التفاضل

مدرسة سمر الثانوية للبنين

رافت صافي

0785824464

خريطة ذهنية

عدم قابلية الاشتقاق

1) عند الراس الحاد لانه

المشتقة من اليمين لا تساوي

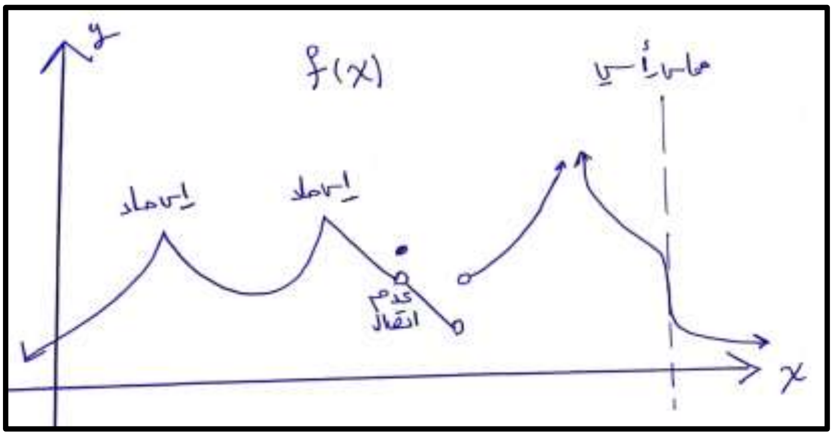
المشتقة من اليسار

2) عند الفجوات والقفزات

لانه غير متصل .

3) عند المماس الراسي

لان الميل غير معرف



قواعد الاشتقاق

1) الاقتران الاسي

$f(x)=e^{x}$ فان $f'(x)=e^{x}$

$f(x)=ce^{x}$ فان $f'(x)=ce^{x}$

$f(x)=\frac{e^{x}}{c}$ فان $f'(x)=\frac{e^{x}}{c}$

الأس

الأس ليس x

$f(x)=e^{g(x)}$ فان $f'(x)=g'(x)\,e^{g(x)}$

مشتقة الأس

الاقتران نفسه

---

2) الاقتران اللوغاريتمي

$f(x)=\ln x$ فان $f'(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\log_a x$ فان $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

داخل اللوغاريتم ليس x

$f(x)=\ln g(x)$ فان $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

$f(x)=\log_a g(x)$ فان $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$

---

3) الاقترانات الدائرية(المثلثية)

$f(x)=\sin x$ فان $f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x$ فان $f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x$ فان $f'(x)=\sec^{2}x$

$f(x)=\sec x$ فان $f'(x)=\sec x\tan x$

$f(x)=\cot x$ فان $f'(x)=-\csc^{2}x$

$f(x)=\csc x$ فان $f'(x)=-\csc x\cot x$

لكن ان كانت الزاوية ليست (x) نشتق اولا الزاوية ثم نشتق الاقتران كاملا مع بقاء الزاوية نفسها.

الزاوية ليست x

الزاوية

$f(x)=\sin g(x) \leftarrow f'(x)=g'(x)\cos g(x)$

مشتقة الزاوية

اشتقاق الاقتران مع بقاء الزاوية نفسها

هكذا الباقي للاقترانات المثلثية

4) قاعدة القسمة

توجد (3) حالات للقسمة

البسط و المقام يحوي x

① $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

بالكلمات : $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

البسط عدد

② $y = \frac{a}{f(x)}$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{-a\,f'(x)}{(f(x))^2}$

بالكلمات : تغيير اشارة العدد ونضربه في مشتقة المقام مقسوم على المقام تربيع

المقام عدد

③ $y = \frac{f(x)}{a}$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{a}$

بالكلمات : اشتق البسط مع بقاء المقام نفسه

---

5) قاعدة الضرب

قاعدة الضرب

$y = f(x)\,g(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

بالكلمات : الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول

$y = a f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = a f'(x)$

بالكلمات : يبقى الرقم كما هو في مشتقة الاقتران

---

6) الاقتران المرفوع لقوة

والجذر غير التربيعي

① $f(x) = (g(x))^n$ فان $f'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x)$

تنزل القوة — الداخل نفسه — مشتقة الداخل

استخدامها :-

* الجذور $y = \sqrt[n]{(g(x))^m}$ تعالج $y = (g(x))^{\frac{m}{n}}$

* $y = \sin^n x$ تعالج $y = (\sin x)^n$ مثلنا لباقي الاقترانات

---

7) الجذر التربيعي

الجذر الزوجي

② $f(x) = \sqrt{g(x)}$ فان $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

بالكلمات :- اشتق ما داخل الجذر مقسوم على الجذر نفسه مضروب في 2

8) مشتقة تركيب اقترانين

③ $y = (f \circ g)(x)$ ، $y = f(g(x))$ ، $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\, g'(x)$

بالكلمات : اشتق الاول وضع داخله الثاني مضروب في مشتقة الثاني

---

9) المشتقة الاولى للمعادلة الوسيطية

① $y = g(t)$ ، $x = h(t)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

اشتق كل من y و x بدلالة t

---

10) المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية

② $y = g(t)$ ، $x = h(t)$ فان $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

نجد $\frac{dy}{dx}$ ثم نشتقها بالنسبة لـ t مقسوم على $\frac{dx}{dt}$

---

11) الاقتران الاسي الذي اساسه ليس e

① $y = a^x$ فان $\frac{dy}{dx} = (\ln a)\, a^x$

لكن ان كان الاس ليس x هنا نشتق الاس اولا

② $y = a^{g(x)}$ فان $\frac{dy}{dx} = (\ln a)(a^{g(x)})\, g'(x)$

لوغاريتم الاساس — الاقتران نفسه — مشتقة الاس

اذا كان الاس ليس x

---

12) مشتقة ضرب (3) اقترانات

$y = \underbrace{fg}_{①}\underbrace{h}_{②}$ فان $\frac{dy}{dx} = \underbrace{fg}_{\text{الاول}}(\underbrace{h'}_{\text{مشتقة الثاني}}) + \underbrace{h}_{\text{الثاني}}[\underbrace{fg' + gf'}_{\text{مشتقة الاول}}]$

بالكلمات : نعتبر أول اقترانان اقتران واحد ونطبق قاعدة الضرب

الاشتقاق اللوغارتمي $(y = f(x))$

1) خد لوغاريتم الطرفين $\ln y = \ln f(x)$

2) طبق خصائص اللوغاريتم (ضرب ، قسمة ، قوة ،) اذا توفرت قبل الاشتقاق

3) اشتق المعادلة حيث عند اشتقاق $\ln y$ نضع $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

4) ضرب طرفي المعادلة بـــ y ثم نستبدلها بـ $f(x)$ المعطى بالسؤال

ملاحظة

يستخدم في حالة وجود مقدار يصعب اشتقاقه بالقوانين . حيث الاشتقاق اللوغاريتمي يسهل الاشتقاق لان قواعد اللوغاريتمات تجعل الضرب جمع والقسمة طرح والاس ينزل

لكن ان كان متغير مرفوع لاس متغير هنا اجباري استخدام الاشتقاق اللوغارتمي .

تذكير بقواعد اللوغاريتمات

$\log_a x = y$ تحول الى اسية $a^y = x$

$\log_a 1 = 0$	$\log xy = \log x + \log y$ قانون الضرب
$\log_a a = 1$	$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ قانون القسمة
$\log_a a^n = n$	$\log x^n = n \log x$ قانون القوة
$a^{\log_a x} = x$	$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

$e^0 = 1$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$e^{\ln x} = x$	$\log$ اذا لم يوجد اساس يكون 10

الاشتقاق الضمني

يستخدم في حالة كانت y ليست موضوع قانون (بمعنى y مرفوعه لقوة او اس او زاوية ----)

1) اشتق كل حد بالنسبة الى x مع الانتباه عند اشتقاق y نقوم بوضع $\frac{dy}{dx}$

2) نفك الضرب والقسمة (ان امكن)

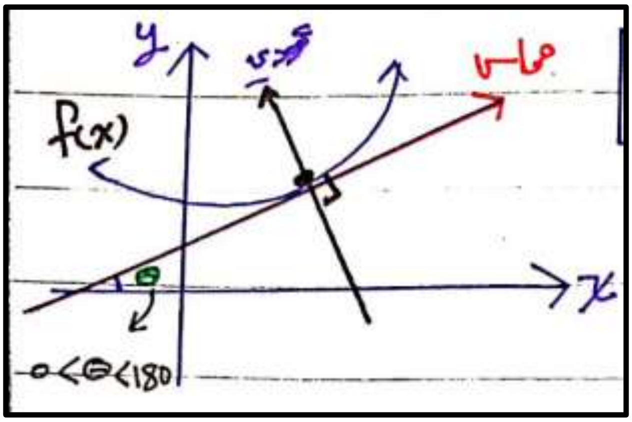
3) نجمع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف والحدود الاخرى في طرف .

4) نخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك ثم نجد $\frac{dy}{dx}$ بقسمة طرفي المعادلة على معاملها .

ملاحظة :- ان اعطى نقطة . يفضل تعويضها مباشرة بعد عملية الاشتقاق . لكن ان اعطى x او y هنا نعوض بالعلاقة الاساسية المعطاه بالسؤال لمعرفة المتغير الاخر .

تطبيقات هندسية

اولا :- **طرق حساب الميل**



1) $m = f^{/}(x)$ (وجود اقتران)

2) $m = \tan\theta$ (وجود زاوية)

3) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (وجود نقطتان)

عند حساب المقطع x ضع $y = 0$ ثم جد قيم x أما عند حساب المقطع y نقوم بوضع $x = 0$ ونجد y

---

معادلة المماس $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

معادلة العمودي $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

ثانيا :- **معلومات عن المماس**

1) **المماس افقي او يوازي محور x هنا $f^{/}(x) = 0$**

2) **المماس يوازي مستقيم هنا $m_1 = m_2$ (ساوي المشتقات)**

3) **المماس يعامد مستقيم هنا $m_1 \times m_2 = -1$ (ضرب المشتقات سالب واحد)**

4) **المماس موازيا محور y هنا نجد المشتقة ثم نضع المقام يساوي صفرا ونجد قيم x**

5) **اعطاء قيمة الميل . هنا ناتي بالمشتقة ونساويها بقيمة الميل ونجد قيم x أو y**

6) **المماس يشكل زاوية مع محور x** هنا $f^{/}(x) = \tan\theta$

ثالثا :- **معلومات عن الاقتران y = f(x) او العلاقة**

1) نقطة التقاطع مع محور x هنا ضع $y = 0$

2) نقطة التقاطع مع محور y هنا ضع $x = 0$

3) تقاطع f (x) مع مستقيم هنا اجعل y موضوع قانون من معادلة المستقيم ثم عوض بدل f(x)

ثم جد قيم x

4) **تقاطع مستقيم مع علاقة . هنا اجعل x أو y موضوع قانون من معادلة المستقيم ثم عوض في العلاقة وحل المعادلة .**

5) **تقاطع f (x) , g(x) هنا ساوي الاقترانين وحل المعادلة .**

ملاحظة :-

كلمة يمس هنا

1) ساوي المشتقات

2) ساوي القواعد

تطبيقات فيزيائيه

1) $v(t) = s'(t)$ (للحصول على السرعه اشتق الموقع)

2) $a(t) = v'(t)$ (للحصول على التسارع اشتق السرعة)

مع الانتباه ان اذا طلب السرعة القياسية هنا ناخد القيمة المطلقة للسرعة .

3) الموقع الابتدائي للجسم عوض بدل $t = 0$ في $s(t)$

4) لمعرفة الجسم يتحرك لليمين او اليسار مع اعطاء الزمن

a) اوجد $v(t)$ وعوض الزمن
b) اذا الناتج (موجب) يتحرك في الاتجاه الموجب . اما الناتج سالب يتحرك في الاتجاه السالب

5) لمعرفة متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي

a) نجد $s(0)$
b) ضع $s(t) = s(0)$ ثم نجد قيم t

6) الجسم في حالة سكون او انعدام السرعة هنا ضع $v(t) = 0$ ونجد قيم t ونعوضها في المطلوب (الموقع او التسارع ....) حسب السؤال .

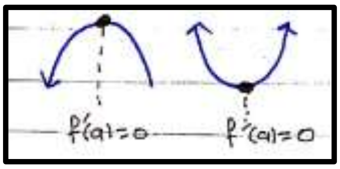
7) انعدام التسارع هنا $a(t) = 0$ ثم نجد قيم t ونعوض في المطلوب حسب السؤال .

مدرسة سمر الثانوية للبنين رافت صافي (0785824464)

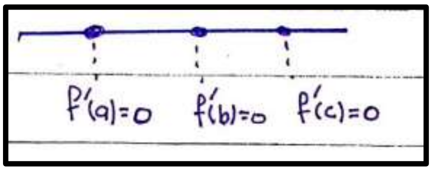
ايجاد المشتقة من الرسم

نقيم عمود من محور x ليلمس منحنى $f(x)$ وعليه

1) **عند القمة والقاع هنا (صفرا)**

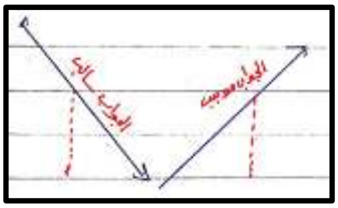


2) عند الاقتران الثابت (صفرا)



3) **خط صاعد أو هابط هنا ناخذ نقطتان ونجد الميل**

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



ملاحظات

تنويه

1) $\sin\theta = 0$

مضاعفات الـ π .... $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

لكن ان كانت الزاوية مضروبة بعدد ← مثلاً $\sin 2x$, $\sin 5x$ ⋮

هنا نقسم كل الزوايا على معامل x

2) $\cos\theta = 0$

مضاعفات الـ $\frac{\pi}{2}$ الفردية $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

2) $e^x \neq 0$

الاقتران الأسي لا يساوي صفراً لأي قيمة لـ x

رافت صافي

$\pi = 180$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad$

$1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi}$

التحويل من
ستيني ودائري

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$180^\circ = \pi$	$135 = \frac{3\pi}{4}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$210 = \frac{7\pi}{6}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$360^\circ = 2\pi$	$300 = \frac{5\pi}{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$120 = \frac{2\pi}{3}$	$150 = \frac{5\pi}{6}$

رافت صابح