8+3\ln \frac{12}{5}$

b) الحل :- كحل مقام

$\frac{3x-10}{x^2-7x+12} = \frac{3x-10}{(x-4)(x-3)}$

$\frac{3x-10}{(x-4)(x-3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}$

$3x-10 = A(x-3) + B(x-4)$

$-1 = -B \rightarrow B=1$ $x=3$ عند

$2 = A$ $x=4$

$\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12} dx = \int_5^6 (\frac{2}{x-4} + \frac{1}{x-3}) dx$

$= (2\ln|x-4| + \ln|x-3|) \Big|_5^6$

$(2\ln 2 + \ln 3) - (2\ln 1 + \ln 2)$

$2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2$

$= \ln 2 + \ln 3$

$= \ln 6$

رفعت صياحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$a) \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx$$

$$b) \int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)} dx$$

a) ابدأ بالقويض

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{u^2 - 1} \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} \quad \text{كجزء}$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)}$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$1 = A(u+1) + B(u-1)$$

$$1 = 2A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}} \quad \text{عند } u=1$$

$$1 = -2B \rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}} \quad \text{عند } u=-1$$

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{u+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1|$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| + C$$

b) ابدأ بالقويض

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{(u-1)(u+4)} \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{du}{(u-1)(u+4)} \quad \text{كجزء}$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4}$$

$$1 = A(u+4) + B(u-1)$$

$$1 = 5A \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{5}} \quad \text{عند } u=1$$

$$1 = -5B \rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{5}} \quad \text{عند } u=-4$$

$$\int \frac{du}{(u-1)(u+4)} = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u-1} - \frac{\frac{1}{5}}{u+4} \right) du$$

$$= \frac{1}{5} \ln|u-1| - \frac{1}{5} \ln|u+4| + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{u-1}{u+4} \right| + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 4} \right| + C$$

رؤفة صافي

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

التدريب واحد المسائل

جد كلٍّ من التكاملات التالية

$$1) \int \frac{x-10}{x(x+5)} dx \quad 2) \int \frac{2}{1-x^2} dx \quad 3) \int \frac{4}{(x-2)(x-4)} dx$$

$$4) \int \frac{3x+4}{x^2+x} dx \quad 5) \int \frac{x^2}{x^2-4} dx \quad 6) \int \frac{3x-6}{x^2+x-2} dx \quad 7) \int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx$$

$$8) \int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx \quad 9) \int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx \quad 10) \int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} dx$$

$$11) \int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4} dx \quad 12) \int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x} dx \quad 13) \int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2} dx \quad 14) \int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} dx$$

$$15) \int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2} dx \quad 16) \int \frac{3-x}{2-5x-12x^2} dx \quad 17) \int \frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2} dx \quad 18) \int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx$$

حاصل

$$1) \frac{x-10}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}$$

$$x-10 = A(x+5) + Bx$$

$$-10 = 5A \rightarrow A = -2 \text{ عند } x=0$$

$$-15 = -5B \rightarrow B = 3 \text{ عند } x=-5$$

$$\int \frac{x-10}{x(x+5)} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5} \right) dx$$

$$= -2 \ln|x| + 3 \ln|x+5| + C$$

الحل :- المقام جد عوامل مختلفة

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

$$\frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$2 = A(1+x) + B(1-x)$$

$$2 = 2A \rightarrow A = 1 \text{ عند } x=1$$

$$2 = 2B \rightarrow B = 1 \text{ عند } x=-1$$

$$\int \frac{2}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \ln|1-x| + \ln|1+x| = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

رأيت صراحي

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

3)

جوابه

$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$

$$4 = A(x-4) + B(x-2)$$

$$4 = -2A \rightarrow \boxed{A = -2} \text{ لأن } x=2 \text{ نس}$$

$$4 = 2B \rightarrow \boxed{B = 2} \text{ لأن } x=4$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{(x-2)(x-4)} dx &= \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{2}{x-4} \right) dx \\ &= -2 \ln|x-2| + 2 \ln|x-4| \\ &= 2 \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

4) مقام جزاء الـ 1 على 2 مختلف

$$\frac{3x+4}{x^2+x} = \frac{3x+4}{x(x+1)}$$

$$\frac{3x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x+4 = A(x+1) + Bx$$

$$\boxed{4 = A} \quad x=0 \text{ نس}$$

$$4 = -B \rightarrow \boxed{B = -1} \quad x = -1$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x} dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$4 \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

5)

مقام جزاء الـ 1 على 2 مختلف

$$\frac{x^2}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4}$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4} \rightarrow \text{كسر جزاء}$$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$4 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$4 = 4A \rightarrow \boxed{A = 1} \text{ لأن } x=2 \text{ نس}$$

$$4 = -4B \rightarrow \boxed{B = -1} \text{ لأن } x = -2$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$= x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

6) مقام جزاء الـ 1 على 2 مختلف

$$\frac{3x-6}{x^2+x-2} = \frac{3x-6}{(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{3x-6}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$3(x-6) = A(x-1) + B(x+2)$$

$$-3 = 3B \rightarrow \boxed{B = -1} \text{ لأن } x=1 \text{ نس}$$

$$-12 = -3A \rightarrow \boxed{A = 4} \text{ لأن } x = -2$$

$$\int \frac{3x-6}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= 4 \ln|x+2| - \ln|x-1| + C$$

رفعت صياحي

٧٨٥٨٤٤٦٤

7) المقام يحلل عوامل مختلفة

$$\frac{4x+10}{4x^2-4x-3} = \frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)}$$

$$\frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{2x+1}$$

$$4x+10 = A(2x+1) + B(2x-3)$$

$$16 = 4A \rightarrow \boxed{A=4} \quad \text{عند } x = \frac{3}{2} \text{ فإن}$$

$$8 = -4B \rightarrow \boxed{B=-2} \quad \text{عند } x = -\frac{1}{2} \text{ فإن}$$

$$\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx = \int \left(\frac{4}{2x-3} - \frac{2}{2x+1} \right) dx$$

$$= \frac{4}{2} \ln|2x-3| - \frac{2}{2} \ln|2x+1| + c$$

$$= 2 \ln|2x-3| - \ln|2x+1| + c$$

8) المقام يحلل إلى عوامل مختلفة

$$\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

$$\frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$2x^2+9x-11 = A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1)$$

$$15 = 15A \rightarrow \boxed{A=1} \quad x=2 \text{ فإن}$$

$$-18 = -6B \rightarrow \boxed{B=3} \quad x=-1 \text{ فإن}$$

$$-20 = 10C \rightarrow \boxed{C=-2} \quad x=-3 \text{ فإن}$$

$$\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+3} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| + 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x+3| + c$$

9) المقام يحلل عوامل مختلفة

$$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$4x = A(x+1) + B(x-3)$$

$$12 = 4A \rightarrow \boxed{A=3} \quad \text{عند } x=3 \text{ فإن}$$

$$-4 = -4B \rightarrow \boxed{B=1} \quad \text{عند } x=-1 \text{ فإن}$$

$$\int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= 3 \ln|x-3| + \ln|x+1| + c$$

10) المقام يحلل عوامل مختلفة

$$\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$8x^2-19x+1 = A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1)$$

$$-5 = 5C \rightarrow \boxed{C=-1} \quad x=2 \text{ فإن}$$

$$\frac{25}{2} = \frac{25}{4}A \rightarrow \boxed{A=2} \quad x=-\frac{1}{2} \text{ فإن}$$

$$1 = 4A + 2B + C$$

$$1 = 8 - 2B - 1$$

$$2B = 6 \rightarrow \boxed{B=3}$$

$$\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} + (x-2)^{-2} \right) dx$$

$$= \frac{2}{2} \ln|2x+1| + 3 \ln|x-2| - \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln|2x+1| + 3 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c$$

رؤيتك صريحي

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

11) قسمه طويلا

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9x^2-4 \overline{) 9x^2-3x+2} \\ \underline{-9x^2-4} \\ -3x+6 \end{array}$$

$$\frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4} = 1 + \frac{-3x+6}{9x^2-4}$$

$$\frac{-3x+6}{9x^2-4} = \frac{-3x+6}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$\frac{-3x+6}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$$

$$-3x+6 = A(3x+2) + B(3x-2)$$

$$4 = 4A \rightarrow A = 1 \quad \text{عند } x = \frac{2}{3}$$

$$8 = -4B \rightarrow B = -2 \quad \text{عند } x = -\frac{2}{3}$$

$$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{3x-2} - \frac{2}{3x+2} \right) dx$$

$$= x + \frac{1}{3} \ln|3x-2| - \frac{2}{3} \ln|3x+2| + C$$

13) قسمه طويلا

$$\begin{array}{r} -1 \\ -x^2-2x+3 \overline{) x^2+x+2} \\ \underline{-x^2+2x-3} \\ -x+5 \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2} = -1 + \frac{5-x}{-x^2-2x+3}$$

كسور جزئية

$$\frac{5-x}{-x^2-2x+3} = \frac{5-x}{-(x^2+2x-3)}$$

$$\frac{x-5}{x^2+2x-3} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{x-5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

$$x-5 = A(x-1) + B(x+3)$$

$$-4 = 4B \rightarrow B = -1 \quad \text{عند } x = 1$$

$$-8 = -4A \rightarrow A = 2 \quad \text{عند } x = -3$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= -x + 2 \ln|x+3| - \ln|x-1| + C$$

12) قسمه طويلا

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+x \overline{) x^3+2x^2+2} \\ \underline{-x^3+x^2} \\ -x^2+2 \end{array}$$

$$\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x} = x+1 + \frac{2-x}{x^2+x}$$

$$\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)}$$

$$\frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$2-x = A(x+1) + Bx$$

$$A = 2 \quad \text{عند } x = 0 \quad B = -3 \quad \text{عند } x = -1$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x} dx = \int \left(x+1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \ln|x| - 3 \ln|x+1| + C$$

14) القام بحوي مقدار كسري

$$\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$2x-4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+2)$$

$$-8 = 8A \rightarrow A = -1 \quad \text{عند } x = -2$$

$$-4 = 4A + 2C \quad \text{عند } x = 0$$

$$-2 = 5A + 3(B+C) \quad \text{عند } x = 1$$

$$-2 = -5 + 3B \rightarrow B = 1$$

$$\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

رفعت صحتي

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

15) $\frac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2} = 1 + \frac{-5x^2 - 2}{x^3 + x^2}$

$\frac{-5x^2 - 2}{x^3 + x^2} = \frac{-5x^2 - 2}{x^2(x+1)}$

$\frac{-5x^2 - 2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

$-5x^2 - 2 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

$-7 = C \rightarrow C = -7$ $x=1$ is

$-2 = B \rightarrow B = -2$ $x=0$ is

$-7 = 2A + 2B + C \rightarrow A = 2$ $x=1$ is

$\int \frac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2} dx = \int (1 + \frac{2}{x} + \frac{-2}{x^2} - \frac{7}{x+1}) dx$

$= x + 2 \ln|x| + \frac{2}{x} - 7 \ln|x+1| + C$

16) $\frac{3-x}{-(12x^2+5x-2)} = \frac{x-3}{12x^2+5x-2}$

$\frac{x-3}{12x^2+5x-2} = \frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)}$

$\frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{3x+2}$

$x-3 = A(3x+2) + B(4x-1)$

$-\frac{11}{4} = \frac{11}{4}A \rightarrow A = -1$ $x = \frac{1}{4}$ is

$-\frac{11}{3} = -\frac{11}{3}B \rightarrow B = 1$ $x = -\frac{2}{3}$ is

$\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2} dx = \int (\frac{-1}{4x-1} + \frac{1}{3x+2}) dx$

$= -\frac{1}{4} \ln|4x-1| + \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C$

17) $\frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^4 + 6x^2} = \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^2(x^2+6)}$

$\frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^2(x^2+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+6}$

$3x^3 - x^2 + 12x - 6 = Ax(x^2+6) + B(x^2+6) + (Cx+D)(x^2)$

$-6 = 6B \rightarrow B = -1$ $x=0$ is

$8 = 7A + 7B + C + D$ $x=1$ is

$-22 = -7A + 7B + D - C$ $x=-1$ is

$38 = 20A + 10B + 4D + 8C$ $x=2$ is

$A = 2, B = -1, D = 0$ $C = 1$ (بالتعويض)

$\int \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^4 + 6x^2} dx = \int (\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+6}) dx$

$= \int (\frac{2}{x} - x^{-2} + \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+6}) dx$

$= 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2+6| + C$

18) $\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$

$5x-2 = A(x-2) + B$

$8 = B$ $x=2$ is

$-2 = -2A + B$ $x=0$ is

$-2 = -2A + 8$

$2A = 10 \rightarrow A = 5$

$\int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx = \int (\frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}) dx$

$= \int (\frac{5}{x-2} + 8(x-2)^{-2}) dx$

$= 5 \ln|x-2| + \frac{8(x-2)^{-1}}{-1} + C$

$= 5 \ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C$

رفعت صحتي

رقم 18 كل بالقوة
والاصغر اخصاً

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

جد كل من التكاملات الآتية

19) $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} dx$

20) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2+4}{9x^2-4} dx$

21) $\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} dx$

22) $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3} dx$

23) $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6} dx$

24) $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x} dx$

19) $\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} = \frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)}$

$\frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$

$6+3x-x^2 = A(x+2) + B(x+2) + Cx^2$

$6 = 2B \rightarrow B = 3$

$-4 = 4C \rightarrow C = -1$

$8 = 3A + 3B + C$

$8 = 3A + 9 - 1 \rightarrow A = 0$

$\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$

$\int_2^4 \left(3x^{-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$

$\left(-\frac{3}{x} - \ln|x+2| \right) \Big|_2^4$

$\left(-\frac{3}{4} - \ln 6 \right) - \left(-\frac{3}{2} - \ln 4 \right)$

$= \frac{3}{4} + \ln \frac{2}{3}$

20)

الحل :- م - م - م

$\frac{9x^2+4}{9x^2-4} = 1 + \frac{8}{9x^2-4}$

$\frac{9x^2+4}{9x^2-4} = 1 + \frac{8}{9x^2-4}$

$\frac{8}{9x^2-4} = \frac{8}{(3x-2)(3x+2)}$

$\frac{8}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$

$8 = A(3x+2) + B(3x-2)$

$8 = 4A \rightarrow A = 2$

$8 = -4B \rightarrow B = -2$

$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2+4}{9x^2-4} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2}{3x-2} - \frac{2}{3x+2} \right) dx$

$\left(x + \frac{2}{3} \ln|3x-2| - \frac{2}{3} \ln|3x+2| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$

$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln 1 - \frac{2}{3} \ln 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 1 \right)$

$\frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln 3 + 0$

$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} (\ln 3 + \ln 3) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \ln 9$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \ln 3$

رفعت صبايني

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

21)

$$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2}$$

$$17-5x = A(2-x)^2 + B(2-x)(2x+3) + C(2x+3)$$

$$7 = 7C \rightarrow \boxed{C=1}$$

$$\frac{49}{2} = \frac{49}{4}A \rightarrow \boxed{A=2}$$

$$17 = 4A + 6B + 3C$$

$$17 = 8 + 6B + 3$$

$$6 = 6B \rightarrow \boxed{B=1}$$

$$\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2} \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{1}{2-x} + (2-x)^{-2} \right) dx$$

$$\left(\ln|2x+3| - \ln|2-x| + \frac{1}{2-x} \right) \Big|_0^1$$

$$(\ln 5 - \ln 1 + 1) - (\ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2})$$

$$\ln 5 + 1 - \ln 3 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln \frac{10}{3}$$

23)

$$\frac{5x+5}{x^2+x-6} = \frac{5x+5}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{5x+5}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

$$5x+5 = A(x-2) + B(x+3)$$

$$15 = 5B \rightarrow \boxed{B=3}$$

$$-10 = -5A \rightarrow \boxed{A=2}$$

$$\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6} dx = \int_3^4 \left(\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-2} \right) dx$$

$$\left(2\ln|x+3| + 3\ln|x-2| \right) \Big|_3^4$$

$$(2\ln 7 + 3\ln 2) - (2\ln 6 + 3\ln 1)$$

$$2\ln 7 + 3\ln 2 - 2\ln 6 = 2\ln \frac{7}{6} + 3\ln 2$$

$$= \ln \frac{49}{36} + \ln 8 = \ln \frac{98}{9}$$

22) $\frac{4}{16x^2+8x-3} = \frac{4}{(4x-1)(4x+3)}$

$$\frac{4}{(4x-1)(4x+3)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+3}$$

$$4 = A(4x+3) + B(4x-1)$$

$$4 = 4A \rightarrow \boxed{A=1}$$

$$4 = -4B \rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{4x-1} + \frac{-1}{4x+3} \right) dx$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln|4x-1| - \frac{1}{4} \ln|4x+3| \right) \Big|_1^4$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln 15 - \frac{1}{4} \ln 19 \right) - \left(\frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 7 \right)$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln \frac{15}{19} \right) - \left(\frac{1}{4} \ln \frac{3}{7} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{35}{19}$$

24) $\frac{4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{4}{x(x^2-4x+4)} = \frac{4}{x(x-2)^2}$

$$\frac{4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$4 = 4A \rightarrow A=1$$

$$4 = 2C \rightarrow \boxed{C=2}$$

$$4 = A - B + C$$

$$4 = 1 - B + 2 \rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

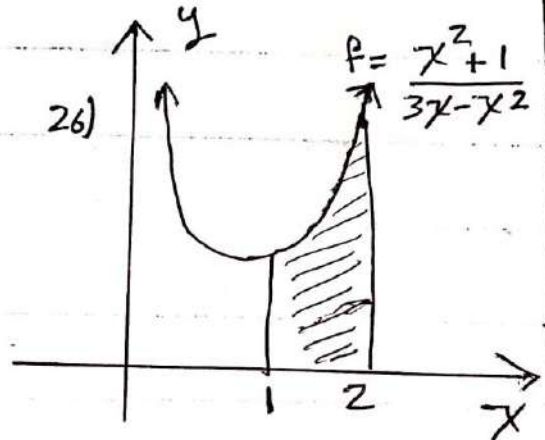
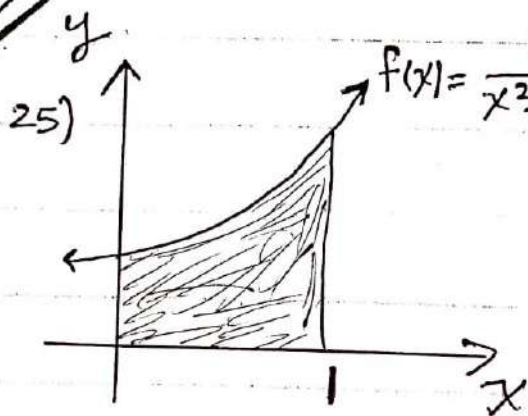
$$\left(\ln x - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} \right) \Big|_3^4$$

$$(\ln 4 - \ln 2 - 1) - (\ln 3 - \ln 1 - 2) = 1 + \ln \frac{2}{3}$$

رفعت صبايحي

• V A O A T E E T E

حدد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلات البيانية



25) المساحة فوق محور x

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$1 = -A \rightarrow \boxed{A = -1} \quad \text{عند } x=2$$

$$1 = B \rightarrow \boxed{B = 1} \quad \text{عند } x=3$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$(-\ln|x-2| + \ln|x-3|) \Big|_0^1$$

$$(-\ln 1 + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 3)$$

$$\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

رافعة صافي

الحل: مساحة مظلمة

$$\begin{array}{r} -1 \\ x^2 + 1 \\ -x^2 - 3x \\ \hline 3x + 1 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 1}{3x - x^2} = -1 + \frac{3x + 1}{3x - x^2}$$

$$\frac{3x + 1}{3x - x^2} = \frac{3x + 1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x}$$

$$3x + 1 = A(3-x) + Bx$$

$$1 = 3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \quad \text{عند } x=0$$

$$10 = 3B \rightarrow B = \frac{10}{3} \quad \text{عند } x=3$$

$$A = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{3x - x^2} dx \quad \text{المساحة فوق محور } x$$

$$A = \int_1^2 \left(-1 + \frac{1}{3x} + \frac{10}{3(3-x)} \right) dx$$

$$A = \left(-x + \frac{1}{3} \ln x - \frac{10}{3} \ln |3-x| \right) \Big|_1^2$$

$$A = \left(-2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{10}{3} \ln 1 \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{10}{3} \ln 2 \right)$$

$$A = -2 + \frac{1}{3} \ln 2 + 1 + \frac{10}{3} \ln 2 = -1 + \frac{11}{3} \ln 2$$

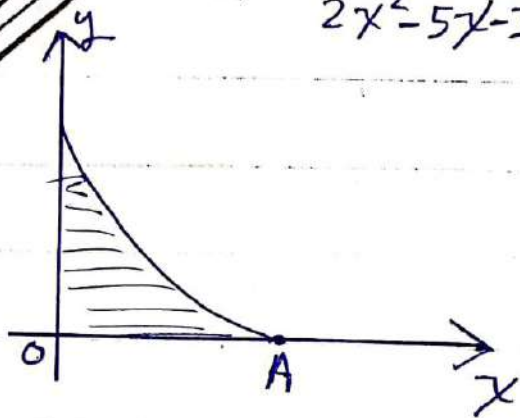
٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$$

بيّن الشكل الجار منحنى الاقتبان

(27) جد إحداثي النقطة A

(28) جد مساحة المنطقة المظللة



الحل :-

$$f(x) = 0$$

نأخذ طرفي بالمضرب

$$\frac{4x-5}{2x^2-5x-3} = 0$$

$$4x-5=0 \rightarrow 4x=5$$

$$\rightarrow x = \frac{5}{4}$$

إحداثي A هو $(\frac{5}{4}, 0)$

$$A = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{4x-5}{2x^2-5x-3} dx$$

لا يكاد (مساحة) ...
منطقة (مقام)
تقطيع

$$A = \left(\ln |2x^2-5x-3| \right) \Big|_0^{\frac{5}{4}}$$

$$A = \ln \left(\frac{25}{8} - \frac{25}{4} - 3 \right) - \ln 3 = \ln \frac{49}{8} - \ln 3 = \ln \frac{49}{24}$$

جد كلاً من تكاملات الآتي

$$29) \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx$$

$$30) \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} dx$$

$$31) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

$$32) \int \frac{\cos x}{\sin x (\sin^2 x - 4)} dx$$

رأفت صباغ

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

29) $u = \cos x$
 $\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$
 $\int \frac{\sin x}{u+u^2} \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-du}{u+u^2}$
 $\frac{-1}{u+u^2} = \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}$
 $-1 = A(u+1) + Bu$
 $-1 = A \rightarrow \boxed{A=-1}$ $u=0 \text{ iis}$
 $-1 = -B \rightarrow \boxed{B=1}$ $u=1 \text{ iis}$
 $\int \frac{-du}{u+u^2} = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1+u} \right) du$
 $= -\ln|u| + \ln|1+u| + C$
 $= -\ln|\cos x| + \ln|1+\cos x| + C$
 $= \ln \left| \frac{1+\cos x}{\cos x} \right| + C$

30) $u = \sqrt{x}$
 $u^2 = x$
 $2u du = dx$
 $\int \frac{2u du}{x^2+xu}$ $\sqrt{x}$
 $x^2 = u^4$
 $x = u^2$
 $\int \frac{2u du}{u^4+u^3} = \int \frac{2u du}{u(u^3+u^2)} = \int \frac{2 du}{u^3+u^2}$
 $\frac{2}{u^3+u^2} = \frac{2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$
 $2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$
 $\boxed{2=B}$ $u=0 \text{ iis}$
 $\boxed{2=C}$ $u=1 \text{ iis}$
 $2 = 2A + 2B + C$
 $2 = 2A + 4 + 2 \rightarrow \boxed{A=-2}$
 $\int \frac{2 du}{u^3+u^2} = \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1} \right) du$
 $= \int \left(-\frac{2}{u} + 2u^{-2} + \frac{2}{u+1} \right) du$
 $= -2\ln|u| - \frac{2}{u} + 2\ln|u+1|$
 $= -2\ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln|\sqrt{x}+1| = 2\ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

وقت صابون

31) $u = e^x$
 $\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$
 $\int \frac{u^2}{u^2+3u+2} \frac{du}{u} = \int \frac{u du}{u^2+3u+2}$
 $\frac{u}{u^2+3u+2} = \frac{u}{(u+2)(u+1)}$
 $\frac{u}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$
 $u = A(u+1) + B(u+2)$
 $-1 = B \rightarrow \boxed{B=-1}$ $u=-1 \text{ iis}$
 $-2 = -A \rightarrow \boxed{A=2}$ $u=-2 \text{ iis}$
 $\int \frac{u du}{u^2+3u+2} = \int \left(\frac{2}{u+2} - \frac{1}{u+1} \right) du$
 $= 2\ln|u+2| - \ln|u+1| + C$
 $= 2\ln|e^x+2| - \ln|e^x+1| + C$ نعتي

32) $u = \sin x$
 $\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$
 $\int \frac{\cos x}{u(u^2-4)} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{u(u^2-4)}$
 $\frac{1}{u(u^2-4)} = \frac{1}{u(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$
 $1 = A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2)$
 $1 = -4A \rightarrow A = -\frac{1}{4}$ $u=0 \text{ iis}$
 $1 = 8B \rightarrow B = \frac{1}{8}$ $u=2 \text{ iis}$
 $1 = 8C \rightarrow C = \frac{1}{8}$ $u=-2 \text{ iis}$
 $\int \frac{du}{u(u^2-4)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-2} + \frac{\frac{1}{8}}{u+2} \right) du$
 $= -\frac{1}{4}\ln|u| + \frac{1}{8}\ln|u-2| + \frac{1}{8}\ln|u+2|$
 $= -\frac{1}{4}\ln|\sin x| + \frac{1}{8}\ln|\sin x-2| + \frac{1}{8}\ln|\sin x+2|$

مهارات التفكير العليا

جد (33) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين

$$\int \frac{dx}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

الحل -

الطريقة (1) : اضرب $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} &= - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx \\ &= \ln|e^{-x} + 1| + C \\ &= -\ln(e^{-x} + 1) + C \end{aligned}$$

مشتقة المقام
تقطع البسط

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

الطريقة (2) :

تعويض u ثم كسر جزئي

$$\int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{du}{u(u+1)}$$

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

$$1 = A(u+1) + Bu$$

عند $u=0$ فإن $1=A$ وعند $u=-1$ فإن $B=-1$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

$$= \ln|e^x| - \ln|e^x + 1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right)^{-1}$$

$$= \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x} \right)^{-1} = \ln(1 + e^{-x})^{-1} = -\ln(e^{-x} + 1) + C$$

روفت صرافي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

حلولا في
فرع 33

$$\text{جد } \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx \quad (34)$$

$$\text{الحل :-} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = -\ln(e^{-x}+1) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= -\ln(e^{-\ln 2}+1) + \ln(e^0+1)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \ln(2) = -\ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \ln \frac{2}{\frac{3}{2}} = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24} \quad (35)$$

النتيجة ان

$$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$5x^2-8x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(2x) + C(2x)$$

$$1 = A$$

$$x=0 \text{ us}$$

$$-2 = 2C \rightarrow C = -1$$

$$x=1 \text{ us}$$

$$14 = 4A + 4B - 2C$$

$$14 = 4 + 4B + 2 \rightarrow B = 2$$

$$x=-1 \text{ us}$$

$$\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int_4^9 \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} - (x-1)^{-2} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \ln x + 2 \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} \right) \Big|_4^9$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln 9 + 2 \ln 8 + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 4 + 2 \ln 3 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= (\ln 3 + \ln 64 + \frac{1}{8}) - (\ln 2 + \ln 9 + \frac{1}{2}) = \ln 192 + \frac{1}{8} - \ln 18 - \frac{1}{2} = \ln \frac{192}{18} - \frac{5}{24}$$

النتيجة هي

$$= \ln \frac{32}{3} - \frac{5}{24}$$

• ٧٨٥٨٦٤٤٦٤

$$\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4} dx = 4(1 + \ln(\frac{5}{3})) \quad \text{36) أبسطه ان :-}$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x$$

$$2u du = dx$$

$$\int_3^4 \frac{2u}{x-4} \cdot 2u du$$

$$\int_3^4 \frac{4u^2}{u^2-4} du$$

$$\frac{4u^2}{u^2-4} = 4 + \frac{16}{u^2-4} \quad \text{بجزيء}$$

$$\frac{16}{u^2-4} = \frac{16}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$$16 = A(u+2) + B(u-2)$$

$$16 = 4A \rightarrow A = 4 \quad \text{عند } u = 2 \text{ فان}$$

$$16 = -4B \rightarrow B = -4 \quad \text{عند } u = -2 \text{ فان}$$

$$\int_3^4 \frac{4u^2}{u^2-4} du = \int_3^4 \left(4 + \frac{4}{u-2} - \frac{4}{u+2} \right) du$$

$$\left(4u + 4\ln|u-2| - 4\ln|u+2| \right) \Big|_3^4$$

$$(16 + 4\ln 2 - 4\ln 6) - (12 + 4\ln 1 - 4\ln 5)$$

$$= 16 + 4\ln 2 - 4\ln 6 - 12 + 4\ln 5$$

$$4 + 4(\ln 2 - \ln 6 + \ln 5) = 4 + 4\left(\ln \frac{2}{6} + \ln 5\right)$$

$$= 4 + 4\left(\ln \frac{10}{6}\right) = 4 + 4\ln \frac{5}{3} = 4\left(1 + \ln \frac{5}{3}\right)$$

رفعت مبراني

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{12} \quad \text{أثبت أن}$$

الحل:

$$\frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} = 2 + \frac{-x-2}{2x^2 + 5x + 3}$$

مقسمة طويلة

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x + 3 \overline{) 4x^2 + 9x + 4} \\ \underline{4x^2 + 10x + 6} \\ -x - 2 \end{array}$$

$$\frac{-x-2}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{-x-2}{(2x+3)(x+1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x+1}$$

$$-x-2 = A(x+1) + B(2x+3)$$

$$\boxed{-1 = B}$$

عند $x = -1$ فإن

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}A \rightarrow \boxed{A=1}$$

عند $x = -\frac{3}{2}$ فإن

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{2x+3} + \frac{-1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left(2x + \frac{1}{2} \ln |2x+3| - \ln |x+1| \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 2 \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 1 \right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= 2 + \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) - \ln 2$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} - \ln 2$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} - \frac{1}{2} \ln 4$$

$$= 2 + \frac{1}{2} (\ln \frac{5}{3} - \ln 4)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{12}$$

رفعت صديقي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

جد كلٍّ من التكاملات الآتية

38) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx$

39) $\int \frac{x}{16x^4-1} dx$

40) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$

الحل

(38)

$u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

$u^2 = 1+\sqrt{x}$

$2u du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow dx = 4u\sqrt{x} du$

$\int \frac{u}{x} 4u\sqrt{x} du$

$\int \frac{4u^2}{\sqrt{x}} du = \int \frac{4u^2}{u^2-1} du$ قمة
طويلة

$\frac{4u^2}{u^2-1} = 4 + \frac{4}{u^2-1}$ كسر
جزء

$\frac{4}{u^2-1} = \frac{4}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$

$4 = A(u+1) + B(u-1)$

$\int \frac{4u^2}{u^2-1} du = \int \left(4 + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1} \right) du$

عند $u=1$ فإن $4=2A \rightarrow A=2$
عند $u=-1$ فإن $4=-2B \rightarrow B=-2$

$= 4u + 2 \ln|u-1| - 2 \ln|u+1| + C$

$= 4u + 2 \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$

$= 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1} \right| + C$

النتيجة

٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$39) \int \frac{x}{(4x^2-1)(4x^2+1)} dx$$

$$u = 4x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 8x$$

$$dx = \frac{du}{8x}$$

$$\int \frac{x}{(u-1)(u+1)} \frac{du}{8x}$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)}$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$1 = A(u+1) + B(u-1)$$

$$1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ إذا } u=1$$

$$1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2} \text{ إذا } u=-1$$

$$\frac{1}{8} \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} \right) du$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| \right) + C$$

$$\frac{1}{16} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$$

$$\frac{1}{16} \ln \left| \frac{4x^2-1}{4x^2+1} \right| + C$$

رافعة صراحي

هنا دليل الجذر مختلف

وعلى هذا، كضائف المتكامل الآخر
لدينا كل جذر وهو 6 وعلى

$$x = u^6$$

$$dx = 6u^5 du$$

$$\int \frac{6u^5}{\sqrt{u^6-1}\sqrt{u^6}} du$$

$$\int \frac{6u^5}{u^3-u^2} du = \int \frac{6u^5 du}{u^2(u-1)}$$

$$= \int \frac{6u^3}{u-1} du$$

مقسمة طول

$$\begin{array}{r} 6u^2 + 6u + 6 \\ u-1 \overline{) -6u^3} \\ \underline{-6u^3 - 6u^2} \\ 6u^2 \\ \underline{6u^2 - 6u} \\ 6u \\ \underline{6u - 6} \\ 6 \end{array}$$

$$\int \frac{6u^3}{u-1} du = \int (6u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u-1}) du$$

$$\int (6u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u-1}) du$$

$$\frac{6u^3}{3} + \frac{6u^2}{2} + 6u + 6 \ln|u-1| + C$$

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 6 \ln|\sqrt{x}-1| + C$$

٧٨٥٨٧٤٤٦٤

كتاب الطالب

جد كلٍّ من التكاملات الآتية

1) $\int \frac{4}{x^2+4x} dx$

2) $\int \frac{6}{x^2-9} dx$

3) $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2} dx$

4) $\int \frac{x-10}{x^2-2x-8} dx$

5) $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1} dx$

6) $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)} dx$

7) $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2} dx$

8) $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1} dx$

9) $\int \frac{4}{x^3-2x^2} dx$

1) $\frac{4}{x^2+4x} = \frac{4}{x(x+4)}$

$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$

$4 = A(x+4) + Bx$

$4 = 4A \rightarrow A=1$ $x=0$ نس

$4 = -4B \rightarrow B=-1$ $x=-4$

$\int \frac{4}{x^2+4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+4} \right) dx$

$= \ln|x| - \ln|x+4| + C$

$= \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + C$

2) $\frac{6}{x^2-9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$ $\frac{6}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

$6 = A(x+3) + B(x-3)$

$6 = 6A \rightarrow A=1$ $x=3$ نس

$6 = -6B \rightarrow B=-1$ $x=-3$

$6 = -6B \rightarrow B=-1$ $x=-3$

$\int \frac{6}{x^2-9} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx$

$= \ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

$= \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$

رفعت صبا في

٠٧٨٥٨٦٤٤٦٤

$$3) \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x^2 - 3x + 8 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2)$$

$$6 = 9A \rightarrow A = \frac{2}{3} \quad x=2 \text{ is}$$

$$12 = -3C \rightarrow C = -4 \quad x=-1 \text{ is}$$

$$8 = A + 2B - 2C \quad x=0$$

$$8 = \frac{2}{3} - 2B + 8 \rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx &= \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-4}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - 4(x+1)^{-2} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C \end{aligned}$$

قمة طويلة

$$5) \frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{2x^2 + 6x - 2}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} = 1 + \frac{5x-1}{2x^2 + x - 1}$$

$$\frac{5x-1}{2x^2 + x - 1} = \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$5x-1 = A(x+1) + B(2x-1)$$

$$-6 = -3B \rightarrow B = 2 \quad x=-1 \text{ is}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}A \rightarrow A = 1 \quad x = \frac{1}{2} \text{ is}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$4) \frac{x-10}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x-10}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{x-10}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$x-10 = A(x+2) + B(x-4)$$

$$-6 = 6A \rightarrow A = -1 \quad x=4 \text{ is}$$

$$-12 = -6B \rightarrow B = 2 \quad x=-2 \text{ is}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-10}{x^2 - 2x - 8} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-4} + \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= -\ln|x-4| + 2 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$6) \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2 + 2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2}$$

$$2x^2 - x + 6 = A(x^2 + 2) + (x+1)(Bx+C)$$

$$9 = 3A \rightarrow A = 3 \quad x=-1 \text{ is}$$

$$6 = 2A + C \quad x=0 \text{ is}$$

$$6 = 6 + C \rightarrow C = 0$$

$$7 = 3A + 2(B+C) \quad x=1 \text{ is}$$

$$7 = 9 + 2B \rightarrow B = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2 + 2)(x+1)} dx &= \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{-1x}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{x+1} + \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2x}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= 3 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C \end{aligned}$$

انقضاء

انقضاء

$$7) \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$8x+24 = A(x-3)^2 + B(x-3)(x+1) + C(x+1)$$

$$16 = 16A \rightarrow A = 1 \quad x=1 \text{ is}$$

$$48 = 4C \rightarrow C = 12 \quad x=3$$

$$24 = 9A + 3B + C \quad x=0$$

$$24 = 9 - 3B + 12 \rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} + 12(x-3)^{-2} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| - \frac{12}{x-3} + C$$

$$8) \frac{8x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{8x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$8x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$$8 = 4A \rightarrow A = 2 \quad x=1 \text{ is}$$

$$-8 = -2C \rightarrow C = 4 \quad x=-1$$

$$0 = A + B + C \quad x=0$$

$$0 = 2 - B + 4 \rightarrow B = -2$$

$$\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} + 4(x+1)^{-2} \right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + C$$

$$= 2\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{4}{x+1} + C$$

$$\boxed{\text{انقضاء صافي}} \quad \text{C}$$

$$9) \frac{4}{x^3-2x^2} = \frac{4}{x^2(x-2)}$$

$$\frac{4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

$$4 = 4C \rightarrow C = 1 \quad x=2 \text{ is}$$

$$4 = -2B \rightarrow B = -2 \quad x=0 \text{ is}$$

$$4 = -A - B + C \quad x=1 \text{ is}$$

$$4 = -A + 2 + 1 \rightarrow A = -1$$

$$\int \left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$\int \left(-\frac{1}{x} + 2x^{-2} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{2}{x} + C$$

جد قیمة كل من تكاملات الدالة :-

$$10) \int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)} dx$$

$$11) \int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2} dx$$

$$12) \int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15} dx$$

$$13) \int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} dx$$

$$14) \int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} dx$$

$$15) \int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6} dx$$

10)

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x-1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$-1 = B$$

$$x=0 \text{ is}$$

$$-2 = C$$

$$x=1 \text{ is}$$

$$x=1$$

$$0 = 2A + 2B + C$$

$$0 = 2A - 2 - 2 \rightarrow A = 2$$

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= \int_1^5 \left(\frac{2}{x} - x^{-2} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$\left(2 \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \ln|x+1| \right) \Big|_1^5$$

$$(2 \ln 5 + \frac{1}{5} - 2 \ln 6) - (2 \ln 1 + 1 - 2 \ln 2)$$

$$2 \ln 5 + \frac{1}{5} - 2 \ln 6 - 1 + 2 \ln 2$$

$$2(\ln 5 - \ln 6 + \ln 2) - \frac{4}{5} = 2 \ln \frac{5}{3} - \frac{4}{5}$$

11)

الحل :-

$$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$4-x = A(x-2) + B$$

$$2 = B$$

$$x=2 \text{ is}$$

$$1 = A + B$$

$$1 = A + 2 \rightarrow A = -1$$

$$x=3 \text{ is}$$

$$\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2} dx = \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + 2(x-2)^{-2} \right) dx$$

$$= \left(-\ln|x-2| + \frac{2}{x-2} \right) \Big|_7^{12}$$

$$= \left(-\ln 10 - \frac{1}{5} \right) - \left(-\ln 5 - \frac{2}{5} \right)$$

$$= -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5}$$

$$= \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

رفعت طراني

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$12) \frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{4}{(x+3)(x+5)}$$

$$\frac{4}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

$$4 = A(x+5) + B(x+3)$$

$$4 = 2A \rightarrow A = 2 \quad x = -3 \text{ us}$$

$$4 = -2B \rightarrow B = -2 \quad x = -5$$

$$\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15} dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x+3} + \frac{-2}{x+5} \right) dx$$

$$(2 \ln|x+3| - 2 \ln|x+5|) \Big|_1^2$$

$$(2 \ln \frac{x+3}{x+5}) \Big|_1^2 = 2 \ln \frac{5}{7} - 2 \ln \frac{2}{3}$$

$$= 2 \ln \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} \right) = 2 \ln \frac{15}{14}$$

$$13) \frac{5}{2x^2-5x} \quad \text{algebra} \rightarrow \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{10-2x}{2x^2-5x}$$

$$\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{10-2x}{2x^2-5x}$$

$$\frac{10-2x}{2x^2-5x} = \frac{10-2x}{x(2x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5}$$

$$10-2x = A(2x-5) + Bx$$

$$B = 3 \text{ us } x = \frac{5}{2} \text{ us } A = 2 \text{ us } x = 0 \text{ us}$$

$$\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} dx = \int_1^2 \left(5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x-5} \right) dx$$

$$(5x - 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|2x-5|) \Big|_1^2$$

$$(10 - 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 1) - (5 - 2 \ln 1 + \frac{3}{2} \ln 3)$$

$$10 - 2 \ln 2 - 5 - \frac{3}{2} \ln 3 = 5 - 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

$$= 5 - \ln 2 \sqrt{3}$$

$$14) \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$25 = A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1)$$

$$25 = 25A \rightarrow A = 1 \quad x = -1 \text{ us}$$

$$25 = \frac{5}{2}C \rightarrow C = 10 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$25 = 9A - 3B + C \quad x = 0$$

$$25 = 9 - 3B + 10 \rightarrow B = -2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} dx = \int_2^5 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2} \right) dx$$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3} \right) \Big|_2^5$$

$$= (\ln 6 - \ln 7 - \frac{5}{7}) - (\ln 3 - \ln 1 - 5)$$

$$= \ln 6 - \ln 7 - \frac{5}{7} - \ln 3 + 5$$

$$= \ln \frac{6}{3} + \frac{30}{7} = \ln \frac{2}{7} + \frac{30}{7}$$

$$15) \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6} = 1 + \frac{16-2x}{x^2-x-6}$$

$$\frac{16-2x}{x^2-x-6} = \frac{16-2x}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$16-2x = A(x+2) + B(x-3)$$

$$10 = 5A \rightarrow A = 2 \quad x = 3 \text{ us}$$

$$20 = -5B \rightarrow B = -4 \quad x = -2$$

$$\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{2}{x-3} + \frac{-4}{x+2} \right) dx$$

$$(x + 2 \ln|x-3| - 4 \ln|x+2|) \Big|_0^2$$

$$(2 + 2 \ln 1 - 4 \ln 4) - (0 + 2 \ln 3 - 4 \ln 2)$$

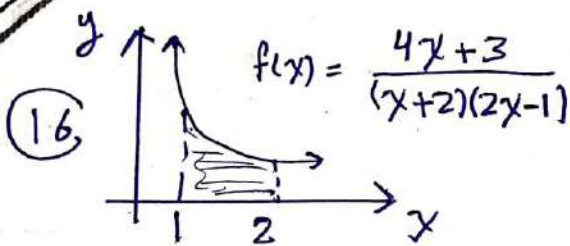
$$2 - 4 \ln 4 - 2 \ln 3 + 4 \ln 2$$

$$2 + 4 \ln \frac{2}{4} - 2 \ln 3$$

$$2 + 4 \ln \frac{1}{2} - 2 \ln 3 = 2 + 2 \ln \frac{1}{4} - 2 \ln 3$$

$$= 2 + \ln \frac{1}{16} - \ln 9 = 2 + 2 \ln \frac{1}{12} = 2 - 2 \ln 12$$

جد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلات البيانية:



الحل: المنطقة فوق محور x

$$\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1}$$

$$4x+3 = A(2x-1) + B(x+2)$$

$$-5 = -5A \rightarrow \boxed{A=1} \quad x=2 \text{ عند}$$

$$5 = \frac{5}{2}B \rightarrow \boxed{B=2} \quad x=\frac{1}{2} \text{ عند}$$

$$A = \int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} dx$$

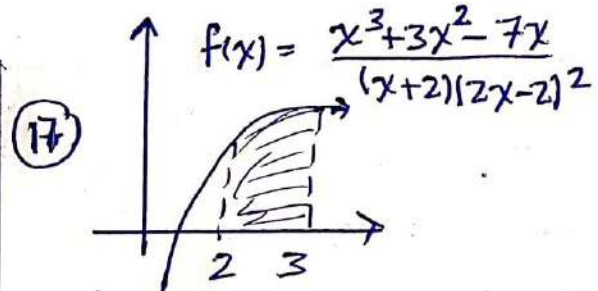
$$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-1} \right) dx$$

$$A = (\ln|x+2| + \ln|2x-1|) \Big|_1^2$$

$$A = (\ln 4 + \ln 3) - (\ln 3 + \ln 1)$$

$$A = \ln 4 + \ln 3 - \ln 3$$

$$A = \ln 4$$



الحل: صفا دارية لبطول مقام متساوي
وعليه مكان اقواس للمقام نفس
قوة طوله

$$\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8}$$

$$\frac{4x^3-12x+8}{4}$$

$$\frac{4x^3-12x+8}{4} \frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8} = \frac{1}{4} + \frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$$

$$\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8} = \frac{1}{4} + \frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$$

$$\frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8} = \frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2}$$

$$\frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-2} + \frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$3x^2-4x-2 = A(2x-2)^2 + B(x+2)(2x-2) + C(x+2)$$

$$18 = 36A \rightarrow A = \frac{1}{2} \quad x=2 \text{ عند}$$

$$-3 = 3C \rightarrow C = -1 \quad x=1 \text{ عند}$$

$$-2 = 4A - 4B + 2C \quad x=0 \text{ عند}$$

$$-2 = 2 - 4B - 2 \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2} dx$$

$$A = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-2} - \frac{1}{(2x-2)^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|2x-2| - \frac{1}{2(2x-2)} \right) \Big|_2^3$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{25}{8}$$

رافعة صباغ

• V A O A T E E T E

جدول من أمثلة التكامل

$$18) \int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx$$

$$19) \int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx$$

$$20) \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx$$

$$18) u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{u^2 + u}{(u^2 + 1)(u - 1)} \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{u + 1}{(u^2 + 1)(u - 1)} du$$

$$\frac{u + 1}{(u^2 + 1)(u - 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u^2 + 1} + C$$

$$u + 1 = A(u^2 + 1) + (Bx + C)(u - 1)$$

$$2 = 2A \rightarrow A = 1 \quad u = 1 \text{ is}$$

$$1 = A - C \quad u = 0$$

$$1 = 1 - C \rightarrow C = 0$$

$$0 = 2A - 2(C - B) \rightarrow B = 1 \quad u = -1$$

$$\int \frac{u + 1}{(u^2 + 1)(u - 1)} du = \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{-u}{u^2 + 1} \right) du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{-1}{2} \frac{2u}{u^2 + 1} \right) du$$

$$= \ln|u - 1| - \frac{1}{2} \ln|u^2 + 1| + C$$

$$= \ln|e^x - 1| - \frac{1}{2} \ln|e^{2x} + 1| + C$$

$$19) u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{5 \cos x}{u^2 + 3u - 4} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5 du}{u^2 + 3u - 4}$$

$$\frac{5}{u^2 + 3u - 4} = \frac{5}{(u + 4)(u - 1)} = \frac{A}{u + 4} + \frac{B}{u - 1}$$

$$5 = A(u - 1) + B(u + 4) \quad \text{الـ 1}$$

$$5 = 5B \rightarrow B = 1 \quad \text{عند } u = 1$$

$$5 = -5A \rightarrow A = -1 \quad \text{عند } u = -4$$

$$\int \frac{5 du}{u^2 + 3u - 4} = \int \left(\frac{-1}{u + 4} + \frac{1}{u - 1} \right) du$$

$$= -\ln|u + 4| + \ln|u - 1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{u - 1}{u + 4} \right| = \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 4} \right| + C$$

$$20) u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{u^2 + 5u + 6} \frac{du}{\sec^2 x} = \int \frac{du}{u^2 + 5u + 6}$$

$$\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u + 3)(u + 2)} = \frac{A}{u + 3} + \frac{B}{u + 2}$$

$$1 = A(u + 2) + B(u + 3)$$

$$1 = B \rightarrow B = 1 \quad \text{عند } u = -2 \text{ is}$$

$$1 = -A \rightarrow A = -1 \quad \text{عند } u = -3$$

$$\int \frac{du}{u^2 + 5u + 6} = \int \left(\frac{-1}{u + 3} + \frac{1}{u + 2} \right) du$$

$$= -\ln|u + 3| + \ln|u + 2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{u + 2}{u + 3} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\tan x + 2}{\tan x + 3} \right| + C$$

رأفت صابري

٧٨٥٨٥٤٤٦٤

(2) آتت ان :-

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3} dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$$

الحل :-

$$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

$$\frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$4x = A(x+1) + B(x-3)$$

$$12 = 4A \rightarrow A = 3 \quad x=3 \text{ م}$$

$$-4 = -4B \rightarrow B = 1 \quad x=-1 \text{ م}$$

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= (3 \ln|x-3| + \ln|x+1|)$$

$$= (3 \ln 2 + \ln 2) - (3 \ln 3 + \ln 1)$$

$$= 3 \ln 2 + \ln 2 - 3 \ln 3$$

$$= 4 \ln 2 - 3 \ln 3$$

$$= \ln 16 - \ln 27$$

$$= \ln\left(\frac{16}{27}\right)$$

انتهت صياغة

22 آتت ان :-

$$p > 1 \text{ م} \quad \int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{p-2}{p+1}$$

الحل :-

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(2x-1)$$

$$1 = -3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \quad x=-1 \text{ م}$$

$$1 = \frac{3}{2}A \rightarrow A = \frac{2}{3} \quad x=\frac{1}{2} \text{ م}$$

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1} dx = \int_1^p \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} \ln|2x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2p-1}{p+1} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2p-1}{p+1} \cdot \frac{2}{1} \right| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{4p-2}{p+1} \right|$$

ما ان $p > 1$ م صا 6 ا هـ البطل

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{4p-2}{p+1} \right|$$

التكامل

الفرع العلمي

التكامل بالاجزاء



اتحقق من فهمي

اتدرب واحل المسائل

مهارات التفكير العليا

كتاب التعاريف

مترسة سمر الثانوية للبنين

رافقت صفائي 0785824464

1) حل كلٍّ من التكاملات الآتية صفحة 63

a) $\int x \sin x \, dx$

b) $\int x^2 \ln x \, dx$

* c) $\int 2x \sqrt{7-3x} \, dx$

d) $\int 3x e^{4x} \, dx$

a) $u = x \quad dv = \sin x \, dx$
 $du = dx \quad \rightarrow \quad v = -\cos x$

$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$
 $= -x \cos x + \sin x + C$

b) $u = \ln x \quad dv = x^2 \, dx$
 $du = \frac{1}{x} \, dx \quad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \, dx$
 $= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

c) الحل :

$u = 2x \quad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}} \, dx$
 $du = 2 \, dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{2}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}}$

$-\frac{4x}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}} + \int \frac{2}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}} \, dx$
 $-\frac{4x}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{135} (7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$
 $-\frac{4x}{9} \sqrt{(7-3x)^3} - \frac{4}{135} \sqrt{(7-3x)^5} + C$

d) $u = 3x \quad dv = e^{4x} \, dx$
 $du = 3 \, dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$\int 3x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} x e^{4x} - \int \frac{3}{4} e^{4x} \, dx$
 $= \frac{3}{4} x e^{4x} - \frac{3}{16} e^{4x} + C$

راقبت ضاوي

a) $\int x^2 \sin x dx$

b) $\int x^3 e^{4x} dx$

a) $u = x^2$ $dv = \sin x dx$
 $du = 2x dx$ $v = -\cos x$

الحل:

اجزاء مره اخرى

$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$

$= -x^2 \cos x + [2x \sin x - \int 2 \sin x dx]$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

$u = 2x$ $dv = \cos x dx$
 $du = 2 dx$ $v = \sin x$

b) $u = x^3$ $dv = e^{4x} dx$
 $du = 3x^2 dx$ $v = \frac{1}{4} e^{4x}$

اجزاء مره اخرى

$\int x^3 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4} x^2 e^{4x} dx$

$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{3}{16} x e^{4x} - \int \frac{3}{8} x e^{4x} dx$

$\int x e^{4x} dx = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{3}{16} e^{4x} + \int \frac{3}{8} e^{4x} dx$

$u = \frac{3}{8} x$ $dv = e^{4x} dx$
 $du = \frac{3}{8} dx$ $v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$\int x^3 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x} - \int \frac{3}{32} e^{4x} dx$

$\int x^3 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x} - \frac{3}{128} e^{4x} + C$

الان فضل حل هذه التمارين بطريقة
 الجداول

راقب ضابط

3) جد كلٍّ من التكاملات الآتية

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

b) $\int \sec^3 x dx$

a) $\int e^{-x} \sin x dx$

$u = \sin x \quad dv = e^{-x} dx$
 $du = \cos x dx \quad v = -e^{-x}$

افترضه اضرى

$u = \cos x \quad dv = e^{-x} dx$
 $du = -\sin x dx \quad v = -e^{-x}$

$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx$

$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$

$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$

نقم على (2)

$\int e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} (-e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x) + C$

b) $\int \sec x \sec^2 x dx$

$u = \sec x \quad dv = \sec^2 x dx$
 $du = \sec x \tan x dx \quad v = \tan x$

$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$

$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$

فك افقوا
وتوزع

$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$

$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx$

نظر: $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$

نقم على (2)

$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$

رفعت صياحي

٠٧٨٠٨٧٤٤٦٤

(4) جد كلاً من التكاملين الآتيين :-

a) $\int x^4 \cos 4x dx$

b) $\int x^5 e^x dx$

الحل :- نستخدم الجبرول

a) اشتقاق تأمل

x^4	+	$\cos 4x$
$4x^3$	-	$\frac{1}{4} \sin 4x$
$12x^2$	+	$-\frac{1}{16} \cos 4x$
$24x$	-	$-\frac{1}{64} \sin 4x$
24	+	$\frac{1}{256} \cos 4x$
0	-	$\frac{1}{1024} \sin 4x$

$$\int x^4 \cos 4x dx = \frac{1}{4} x^4 \sin 4x + \frac{1}{4} x^3 \cos 4x - \frac{3}{16} x^2 \sin 4x - \frac{3}{32} x \cos 4x + \frac{3}{128} \sin 4x + C$$

b) اشتقاق تأمل

x^5	+	e^x
$5x^4$	-	e^x
$20x^3$	+	e^x
$60x^2$	-	e^x
$120x$	+	e^x
120	-	e^x
0	+	e^x

$$\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120x e^x - 120 e^x + C$$

رؤف صباغى

-٧٨٥٨٢٤٤٦٤

(5) يمثل الاقتران $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الميزية

كل قطعة منتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة
و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. جد اقتران التكلفة $C(x)$

علماً بأن $C(10) = 200$

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx \quad \text{الحل} =$$

$$u = 0.1x + 1 \quad dv = e^{0.03x}$$

$$du = 0.1 dx \quad v = \frac{1}{0.03} e^{0.03x}$$

$$\int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx = (0.1x + 1) \left(\frac{1}{0.03} e^{0.03x} \right) - \int \frac{0.1}{0.03} e^{0.03x} dx$$

$$= (0.1x + 1) \left(\frac{1}{0.03} e^{0.03x} \right) - \frac{0.1}{(0.03)(0.03)} e^{0.03x} + K$$

$$C(x) = (0.1x + 1) \left(\frac{1}{0.03} e^{0.03x} \right) - \frac{0.1}{0.0009} e^{0.03x} + K$$

بما أن $K(10) = 200$ حيث K

$$C(10) = \frac{2}{0.03} e^{0.3} - \frac{0.1}{0.0009} e^{0.3} + K$$

$$200 = \frac{200}{3} e^{0.3} - \frac{1000}{9} e^{0.3} + K \rightarrow K \approx 260$$

$$C(x) = (0.1x + 1) \left(\frac{100}{3} e^{0.03x} \right) - \frac{1000}{9} e^{0.03x} + 260$$

روفت صباي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

6) حد كل من التامليين الآتيين صفحة 70

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$

$u = \ln x$ $dv = x^{-2} dx$
 $du = \frac{1}{x} dx$ $v = -\frac{1}{x}$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$
 $= \left(-\frac{1}{x} \ln x\right)\Big|_1^e + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e$
 $= \left(-\frac{1}{e} \ln e\right) + \frac{1}{1} \ln 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{1}$
 $= \frac{-1}{e} + 0 + \frac{1}{e} + 1 = \frac{-2}{e} + 1$

$u = x$ $dv = e^{-2x} dx$
 $du = dx$ $v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$\int_0^1 x e^{-2x} dx = \left(-\frac{x}{2} e^{-2x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx$
 $= \left(-\frac{x}{2} e^{-2x}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4} e^{-2x}\right)\Big|_0^1$
 $= -\frac{1}{2} e^{-2} + 0 + \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{-1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4e^2} + \frac{1}{4}$

7) حد صيغة كل من التامليين الآتيين

a) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx$

b) $\int x^5 e^{x^2} dx$

a) $u = x^2$
 $\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int (x^3 + x^5) \sin u \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} (x^2 + x^4) \sin u du$

$\int \frac{1}{2} (u + u^2) \sin u du$ تكتب x^2 و x^4 بـ u
 المبرور 1

استنتاجات $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$ $\frac{1}{2}u + u$ 1 0
 $\sin u$ $-\cos u$ $-\sin u$ $\cos u$

$= -\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2\right) \cos u + \left(\frac{1}{2}u + u\right) \sin u + \cos u + c$
 $= -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) \cos x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + x^2\right) \sin x^2 + \cos x^2 + c$

انقضاء

b) $u = x^2$
 $\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int x^5 e^u \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} x^4 e^u du$

$\int \frac{1}{2} u^2 e^u du$ تكتب x^4 بـ u
 المبرور 1

استنتاجات $\frac{1}{2}u^2$ u 1 0
 e^u e^u e^u e^u

$\int \frac{1}{2} u^2 e^u du = \frac{1}{2} u^2 e^u - u e^u + e^u + c$
 $= \frac{1}{2} x^4 e^{x^2} - x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + c$

التدرب واصل المائل

جد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int (x+1) \cos x \, dx$

2) $\int x e^{\frac{x}{2}} \, dx$

3) $\int (2x^2-1) e^{-x} \, dx$

4) $\int \ln \sqrt{x} \, dx$

5) $\int x \sin x \cos x \, dx$

6) $\int x \sec x \tan x \, dx$

7) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$

9) $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$

10) $\int (x-2) \sqrt{8-x} \, dx$

11) $\int x^3 \cos 2x \, dx$

12) $\int \frac{x}{6x} \, dx$

13) $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$

14) $\int \cos x \ln \sin x \, dx$

15) $\int e^x \ln(1+e^x) \, dx$

1) $u = x+1 \quad dv = \cos x \, dx$
 $du = dx \quad v = \sin x$
 $\int (x+1) \cos x \, dx = (x+1) \sin x - \int \sin x \, dx$
 $= (x+1) \sin x + \cos x + C$

2) $u = x \quad dv = e^{\frac{x}{2}} \, dx$
 $du = dx \quad v = 2e^{\frac{x}{2}}$
 $\int x e^{\frac{x}{2}} \, dx = 2x e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} \, dx$
 $= 2x e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$

3) $\int (2x^2-1) e^{-x} \, dx$

الآن	الجزء الثاني
$2x^2-1$	e^{-x}
$4x$	$-e^{-x}$
4	e^{-x}
0	$-e^{-x}$

كامل المتكامل $-e^{-x}$

$= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x} + C$

$= -e^{-x}(2x^2-1+4x+4) + C$

$= -e^{-x}(2x^2+4x+3) + C$

انقضاء

$$4) \int \ln x dx = \int \frac{1}{2} \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad dv = \frac{1}{2} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{1}{2} x$$

$$\int \ln x dx = \frac{1}{2} x \ln x - \int \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$$

$$7) \int x \csc^2 x dx$$

$$u = x \quad dv = \csc^2 x dx$$

$$du = dx \quad v = -\cot x$$

$$\int x \csc^2 x dx = -x \cot x + \int \cot x dx$$

$$= -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$5) \int x \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} x \sin 2x dx$$

$$u = \frac{1}{2} x \quad dv = \sin 2x dx$$

$$du = \frac{1}{2} dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int x \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \int \frac{1}{4} \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$$

$$8) u = \ln x \quad dv = x^{-3} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{-1}{2x^2}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{-\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3} dx$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2} x^{-3} dx$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

$$6) u = x \quad dv = \sec x \tan x dx$$

$$du = dx \quad v = \sec x$$

$$\int x \sec x \tan x dx = x \sec x - \int \sec x dx$$

$$= x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C$$

انقضاء

9) $u = 2x^2$

$du = 4x dx$

$dv = \sec^2 x \tan x dx$

$v = \frac{1}{2} \tan^2 x$

$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x dx = x^2 \tan^2 x - \int 2x \tan^2 x dx$

$\int 2x \tan^2 x dx = \int 2x (\sec^2 x - 1) dx$

الجزء

$u = \tan x$
 $\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x u \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u du = \frac{u^2}{2}$

$= \frac{1}{2} \tan^2 x$

$u = 2x \quad dv = \tan^2 x dx$

$du = 2 dx \quad v = \tan x - x$

$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x dx = x^2 \tan^2 x - [2x(\tan x - x) - \int 2(\tan x - x) dx]$

$= x^2 \tan^2 x - [2x(\tan x - x) - 2(-\ln|\cos x| - \frac{x^2}{2})]$

$= x^2 \tan^2 x - 2x \tan x + 2x^2 - 2\ln|\cos x| - x^2 + C$

$= x^2 \tan^2 x - 2x \tan x + x^2 - 2\ln|\cos x| + C$

10) $u = x - 2$

$du = dx$

$dv = (8 - x)^{\frac{3}{2}} dx$

$v = \frac{2}{3} (8 - x)^{\frac{5}{2}}$

$\int (x - 2) \sqrt{8 - x} dx = -\frac{2}{3} (x - 2) (8 - x)^{\frac{3}{2}} + \int \frac{2}{3} (8 - x)^{\frac{3}{2}} dx$

$= -\frac{2}{3} (x - 2) (8 - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (8 - x)^{\frac{5}{2}} + C$

11)

المشتق

x^3

$3x^2$

$6x$

6

0

+

-

+

-

-

المشتق

$\frac{1}{\cos 2x}$

$\frac{1}{2} \sin 2x$

$-\frac{1}{4} \cos 2x$

$-\frac{1}{8} \sin 2x$

$\frac{1}{16} \cos 2x$

الجدول افضل

$\int x^3 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + C$

رفعت مبراني

• ٧٨٥٨٦٤٤٦٤

$$12) \int x 6^{-x} dx$$

$$u = x \quad dv = 6^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{-6^{-x}}{\ln 6}$$

$$\int x 6^{-x} dx = -\frac{x 6^{-x}}{\ln 6} + \int \frac{6^{-x}}{\ln 6} dx$$

$$= -\frac{x 6^{-x}}{\ln 6} + \frac{-6^{-x}}{(\ln 6)^2} + C$$

$$13) u = e^{-x} \quad dv = \sin 2x dx$$

$$du = -e^{-x} dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \int \frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x dx$$

أجزاء مرتبطة

$$u = \frac{1}{2} e^{-x} \quad dv = \cos 2x dx$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-x} dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \left[\frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x + \int \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x dx \right]$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x$$

نضرب
4/5

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x + C$$

$$= -\frac{1}{5} e^{-x} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + C$$

انقضاء

$$14) u = \ln \sin x$$

$$dv = \cos x dx$$

$$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$v = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int \cos x \ln \sin x dx &= \sin x \ln \sin x - \int \cos x dx \\ &= \sin x \ln \sin x - \sin x + c \end{aligned}$$

$$15) a = 1 + e^x$$

$$\frac{da}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{da}{e^x}$$

$$\int e^x \ln a \frac{da}{e^x} = \int \ln a da \quad \text{اجزاء}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln a & dv &= da \\ du &= \frac{1}{a} da & v &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln a da &= a \ln a - \int da \\ &= a \ln a - a + c \end{aligned}$$

$$= (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - (1 + e^x) + c$$

جد مرقعة كل من التمارين التالية :-

$$16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$17) \int_1^e \ln x^2 dx$$

$$18) \int_1^2 \ln(xe^x) dx$$

$$19) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x \sec^2 3x dx$$

$$20) \int_1^e x^4 \ln x dx$$

$$21) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$22) \int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) dx$$

$$23) \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$24) \int_0^1 x 3^x dx$$

رفعت الحلاني

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$19) u = x \quad dv = \sec^2 3x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \frac{1}{3} \tan 3x$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x \sec^2 3x dx = \left(\frac{1}{3} x \tan 3x \right) \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3} \tan 3x dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x \tan 3x \right) \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \left(\frac{1}{9} \ln \cos 3x \right) \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{27} \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{9} \ln \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{9} \ln \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$20) u = \ln x \quad dv = x^4 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \frac{1}{5} x^5$$

$$\int_1^e x^4 \ln x dx = \left(\frac{1}{5} x^5 \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5} x^4 dx$$

$$= \left(\frac{1}{5} x^5 \ln x \right) \Big|_1^e - \left(\frac{1}{25} x^5 \right) \Big|_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{5} e^5 \ln e \right) - \left(\frac{1}{5} \ln 1 \right) - \frac{1}{25} e^5 + \frac{1}{25}$$

$$= \frac{1}{5} e^5 - \frac{1}{25} e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5 + 1}{25}$$

21) المميز

المعامل

الجواب

$$x^2$$

$$2x$$

$$2$$

$$0$$

$$\sin x$$

$$-\cos x$$

$$-\sin x$$

$$\cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \pi \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cos 0 + \pi \sin 0 + 2 \cos 0)$$

$$= \pi - 2$$

انقضاء

$$22) \quad u = x \quad dv = (e^{-2x} + e^{-x}) dx$$

$$+ \quad du = dx \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) dx = \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}e^{-2x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1}\right) - (0 - 0) + \left(-\frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1}\right) - \left(-\frac{1}{4}e^0 - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1 = -\frac{3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

$$23) \quad u = xe^x$$

$$dv = (1+x)^{-2} dx$$

$$du = (xe^x + e^x) dx$$

$$v = \frac{-1}{1+x}$$

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \left(-\frac{xe^x}{1+x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xe^x + e^x}{1+x} dx$$

$$\frac{e^x(x+1)}{1+x}$$

$$= \left(-\frac{e}{1+1}\right) - 0 + e - e^0 = -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{e}{2} - 1$$

$$24) \quad u = x$$

$$dv = 3^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$\int_0^1 x \cdot 3^x dx = \left(\frac{x 3^x}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3} dx$$

$$= \left(\frac{x 3^x}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{\ln 3} - 0\right) - \left(\frac{3}{(\ln 3)^2} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\right) = \frac{3 \ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

انقضاء صافي

جد كلٍّ من التكاملات الآتية

25) $\int x^3 e^{x^2} dx$

26) $\int \cos(\ln x) dx$

27) $\int x^3 \sin x^2 dx$

28) $\int e^{\cos x} \sin x dx$

29) $\int \sin \sqrt{x} dx$

30) $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$

الحل:

25) $u = x^2$

نبدأ بالقوديف لأن u غير ثابت

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int x^3 e^u \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 e^u du$
 $= \int \frac{1}{2} u e^u du$

$x^2 = u \sqrt{u}$

اجزاء

$u = \frac{1}{2} u \quad dv = e^u du$

$du = \frac{1}{2} du \quad v = e^u$

$\int \frac{1}{2} u e^u du = \frac{1}{2} u e^u - \int \frac{1}{2} e^u du$

$= \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} e^u + C$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

26) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$

مثال (3) صفحة 56

الآن u ثابت غير ثابت

$\int (\cos u) x du = \int e^u \cos u du$

من لفتره e لا

الجزء من

$e^u = x$

$= \frac{1}{2} e^u \sin u + \frac{1}{2} e^u \cos u + C$

$= \frac{1}{2} e^{\ln x} \sin \ln x + \frac{1}{2} e^{\ln x} \cos \ln x + C$

$= \frac{1}{2} x \sin \ln x + \frac{1}{2} x \cos \ln x + C$

انقضاء

27) $a = x^2$

let $v = -81$

$$\frac{da}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$$

$$\int x^3 \sin a \frac{da}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 \sin a da = \int \frac{1}{2} a \sin a da \quad a = x^2 \text{ و } v$$

$$u = \frac{1}{2} a \quad dv = \sin a da$$

$$du = \frac{1}{2} da \quad v = -\cos a$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} a \sin a da &= -\frac{1}{2} a \cos a + \int \frac{1}{2} \cos a da \\ &= -\frac{1}{2} a \cos a + \frac{1}{2} \sin a + C \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + C \end{aligned}$$

28) $a = \cos x$

$$\frac{da}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{da}{-\sin x}$$

$$\int e^a \sin x da \quad \text{إشارة}$$

$$\int 2e^a \sin x \cos x \frac{da}{-\sin x} = \int 2e^a \cos x da$$

$$\int -2ae^a da \quad a = \cos x \text{ إشارة}$$

$$u = -2a \quad dv = e^a da$$

$$\begin{aligned} \int -2ae^a da &= -2ae^a + \int 2e^a da \\ &= -2ae^a + 2e^a + C \\ &= -2\cos x e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

29) $a = \sqrt{x}$

$$a^2 = x$$

$$2a da = dx$$

$$\int 2a \sin a da \quad \text{إشارة}$$

$$u = 2a \quad dv = \sin a da$$

$$du = 2 da \quad v = -\cos a$$

$$\begin{aligned} \int 2a \sin a da &= -2a \cos a + \int 2 \cos a da \\ &= -2a \cos a + 2 \sin a + C \\ &= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

انقضاء

30) $a = x^2$

$$\frac{da}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$$

$$\int \frac{x^3 e^a}{(a+1)^2} \frac{da}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 e^a}{(a+1)^2} da \quad a = x^2 \text{ في}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{a e^a}{(a+1)^2} da \quad \text{محلل فرق 23}$$

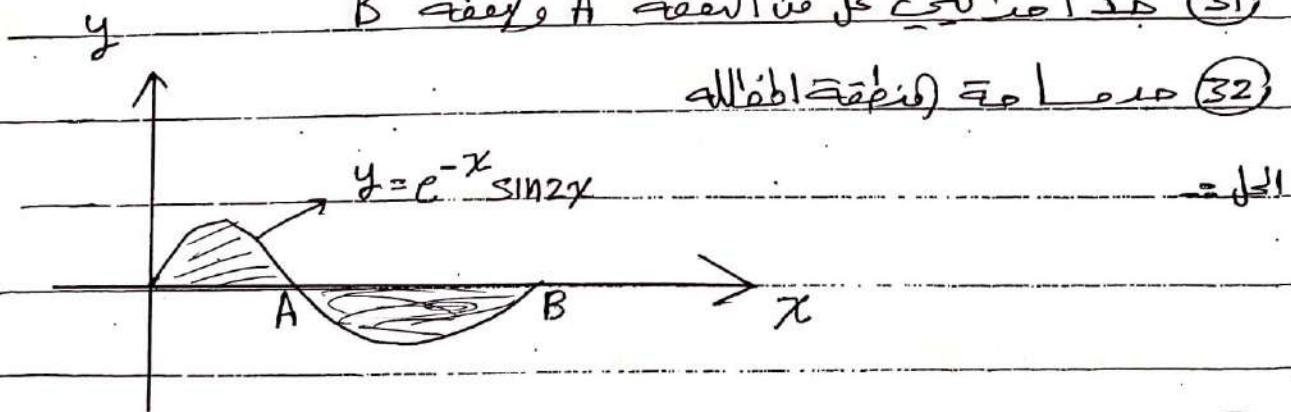
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-a e^a}{1+a} + e^a \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2 e^{x^2}}{1+x^2} + e^{x^2} \right) + C$$

إذا كان الشكل (محاور) يمثل منحنى لاقتراح أن
حيث $x > 0$ فاجب على الأسئلة التالية

(31) حدد إحداثي كل من النقطة A والنقطة B

(32) حدد امة (منطقة الظلال)



(31) $y = 0$ في

$$e^{-x} \sin 2x = 0$$

$$e^{-x} \neq 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$$

نقار الإحداثيات وعلى إحداثي A هو $(\frac{\pi}{2}, 0)$ وإحداثي B هو $(\pi, 0)$

راقب ضابط

$$32) A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx + - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x} \sin 2x dx$$

في هذه الحالة نستخدم دوال

$$u = e^{-x} \quad dv = \sin 2x dx$$

$$du = -e^{-x} dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \int \frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x dx$$

أجزاء أخرى

$$u = \frac{1}{2} e^{-x} \quad du = \cos 2x dx$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-x} dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \left[\frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x + \int \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x dx \right]$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x - \int \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x dx$$

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x$$

$$A = \left(-\frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-\frac{2}{5} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$A = \left(-\frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} (-1) - \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} (0) \right) - \left(-\frac{2}{5} e^{-0} (1) - 0 \right) - \left(-\frac{2}{5} e^{-\pi} (1) - \frac{1}{5} e^{-\pi} (0) + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} (-1) + \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} (0) \right)$$

$$A = \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-\pi} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-\pi}$$

رافقت ضابطتي

133 ليكر جسم في مسار مستقيم، وتقطع سرعة المتجهة بالوقت $v(t) = t e^{-\frac{t}{2}}$ إذا بدأ الجسم الحركة من نقطة الاصل، حدد موقعه بعد ثانية
الحل =

$$s(t) = \int v(t) dt = \int t e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$du = dt \quad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$$

$$s(t) = \int t e^{-\frac{t}{2}} dt = -2t e^{-\frac{t}{2}} + \int 2e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$s(t) = -2t e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + c \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$s(0) = 0$$

$$s(0) = 0 - 4e^0 + c$$

$$0 = -4 + c \rightarrow c = 4$$

$$s(t) = -2t e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$$

في كل مما يأتي (مستقيم الحركة بالوقت $f(x)$ ونقطة مبدأه

$y = f(x)$ امسح المعلومات الفعالة بالحداد فاستقر الاقتران $f(x)$

34) $f'(x) = (x+2)\sin x$ في $(0, 2)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x+2)\sin x dx \quad \text{الحل =}$$

$$u = x+2 \quad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos x$$

$$f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x dx$$

$$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + c$$

$$f(0) = 2 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$f(0) = -2\cos 0 + 0 + c$$

$$2 = -2 + c \rightarrow c = 4$$

$$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$$

35) $f'(x) = 2xe^{-x}$ في $(0, 3)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2xe^{-x} dx$$

$$u = 2x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = 2 dx \quad v = -e^{-x}$$

$$f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx$$

$$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$f(0) = 3 \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

$$f(0) = 0 - 2 + c$$

$$3 = -2 + c \rightarrow c = 5$$

$$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$$

راقب ضابط

36) تقدمت دعاية لدرجة قياسية مقدمة في الصحافة. إذا كان عدد الكلمات

التي تطبعها دعاية في الدقيقة يزداد بمعدل $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$

حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاية في الدقيقة بعد t أسبوعاً من انطلاقها بالدرجة، حدد $N(t)$ علماً بأن دعاية كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدرجة.

الحل :- $N(t) = \int N'(t) dt = \int (t+6)e^{-0.25t} dt$

نضع $u = t+6$ $dv = e^{-0.25t} dt$ تجزئة
 $du = dt$ $v = -4e^{-0.25t}$ $\frac{-1}{0.25} = \frac{-100}{25} = -4$

$N(t) = -4e^{-0.25t}(t+6) + \int 4e^{-0.25t} dt$ $\frac{4}{0.25} = \frac{400}{25} = 16$

$N(t) = -4e^{-0.25t}(t+6) + 16e^{-0.25t} + C$ بما أن $N(0) = 40$ نجد $C = 80$

$N(0) = -4e^0(6) - 16e^0 + C$

$40 = -24 - 16 + C \rightarrow C = 80$

$N(t) = -4e^{-0.25t}(t+6) - 16e^{-0.25t} + 80$

راقب صياغة

مهارات التفكير العليا

$$\int_{\frac{1}{2}}^3 x^2 \ln 2x dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72} \quad (37) \text{ أثبت أن}$$

الحل:

$$u = \ln 2x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 dx$$

$$v = \frac{1}{3} x^3$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^3 x^2 \ln 2x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^3 - \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{1}{3} x^2 dx$$

$$\frac{1}{3} x^3$$

$$= (9 \ln 6 - \frac{1}{24} \ln 1) - (\frac{3}{3} - \frac{1}{72}) = 9 \ln 6$$

$$= 9 \ln 6 - 0 - \frac{215}{72} = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x dx = \frac{\pi-2}{16} \quad (38) \text{ أثبت أن}$$

الحل:

$$u = x$$

$$dv = \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$du = dx$$

$$v = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x dx &= x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) dx \\ &= x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{128} \cos 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{16} \sin 2\pi \right) - 0 - \left(\left(-\frac{1}{8} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{128} \cos 2\pi \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{128} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} + 0 \right) - \left(0 + \frac{1}{128} \right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{128} \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{128} + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

نوع
مقابل

انفتح

$$= \frac{\pi-2}{16}$$

(39) إذا كان $\int_0^a x e^{\frac{x}{2}} dx = 6$ أوجد a بالتحقق (معادلة)

$x = 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

الحل: $u = x \quad dv = e^{\frac{x}{2}} dx$

$du = dx \quad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

$\int_0^a x e^{\frac{x}{2}} dx = (2x e^{\frac{x}{2}})|_0^a - \int_0^a 2e^{\frac{x}{2}} dx$
 $6 = (2x e^{\frac{x}{2}})|_0^a - 4e^{\frac{x}{2}}|_0^a$

$6 = 2a e^{\frac{a}{2}} - (4e^{\frac{a}{2}} - 4e^0)$

$6 = 2a e^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{a}{2}} + 4$

$2 = 2a e^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{a}{2}}$ نقيم بالقسمة

$1 = a e^{\frac{a}{2}} - 2e^{\frac{a}{2}}$

$1 = e^{\frac{a}{2}}(a - 2) \rightarrow e^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{a - 2} \rightarrow a - 2 = \frac{1}{e^{\frac{a}{2}}}$

$a - 2 = e^{-\frac{a}{2}} \rightarrow a = 2 + e^{-\frac{a}{2}}$

(40) اوجد $\int (\ln x)^2 dx$ بطريقة التكامل بالاجزاء

الحل:

$u = (\ln x)^2 \quad dv = dx$

طريقة (1) بالاجزاء

$du = (2 \ln x) \frac{1}{x} dx \quad v = x$

اجزاء

$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx$

$u = 2 \ln x \quad dv = dx$
 $du = \frac{2}{x} dx \quad v = x$

$= x(\ln x)^2 - [2x \ln x - \int 2 dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

$\int u^2 x du$

من افترض
 ان
 الطرف
 الايمن

طريقة (2) بالتحقق

$u = \ln x$

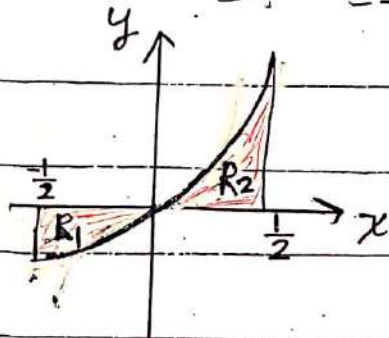
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$

اجزاء $\int u^2 e^u du$

اقتضاه

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاختزال

حيث $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ أجب عن السؤالين التاليين



(41) جد مساحة كل من المنطقتين R_1 و R_2

والمنطقة R_2

(42) أثبت أنه إذا كانت المنطقة R_1 إلى ما لا

المنطقة R_2 كما هي $(e-2):e$

$$R_1 = - \int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{2x} dx$$

الحل :- $u = x \quad dv = e^{2x} dx$
 $du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\begin{aligned} R_1 &= - \int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{2x} dx = - \left[\left(\frac{1}{2} x e^{2x} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] \\ &= - \left[\left(\frac{1}{2} x e^{2x} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 \right] \\ &= - \left[0 + \frac{1}{4} e^{-1} - \left(\frac{1}{4} e^0 - \frac{1}{4} e^{-1} \right) \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = \frac{e-2}{4e} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2} x e^{2x} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{4} e - 0 \right) - \left(\frac{1}{4} e - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{e-2}{4e}}{\frac{1}{4}} = \frac{e-2}{4e} \times 4 = \frac{e-2}{e} \quad (42)$$

$$R_1 : R_2 = (e-2) : e$$

انتهى

استعمل التكامل بالجزء لاجزاء كل مما يأتي، حيث n عدد صحيح موجب و $a \neq 0$

$$43) \int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$$

$$44) \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

الحل :-

$$43) \quad u = \ln x \quad dv = x^n dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$$

$$44) \quad u = x^n \quad dv = e^{ax} dx$$

$$du = nx^{n-1} dx \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \int \frac{n}{a} x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

انقضاء

كتاب التعاريف

جد كلاً من/تأملات الآتي =

1) $\int x \cos 4x dx$

2) $\int x \sqrt{x+1} dx$

3) $\int x e^{-x} dx$

4) $\int (x^2+1) \ln x dx$

5) $\int \ln x^3 dx$

6) $\int e^{2x} \sin x dx$

1) $u = x$ $dv = \cos 4x dx$
 $du = dx$ $v = \frac{1}{4} \sin 4x$

الحل :-

$$\int x \cos 4x dx = \frac{1}{4} x \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x dx$$

$$= \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$$

2) $u = x$ $dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$
 $du = dx$ $v = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \right) (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} x (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+1)^5} + C$$

انقضاء

$$3) \quad u = x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = -e^{-x}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$4) \quad u = \ln x \quad dv = (x^2 + 1) dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{1}{3} x^3 + x$$

$$\int (x^2 + 1) \ln x dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 + 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \frac{1}{9} x^3 - x + c$$

$$5) \quad \int 3 \ln x dx$$

$$u = 3 \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{3}{x} dx \quad v = x$$

$$\int \ln x^3 dx = 3x \ln x - \int 3 dx$$

$$= 3x \ln x - 3x + c$$

وقت ضائع

$$6) u = e^{2x} \quad dv = \sin x dx$$

$$du = 2e^{2x} dx \quad v = -\cos x$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x dx$$

$$u = 2e^{2x} \quad dv = \cos x dx$$

$$du = 4e^{2x} dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x dx$$

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C \quad \frac{1}{5} \rightarrow \text{multiplier}$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} (-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x) + C$$

$$= \frac{1}{5} e^{2x} (-\cos x + 2 \sin x) + C$$

بدون متغير كل من $\sin x$ و $\cos x$ في النهاية

$$7) \int_1^e \ln x dx$$

$$8) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$9) \int_0^{\pi} x \cos \frac{1}{4} x dx$$

$$10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cos 2x dx$$

$$11) \int_1^e \ln(x+1) dx$$

$$12) \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$7) u = \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = (x \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e dx$$

$$= (x \ln x) \Big|_1^e - (e - 1) = e \ln e - \ln 1 - e + 1$$

$$= e - e + 1$$

$$= 1$$

انقضاء

$$8) \quad u = \ln x \quad dv = x^{-2}$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^2 + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \ln 2 + 0 \right) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$9) \quad u = x \quad dv = \cos \frac{1}{4} x dx$$

$$du = dx \quad v = 4 \sin \frac{1}{4} x$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos \frac{1}{4} x dx &= \left(4x \sin \frac{1}{4} x \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4 \sin \frac{1}{4} x dx \\ &= \left(4x \sin \frac{1}{4} x \right) \Big|_0^{\pi} + \left(16 \cos \frac{1}{4} x \right) \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$= \left(4\pi \sin \frac{\pi}{4} - 0 \right) + \left(16 \cos \frac{\pi}{4} - 16 \cos 0 \right)$$

$$= (4\pi) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (16) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 16$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16$$

$$= \frac{4\pi + 16}{\sqrt{2}} - 16$$

راقبت ضابطہ

$$10) u = e^{3x} \quad dv = \cos 2x dx$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \int \frac{3}{2} e^{3x} \sin 2x dx$$

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \int \frac{9}{4} e^{3x} \cos 2x dx$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} e^{3x} & dv &= \sin 2x dx \\ du &= \frac{9}{2} e^{3x} & v &= -\frac{1}{2} \cos 2x \end{aligned}$$

$$\frac{13}{4} \int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x$$

$$\frac{4}{13} \div \text{طرف}$$

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \cos 2x + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cos 2x dx = \left(\frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2}{13} e^{\frac{3\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{3}{13} e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{3}{13} e^0 \cos 0 \right) \\ &= \frac{2}{13} e^{\frac{3\pi}{4}} + 0 - \frac{3}{13} = \frac{1}{13} (2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3) \end{aligned}$$

$$11) u = \ln(x+1) \quad du = \frac{1}{x+1} dx$$

$$v = x$$

$$\int_1^e \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1} dx$$

$$\int_1^e \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1} \right) dx$$

$$= x \ln(x+1) \Big|_1^e - (x - \ln|x+1|) \Big|_1^e$$

$$= e \ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1) - (1 - \ln 2))$$

$$= e \ln(e+1) - \ln 2 - e + \ln(e+1) + 1 - \ln 2$$

$$= (e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1$$

انقضاء

$$12) \text{ Integration by parts}$$

$$\text{Integration by parts}$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & \xrightarrow{+} & e^x \\ 2x & \xrightarrow{-} & e^x \\ 2 & \xrightarrow{+} & e^x \\ 0 & & e^x \end{array}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x$$

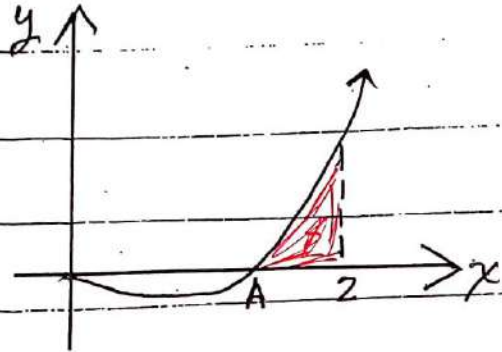
$$\int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x) \Big|_0^1$$

$$= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2)$$

$$= e - 2$$

إذا كان الرسم أعلاه يمثل منحني الدالة $f(x) = x^2 \ln x$ حيث $x > 0$

أجب عن الأسئلة الآتية تباعاً :-



(16) حد أعلى النقط A

(17) حد صامة (منطقة الظل)

الحل :-

(16) $f=0$ $x=A$

$$x^2 \ln x = 0$$

$$x=0$$

$$\ln x = 0$$

$$x=1$$

من هنا الحد A هو (1) (نوا)

$$\text{Area} = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx \quad (17)$$

$$u = x^2 \ln x \quad dv = x^2 \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^2 \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x \right) \Big|_1^2 - \left(\frac{1}{9} x^3 \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1 \right) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - 0 - \frac{7}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

انقضاء

التكامل

الفرع العلمي

المساحات والحجوم



تحقق من فهمي

اكترب واهل المسائل

مهارات التفكير العليا

كتاب التعاريف

مدرسة عمر الثانوية للبنين

رائد صافي 0785824464

صفحة 77

(a) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإحداثيات

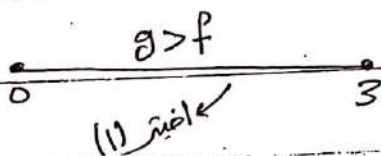
$$f(x) = \sqrt{x} \text{ و } g(x) = x^2 + 1 \text{ وتقتصم في } x=0 \text{ و } x=3$$

(b) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإحداثيات

$$f(x) = \sin x \text{ و } g(x) = 2 - \sin x \text{ وتقتصم في } x=0 \text{ و } x=\pi$$

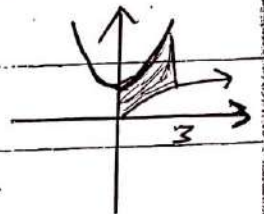
$$a) f = g$$

$$\sqrt{x} = x^2 + 1 \text{ (اضرب المعادلة بحل)}$$



$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$$

$$A = \int_0^3 (x^2 + 1 - \sqrt{x}) dx$$



$$A = \int_0^3 (x^2 + 1 - x^{\frac{1}{2}}) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^3$$

$$A = \left(\frac{27}{3} + 3 - \frac{2}{3} \sqrt{27} \right) = (9 + 3 - \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3}) = 12 - 2\sqrt{3}$$

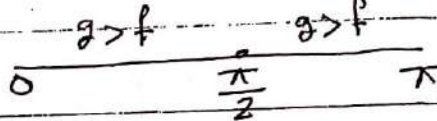
$$b) f = g$$

$$\sin x = 2 - \sin x$$

$$2 \sin x = 2$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$



$$A = \int_0^{\pi} (g - f) dx$$

$$A = \int_0^{\pi} (2 - \sin x - \sin x) dx = \int_0^{\pi} (2 - 2 \sin x) dx$$

$$A = (2x + 2 \cos x) \Big|_0^{\pi}$$

$$A = (2\pi + 2 \cos \pi) - (0 + 2 \cos 0)$$

$$A = (2\pi - 2) - 2 = 2\pi - 4$$

أنت صابغ

كون دائما
 ولس $g > f$
 من 2/3
 من 2/3

79
ص

(2) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيتي الإقتراست

$$g(x) = x+2 \quad , \quad f(x) = x^2$$

$$f = g$$

الحل :-

$$x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -1$$

$$g > f$$

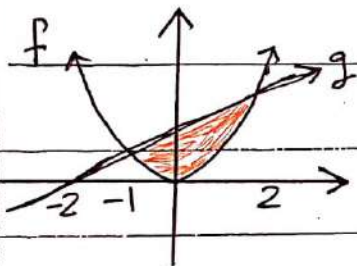
-1

2

$$A = \int_{-1}^2 (g-f) dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx$$

$$A = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2$$

$$A = \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}$$

81
ص

(3) يسير الشكل المجاور منحني السرعة المتجهة - الزمن لجسم يتحرك على محور x

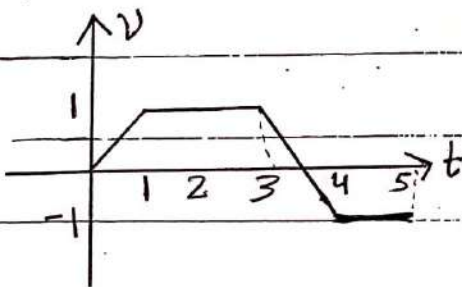
في الفترة الزمنية [0, 5] إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 3$ عند $t = 0$ حدد :-

أ) إزاحة الجسم في الفترة المعطاة

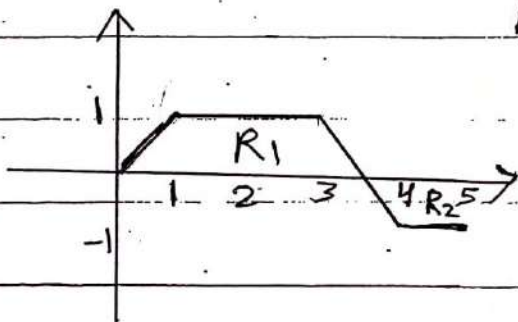
ب) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

ج) الموقع النهائي للجسم

الحل :-



$$R_1 = \frac{1}{2} (3 \cdot 5 + 2) (1) = \frac{11}{4}$$



$$R_2 = \frac{1}{2} (1 \cdot 5 + 1) (1) = \frac{5}{4}$$

راقب ضابو

$$S(5) - S(0) = \int_0^5 v(t) dt$$

(a)

$$= \int_0^{3.5} v(t) dt + \int_{3.5}^5 v(t) dt$$

$$= \frac{11}{4} - \frac{5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ m}$$

$$\int_0^5 |v(t)| dt = R_1 + R_2$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{5}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m}$$

(b)

$$S(5) - S(0) = \int_0^5 v(t) dt$$

(c) قانون الزاحة

$$S(5) - 3 = \frac{3}{2} \rightarrow S(5) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ m}$$

82
٨٢

(4) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى لافتران $f(x) = \frac{1}{x}$ والمحور x والمستقيمين $x=1$ و $x=4$ حول محور x

الحل :-

$$V = \int_1^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_1^4 \pi \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$V = \int_1^4 \pi x^{-2} dx = \left(\frac{\pi x^{-1}}{-1}\right) \Big|_1^4 = \left(-\frac{\pi}{x}\right) \Big|_1^4$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{1} = \frac{3\pi}{4}$$

رافعة صناعية

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

5) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنين

الافتراضية $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ حول المحور x

الحل :-

$$f = g$$

$$\sqrt{x} = x^2 \quad \text{نربع}$$

$$f > g$$

$$x = x^4$$

$$x^4 - x = 0$$

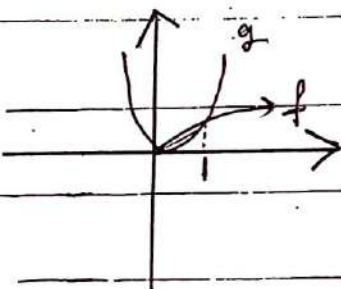
$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x=0$$

$$x=1$$

$$A = \int_0^1 \pi ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

$$A = \int_0^1 \pi (x - x^4) dx$$



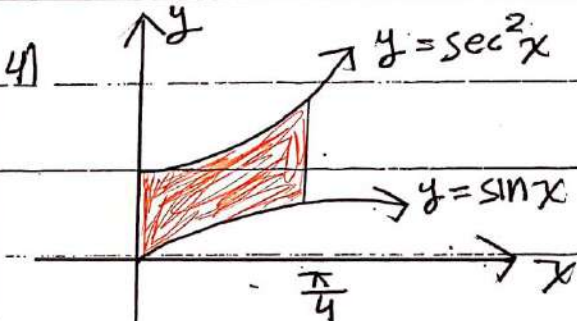
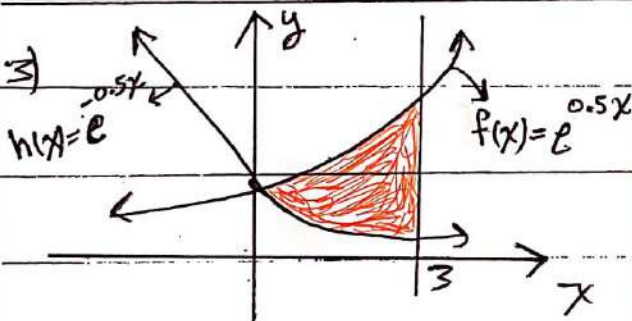
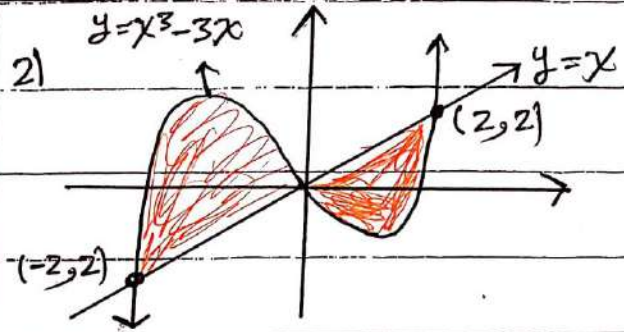
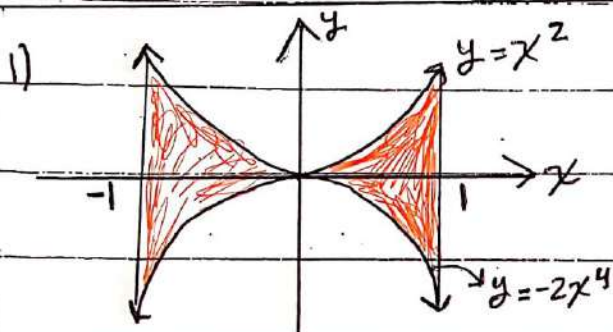
$$A = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$A = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

افتراضية

التدرب واحد المسائل

حدد مساحة المنطقة الظللة في كل من التمارين السابقة



$$1) A = \int_{-1}^1 (x^2 - (-2x^4)) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^4) dx$$

الحل :-

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{22}{15}$$

اضربنا (افتر)
كامله من -1 الى 1
من x^2 الى $-2x^4$
على جميع (افتر)

$$2) A = \int_{-2}^0 ((x^3 - 3x) - (x)) dx + \int_0^2 ((x) - (x^3 - 3x)) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$= 0 - \left(\frac{16}{4} - 8 \right) + (8 - 4)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

راقبت ضابطتي

$$\begin{aligned} 3) A &= \int_0^3 (e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}) dx = \int_0^3 (2e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}) dx \\ &= (2e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}) \Big|_0^3 = (2e^{\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}}) - (2e^0 + 2e^0) \\ &= 2e^{\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}} - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - \sin x) dx \\ &= (\tan x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\tan \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) - (\tan 0 + \cos 0) \\ &= (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (0 + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

5) جد المساحة الواقعة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ و $g(x) = 2x^2$

الحل :-

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 6 = 2x^2$$

$$\frac{3}{2}x^2 = 6$$

$$x^2 = (6)(\frac{2}{3}) = 4 \rightarrow x = 2, -2$$

$$f > g$$

-2

2

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 (\frac{1}{2}x^2 + 6 - 2x^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 (6 - \frac{3}{2}x^2) dx \\ &= (6x - \frac{1}{2}x^3) \Big|_{-2}^2 = (12 - \frac{8}{2}) - (-12 + \frac{8}{2}) \\ &= 8 + 8 = 16 \end{aligned}$$

المساحة الواقعة بين المنحنيين

6) حدد المساحة المحصورة بين منحنيي الأقطارين $f(x) = 4^x$

$g(x) = 3^x$ و (م تقسم $x=1$ على اربع اجزاء)

الحل:

$$f(x) = g(x)$$

$$f > g$$

$$4^x = 3^x \rightarrow x = 0$$

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (4^x - 3^x) dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1$$

$$A = \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3} \right) - \left(\frac{4^0}{\ln 4} - \frac{3^0}{\ln 3} \right) = \frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 3}$$

$$A = \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3}$$

7) حدد المساحة المحصورة بين منحنيي الأقطارين $g(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$

و (م تقسم $x = \frac{\pi}{2}$ على اربع اجزاء)

$$f(x) = g(x)$$

$$e^x = \cos x \rightarrow x = 0$$

$$f > g$$

$$0 \quad \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - \cos x) dx$$

$$A = (e^x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (e^{\frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi}{2}) - (e^0 - \sin 0)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - (1 - 0)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

انقضاء صواب

(6) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الأقطارين $f(x) = 4^x$

$g(x) = 3^x$ و (م تقسم $x=1$ على آخره 4 ول

الحل:

$$f(x) = g(x)$$

$$f > g$$

$$4^x = 3^x \rightarrow x = 0$$

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (4^x - 3^x) dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1$$

$$A = \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3} \right) - \left(\frac{4^0}{\ln 4} - \frac{3^0}{\ln 3} \right) = \frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 3}$$

$$A = \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3}$$

(7) جد (المساحة) المحصورة بين منحنيي الأقطارين $g(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$

و (م تقسم $x = \frac{\pi}{2}$ على آخره 4 ول

$$f(x) = g(x)$$

الحل:

$$e^x = \cos x \rightarrow x = 0$$

$$f > g$$

$$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - \cos x) dx$$

$$A = (e^x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (e^{\frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi}{2}) - (e^0 - \sin 0)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - (1 - 0)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

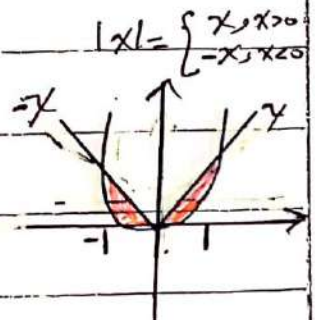
انتهت هنا

8) حل مسألة (المسألة الأولى) $g(x) = x^4$ و $f(x) = |x|$

الحل:

$g(x) = f(x)$
نوجد تقاطع $x^4 = |x|$

$$\begin{aligned} x^4 &= x \quad \text{or} \quad x^4 = -x \\ x^4 - x &= 0 & x^4 + x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 & x(x^3 + 1) &= 0 \\ x &= 0, 1 & x &= 0, -1 \end{aligned}$$



مساحة تقاطع المنحنيين هي 3 نقاط

$-x > x^4$ $x > x^4$

-1 0 1

$$A = \int_{-1}^0 (-x - x^4) dx + \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

9) حل مسألة (المسألة الثانية) $g(x) = x^2 + 2x$ و $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x \\ 3x^3 - 12x &= 0 \\ 3x(x^2 - 4) &= 0 \\ x &= 0, 2, -2 \end{aligned}$$

$f > g$ $g > f$

-2 0 2

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

$$A = \int_{-2}^0 (3x^3 - x^2 - 10x + x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x - 3x^3 + x^2 + 10x) dx$$

$$A = \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx + \int_0^2 (-3x^3 + 12x) dx$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{3x^4}{4} + 6x^2 \right) \Big|_0^2$$

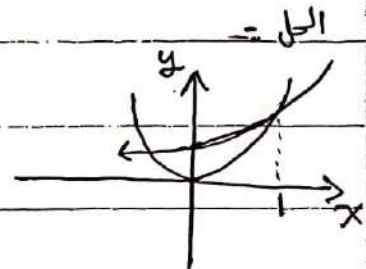
$$= (0) - (12 - 24) + (-12 + 24) = 24$$

المساحة هي 24

10) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالة الآتية

$x=1$ و $x=0$ وتعيين $g(x)=x^2$ و $f(x)=e^x$

$f > g$
منطقة ما بين المنحنيين



$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (e^x - x^2) dx$$

$$= (e^x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^1 = (e - \frac{1}{3}) - (1 - 0) = e - \frac{4}{3}$$

11) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين $h(x)=4\sqrt{x}$ و $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

الحل:

ن.س $h(x) = f(x)$
 $4\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2$
 $16x = \frac{1}{4}x^4$
 $64x = x^4$
 $x^4 - 64x = 0$
 $x(x^3 - 64) = 0$
 $x = 0$ و $x = 4$

$h > f$

$$A = \int_0^4 (h(x) - g(x)) dx = \int_0^4 (4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2) dx$$

$$A = \int_0^4 (4x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2) dx =$$

$$A = (\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^3) \Big|_0^4$$

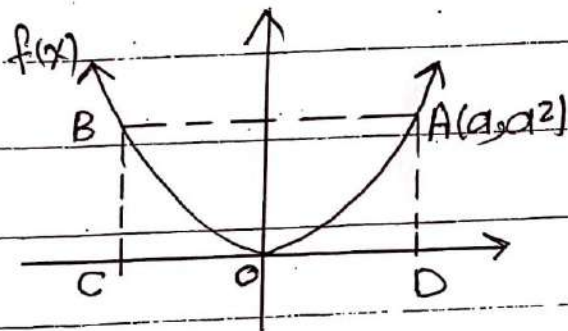
$$A = \frac{8(8)}{3} - \frac{64}{6} = \frac{17}{6}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$$

انتهى

11) $f(x) = x^2$ (مربع)

12) بين ان الشكل التالي منحنى اقتران $f(x) = x^2$ اذا كان احاديثا
النقطة $A(a, a^2)$ ما فأتست ان مساحة المنطقة (المساحة)
بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، (المنطقة) مستقيمة AB ، (المساحة) $ABCD$
مساحة مستطيل



الحل:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = 0$$

على احاديث B هو $(-a, a^2)$

مساحة (المستطيل) هي $(2a)a^2 = 2a^3$

معادلة المنطقة (المستقيمة) AB هي $y = a^2$

مساحة المنطقة (المساحة) بين $f(x)$ ، (المنطقة) مستقيمة AB :

$$R = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a$$

$$= \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

على

$$\frac{4a^3}{3} = \frac{2}{3} (2a^3)$$

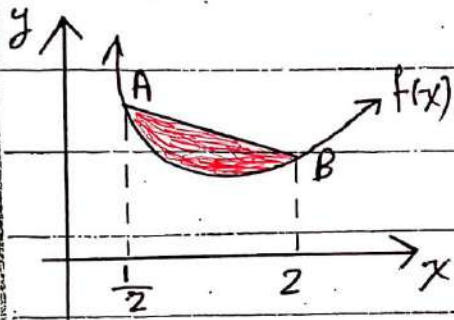
← (المنطقة) مستقيمة AB
(المساحة) $f(x)$

المستطيل

راقبت ضابط

13) يسألنا السؤال (لماذا) منحنى الاقتان إذا كان $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$

لا بد أن نرى x كل من النقطة A ونقطة B و $\frac{1}{2}$ و 2 على x المحور



عد مساحة المنطقة (المساحة بين

القيم AB ومنحنى الاقتان $f(x)$

الحل :-

كأن معادلة (القيم) AB :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \quad \text{عند } x = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{2}{4} + 2 = \frac{5}{2} \quad \text{عند } x = 2$$

$$m = \frac{\frac{17}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{1}{2} - 2}$$

$$B\left(2, \frac{5}{2}\right) \text{ و } A\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right) \text{ (نقطة)}$$

$$m = \frac{6}{-\frac{3}{2}} = -4$$

$$y - \frac{5}{2} = -4(x - 2) \quad \text{(معادلة)}$$

$$y = \frac{21}{2} - 4x$$

$$R = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\left(\frac{21}{2} - 4x \right) - \left(\frac{2}{x^2} + x \right) \right) dx \quad \text{(المساحة)}$$

$$R = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\left(\frac{21}{2} - 4x \right) - \left(2x^{-2} + x \right) \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{21}{2} - 5x - 2x^{-2} \right) dx$$

$$R = \left(\frac{21}{2}x - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2$$

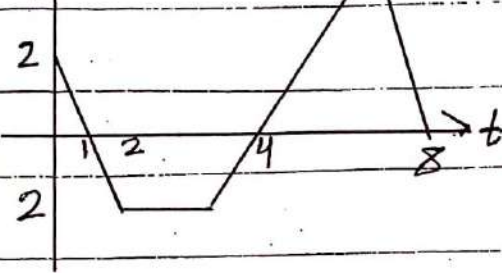
$$R = \left(21 - 10 + 1 \right) - \left(\frac{21}{4} - \frac{5}{8} + 4 \right) = 12 - \frac{69}{8} = \frac{27}{8}$$

انتهى

يسكن الشكل المجاور منحنى السرعة للاتجاه - الزمن لجسم يتحرك على المحور x

في الفترة الزمنية $[0, 8]$ إذا بدأ الجسم الحرك من $x = 5$ عند $t = 0$

جد كل من:
 14) إزاحة الجسم عن (فترة/زمنية) المعطاة
 15) المسافة التي قطعها الجسم في (فترة/زمنية)
 16) الموقع النهائي للجسم

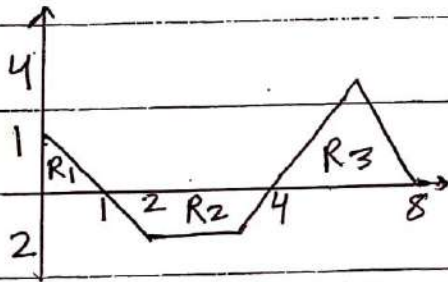


14) إزاحة الجسم عن (فترة/زمنية) المعطاة

15) المسافة التي قطعها الجسم في (فترة/زمنية)

16) الموقع النهائي للجسم

الحل :-



$$R_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(3+1)(2) = 4$$

$$R_3 = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$$

$$14) S(8) - S(0) = \int_0^8 v(t) dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^4 v(t) dt + \int_4^8 v(t) dt$$

$$= 1 - 4 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$15) \int_0^5 |v(t)| dt = R_1 + R_2 + R_3$$

$$= 1 + 4 + 8 = 13 \text{ m}$$

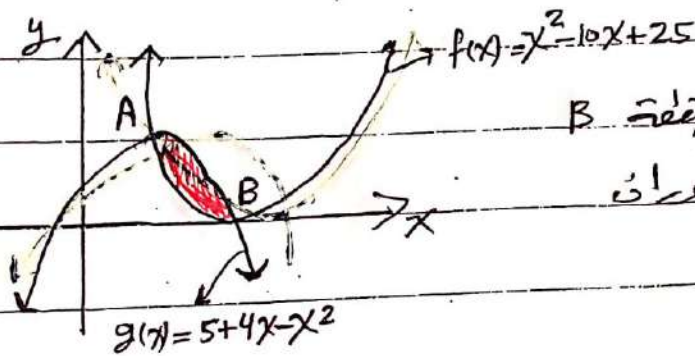
$$16) S(8) - S(0) = \int_0^8 v(t) dt$$

$$S(8) - 5 = 5$$

$$S(8) = 10 \text{ m}$$

انقضاء صياغة

بعض الأشكال (لحام منحني التقاطع $f(x) = x^2 - 10x + 25$
 $g(x) = 5 + 4x - x^2$ معاً هذا الشكل، اكتب عن التناظرية بين تباين



(17) جد إحداثي كل من نقطة A ونقطة B

(18) جد حجم الجسم الناتج عند دوران

المنطقة المظلمة حول المحور x

الحل :-

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2$$

$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

5

2

(17) عند $x = 2$ فإن $g(2) = f(2) = 9$

وعلى إحداثي A هو (2, 9) وإحداثي B هو (5, 0)

$$V = \int_2^5 \pi (g(x)^2 - f(x)^2) dx$$

$$V = \pi \int_2^5 ((5 + 4x - x^2)^2 - (x^2 - 10x + 25)^2) dx$$

$$V = \pi \int_2^5 ((x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25) - (x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625)) dx$$

$$V = \pi \int_2^5 (12x^3 - 144x^2 + 540x - 600) dx$$

$$= \pi \left(\frac{12x^4}{4} - \frac{144x^3}{3} + \frac{540x^2}{2} - 600x \right) \Big|_2^5 = 81\pi$$

انقضاء

(19) حد حجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى

$f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$ و (محور x حول (محور x

الحل:

$$V = \int_0^{\pi} \pi (f(x))^2 dx = \int_0^{\pi} \pi \sin x dx$$

$$= (-\pi \cos x) \Big|_0^{\pi} = -\pi \cos \pi + \pi \cos 0$$

$$= \pi + \pi = 2\pi$$

(20) حد حجم الجسم الناتج من دوران (منطقة المحصورة بين منحنى

$f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^3$ حول المحور x

الحل:

$$g(x) = f(x)$$

نجد

$$x^3 = \sqrt{x}$$

$$x^6 = x$$

$$f > g$$

$$x^6 - x = 0$$

$$x(x^5 - 1) = 0$$

$$x = 1$$

$$V = \int_0^1 \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx = \int_0^1 \pi (x - x^6) dx$$

$$V = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \frac{5\pi}{14}$$

راقب صياغة

(2) حدد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحيطة بـ $y=3$ حول x

الافتراض $f(x) = 1 + \sec x$ في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $y=3$

$y=3$ حول x

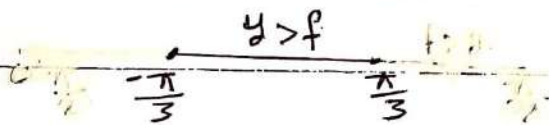
$$f(x) = y$$

الحل:

$$1 + \sec x = 3$$

$$\sec x = 2 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$



$$V = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi (y^2 - f^2) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi (9 - (1 + \sec^2 x)) dx$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi (9 - 1 - 2 \sec x - \sec^2 x) dx$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi (8 - 2 \sec x - \sec^2 x) dx$$

$$= \pi (8x - 2 \ln |\sec x + \tan x| - \tan x) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi \left(\frac{8\pi}{3} - 2 \ln |2 + \sqrt{3}| - \sqrt{3} \right) - \left(-\frac{8\pi}{3} - 2 \ln |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{16\pi}{3} + 2 \ln \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right) - 2\sqrt{3} \right)$$

راقب ضابط

مهارات التفكير العليا

اجب عن الأسئلة التالية كتابةً :-

(22) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقتاريتين

$$y = x^2 \text{ و } y = x^{\frac{1}{2}}$$

(23) حدد مساحة المحصورة بين منحنيي الإقتاريتين $y = x^{\frac{1}{3}}$ و $y = x^3$

(24) حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقتاريتين

$$y = x^n \text{ و } y = x^{\frac{1}{n}} \text{ حيث } n \text{ عدد صحيح أكبر من أو يساوي } 2$$

الحل :-

(22) $x^{\frac{1}{2}} = x^2$ مربع $x^{\frac{1}{2}} > x^2$

$$x = x^4$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 1$$

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{3}$$

(23) $x^{\frac{1}{3}} = x^3$ مكعب $x^3 > x^{\frac{1}{3}}$ $x^{\frac{1}{3}} > x^3$

$$x = x^9$$

$$x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x^{\frac{1}{3}}) dx + \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^3) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

رافقت ضياءة

مثال (23) و (22) - $x^n = x^{\frac{1}{n}}$ (24)

إذا كان n زوج فأن تقاطع 0

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n) dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

إذا كان n فردي فأن تقاطع 0، 1، -1

$$A = \int_{-1}^0 (x^n - x^{\frac{1}{n}}) dx + \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n) dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \right) + \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

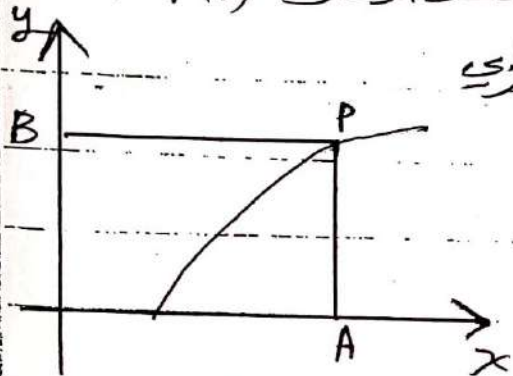
$$= \frac{-1+n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n+1}$$

ملاحظة

بسن الشكل (لحام منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{2x-1}$ حصة $x \geq 1$

اذا كانت نقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ حصة



$\overline{PA}$ يوازي (محور x و $\overline{PB}$ يوازي

المحور y و $\overline{AB}$ يوازي المحور x و $\overline{AB}$ يوازي

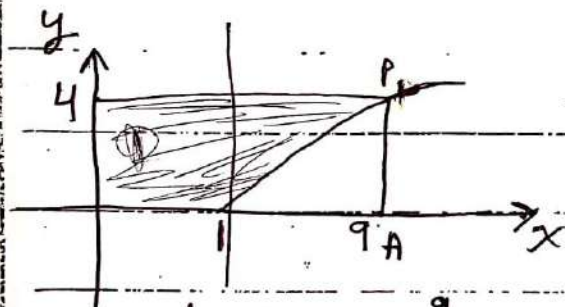
(25) مساحة المنطقة (المساحة بين

منحنى الاقتران $f(x)$ و $y=4$ و $x=9$

و المحور y و المحور x)

(26) مساحة المنطقة (المساحة بين منحنى الاقتران $f(x)$ و $x=9$ و

و المحور x)



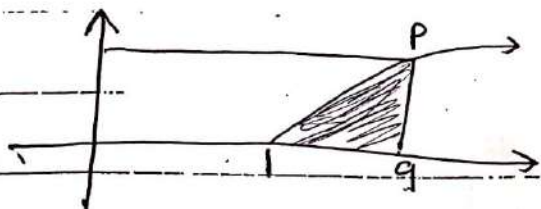
(25) هذه المنطقة مسورة بين 3 اقتران x حصة محور x و اقتران و $y=4$ و $x=9$

من حصة $x=1$

$$A = \int_0^1 4 dx + \int_1^9 (4 - \sqrt{2x-2}) dx$$

$$= 4 + \int_1^9 (4 - (2x-2)^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= 4 + (4x - \frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}) \Big|_1^9 = 4 + (36 - \frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}}) - (4 - 0) = \frac{44}{3}$$



$$A = \int_1^9 \sqrt{2x-2} dx \quad (26)$$

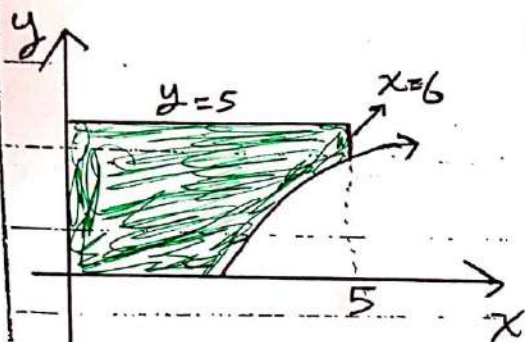
$$A = \int_1^9 (2x-2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$A = \frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0) = \frac{64}{3}$$

مساحة المنطقة

(27)

بين الشكل (المحاور) المنطقة المحصورة بين المحاور والخطين في



الربيع الأول، ومحصى لإقتان $f(x) = 2\sqrt{x-2}$

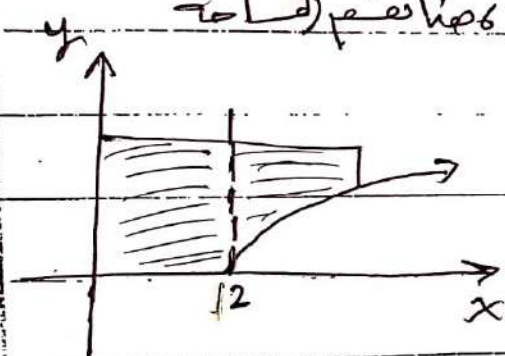
والتقنين $x=6$ و $y=5$ جد حجم

الحجم لنادج مذكوران (منطقة حول

المحور x)

الحل :-

(منطقة المحاور) محصور بين 3 منحنيات (منطقة)



صية تقم من عند $x=2$

$$V = \int_0^2 \pi(5)^2 dx + \int_2^6 \pi(5^2 - (2\sqrt{x-2})^2) dx$$

$$V = \int_0^2 25\pi dx + \int_2^6 \pi(25 - 4(x-2)) dx$$

$$V = \int_0^2 25\pi dx + \int_2^6 \pi(33 - 4x) dx$$

$$V = (25\pi x) \Big|_0^2 + \pi(33x - 2x^2) \Big|_2^6$$

$$= 50\pi + \pi((33)(6) - 2(36)) - (66 - 8)$$

$$= 50\pi + \pi(198 - 72 - 58)$$

$$= 50\pi + 68\pi$$

$$= 118\pi$$

راقب ضايق

نفس الشكل (محاور متجهين كل من الاقتران $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$

والمتقيم $y = 3x + 10$ اذا مر (المتقيم ومنحنى الاقتران

بالنقطة A الواقعة على (محور y وكان الاقتران $f(x)$ متجه

على على نقطة B ومنحنى صغرى على على نقطة C

ومنحنى صغرى على على نقطة C

مقطع الخط العوازي للمحور y والمحور x $f(x)$

بالنقطة C (المتقيم $y = 3x + 10$

على نقطة D ، فاجب عن 4 - على (المتقيم $y = 3x + 10$: $y = 3x + 10$

(28) جد امثليات كل من نقطة B ونقطة C

(29) أثبت ان AD ما ص منحنى الاقتران $f(x)$ على نقطة A

(30) جد مساحة (منطقة الظلال

الحل:

(28) اجز العطف والصغرى للاقتران $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(3x - 1)(x - 3)$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

على $x = \frac{1}{3}$: $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 11 = \frac{283}{27}$

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 11 = \frac{283}{27}$$

على $x = 3$: $f(3) = 27 - 45 + 9 + 10 = 1$

$$f(3) = 27 - 45 + 9 + 10 = 1$$

مراقبت ضابطة

على B $(\frac{1}{3}, \frac{283}{27})$ C $(3, 1)$

(29) كذا معادلة $f(x)$ في A نقطة

$f(0) = 0 - 0 + 0 + 10 = 10$ و $x=0$ حيث y تقع على محور y و $A = 10$

إحداثيات A هو $(0, 10)$

بجهد (ميل) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$f'(0) = 3$

معادلة $f(x)$ في A نقطة

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 10 = 3(x - 0)$

$\vec{AD}$ و $y = 3x + 10$ معادلة المستقيم

و $\vec{AD}$ مع $f(x)$ في A نقطة

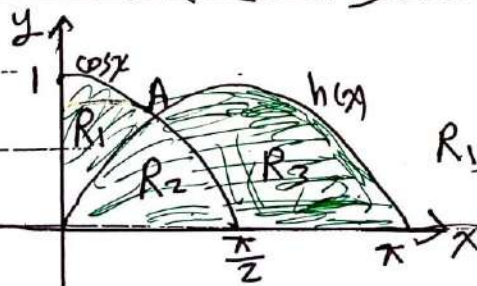
$$A = \int_0^3 (y - f(x)) dx = \int_0^3 (3x + 10 - x^3 + 5x^2 - 3x - 10) dx$$

$$= \int_0^3 (5x^2 - x^3) dx$$

$$= \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = 45 - \frac{81}{4} = \frac{99}{4}$$

بين الشكل المجاور منحنيي الإقتران $f(x) = \cos x$ و $h(x) = \sin x$

معتبرا هذا الشكل، اكتب عنك ثلاثة الخواص الأساسية التالية:



(31) جد إحداثيات نقطة A

(32) جد مساحة كل من المناطق R_1, R_2, R_3

(33) اكتب انما مساحة المنطقة R_1

الى مساحة المنطقة R_2 تاوي

وقت صبا

$\sqrt{2} : 2$

$$f(x) = h(x)$$

$$\cos x = \sin x$$

$$1 = \tan x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

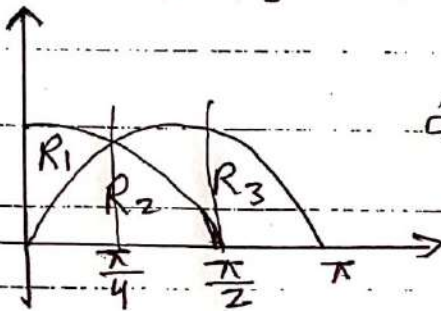
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } x = \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{4}$$

نقسم
cos x

الحل:

(31)

المساحة A هي $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



المساحة R1 هي المساحة بين المنحنى والمحور x من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{4}$ (32)

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

المساحة R2 هي المساحة بين المنحنى والمحور x من $x = \frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{5\pi}{4}$

$$R_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x dx$$

$$= (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = (-\cos \frac{\pi}{4} + \cos 0) + (\sin \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

$$R_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx$$

$$= (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (-\cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= (-\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4}) - (-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) + (-\cos \pi + \cos \frac{5\pi}{4})$$

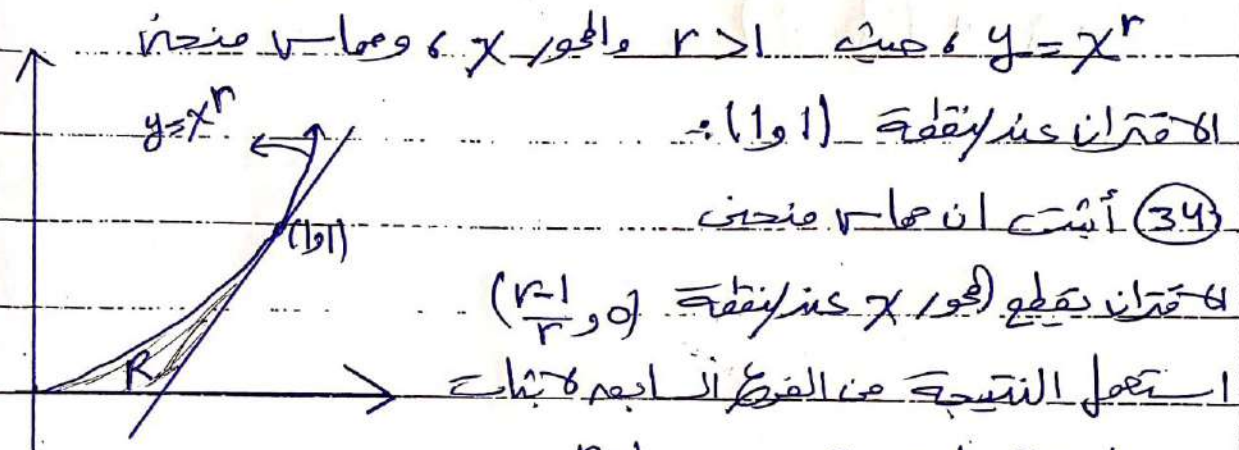
$$= -1 + \sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{2}$$

الممسوحة ضوئياً بـ CamScanner

$$\frac{A(R_1)}{A(R_2)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (33)$$

بين ان كل المحاور (منطقة) R (مصورة بين منحنى الاقتران



$$\frac{r-1}{2r(r+1)} \text{ و } R \text{ هو}$$

(36) حدد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R اكبر ما يمكن

الحل :-

بجد معادلة (مماس v عند (1,1))

$$y' = r x^{r-1}$$

$$y' = r(1)^{r-1} = r \quad \leftarrow \text{الميل}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = r(x - 1)$$

$$y = rx - r + 1$$

يقطع محور x عند

$$0 = rx - r + 1$$

$$rx = r - 1$$

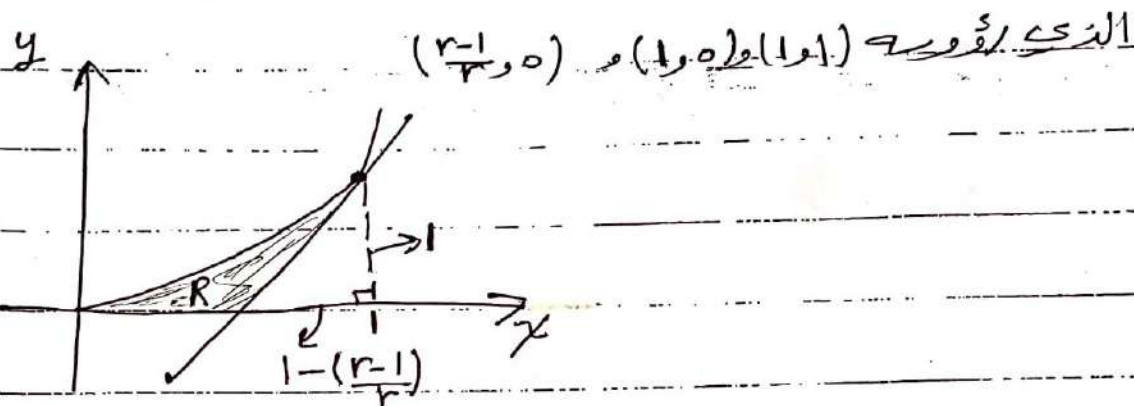
$$x = \frac{r-1}{r}$$

وعليه ان المساحة تقطع محور x عند $(\frac{r-1}{r}, 0)$

أقرب ضابطين

(35) هنا المساحة R شاذية لها قوسان المماسين و (قوس) x

والتقعيان $x=0$ و $x=1$ معلوماً هنا مساحة مثلث



$$A = \int_0^1 x^r dx - \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{r-1}{r}\right)}_{\text{ارتفاع المثلث}} (1)$$

$$A = \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2r} = \frac{(1)^{r+1}}{r+1} - 0 - \frac{1}{2r} = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{2r}$$

$$= \frac{2r - r - 1}{(r+1)(2r)} = \frac{r-1}{2r(r+1)}$$

$$A(r) = \frac{r-1}{2r^2+2r}$$

(36) نريد

$$A' = \frac{(2r^2+2r) - (r-1)(4r+2)}{(2r^2+2r)^2} = \frac{2r^2+2r - (4r^2+2r-2)}{(2r^2+2r)^2} = \frac{-2r^2+4r+2}{(2r^2+2r)^2}$$

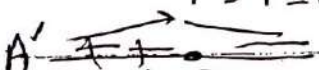
نريد $A'=0$ حيث نأخذ طرفي ونأخذ الطرف

$$-2r^2+4r+2=0$$

$$r^2-2r-1=0 \quad (\text{بقانون الجذور})$$

$$r = 1 \pm \sqrt{2} \rightarrow r = 1 + \sqrt{2}$$

$r > 1$ و $r < 1$



الوقت ضايع

منه $r = 1 + \sqrt{2}$ نأخذ المساحة أكبر ما يمكن

إذا كان العمودي على (مماس) لمنحنى الاستان $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند نقطة P (3 و 1) تقطع منحنى الاستان مرة أخرى عند نقطة P حد كلاً مما يلي :-

(37) إحداثيات نقطة P

(38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاستان $f(x)$ و (عمودي) على (مماس) ، مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية الحل :-

نجد معادلة العمودي :- $f'(x) = 2x - 4$

$m = f'(1) = 2 - 4 = -2$

معادلة العمودي :- $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

نجد نقاط تقاطع المنحنى مع (عمودي) :-

$y = f$

$x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

المسألة (2)

$2x^2 - 8x + 12 = x + 5$

$2x^2 - 9x + 7 = 0$

$(2x - 7)(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ و } \frac{7}{2}$

عند $x = \frac{7}{2}$ فإن $f(\frac{7}{2}) = \frac{49}{4} - 14 + 6 = \frac{17}{4}$

وعليه إحداثي P هو $(\frac{7}{2}, \frac{17}{4})$

$y > f$

$\frac{1}{2} \quad \frac{7}{2}$

$A = \int_1^{\frac{7}{2}} (y - f) dx = \int_1^{\frac{7}{2}} (\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - x^2 + 4x - 6) dx = \int_1^{\frac{7}{2}} (\frac{9}{2}x - x^2 - \frac{7}{2}) dx$

$\frac{9}{2}x - x^2 - \frac{7}{2}$

$= (\frac{9}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x) \Big|_1^{\frac{7}{2}}$

$= (\frac{9}{4}(\frac{49}{4}) - \frac{1}{3}(\frac{7}{2})^3 - (\frac{7}{2})(\frac{7}{2})) - (\frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{7}{2})$

$= \frac{125}{48} \approx 2.604$

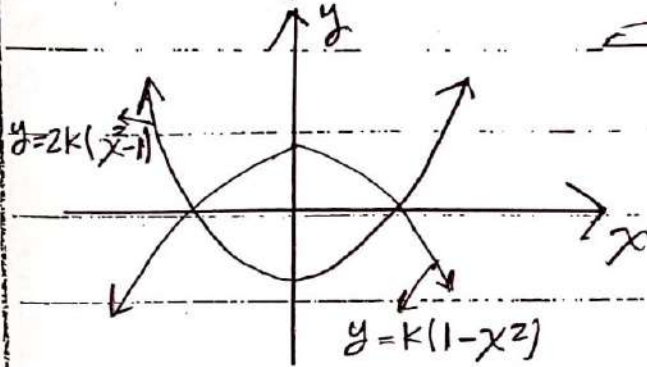
المنطقة المظلة هي المنطقة المحصورة بين القطعتين

نقطتيهما هما $x=1$ و $x=-1$ إذا كانت معادلتا

القطعتين هما $y=2K(x^2-1)$ و $y=K(1-x^2)$ وكانت $K=2$

المنطقة المظلة هي 8

جد قيمة K



الكل:

$$A = \int_{-1}^1 [K(1-x^2) - 2K(x^2-1)] dx$$

$$A = \int_{-1}^1 (K - Kx^2 - 2Kx^2 + 2K) dx$$

$$A = \int_{-1}^1 (3K - 3Kx^2) dx = 3K \int_{-1}^1 (1-x^2) dx$$

$$A = 3K \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 3K \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 3K \left(-1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$A = 2K + 2K = 4K$$

8 هي المساحة المظلة

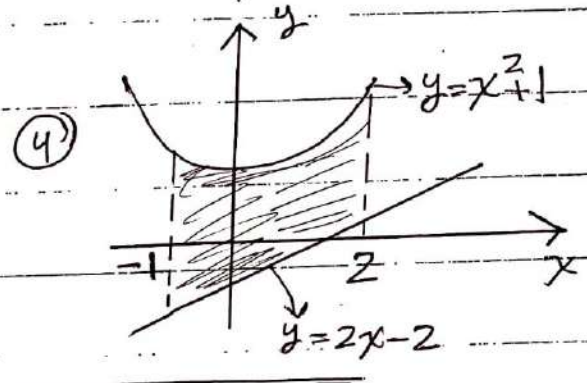
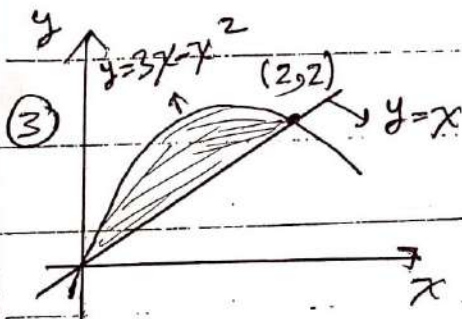
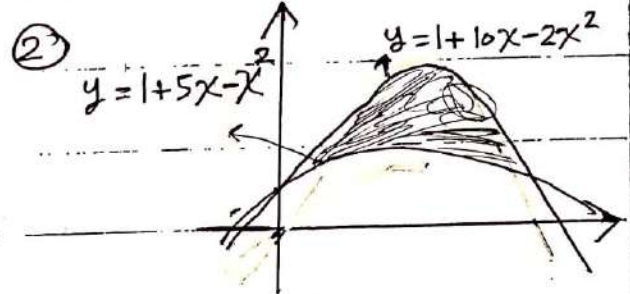
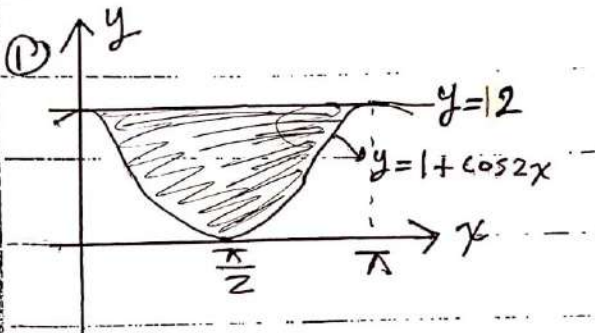
$$4K = 8$$

$$K = 2$$

انتهت هنا

كتاب التعاريف

جد مساحة المنطقة (ظل) في كل من (المسألة) البسيطة الآتية :-



الحل :

$$\begin{aligned} \text{① } A &= \int_0^{\pi} (2 - (1 + \cos 2x)) dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \\ &= (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi \end{aligned}$$

②

في نقاط التقاطع :

$$1 + 5x - x^2 = 1 + 10x - 2x^2$$

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow x = 0, 5$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 (1 + 10x - 2x^2) - (1 + 5x - x^2) dx = \int_0^5 (5x - x^2) dx \\ &= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^5 = \left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3} \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

رافقت ضابطي

$$\textcircled{3} \quad A = \int_0^2 (3x - x^2 - x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{4} \quad \int_{-1}^2 (x^2 + 1 - (2x - 2)) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3 \right) = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

٥) ما هو المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2 - x$ ؟

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$x = -2 \quad x = 1$$

$$\begin{array}{c} g > f \\ \hline -2 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$$

$$A = \int_{-2}^1 (g - f) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

انتهى

6) حدد المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ و $x=2$ (تقريباً) الحل:

$$f > g$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x=1$$

المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ و $x=2$ (تقريباً)

$$A = \int_1^2 (f - g) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\ln 1 + 1 \right) = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

7) حدد المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \cos x$ و $x=0$ و $x=\pi$ (تقريباً) الحل:

$$f > g$$

$$f < g$$

$$0 \quad \frac{\pi}{3} \quad \pi$$

$$f(x) = g(x)$$

$$\cos x = 1 - \cos x$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (f - g) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (g - f) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos x - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2 \cos x) dx = \left(2 \sin x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(x - 2 \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

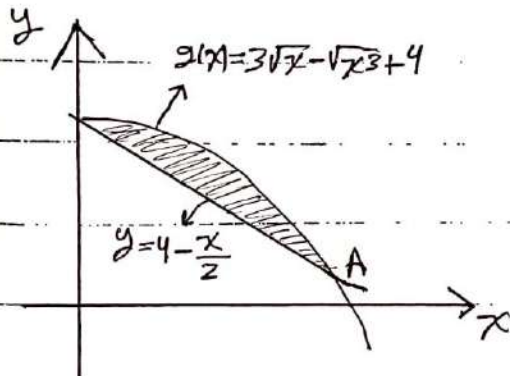
$$= \left(2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \right) - 0 + \left(\pi - 0 \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$$

المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \cos x$ و $x=0$ و $x=\pi$ (تقريباً)

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

يسأل المسأل (لجاء) منحنى الاقتراض $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$ وقيم

$y = 4 - \frac{x}{2}$ معطى مسأل، احبب عن السوالين لانيه تبايا



(8) حد اصابني نقطة A

(9) حد ماحة (منطقة) نقطة

الحل :-

$$g = y$$

(8)

$$3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4 = 4 - \frac{x}{2} \quad \text{نقرب (2)}$$

$$6\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3} + x = 0$$

$$6u - 2u^3 + u^2 = 0$$

$$2u^3 - u^2 - 6u = 0$$

$$u(2u^2 - u - 6) = 0$$

$$u(2u+3)(u-2) = 0$$

$$u=0 \quad u=-\frac{3}{2} \quad u=2$$

افرضنا $u = \sqrt{x}$
حيث $u > 0$

$$y = 4 - \frac{x}{2} = 4 - \frac{4}{2} = 2 \quad \leftarrow \begin{matrix} 2 = \sqrt{x} \\ 4 = x \end{matrix} \quad \text{عند } u=2 \text{ فان}$$

وعليه احببني A هي (4, 2)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 (g(x) - y) dx = \int_0^4 (3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4 - 4 + \frac{x}{2}) dx \\ &= \int_0^4 (3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \left(2\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{1}{4}x^2 \right) \Big|_0^4$$

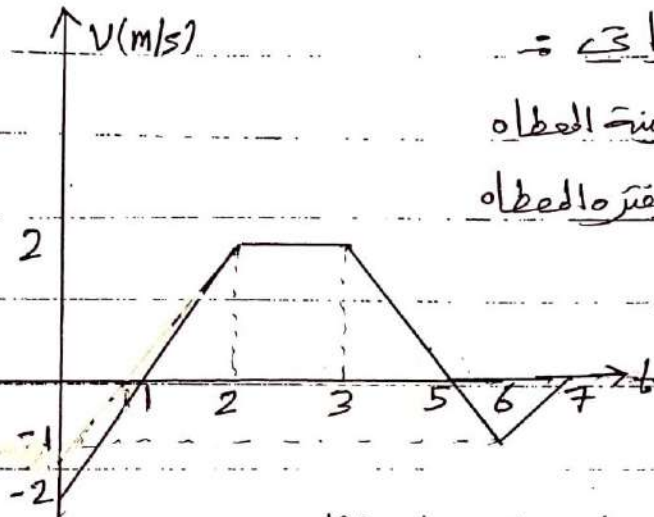
$$= 16 - \frac{64}{5} + 4 = 20 - \frac{64}{5}$$

انقضاء

$$= \frac{36}{5}$$

يسير الجسم (عاجز) منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسم يتحرك

على محور x في الفترة $[0, 7]$ ، إذا بدأ الجسم الحركة من $x=2$



عندما $t=0$ ، كل ما يأتي :-

(10) إزاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

(11) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة المعطاة

(12) الموقع النهائي للجسم

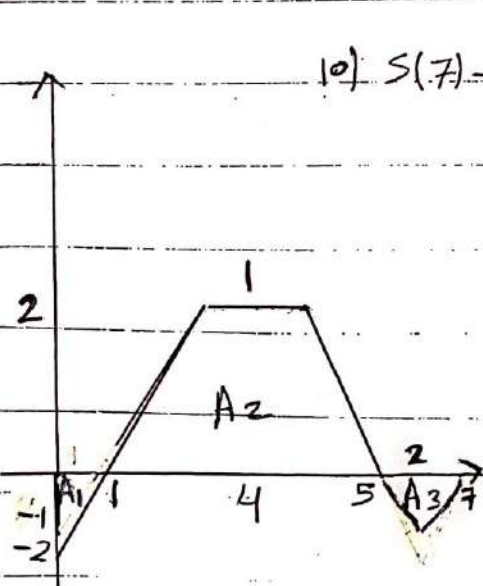
الحل :-

حيث (مساحات)

$$A_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1 \text{ مساحة إيجابية}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(4+1)(2) = 5 \text{ مساحة إيجابية (مفرد)}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(2)(1) = 1 \text{ مساحة إيجابية}$$



$$10) S(7) - S(0) = \int_0^7 v(t) dt$$

$$= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^5 v(t) dt + \int_5^7 v(t) dt$$

$$= -1 + 5 - 1 = 3 \text{ m}$$

$$11) \int_0^7 |v(t)| dt = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= 1 + 5 + 1 = 7 \text{ m}$$

$$12) S(7) - S(0) = \int_0^7 v(t) dt$$

$$S(7) - 2 = 3$$

$$S(7) = 5 \text{ m}$$

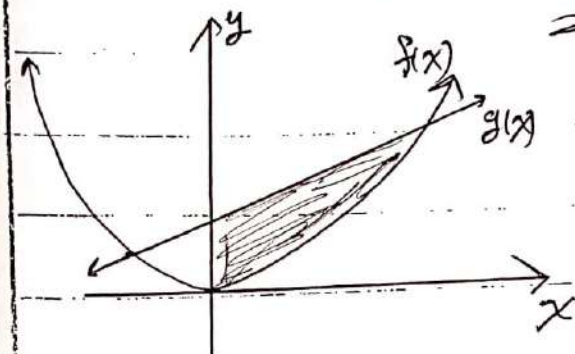
وقت ضائع

(13)

يسئ الشكل (كما هو منحنى الاقتراض) $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ و $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة

المظللة حول المحور x



الحل:

نجد تقاطع المنحنيين

$$g = f$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x=3 \quad x=-2$$

$$V = \int_0^3 \pi (g^2(x) - f^2(x)) dx$$

$$V = \int_0^3 \pi \left(\left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^2 - \frac{1}{4}x^4 dx = \left(\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - \frac{1}{20}x^5 \right) \Big|_0^3$$

$$= \pi \left(\frac{2}{3} \left(\frac{9}{2} \right)^3 - \frac{1}{20} (3)^5 \right) = \frac{153}{5} \pi$$

(14) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة المحيطة بالمنحنيين

$f(x) = \sqrt{\ln x}$ والمحور x والمنحنيين $x=e$ و $x=e^3$ حول المحور x

الحل:

$$V = \pi \int_e^{e^3} f^2(x) dx = \pi \int_e^{e^3} \ln x dx$$

اجزاء

$$= \pi \left(x \ln x \Big|_e^{e^3} - \int_e^{e^3} dx \right)$$

$$= \pi (e^3 \ln e^3 - e \ln e - e^3 + e)$$

$$= \pi (3e^3 - e - e^3 + e)$$

$$= 2\pi e^3$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

انتهى

(15) حد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحني

$$f(x) = \sqrt{2x} \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 \quad \text{حول المحور } x$$

الحل:

$$g(x) = f(x)$$

$$x^2 = \sqrt{2x}$$

$$x^4 = 2x$$

$$x^4 - 2x = 0 \rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}$$

$$f > g$$

$$\sqrt[3]{2}$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (2x - x^4) dx$$

$$V = \pi \left(x^2 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{\sqrt[3]{2}^5}{5} \right) = \frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$$

(16) يسر الشكل المجاور دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 25$ إذا دار

الجزء المظلل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول المحور x

لنحسب حجم الجسم الناتج، مبرراً اجابتي

الحل:- نجد نقاط التقاطع

$$y = 4 \quad \text{بموضعها على الدائرة}$$

$$x^2 + 16 = 25$$

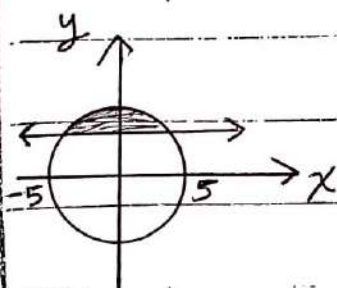
$$x^2 = 9 \rightarrow x = -3, 3$$

$$V = \int_{-3}^3 \pi (y^2 - (4)^2) dx = \int_{-3}^3 \pi (25 - x^2 - 16) dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3$$

$$= \pi ((27 - 9) - (-27 + 9))$$

$$= 36\pi$$



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

الاجابة صحيحة

التكامل

الفرع العلمي

المعادلات التفاضلية



اتحقق من فهمي

اتكرب واهل المسائل

مهارات التفكير العليا

كتاب التمارين

مدرسة سمر الثانوية للبنين

رافقت صافي 0785824464

التحقق من فهمي

92
ص

(أ) حدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad \text{في كل ما يأتي} \div$$

a) $y = 4e^x + 5e^{3x}$

b) $y = \sin x$

الحل:

$$y' = 4e^x + 15e^{3x}$$

(أ) بجهاز مشتقات:

$$y'' = 4e^x + 45e^{3x}$$

$$4e^x + 45e^{3x} - 4(4e^x + 15e^{3x}) + 3(4e^x + 5e^{3x}) \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{عوض}$$

$$4e^x + 45e^{3x} - 16e^x - 60e^{3x} + 12e^x + 15e^{3x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{وهذا } y = 4e^x + 5e^{3x} \text{ حلاً}$$

(ب) بجهاز مشتقات

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$-\sin x - 4\cos x + 3\sin x \stackrel{?}{=} 0$$

هو صواب؟

$$2\sin x - 4\cos x \neq 0 \quad x$$

$$\text{وهذا } y = \sin x \text{ ليس حلاً}$$

انتهت صياغة

٩٦

2) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x - \frac{3}{2} \sqrt{x}$

نقم جد الحل الخاص لها الذي يحقق النقطة (0, 7)

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x - \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$dy = (5 \sec^2 x - \frac{3}{2} \sqrt{x}) dx$$

تكامل:

$$\int dy = \int (5 \sec^2 x - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$y = 5 \tan x - x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = 5 \tan x - \sqrt{x^3} + C$$

الحل العام

$$7 = 5 \tan 0 - 0 + C$$

لنجد الحل الخاص عند النقطة (0, 7)

$$C = 7$$

$$y = 5 \tan x - \sqrt{x^3} + 7$$

٩٧

3) حل كلٍّ من (معا) في التفاضلية الآتية

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - x e^y$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

$$y^4 dy = 2x dx$$

$$\int y^4 dy = \int 2x dx$$

$$\frac{y^5}{5} = x^2 + C$$

تكامل:

(a) ضرب تكافؤي

انقضاء

$$dy = (2x - xe^y) dx$$

$$dy = x(2 - e^y) dx$$

نقسم على $2 - e^y$

$$\frac{dy}{2 - e^y} = x dx$$

تكامل

$$\int \frac{dy}{2 - e^y} = \int x dx$$

$$\int \frac{1}{2 - e^y} \cdot \frac{e^{-y}}{e^{-y}} dy = \int x dx$$

$$\int \frac{e^{-y}}{2e^{-y} - 1} dy = \int x dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{-2e^{-y}}{2e^{-y} - 1} dy = \int x dx$$

$$-\frac{1}{2} \ln |2e^{-y} - 1| = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow -\ln |2e^{-y} - 1| = x^2 + C$$

$$y dy = x \sin x dx$$

(c) بتدريج

$$\int y dy = \int x \sin x dx$$

تكامل بالجزء

$$u = x \quad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos x$$

نتخذ
الاجزاء
 $\int x \sin x dx$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x$$

$$\int y dy = \int x \sin x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\sin^2 x dy = y^2 \cos^2 x dx$$

(d)

$\sin^2 x y^2$ نقسم على

$$\frac{dy}{y^2} = \cot^2 x dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int (\csc^2 x - 1) dx$$

تكامل

$$\frac{y^{-1}}{-1} = -\cot x - x + C$$

$$-\frac{1}{y} = -\cot x - x + C$$

$$\frac{1}{y} = \cot x + x + C$$

راقب ضايف

جد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأول في المعطى لكل معادلة تفاضلية معطاة

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x}$, $y(0) = 1$

صفحة 98

c) $\frac{dy}{dx} = y \cos x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

الحل:

a) $dy = xy^2 e^{2x} dx$

نقسم على y^2

$\frac{dy}{y^2} = x e^{2x} dx$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int x e^{2x} dx$

$\int y^{-2} dy = \int x e^{2x} dx$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$

$-1 = 0 - \frac{1}{4} + C$

$C = -\frac{3}{4}$

$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{3}{4}$

الحل: $\int x e^{2x} dx$

بالجزأ

$u = x \quad dv = e^{2x} dx$
 $du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx$
 $= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$

حيث C هو $x=0$
 $y=1$

c) $dy = y \cos x dx$

نقسم على y

$\frac{dy}{y} = \cos x dx$

الحل:

$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx$

$\ln|y| = \sin x + C$

حيث C هو $y=1$ / $x=\frac{\pi}{2}$

$\ln 1 = \sin \frac{\pi}{2} + C$

$0 = 1 + C \rightarrow C = -1$

$\ln|y| = \sin x - 1$

راقب ضاب

5) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتقطعت مسافته المتجهة بالمعادلة

التفاضلية $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$ حدد موقع الجسم بعد 3 ثوانٍ

من بدء الحركة علماً بأن $s(0)=1$

الحل :-

$$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$$

$$ds = st\sqrt{t+1} dt$$

$$\frac{ds}{s} = t\sqrt{t+1} dt$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1} dt$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}\sqrt{(t+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + C$$

بـ C حيث $s=1/t=0$

$$\ln(1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C$$

$$0 = \frac{-4}{15} + C$$

$$C = \frac{4}{15}$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}\sqrt{(t+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + \frac{4}{15}$$

$$t=3 \text{ ms}$$

$$\ln s = \frac{2}{5}(2)^5 - \frac{2}{3}(2)^3 + \frac{4}{15}$$

$$\ln s = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15}$$

$$\ln s = \frac{116}{15} \rightarrow s = e^{\frac{116}{15}}$$

انتهى

6) يمكن نمذجة معدل تغير عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000 - P)$$

حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة عليها.

a) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة

من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزالاً

b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزالاً

الحل =

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000 - P)$$

$$\frac{dP}{P(1000 - P)} = \frac{1}{20000} dt$$

$$\int \frac{dP}{P(1000 - P)} = \int \frac{1}{20000} dt$$

$$\int \left(\frac{1}{1000P} + \frac{1}{1000(1000 - P)} \right) dP = \int \frac{1}{20000} dt$$

$$\frac{1}{1000} \ln|P| - \frac{1}{1000} \ln|1000 - P| = \frac{1}{20000} t + C$$

$$\frac{1}{1000} \ln 2500 - \frac{1}{1000} \ln 1500 = C$$

$$\frac{1}{1000} \left(\ln \frac{2500}{1500} \right) = C \rightarrow C = \frac{1}{1000} \ln \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{1000} \ln|P| - \frac{1}{1000} \ln|1000 - P| = \frac{1}{20000} t + \frac{1}{1000} \ln \frac{5}{3}$$

$$\ln P - \ln|1000 - P| = \frac{1}{20} t + \ln \frac{5}{3}$$

$$\ln \left(\frac{1800}{800} \right) = \frac{1}{20} t + \ln \frac{5}{3}$$

$$\ln \frac{9}{4} = \frac{1}{20} t + \ln \frac{5}{3} \rightarrow \ln \frac{9}{4} - \ln \frac{5}{3} = \frac{1}{20} t$$

ملاحظة

$$\ln \frac{27}{20} = \frac{1}{20} t \rightarrow t = 20 \ln \frac{27}{20} \approx 6$$

التدرب على حل المسائل

حدد إذا كان الحد الثاني المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يلي

1) $y = \sqrt{x}$; $xy' - y = 0$

2) $y = x \ln x - 5x + 7$; $y'' = \frac{1}{x} = 0$

3) $y = \tan x$; $y' + y^2 = 1$

4) $y = e^x + 3xe^x$; $y'' - 2y' + y = 0$

الحل :-

(1) جرب الحد الثاني
 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $\sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - \sqrt{x} \stackrel{?}{=} 0$ عوض
 $\frac{1}{2} \sqrt{x} - \sqrt{x} \stackrel{?}{=} 0$
 $-\frac{1}{2} \sqrt{x} \neq 0$ X ليس حلاً

(2) جرب الحد الثاني
 $y' = (x) \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x - 5$

$y' = \ln x - 4$

$y'' = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \stackrel{?}{=} 0$ عوض

$0 = 0$ ✓ يقبل حلاً

(3) جرب الحد الثاني
 $y' = \sec^2 x$

$\sec^2 x + \tan^2 x \stackrel{?}{=} 1$ عوض

$1 + \tan^2 x + \tan^2 x \stackrel{?}{=} 1$

$2 \tan^2 x + 1 \neq 1$ X ليس حلاً

راقب صياغة

$$y' = e^x + 3xe^x + 3e^x = 4e^x + 3xe^x \quad \text{في 14} \quad \text{نقطة}$$

$$y'' = 4e^x + 3xe^x + 3e^x = 7e^x + 3xe^x$$

$$7e^x + 3xe^x - 8e^x - 6xe^x + e^x + 3xe^x \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{نقطة}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

مطلوب

كل من (مطلوب) و (مطلوب) =

$$5) \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$$

$$6) \frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$$

$$7) \frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$$

$$8) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$9) \frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$$

$$10) e^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{dx} = x^{-2}y^2$$

$$11) \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$$

$$12) \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3+2}$$

$$13) \frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$$

$$14) \frac{dy}{dx} = 2x^3(y^2-1)$$

$$15) y \frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x$$

$$16) \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

$$17) \frac{dy}{dx} = y \ln \sqrt{x}$$

$$18) (2x+1)(x+2) \frac{dy}{dx} = -3(y-2)$$

$$5) dy = 3x\sqrt{y} dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int 3x dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3x^2}{2} + C$$

انقضاء

تأدي
نقطة
تأدي
نقطة

$$6) \frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2}$$

$$y^2 dy = -3x dx$$

$$\int y^2 dy = \int -3x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{3x^2}{2} + C$$

الحل:

تأدي

تأدي

$$y' = e^x + 3xe^x + 3e^x = 4e^x + 3xe^x \quad \text{في الطرف الايمن 14}$$

$$y'' = 4e^x + 3xe^x + 3e^x = 7e^x + 3xe^x$$

$$7e^x + 3xe^x - 8e^x - 6xe^x + e^x + 3xe^x \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{نقوض}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

بمثل هذا

الحل الثاني هو (المعادلة 5) في

$$5) \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$$

$$6) \frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$$

$$7) \frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$$

$$8) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$9) \frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$$

$$10) e^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{dx} = x^{-2} y^2$$

$$11) \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$$

$$12) \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3 + 2}$$

$$13) \frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$$

$$14) \frac{dy}{dx} = 2x^3(y^2-1)$$

$$15) y \frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x$$

$$16) \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

$$17) \frac{dy}{dx} = y \ln \sqrt{x}$$

$$18) (2x+1)(x+2) \frac{dy}{dx} = -3(y-2)$$

$$5) dy = 3x\sqrt{y} dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int 3x dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3x^2}{2} + C$$

انقضاء

نقسم كلا الطرفين بـ $\sqrt{y}$

الحل الثاني

$$6) \frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2}$$

$$y^2 dy = -3x dx$$

$$\int y^2 dy = \int -3x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{3x^2}{2} + C$$

الحل

نقسم كلا الطرفين بـ y^2

الحل

$$7) dy = \cos x \sin y dx$$

سین ی ولس فاع

$$\frac{dy}{\sin y} = \cos x dx$$

جاء

$$= \int \csc y dy = \int \cos x dx$$

جاء

$$= -\ln|\csc y + \cot y| = \sin x + C$$

$$\int \csc y \times \frac{\csc y + \cot y}{\csc y + \cot y} dy$$

$$\int \frac{\csc^2 y + \csc y \cot y}{\csc y + \cot y} dy$$

$$= \int \frac{(\csc^2 y + \csc y \cot y) dy}{\csc y + \cot y} = -\ln|\csc y + \cot y|$$

$$8) dy = \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx, \text{ جاء}$$

$$\int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{u^2} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{-2} du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{2u} = \frac{-1}{2(x^2+1)}$$

$$y = \frac{-1}{2(x^2+1)} + C$$

$$9) dy = x e^{x+y} dx$$

بما دى / فاع فاع الـ

$$dy = x e^x e^y dx$$

فاع ولس فاع

$$\frac{dy}{e^y} = x e^x dx$$

جاء

$$\int e^{-y} dy = \int x e^x dx$$

$$\int x e^x dx, \text{ جاء}$$

$$-e^{-y} = x e^x - e^x + C$$

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

أنت صابو

$$10) e^{-\frac{1}{x}} dy = x^{-2} y^2 dx$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}} dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$\frac{1}{y} = e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$y^2 e^{-\frac{1}{x}} \text{ نستخدم}$$

جاء الحل

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \rightarrow \text{لنضع}$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$dx = -x^2 du$$

$$\int -e^u du = -e^u + C$$

$$11) (x-3) dy = xy dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-3} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x-3} dx$$

$$\ln|y| = x + 3 \ln|x-3| + C$$

$$(x-3)y \text{ نستخدم}$$

$$\int \frac{x}{x-3} dx \text{ جاء}$$

$$\frac{x-3}{x-3} = \frac{x}{x-3}$$

$$\int (1 + \frac{3}{x-3}) dx$$

$$x + 3 \ln|x-3|$$

$$12) (x^3+2) dy = 3x^2 \sin^2 y dx$$

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{3x^2}{x^3+2} dx$$

$$\int \csc^2 y dy = \int \frac{3x^2}{x^3+2} dx$$

$$-\cot y = \ln|x^3+2| + C$$

$$(x^3+2) \sin^2 y \text{ نستخدم}$$

جاء

انتهى

$$13) dy = y^3 \ln x dx$$

بداية

$$\frac{dy}{y^3} = \ln x dx$$

اجزاء

نقسم الى

$$\int y^{-3} dy = \int \ln x dx$$

جواب

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x \ln x - x + C$$

$$\frac{-1}{2y^2} = x \ln x - x + C$$

$$14) dy = 2x^3 (y^2 - 1) dx$$

بداية

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = 2x^3 dx$$

نقسم الى

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int 2x^3 dx$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1} \right) dy = \frac{2x^4}{4} + C$$

$$1 = A(y+1) + B(y-1)$$

$$1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ عند } y=1$$

$$1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2} \text{ عند } y=-1$$

$$\frac{1}{2} \ln|y-1| - \frac{1}{2} \ln|y+1| = \frac{1}{2} x^4 + C$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{1}{2} x^4 + C \rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x^4 + C$$

$$15) y dy = \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$\int y dy = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin^3 x u^2 \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int -\sin^2 x u^2 du$$

$$\int -(1 - \cos^2 x) u^2 du$$

$$\int -(1 - u^2) u^2 du$$

$$\int (u^4 - u^2) du$$

$$\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}$$

انتهى

$$16) dy = \sqrt{x} \sqrt{y} dx$$

نقسم بـ $\sqrt{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x} dx$$

نكامل

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$17) dy = y \ln \sqrt{x} dx$$

نقسم بـ y

$$\frac{dy}{y} = \ln \sqrt{x} dx$$

اضرب

نكامل

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x dx$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2} (x \ln x - x) + c \rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + c$$

$$18) (2x+1)(x+2) dy = -3(y-2) dx$$

نقسم بـ $(-3(y-2)(2x+1)(x+2))$

$$\frac{dy}{-3(y-2)} = \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$$

نكامل

$$\int \frac{dy}{-3(y-2)} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(2x+1)$$

$$-\frac{1}{3} \ln |y-2| = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} \right) dx$$

$$1 = \frac{3}{2}A \rightarrow A = \frac{2}{3} \quad x = -\frac{1}{2} \text{ us}$$

$$1 = -3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \quad x = -2 \text{ us}$$

$$-\frac{1}{3} \ln |y-2| = \frac{1}{3} \ln |2x+1| - \frac{1}{3} \ln |x+2| + c$$

$$-\ln |y-2| = \ln \left| \frac{2x+1}{x+2} \right| + c$$

انتهى

جد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات الآتية

19) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sqrt{4-x}$ و $y(1) = 2$

20) $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin^2 x}{y}$ و $y(0) = 1$

21) $\frac{dy}{dx} = 2 \cos^2 x \cos^2 y$ و $y(0) = \frac{\pi}{4}$

22) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x e^{\sin x}}{e^y}$ و $y(\pi) = 0$

23) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}$ و $y(3) = 8$

24) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}$ و $y(e) = 1$

19) $dy = y^2 \sqrt{4-x} dx$

نقسم على y^2

$$\frac{dy}{y^2} = \sqrt{4-x} dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int (4-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{2}{3} (4-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-2}{3} \sqrt{(4-x)^3} + C$$

نجد C عند $x=1$

$$y=2 \text{ عند } x=1$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{-2}{3} \sqrt{27} + C$$

$$-\frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + C \rightarrow C = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-2}{3} \sqrt{(4-x)^3} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

الحل الخاص هو

انتهى

$$20) y dy = 2 \sin^2 x dx$$

الحل:

$$\int y dy = \int 2 \sin^2 x dx$$

$$\int y dy = \int 2 \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$y=1 / x=0 \text{ is}$$

$$\frac{1}{2} = 0 - 0 + C \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}$$

الحل النهائي

$$21) dy = 2 \cos^2 x \cos^2 y dx$$

نقسم على $\cos^2 y$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2 \cos^2 x dx$$

الحل:

$$\int \sec^2 y dy = \int 2 \cos^2 x dx$$

$$\tan y = \int 2 \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right) dx$$

$$\tan y = x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$y = \frac{\pi}{4} / x=0 \text{ is}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 0 + 0 + C \rightarrow C = 1$$

$$\tan y = x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1$$

22)

$$e^y dy = \cos x e^{\sin x} dx$$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx \text{ الحل}$$

$$\int e^y dy = \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$e^y = e^{\sin x} + C$$

$$y=0 / x=\pi \text{ is}$$

$$e^0 = e^{\sin \pi} + C \rightarrow 1 = 1 + C \rightarrow C = 0$$

$$e^y = e^{\sin x}$$

الحل النهائي

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos x e^u \frac{du}{\cos x}$$

$$\int e^u du = e^u$$

$$= e^{\sin x}$$

أقرب صواب

$$23) dy = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} dx$$

$$\int dy = \int \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} dx$$

$$y = \int \left(\frac{5}{3x-8} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$y = \frac{5}{3} \ln|3x-8| + \ln|x-2| + c$$

$$y = 8/x = 3 \text{ } c \text{ is}$$

$$8 = \frac{5}{3} \ln| + \ln| + c \rightarrow c = 8$$

$$y = \frac{5}{3} \ln|3x-8| + \ln|x-2| + 8$$

الكل

$$24) xy dy = dx$$

$$y dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int y dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2} = \ln e + c \rightarrow c = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} dx \text{ جزا}$$

$$\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} = \frac{A}{3x-8} + \frac{B}{x-2}$$

$$8x-18 = A(x-2) + B(3x-8)$$

$$-2 = -2B \rightarrow B = 1 \quad x=2 \text{ is}$$

$$\frac{64}{3} - 18 = \frac{2}{3} A \rightarrow A = 5 \quad x = \frac{8}{3} \text{ is}$$

نقسم x

$$y = 1/x = e \text{ is}$$

انتهى

25) تتحرك سيارة في مسار مستقيم وبسرعة ثابتة بحسب المعادلة التفاضلية

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$$

حيث السرعة الموجبة للـ v بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة لم تكن في الحركة.

الحل :-

$$\frac{dv}{dt} = (10 - \frac{1}{2}v)$$

$$dv = (10 - \frac{1}{2}v) dt \quad \text{نقسم كلا الطرفين بـ } 10 - \frac{1}{2}v$$

$$\int \frac{dv}{10 - \frac{1}{2}v} = \int dt \quad \text{نكامل$$

$$-2 \ln |10 - \frac{1}{2}v| = t + c$$

$$v(0) = 0$$

$$-2 \ln |10| = 0 + c \rightarrow c = -2 \ln |10|$$

$$-2 \ln |10 - \frac{1}{2}v| = t - 2 \ln |10|$$

نقسم كلا الطرفين
بـ -2

$$\ln |10 - \frac{1}{2}v| = -\frac{t}{2} + \ln |10|$$

$$\ln |10 - \frac{1}{2}v| - \ln |10| = -\frac{t}{2}$$

$$\ln \left| \frac{10 - \frac{1}{2}v}{10} \right| = -\frac{t}{2}$$

راقب صابون

26) يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$ حيث N عدد الذئب في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة عليها. حدد عدد الذئب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 300 ذئب.

الحل :-

$$\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N \quad \text{لتبديل}$$

$$\frac{dN}{260 - 0.4N} = dt$$

$$\int \frac{dN}{260 - 0.4N} = \int dt$$

$$\frac{-1}{0.4} \ln |260 - 0.4N| = t + C$$

عند $t=0$
 $N=300$

$$-\frac{5}{2} \ln |260 - 120| = 0 + C \rightarrow C = -\frac{5}{2} \ln 140$$

$$-\frac{5}{2} \ln |260 - 0.4N| = t - \frac{5}{2} \ln 140$$

مفوضاً

$$-\frac{5}{2} \ln |260 - 0.4N| = 3 - \frac{5}{2} \ln 140$$

$t=3$

$$-\ln |260 - 0.4N| = \frac{6}{5} - \ln 140$$

اضرب بـ $\frac{2}{5}$

$$\ln 140 - \ln |260 - 0.4N| = \frac{6}{5}$$

$$\ln \left| \frac{140}{260 - 0.4N} \right| = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{140}{260 - 0.4N} = e^{\frac{6}{5}}$$

$$\frac{140}{e^{\frac{6}{5}}} = 260 - 0.4N$$

$$0.4N = 260 - 140e^{-\frac{6}{5}} \rightarrow N \approx 545$$

راقب صياغة

ناتج كرت، وتغير نصف قطرها بمعدل ثابت فمحصلة المعادلة التفاضلية
 $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتمتر
 t الزمن بالتواحيث بعد بدء انكماش الكرة

(27) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد نصف قطر الكرة بعد t ثانية

كالمّا بأن طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm

(28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10 cm

الحل =

$$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$$

$$\frac{dr}{r^2} = -0.0075 dt$$

بالتكامل:

(27)

$$\int r^{-2} dr = \int -0.0075 dt$$

$$\frac{r^{-1}}{-1} = -0.0075t + C$$

$$\frac{1}{r} = 0.0075t + C$$

$$r=20/t=0$$

$$\frac{1}{20} = 0 + C \rightarrow C = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{r} = 0.0075t + \frac{1}{20}$$

الحل الخاص

$$r = \frac{1}{0.0075t + \frac{1}{20}}$$

$$10 = \frac{1}{0.0075t + \frac{1}{20}}$$

$$r=10 \text{ عوضا } (28)$$

$$0.0075t + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \rightarrow 0.0075t = \frac{1}{20}$$

$$t = \frac{\frac{1}{20}}{0.0075} \approx 6.67$$

راقب صياغة

تغير عدد الحشرات في مجتمع الحشرات بمعدل يمكن تمثيله

بالمعادلة التفاضلية $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ حيث n عدد الحشرات

و t الزمن بالأسابيع بعد بدء ملاحظة الحشرات

(29) أوجد (معادلة التفاضلية) لاجتداد عدد الحشرات في هذا المجتمع

بعد t أسبوعاً، علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة

(30) جد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع

الحل :-

$$\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t) \quad (29)$$

$$\frac{dn}{n} = 0.2(0.2 - \cos t) dt \quad \text{تكامل}$$

$$\int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t) dt$$

$$\ln |n| = 0.2(0.2t - \sin t) + C \quad n=400/t=0$$

$$\ln 400 = C$$

$$\ln |n| = 0.2(0.2t - \sin t) + \ln 400$$

$$\ln(n) - \ln 400 = 0.2(0.2t - \sin t)$$

$$\ln\left(\frac{n}{400}\right) = 0.2(0.2t - \sin t) \quad e \text{ طرف } t$$

$$\frac{n}{400} = e^{0.2(0.2t - \sin t)} \rightarrow n = 400 e^{0.2(0.2t - \sin t)}$$

$$n = 400 e^{0.2(0.2(3) - \sin 3)}$$

$$t=3 \text{ ms } (30)$$

$$n \approx 439$$

راقب صياحي

(31) تحل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y \cos x$ من أجل x و y بحيث
علاقة ما. جد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (0,1)
الكل:

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x$$

$$\frac{dy}{y} = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx$$

$$\ln|y| = \sin x + C$$

$$\ln 1 = \sin 0 + C$$

$$0 = 0 + C \rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\ln|y| = \sin x \rightarrow |y| = e^{\sin x} \rightarrow y = e^{\sin x} \text{ or } y = -e^{\sin x}$$

مرفوعة
يسرى (0,1)

$$y=1/x=0$$

(32) تحل المعادلة التفاضلية $x(x+1)\frac{dy}{dx} = y$ من أجل x و y بحيث
علاقة ما. جد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (3,1)

يسرى بالنقطة (3,1)

$$x(x+1)\frac{dy}{dx} = y$$

$$x(x+1)dy = y dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} \right) dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$\ln 3 = 0 - \ln 2 + C \rightarrow C = \ln 6$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln 6 = \ln \left| \frac{6x}{x+1} \right|$$

$$|y| = \left| \frac{6x}{x+1} \right|$$

$$y = \frac{6x}{x+1}$$

أقرب صيغة

نقم على $x(x+1)y$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x)$$

$$1 = A \quad x=0 \text{ يسرى}$$

$$B = -1 \quad x = -1$$

مهارات التفكير العليا

حل كلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(33) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$$

$$(34) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$$

$$(35) \frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^2} + y - xy$$

نقوم بالتجزئة

(33)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} (x-1) + y(1-x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-1) \left(\frac{1}{y^2} - y \right)$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{y^2} - y} = (x-1) dx$$

$$\frac{1}{y^2} - y = \frac{1-y^3}{y^2}$$

$$\int \frac{y^2}{1-y^3} dy = \int (x-1) dx$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{-3y^2}{1-y^3} dy = \int (x-1) dx$$

$$-\frac{1}{3} \ln |1-y^3| = \frac{x^2}{2} - x + C$$

راقب صياغة

$$(34) \frac{dy}{dx} = x \left(\frac{1}{2y-1} - \frac{2}{3y-2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \left(\frac{3y-2-4y+2}{6y^2-4y-3y+2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \left(\frac{-y}{6y^2-7y+2} \right)$$

$$dy = x \left(\frac{-y}{6y^2-7y+2} \right) dx \quad \frac{6y^2-7y+2}{-y} > \text{impl}$$

$$\int \frac{6y^2-7y+2}{-y} dy = \int x dx$$

$$\int (-6y + 7 - \frac{2}{y}) dy = \int x dx$$

$$-3y^2 + 7y - 2 \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(35) \frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \tan^2 y (1 + \tan^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \tan^2 y \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x (1 + \tan^2 y) = \sec^2 x \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{\sec^2 y} = \sec^2 x dx$$

$$\int \frac{dy}{\sec^2 y} = \int \sec^2 x dx$$

$$\int \cos^2 y dy = \int \sec^2 x dx$$

$$\int \frac{1}{2} (1 + \cos 2y) dy = \int \sec^2 x dx$$

$$\frac{1}{2} (y + \frac{1}{2} \sin 2y) = \tan x + C$$

انقضاء

يمكن نمذجة معدل تحلل مادة معينة بالمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ حيث x كمية المتبقية من المادة الشئ بالمليغرام بعد t يوماً و $\lambda > 0$

(36) أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة $x = ae^{-\lambda t}$ حيث a ثابت

(37) إذا كان عمر النصف للمادة الفرم هو الوقت اللازم لتحلل نصف هذه المادة، و a كمية المادة الابتدائية، فاثبت أن عمر النصف للمادة الفرم هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$ الحل :-

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

$$\frac{dx}{x} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\lambda dt$$

$$\ln|x| = -\lambda t + c$$

حيث x غير الصفر

$$\ln x = -\lambda t + c$$

$$x = e^{-\lambda t + c} = e^{-\lambda t} e^c$$

$$x = ae^{-\lambda t}$$

حيث $a = e^c$ ثابت

$$x(0) = a \quad (37)$$

الكمية الابتدائية

$$x = ae^{-\lambda t}$$

$$\frac{1}{2}a = ae^{-\lambda t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda t \rightarrow -\ln 2 = -\lambda t \rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

المطلوب هو أن نثبت أن $x = \frac{1}{2}a$ تكون عند $t = \frac{\ln 2}{\lambda}$

انتهت هنا

تمثل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y}$ ميل (المماس) لمنحنى علاقة ما
 (38) مع قيمة n التي تجعل العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ مماساً للمعادلة التفاضلية
 المعطاة، حيث a ثابت اختياري

(39) حدد إحداثيات نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع محور x إذا كانت
 أن منحنىها مماساً للنقطة (5, 4)

الحل:

(38) $2x + 2ny \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{ny}$ (38) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y}$

نقوم:

$$\frac{-x}{ny} = \frac{-2x}{3y}$$

$$-2x \cdot ny = -3xy$$

$$n = \frac{-3xy}{-2xy} = \frac{3}{2}$$

(39) العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ مماساً للنقطة (5, 4)

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = a$$

$$25 + \frac{3}{2}(16) = a$$

$$a = 49$$

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 49$$

والمس على $y=0$ العلاقة

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

على $y=0$

والمس على نقاط تقاطع العلاقة مع محور x هو (7, 0), (-7, 0)

انتهى

كتاب التمارين

حل كلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية

$$1) \frac{dy}{dx} = 3x^2 y$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$$

$$3) \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$4) \frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$$

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y}$$

$$6) \frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$$

$$1) \frac{dy}{dx} = 3x^2 y$$

الحل =

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx$$

$$\ln|y| = x^3 + c$$

$$2) x dy = (y^2 - 4) dx$$

نقسم كل

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{y-2} + \frac{-1}{4} \frac{1}{y+2} \right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4} \ln|y-2| - \frac{1}{4} \ln|y+2| = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = \ln|x| + c$$

انتهى

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4} \quad L.S =$$

$$\frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$$

$$1 = A(y+2) + B(y-2)$$

$$1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4} \text{ عند } y=2$$

$$1 = -4B \rightarrow B = -\frac{1}{4} \text{ عند } y=-2$$

$$3) \frac{dy}{dx} = e^x e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C$$

$$4) \frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$$

$$y e^{x^2} dy = x \sec y dx$$

$$\sec y e^{x^2} \text{ نَقَمْ } wls$$

$$\frac{y dy}{\sec y} = \frac{x}{e^{x^2}} dx$$

$$\int y \cos y dy = \int x e^{-x^2} dx$$

$$y \sin y + \cos y = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int y \cos y dy \text{ بالترتيب}$$

$$u = y \quad dv = \cos y dy$$

$$du = dy \quad v = \sin y$$

$$\int y \cos y dy = y \sin y - \int \sin y dy$$

$$= y \sin y + \cos y$$

$$\int x e^{-x^2} dx \text{ بالترتيب}$$

$$u = -x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int x e^u \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^u du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

أقمت ضاوي

$$5) \frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y}$$

$$y dy = (y-3) dx$$

$$\frac{y}{y-3} dy = dx$$

$$\int \frac{y}{y-3} dy = \int dx$$

$$\int \left(1 + \frac{3}{y-3}\right) dy = \int dx$$

$$y + 3 \ln|y-3| = x + C$$

قسمة

$$\begin{array}{r} 1 \\ y-3 \overline{) y} \\ \underline{-(y-3)} \\ 3 \end{array}$$

$$6) y^2 dy = x \ln x dx$$

$$\int y^2 dy = \int x \ln x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

اجزاء

$$u = \ln x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

جد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأول المعطى معادلة تفاضلية

$$7) \frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x \text{ و } y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad 8) \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} \text{ و } y(1) = 2$$

$$9) \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} \text{ و } y(0) = 0$$

$$10) \frac{dy}{dx} = x e^{y-x^2} \text{ و } y(1) = 0$$

$$11) \frac{dy}{dx} = x e^{-y} \text{ و } y(4) = \ln 2$$

$$12) \frac{dy}{dx} = (3x+4)y^2 \text{ و } y(2) = 0.1$$

انتهى

$$7) \frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x$$

$$dy = -30 \cos 4x \sin 4x dx$$

$$\int dy = \int -30 \cos 4x \sin 4x dx$$

$$\int dy = \int -30 \left(\frac{1}{2} \sin 8x \right) dx$$

$$y = \frac{15}{8} \cos 8x + C$$

$$y = 0 / x = \frac{\pi}{8} \text{ then } C \text{ is}$$

$$0 = \frac{15}{8} \cos \pi + C$$

$$C = \frac{15}{8}$$

$$y = \frac{15}{8} \cos 8x + \frac{15}{8}$$

الاجابة

8)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^2 dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2\sqrt{2} = 0 + C$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{2}$$

$$C = 2\sqrt{2} \text{ when } x=0$$

الاجابة

9)

$$\frac{dy}{dx} = x e^{y-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x e^y}{e^{x^2}}$$

$$e^{x^2} dy = x e^y dx$$

$$\frac{dy}{e^y} = x e^{-x^2} dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int x e^{-x^2} dx$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$x=1/y=0 \text{ then } C \text{ is}$$

$$-1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + C$$

$$C = -1 + \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} - 1 + \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2} e^{-x^2} + 1 - \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$\begin{aligned} u &= -x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ dx &= \frac{du}{-2x} \\ \int x e^u \frac{du}{-2x} \\ &= \int -\frac{1}{2} e^u du \end{aligned}$$

الاجابة

$$9) \frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y}$$

$$\cos y dy = 4\sqrt{x} dx$$

$$\int \cos y dy = \int 4x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\sin y = \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + C \quad \text{--- } x=0/y=0 \text{ since } C \text{ is}$$

$$\sin 0 = \frac{8}{3} \sqrt{0} + C \rightarrow C = 0$$

$$\sin y = \frac{8}{3} \sqrt{x^3} = \frac{8}{3} x \sqrt{x}$$

$$11) \frac{dy}{dx} = x e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = x dx$$

$$e^y dy = x dx$$

$$\int e^y dy = \int x dx$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$x=4, y=\ln 2 \text{ since } C \text{ is}$$

$$e^{\ln 2} = 8 + C \rightarrow 2 = 8 + C \rightarrow C = -6$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} - 6$$

الحل النهائي

$$12) \frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = (3x^2 + 4) dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int (3x^2 + 4) dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^3 + 4x + C$$

$$\frac{1}{0.1} = 8 + 8 + C$$

$$10 = 16 + C \rightarrow C = -6$$

$$x=2, y=0.1 \text{ since } C \text{ is}$$

$$-\frac{1}{y} = x^3 + 4x - 6 \quad \text{الحل النهائي}$$

راقب صياغة

تغير الخلايا الكثرية في مجتمع كثرية بمعدل يمكن نمذجته

بالمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} y^{0.8}$ حيث y عدد الخلايا

و t الزمن باليام

(13) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايا الكثرية في هذا المجتمع

بعد t يوماً، علماً بأنه عندما $t=0$ هو 100000 خلية

(14) حدد عدد الخلايا الكثرية في هذا المجتمع بعد 7 سنوات.

(13)

الحل :-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} y^{0.8}$$

$$\frac{dy}{y^{0.8}} = \frac{1}{2} dt$$

$$\int y^{-0.8} dy = \int \frac{1}{2} dt$$

$$\frac{y^{0.2}}{0.2} = \frac{1}{2} t + C$$

حيث C عند $y = 100000 / t = 0$

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2} t + C$$

$$5\sqrt[5]{100000} = 0 + C \rightarrow C = 50$$

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2} t + 50$$

الحل الثاني

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{7}{2} + 50$$

(14) عوض $t = 7$

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{107}{2} \rightarrow \sqrt[5]{y} = \frac{107}{10} = 10.7$$

$$y = (10.7)^5 \approx 140255$$

انقضاء صابون

(15) تتحرك سيارة في ما، مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة/تفاضلها

في التوقيت t ، فإن السرعة v هي $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}$ ، $t \geq 0$

كل ثانية، حد السرعة المتجهة للبارج بعد 6 ثواني من بدء حركتها

20 m/s $\rightarrow$ $\frac{20 \times 1000}{3600} = 5.56$ m/s

الحل :-

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-v^2}{100}$$

$$\frac{dv}{-v^2} = \frac{1}{100} dt$$

$$\int -v^{-2} dv = \int \frac{1}{100} dt$$

$$\frac{-V^{-1}}{-1} = \frac{1}{100} t + c$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{100} \cdot 6 \cdot C$$

$$\frac{1}{20} = 0 + C \rightarrow C = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{100}t + \frac{1}{20} = \frac{t+5}{100} \rightarrow V = \frac{100}{t+5}$$

(16) تم الحل بالحدود = التفاضل $e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2 \sec^2 x$ هو الحل النهائي

د قاسم بن العلافة إذا علمت أن محليها صر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 0)$

الحل:

~~$$e^y \frac{dy}{dx} = 10 + 2 \sec^2 x$$~~

$$e^y dy = (10 + 2 \sec^2 x) dx$$

$$\int e^y dy = \int (10 + 2 \sec^2 x) dx$$

$$e^y = 10x + 2 \tan x + C$$

$x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ also C is

$$e^0 = \frac{5\pi}{2} + 2 + c$$

$$1 = \frac{5\pi}{2} + 2 + C \rightarrow C = -1 - \frac{5\pi}{2}$$

اقتضای

$$e^y = 10x + 2\tan x - 1 - \frac{5\pi}{2}$$

(17) تمحل (معادلة التفاضل) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ من (6.4) v-

طريقة حلها: جد قابض $\phi(x)$ انما $\phi(x) = \frac{1}{x}$ انما

يسمى بالنقطة (6.4)

الحل:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c$$

حيث c ثابت

$$y=4 / x=6$$

$$\ln 4 = -\ln 6 + c$$

$$\ln 4 + \ln 6 = c$$

$$c = \ln 24$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln 24$$

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln 24$$

$$\ln|xy| = \ln 24$$

$$|xy| = e^{\ln 24}$$

$$|xy| = 24 \rightarrow xy = 24 / xy = -24$$

$$y = \frac{24}{x} / y = -\frac{24}{x}$$

النقطة
(6,4)

قاسم/مقسوم

$$y = \frac{24}{x}$$

الوقت صافي

التكامل

الفرع العلمي

اختبار نهاية الوحدة



رافت صافي 0785824464

مدرسة سمر الثانوية للهنين

النكامل

اختبار منهايك الوصحة

اختر رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :-

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ **d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$**

① متعة $\int_0^2 e^{2x} dx$

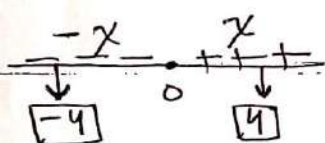
الحل :-

$$\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0$$

$$= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2}$$

a) 0 b) 4
c) 16 d) 8

② متعة $\int_{-4}^4 (4 - |x|) dx$



الحل :-

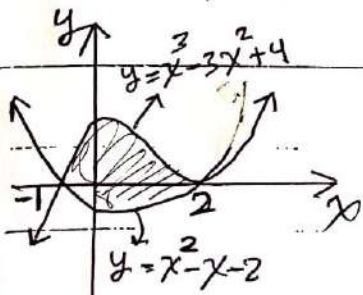
$$\int_{-4}^0 (4 + x) dx + \int_0^4 (4 - x) dx$$

$$\left(4x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-4}^0 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4$$

$$0 - (-16 + 8) + (16 - 8) = 8 + 8 = 16$$

③ يسر الشكل الآتي المنطقة المصورة بين منحنيي الفترة ابي

$y = x^3 - 3x^2 + 4$ و $y = x^2 - x - 2$ على الفترة $[-1, 2]$ لكامال الحدود



الذي تمكن من طريقه إيجاد مساحة المنطقة الظلة

a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx$ b) $\int_{-1}^2 (-x^3 + 4x^2 - x - 6) dx$
 c) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 - x + 2) dx$ d) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$

الحل :-

$$A = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) - (x^2 - x - 2) dx$$

راقبت ضابطي

$$A = \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx$$

①

4 حل معادلة التفاضل $\frac{dy}{dx} = 2xy$ التي تحقق النقطة (1, 0)

a) $y = e^{x^2}$ b) $y = x^2 y$ c) $y = x^2 y + 1$ d) $y = \frac{x^2 y^2}{3}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = 2xy$

$\frac{dy}{y} = 2x dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$

$\ln|y| = x^2 + C$

$\ln|y| = 0 + C \rightarrow C = 0$

$\ln|y| = x^2 \rightarrow |y| = e^{x^2}$

$y = e^{x^2} / y = -e^{x^2}$ (نقطة (0, 1))

بدلاً من ذلك، يمكننا التحقق من الخيارات

5) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

6) $\int (\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}) dx$

7) $\int \csc^2 x (1 + \tan^2 x) dx$

8) $\int \frac{e^{-2x}}{e^{2x} + 5} dx$

9) $\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx$

10) $\int \sec^2(2x - 1) dx$

11) $\int \cot(5x + 1) dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$

13) $\int_0^{\pi} \cos 0.5x dx$

14) $\int_0^2 |x^3 - 1| dx$

انقضاء صابون

$$15) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + \cos 4x) dx$$

$$16) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 + \cos 2x) dx$$

$$17) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \cos 2x dx$$

$$18) \int \frac{4}{x^2 - 4} dx$$

$$19) \int \frac{x+7}{x^2 - x - 6} dx$$

$$20) \int \frac{x-1}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$21) \int \frac{x^2 + 3}{x^3 + x} dx$$

$$22) \int \frac{1}{x^2(1-x)} dx$$

$$23) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x} dx$$

$$24) \int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$$

$$25) \int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x} dx$$

$$26) \int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}} dx$$

$$27) \int \frac{(\ln x)^6}{x} dx$$

$$28) \int (x+1)^2 \sqrt{x-2} dx$$

$$29) \int x \csc^2 x dx$$

$$30) \int (x^2 - 5x) e^x dx$$

$$31) \int x \sin 2x dx$$

$$5) \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C = \text{الـ 31}$$

$$6) \int \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2} - 2 \sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} |\ln |\cos 2x|| + \frac{1}{3} e^{3x} - |\ln |x|| + C$$

أقمت ضاوي

$$\begin{aligned}
 7) \int \csc^2 x \sec^2 x dx &= \int \frac{1}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} = \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2} = \int 4 \csc^2 2x dx \\
 &= -\frac{4}{2} \cot 2x = -2 \cot 2x + C
 \end{aligned}$$

$$8) \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 5) + C$$

$$\begin{aligned}
 9) \int (2x + 11 + \frac{19}{x-2}) dx \\
 = x^2 + 11x + 19 \ln|x-2| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2x+11 \\
 x-2 \overline{) 2x^2+7x-3} \\
 \underline{2x^2-4x} \\
 11x-3 \\
 \underline{11x-22} \\
 19
 \end{array}$$

$$10) \frac{1}{2} \tan(2x-1) + C$$

$$\begin{aligned}
 11) \int \frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} dx &= \int \frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} dx \\
 &= \frac{1}{5} \ln|\sin(5x+1)| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx &= \left. -\frac{1}{4} \cos 2x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \pi + \frac{1}{4} \cos 0 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ما قبل

$$13) \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{1}{2} x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi + 0) - \frac{1}{2} (0 + 0) = \frac{1}{2} \pi$$

$$14) \int_0^1 (1-x^3) dx + \int_1^2 (x^3-1) dx$$

$$\left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2$$

$$\left(1 - \frac{1}{4} \right) - 0 + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{7}{2}$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{c} \boxed{0} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \end{array}$$

$$15) \left(\tan x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(1 + \frac{1}{4} (0) \right) - \left(0 + \frac{1}{4} (0) \right) = 1$$

$$16) \left(-\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} + 0 \right) = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$17) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \sin 4x dx = -\frac{1}{8} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= -\frac{1}{8} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \cos 0$$

$$= 0 + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

راقبت مہاجر

$$18) \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$4 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$4 = 4A \rightarrow A=1 \quad x=2 \text{ is}$$

$$4 = -4B \rightarrow B=-1 \quad x=-2$$

$$19) \int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$$

$$\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$x+7 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$10 = 5A \rightarrow A=2 \quad x=3 \text{ is}$$

$$5 = -5B \rightarrow B=-1 \quad x=-2$$

$$20) \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)}{x^2-2x-8} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-8| + C$$

$$21) \int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)} dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1} \right) dx$$

$$\int \left(\frac{3}{x} - \frac{(-2x)}{x^2+1} \right) dx$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x^2+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x^3}{x^2+1} \right| + C$$

$$\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x^2+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x)$$

$$3 = A \quad x=0 \text{ is}$$

$$4 = 6 + B + C \quad x=1 \text{ is}$$

$$B+C = -2$$

$$4 = 6 - C + B \quad x=-1 \text{ is}$$

$$C=0, B=-2 \text{ كل معادلتان}$$

المسوحة ضوئياً

$$22) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|1-x| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| - \frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$$1 = Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2$$

$$1 = B \quad x=0 \text{ is}$$

$$1 = C \quad x=1$$

$$1 = -2A - B + 4C \quad x=2$$

$$1 = -2A + 1 + 4$$

$$2A = 2 \rightarrow A = 1$$

$$23) u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x}{u^2 - 3u} \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \frac{-1}{u^2 - 3u} du$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{-\frac{1}{3}}{u-3} \right) du$$

$$= \frac{1}{3} \ln|u| - \frac{1}{3} \ln|u-3| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{u-3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos x - 3} \right| + C$$

$$\frac{-1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

$$-1 = A(u-3) + B u$$

$$-1 = -3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \quad u=0 \text{ is}$$

$$-1 = 3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \quad u=3 \text{ is}$$

أقمت هذا

24) $u = \sqrt{x}$

$u^2 = x$

$2u du = dx$

$\int \frac{2u^2}{u^2-4} du$

$= \int (2 + \frac{8}{u^2-4}) du$

$= \int (2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2}) du$

$= 2u + 2 \ln|u-2| - 2 \ln|u+2| + c$

$= 2\sqrt{x} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + c$

$= 2\sqrt{x} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + c$

$$\begin{array}{r} u^2-4 \overline{) 2u^2} \\ \underline{2u^2-8} \\ 8 \end{array}$$

$\frac{8}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$

$8 = A(u+2) + B(u-2)$

$8 = 4A \rightarrow A = 2 \quad u = 2 \text{ is}$

$8 = -4B \rightarrow B = -2 \quad u = -2$

25) $u = 1 + \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \tan x \sqrt{u} du$

$\tan x = u - 1 \text{ is}$

$\int (u-1)u^{\frac{1}{2}} du$

$\int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du$

$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$\frac{2}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$

أحمد

$$26) u = \sqrt[3]{4-3x}$$

$$u^3 = 4-3x$$

$$3u^2 du = -3 dx \rightarrow dx = -u^2 du$$

$$\int \frac{4-u^3}{u} \cdot -u^2 du = \int \frac{-4u+u^4}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \left(-2u^2 + \frac{u^5}{5} \right) = -\frac{2}{3} u^2 + \frac{1}{15} u^5 + C$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt[3]{(4-3x)^2} + \frac{1}{15} \sqrt[3]{(4-3x)^5} + C$$

$$u^3 = 4-3x$$

$$x = \frac{4-u^3}{3}$$

كل ارضاً بالجزء
والجواب

$$27) u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{u^6}{x} x du = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} = \frac{1}{7} (\ln x)^7 + C$$

$$28) u = \sqrt{x-2}$$

$$u^2 = x-2$$

$$2u du = dx$$

$$u^2 = x-2$$

$$x = u^2 + 2$$

$$\int (u^2+3)^2 u (2u du) = \int 2u^2 (u^2+3)^2 du$$

$$= \int 2u^2 (u^4 + 6u^2 + 9) du = \int (2u^6 + 12u^4 + 18u^2) du$$

$$= \frac{2u^7}{7} + \frac{12u^5}{5} + 6u^3 + C$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{(x-2)^7} + \frac{12}{5} \sqrt{(x-2)^5} + 6 \sqrt{(x-2)^3} + C$$

انقضاء

29) $u = x$ $dv = \csc^2 x dx$

$du = dx$ $v = -\cot x$

$$\begin{aligned} \int x \csc^2 x dx &= -x \cot x + \int \cot x dx \\ &= -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -x \cot x + \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

30)

$x^2 - 5x$	+	e^x
$2x - 5$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

الجدول

$$\int (x^2 - 5x) e^x dx = (x^2 - 5x) e^x - (2x - 5) e^x + 2e^x + C$$

x	+	$\sin 2x$
1	-	$-\frac{1}{2} \cos 2x$
0	+	$-\frac{1}{4} \sin 2x$

الجدول

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

وقت ضاوي

$$32) \int_0^1 t 3^t dt$$

جد سوال کے لیے جواب لکھو

$$33) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x dx$$

$$34) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}} dx$$

$$35) \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} dx$$

$$36) \int_1^2 \frac{32x^2 + 4}{16x^2 - 1} dx$$

$$37) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x \ln 2x dx$$

الکل :-

$$32) u = t^2$$

$u=0$ when $t=0$ is
 $u=1$ when $t=1$

$$\frac{du}{dt} = 2t \rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$\int_0^1 t 3^t \frac{du}{2t} = \frac{1}{2} \int_0^1 3^u du = \frac{1}{2} \left(\frac{3^u}{\ln 3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$$

$$33) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x (\cot^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x (\csc^2 x - 1) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 u \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} - \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{u^2}{2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - (\ln |\sin \frac{\pi}{3}| - \ln |\sin \frac{\pi}{4}|)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - (\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{3} - \left(\ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \ln \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

ان کا جواب لکھو

$u = \cot x$
 $\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$
 $dx = \frac{du}{-\csc^2 u}$
 $x = \frac{\pi}{4}$ is
 $u = 1$
 $x = \frac{\pi}{3}$ is
 $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$34) u = 4 + 3 \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \cos x$$

$$dx = \frac{du}{3 \cos x}$$

$$\int_4^4 \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \frac{du}{3 \cos x} = \frac{1}{4} \int_4^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 0$$

مساوي صفر
لأنه

$$u = 4 + 0 = 4 \text{ إذا } x = \pi \text{ is}$$

$$u = 4 + 0 = 4 \text{ إذا } x = -\pi$$

$$35) \int_{-1}^0 \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{x+2} dx$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2 \overline{) -x} \\ \underline{-x-2} \\ -2 \end{array}$$

$$= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = \left(x - 2 \ln|x+2|\right) \Big|_{-1}^0$$

$$= (0 - 2 \ln 2) - (-1 - 2 \ln 1) = -2 \ln 2 + 1 = 1 - 2 \ln 2$$

$$36) \int_1^2 \left(2 + \frac{6}{16x^2 - 1}\right) dx$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 16x^2 - 1 \overline{) 32x^2 + 4} \\ \underline{-32x^2 - 2} \\ 6 \end{array}$$

$$= \int_1^2 \left(2 + \frac{3}{4x-1} + \frac{-3}{4x+1}\right) dx$$

$$\left(2x + \frac{3}{4} \ln|4x-1| - \frac{3}{4} \ln|4x+1|\right) \Big|_1^2$$

$$(4 + \frac{3}{4} \ln 7 - \frac{3}{4} \ln 9) - (2 + \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{3}{4} \ln 5)$$

$$2 + \frac{3}{4} \ln \frac{7}{9} - \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{3}{4} \ln 5$$

$$2 + \frac{3}{4} \left(\ln \left(\frac{7}{9} \right) (5) \right)$$

$$= 2 + \frac{3}{4} \ln \frac{35}{27}$$

$$\frac{6}{16x^2 - 1} = \frac{6}{(4x-1)(4x+1)}$$

$$\frac{6}{(4x-1)(4x+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+1}$$

$$6 = A(4x+1) + B(4x-1)$$

$$6 = 2A \rightarrow A = 3 \quad x = \frac{1}{4} \text{ is}$$

$$6 = -2B \rightarrow B = -3 \quad x = -\frac{1}{4}$$

انتهى

$$37) \quad u = \ln 2x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x \ln 2x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2} x dx$$

$$= \left(\frac{e^2}{8} \ln e - \frac{1}{8} \ln 1 \right) - \left(\frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= \frac{e^2}{8} - 0 - \left(\frac{1}{4} \frac{e^2}{4} - \frac{1}{16} \right)$$

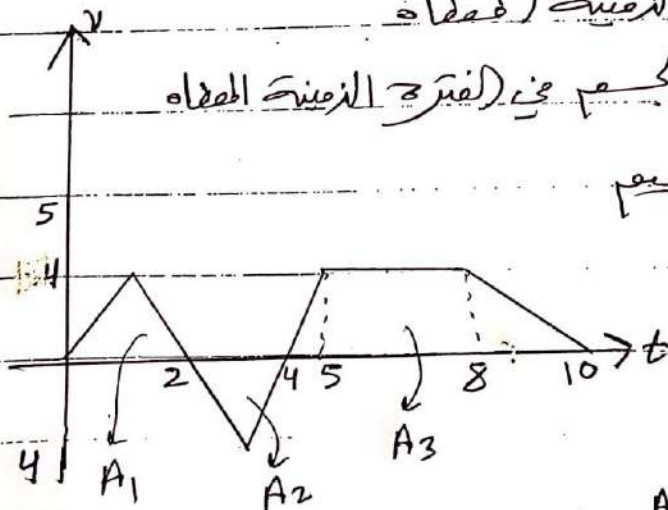
$$= \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} (e^2 + 1)$$

سيتناول الشكل التالي منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسم يتحرك على محور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$ إذا بدأ الجسم الحركة من $x=0$ عندما $t=0$ فأوجد عند $t=10$ سرعة الجسم $v(10)$

(38) حد الزاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاه

(39) حد المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاه

(40) حد (موقع) الجسم للجسم



المثلث من 0 إلى 2

$$A_1 = \frac{1}{2} (2)(4) = 4 \quad \text{مساحة مثلث}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (2)(4) = 4 \quad \text{مساحة مثلث}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (6+3)(4) = 18 \quad \text{مساحة شبه منحرف}$$

إجمالي المساحة

$$38) S(10) - S(0) = \int_0^{10} v(t) dt =$$

$$= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt + \int_4^{10} v(t) dt$$

$$= 4 - 4 + 18 = 18 \text{ m}$$

$$39) \int_0^{10} |v(t)| dt = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 4 + 18 = 26 \text{ m}$$

$$40) S(10) - S(0) = \int_0^{10} v(t) dt$$

$$S(10) - 0 = 18 \rightarrow S(10) = 18 \text{ m}$$

41) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإحداثيات

$$g(x) = x^2, f(x) = \sqrt{x}$$

$$g = f$$

الحل:

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x=0$$

$$x=1$$

$$f > g$$

0

1

$$A = \int_0^1 (f - g) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{3}$$

انتهت هنا

42) حد (و) لـ $f(x) = x^3$ و $g(x) = x$ منحنيتي الاقتران

$$g(x) = x \quad \text{و} \quad f(x) = x^3$$

الحل :-

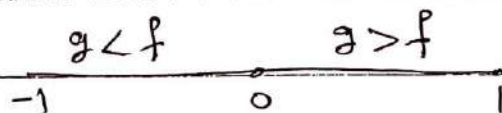
$$f = g$$

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, \pm 1$$



$$A = \int_{-1}^0 (g - f) dx + \int_0^1 (g - f) dx$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

43) حد (و) لـ $f(x) = -x$ و $g(x) = x^2 + 2$ منحنيتي الاقتران

$$x = 2 \quad \text{و} \quad x = -2 \quad \text{نقطتان} \quad g(x) = x^2 + 2 \quad \text{و} \quad f(x) = -x$$

الحل :-

$$f(x) = g(x)$$

$$-x = x^2 + 2$$

منحنيتي الاقتران

$$x^2 + x + 2 \neq 0$$

$$g > f$$

$$A = \int_{-2}^2 (g - f) dx = \int_{-2}^2 (x^2 + 2 + x) dx$$

$$A = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^2$$

$$A = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) = \frac{40}{3}$$

رافقت صبا

$$\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1} dx = 3 + \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{--- (44) ان شاء الله ---}$$

$$\int_2^5 \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\int_2^5 \left(1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right) dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$\left(x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|\right) \Big|_2^5$$

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{عند } x=1$$

$$(5 + \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 6) - (2 + \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 3)$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad \text{عند } x=-1$$

$$5 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 2 + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$3 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 = 3 + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right) = 3 + \frac{1}{2} \ln 2$$

نكره جسم في حماره تقسم وبقطع --- عن المصباح الا قتران

$$v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}$$

(45) جد ازا حماره الجسم في الفترة [10, 1] ---
 (46) جد المسافة التي قطعها الجسم في الفترة [10, 1] ---

$$(45) S(10) - S(1) = \int_1^{10} v(t) dt = \int_1^{10} \left(\frac{t}{9} - (t+6)^{-\frac{1}{2}}\right) dt \quad \text{--- (45) الكل ---}$$

$$= \left(\frac{1}{9} \frac{t^2}{2} - 2(t+6)^{\frac{1}{2}}\right) \Big|_1^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{18} t^2 - 2\sqrt{t+6}\right) \Big|_1^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{18}(100) - 2\sqrt{16}\right) - \left(\frac{1}{18} - 2\sqrt{7}\right)$$

$$\boxed{\text{المسافة}} = \left(2\sqrt{7} - \frac{5}{2}\right) \text{ m}$$

$$\frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}} = 0$$

3, 1, 1, 1, 1 (46)

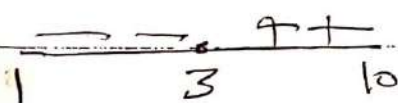
$$\frac{t}{9} = \frac{1}{\sqrt{t+6}}$$

$$\frac{t^2}{81} = \frac{1}{t+6} \rightarrow t^3 + 6t^2 = 81$$

$$t^3 + 6t^2 - 81 = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 9t + 81) = 0$$

$$t = 3$$



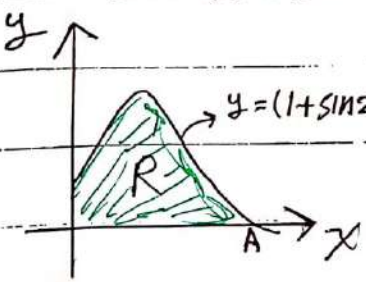
$$A = \int_1^3 |v(t)| dt = -\int_1^3 \left(\frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}\right) dt + \int_3^{10} \left(\frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}\right) dt$$

$$= -\left(\frac{t^2}{18} - 2\sqrt{t+6}\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{t^2}{18} - 2\sqrt{t+6}\right)\Big|_3^{10}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{7}\right) - \left(\frac{1}{18} - 2\sqrt{7}\right) + \left(\frac{100}{18} - 2\sqrt{16}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 6 + \frac{1}{18} + 2\sqrt{7} + \frac{100}{18} - 8 - \frac{1}{2} + 6 = \frac{155}{18} - 2\sqrt{7}$$

$$y = (1 + \sin 2x)^2 \quad \therefore \text{يقبل دالة الجيب (جيب) مضاعفة قدرها 2}$$



$$0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$A = \text{مساحة المنطقة} \quad (47)$$

$$R = \text{مساحة المنطقة} \quad (48)$$

الحل :-

$$A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \text{ هو } A \text{ عند } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{\text{أقمت ضابطين}}$$

$$y = 0 \text{ في } (47)$$

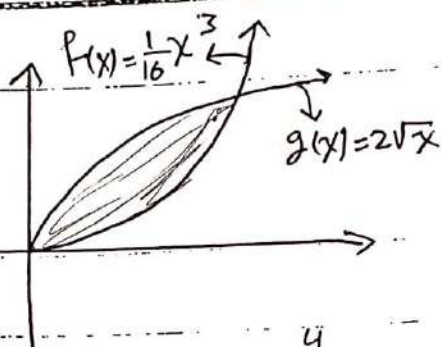
$$[1 + \sin 2x]^2 = 0$$

$$1 + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

(50)



$$A = \int_0^4 (g - f) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{16}x^3 \right) dx$$

$$A = \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}x^3 \right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{64}x^4 \right]_0^4 = \frac{4}{3}(8) - \frac{256}{64} =$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{256}{64} = \frac{20}{3}$$

$$f = g$$

$$\frac{1}{16}x^3 = 2\sqrt{x}$$

$$x^3 = 32\sqrt{x}$$

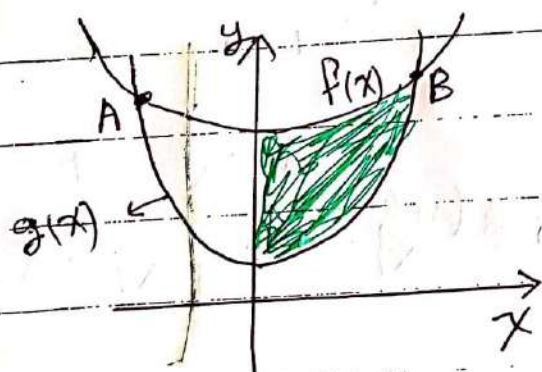
$$x^6 = 1024x$$

$$x^6 - 1024x = 0$$

$$x(x^5 - 1024) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 4$$

يسمى الشكل الناتج من تقاطع المنحنيين $f(x) = x^2 + 14$ و $g(x) = x^4 + 2$



(51) إذا كان منحنيا التقاطع

في النقطة A ونقطة B حداهما

نقطتي التقاطع

(52) حد حجم الجسم الناتج من

دوران المنطقة المظلمة حول المحور x

الحل:

$$f(2) = 18 \quad \text{عند } x=2 \text{ فإن}$$

$$f(-2) = 18 \quad \text{عند } x=-2 \text{ فإن}$$

$$(-2, 18) \quad \text{نقطة A حداهما}$$

$$(2, 18) \quad \text{نقطة B حداهما}$$

ملاحظة

$$f = g$$

$$x^2 + 14 = x^4 + 2$$

$$x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$x = \pm 2$$

(51)

$$(52) \quad V = \pi \int_0^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 ((x^2+14)^2 - (x^4+2)^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 + 28x^2 + 196 - x^8 - 4x^4 - 4) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (-x^8 - 3x^4 + 28x^2 + 192) dx$$

$$V = \pi \left(-\frac{x^9}{9} - \frac{3x^5}{5} + \frac{28x^3}{3} + 192x \right) \Big|_0^2 = \frac{17216\pi}{45}$$

(53) حساب حجم الجسم الناتج من دوران (منطقة المثلث) حول المحور x.

منطقة 4 ممتدة من $x=1$ إلى $x=2$ و $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ و $g(x) = 0$ (المحور x).
حول (المحور x)

$$V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 x e^{-x} dx$$

$$u = x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = -e^{-x}$$

$$\int_1^2 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_1^2 + \int_1^2 e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} \Big|_1^2 - e^{-x} \Big|_1^2$$

$$= -2e^{-2} + e^{-1} - (e^{-2} + e^{-1})$$

$$= -3e^{-2} + 2e^{-1} = \frac{2e-3}{e^2}$$

النتيجة

$$V = \left(\frac{2e-3}{e^2} \right) \pi$$

حل كلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية

$$54) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$$

$$55) \frac{dy}{dx} = x e^x \sec y$$

$$56) 3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$57) x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$$

ج ٢١

$$54) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + c \rightarrow 2\sqrt{y} = \ln|x| + c$$

$$55) \frac{dy}{dx} = x e^x \sec y$$

$$\frac{dy}{\sec y} = x e^x dx$$

$$\int \cos y dy = \int x e^x dx$$

$$\sin y = x e^x - e^x + c$$

$$f(x) = x$$

$$\int x e^x dx$$

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x$$

انقضاء

$$56) \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$3y^2 dy = 8x dx$$

$$\int 3y^2 dy = \int 8x dx$$

$$y^3 = 4x^2 + C$$

$$57) \quad x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \sqrt{y}(3x+4)$$

$$x dy = \sqrt{y}(3x+4) dx$$

نقسم على $x\sqrt{y}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \left(\frac{3x+4}{x} \right) dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int \left(3 + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = 3x + 4 \ln|x| + C$$

حدد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأول في (المسألة) معادلة تفاضلية

$$58) \quad \frac{dy}{dx} + 4y = 8, \quad y(0) = 3$$

$$59) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5e^x}{(2x+1)(x-2)}, \quad y(-3) = 0$$

$$58) \quad \frac{dy}{dx} = (8 - 4y)$$

الحل:

$$\frac{dy}{8-4y} = dx$$

تكامل الطرفين

انتهى

$$\int \frac{dy}{8-4y} = \int dx$$

$$-\frac{1}{4} \ln|8-4y| = x + c$$

بند c حد $x=0/y=3$

$$-\frac{1}{4} \ln 4 = c$$

الكل الخاص

4 عند

$$-\frac{1}{4} \ln|8-4y| = x - \frac{1}{4} \ln 4$$

$$-\ln|8-4y| = 4x - \ln 4 \rightarrow -\ln|4-y| = 4x$$

$$5a) \frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)}$$

$$\frac{dy}{5e^y} = \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$$

$$\frac{1}{5} \int e^{-y} dy = \int \frac{1}{(2x+1)(x-2)} dx$$

$$\frac{1}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$1 = A(x-2) + B(2x+1)$$

$$1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5} \quad x=2 \text{ is}$$

$$1 = \frac{-5}{2} A \rightarrow A = -\frac{2}{5} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{5} e^{-y} = \int \left(-\frac{2}{5} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$-\frac{1}{5} e^{-y} = -\frac{1}{5} \ln|2x+1| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + c$$

بند c حد

$y=0/x=3$

$$-\frac{1}{5} e^0 = -\frac{1}{5} \ln 5 + \frac{1}{5} \ln 5 + c$$

$$c = -\frac{1}{5}$$

الكل الخاص

$$-\frac{1}{5} e^{-y} = -\frac{1}{5} \ln|2x+1| + \frac{1}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{5} e^{-y} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} (\ln|x-2| - \ln|2x+1|)$$

وقت ضايع

$$\frac{1-e^{-y}}{5} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right|$$

$$1-e^{-y} = \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right|$$

تغير عدد السمك في أحواض البحيرات بمعدل يمكن تقديره
بالمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = 0.2x$ حيث x عدد السمك
في أحواض البحيرات في وقت t .

(١٠) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد السمك في البحيرة
بعد t سنة، علماً بأن عدد السمك في سنة ٢٠٠٠ هو ٣٠٠ سمك.
(١١) حل عدد السمك في البحيرة بعد ١٥ سنوات.
الكل.

$$\frac{dy}{dt} = 0.2x$$

$$\frac{dy}{x} = 0.2 dt$$

$$\ln|x| = 0.2t + C$$

في $t=0$ حيث
 $x=300$

$$\ln 300 = C$$

$$\ln x = 0.2t + \ln 300$$

$$x = e^{(0.2t + \ln 300)}$$

$$x = 300e^{0.2t}$$

في $t=5$ حيث x هو

$$x = 300e \approx 815$$

أقمت صباغة

يعمل الآن $P(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج

معين، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج بالآلاف. إذا كان

$$P'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}} \text{ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة}$$

من المنتج، حدد $P(x)$ علماً بأن سعر القطعة الواحدة

هو 75 دينار عندما يكون عدد القطع المبيعة من المنتج 400 قطعة

الحل :-

$$P(x) = \int P'(x) dx = \int \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}} dx$$

$$u = 9 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{u^3}} \cdot \frac{du}{2x} = \int -150 u^{-\frac{3}{2}} du$$

$$P(x) = (-150)(-\frac{2}{2}) u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{u}} + C = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + C$$

$$\begin{aligned} \text{عند } x=4 \\ P=75 \end{aligned}$$

$$75 = \frac{300}{5} + C \rightarrow C = 75 - 60$$
$$C = 15$$

انتهى الحل

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + 15$$