الوحدة (5)

توجيهي
علمي

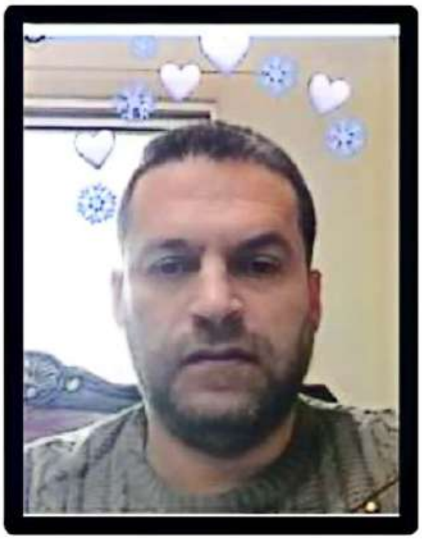
المتجهات

حل جميع اسئلة الوحدة

رافت صافي

0785824464

مدرسة سمر الثانوية

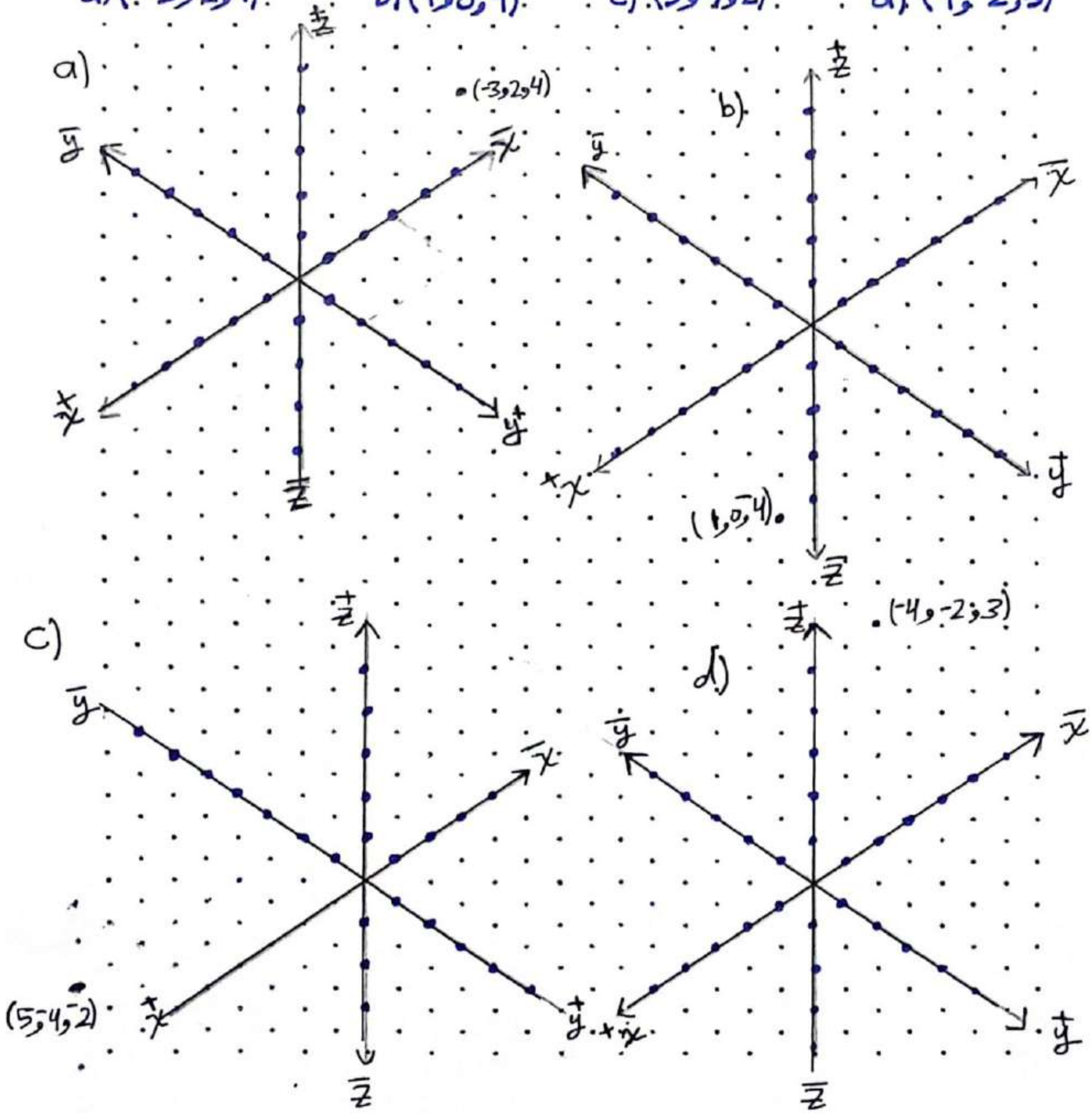


ورقة مُنقّطة متساوية القياس

التحقق من فهمك ص11

عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد

a) (-3, 2, 4).   b) (1, 0, -4).   c) (5, -4, -2).   d) (-4, -2, 3)



التحقق من فهمي : ص 113

اذا كان $M(5,-3,6)$ و $N(2,1,-6)$ فاجد كلاً مما يأتي :-

a) المسافة بين N و M

b) احداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$

الحل :-

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ (2, & 1, & -6) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ (5, & -3, & 6) \end{matrix}$$

a) $MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$MN = \sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2+(6+6)^2}$

$MN = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

b) لتكن K منتصف القطعة المستقيمة $\overline{MN}$

$K = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$K = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, 0\right)$

التحقق من فهمي : ص 114

اذا كان $A(-1,5,3)$ و $B(-5,3,-2)$ اكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الاحداثية ثم جد مقداره.

الحل :-

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ (-1, & 5, & 3) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ (-5, & 3, & -2) \end{matrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle -5+1, 3-5, -2-3 \rangle = \langle -4, -2, -5 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$

تدريب :-

اذا كان $\vec{v} = \langle -4, m, -5 \rangle$ وكان $|\vec{v}| = 3\sqrt{5}$

جد قيمة الثابت m

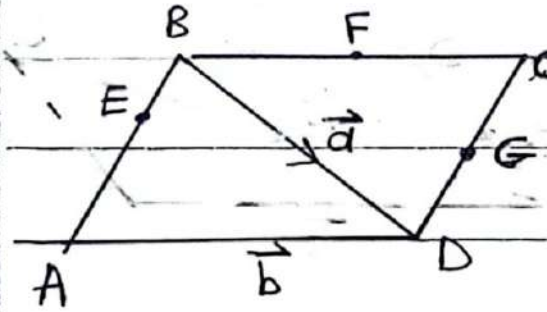
(+2)

راقت صباحي

التحقق من فهمك ص 116

في متوازي الأضلاع ABCD المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف $\overline{BC}$ و G نقطة منتصف $\overline{DC}$ وكانت $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ، وكانت $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ وكانت $AE = 3EB$

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{EB}$ c) $\overrightarrow{EF}$

الحل :-

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$= \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$

b) $AB = AE + EB$

$AB = 3EB + EB = 4EB$

وعليه $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$ قاعدة المثلث

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان ومتوازيان

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (لأن F منتصف BC)

$= \frac{1}{2}\vec{b}$

وعليه :-

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$

رافت صافي

ص 117 التحقق من فهمك

اذا كان $\vec{u}=\langle 4,5,-3\rangle$ و $\vec{v}=\langle 3,0,-5\rangle$ و $\vec{w}=\langle 9,-2,-5\rangle$

جد كلاً مما يأتي:

a) $3\vec{v}-4\vec{u}$ b) $3\vec{u}+5\vec{v}-2\vec{w}$

الحل:

a) $3\vec{v}-4\vec{u}=3\langle 3,0,-5\rangle-4\langle 4,5,-3\rangle$

$=\langle 9,0,-15\rangle-\langle 16,20,-12\rangle$

$=\langle -7,-20,-3\rangle$

b) $3\vec{u}+5\vec{v}-2\vec{w}=3\langle 4,5,-3\rangle+5\langle 3,0,-5\rangle-2\langle 9,-2,-5\rangle$

$=\langle 12,15,-9\rangle+\langle 15,0,-25\rangle-\langle 18,-4,-10\rangle$

$=\langle 9,19,-24\rangle$

ص 117 التحقق من فهمك

اذا كان $\vec{v}=\langle 3g+8,0,3r\rangle$ و $\vec{u}=\langle 20,2p-5,-12\rangle$ وكان $\vec{u}=\vec{v}$

فجد قيمة كل من p و g و r

الحل:

نساوي المركبات المتناظرة

$3g+8=20\rightarrow 3g=12\rightarrow g=4$

$2p-5=0\rightarrow 2p=5\rightarrow p=\frac{5}{2}$

$3r=-12\rightarrow r=-4$

رافت ضناوي

119
ص

التحقق من فهمك :

اذا كانت $A(-2,8,13)$ و $B(5,-7,-9)$ و $C(0,1,-14)$
نقاطاً في الفضاء، جد كلاً مما يأتي :-
a) متجه موقع كل من النقاط A و B و C
b) متجه الإزاحة من النقطة B الى النقطة C
c) المسافة بين النقطة A والنقطة C

الحل :-
a) $\overrightarrow{OA} = \langle -2,8,13 \rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 5,-7,-9 \rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 0,1,-14 \rangle$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \langle -5, 8, -5 \rangle$

c) نستخدم متجه الإزاحة $AC = \sqrt{(0+2)^2+(1-8)^2+(-14-13)^2}$

$= \sqrt{4 + 49 + 729}$

$= \sqrt{782}$

121
ص

التحقق من فهمك :

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4 \rangle$

b) $\overrightarrow{AB}$: $A(2,-1,4)$, $B(7,6,-2)$

c) $4\vec{m} - 5\vec{f}$: $m = -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{f} = 3\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}$.

الحل :-

a) $9\hat{i} - 4\hat{k}$

b) $\overrightarrow{AB} = \langle 7-2, 6+1, -2-4 \rangle = \langle 5, 7, -6 \rangle = 5\hat{i}+7\hat{j}-6\hat{k}$

c) $4(-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) - 5(3\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k})$

$-8\hat{i}+12\hat{j}-16\hat{k} - 15\hat{i}+25\hat{j}-30\hat{k}$

$-23\hat{i}+37\hat{j}-46\hat{k}$

مرافقات صالح

ص 122

التحقق من فهمك

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي :-

a) $\vec{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

b) $\vec{v} = 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$

c) $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

الحل :-

a) $|\vec{u}| = \sqrt{16+9+25} = \sqrt{50} = \sqrt{2\times 25} = 5\sqrt{2}$

$\hat{u} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \langle 4, -3, 5 \rangle = \left\langle \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{64+225+289} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$

$\hat{v} = \frac{1}{17\sqrt{2}} (8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}) = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

c) $\overrightarrow{AB} = \langle 3+1, 3-4, 8-6 \rangle = \langle 4, -1, 2 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

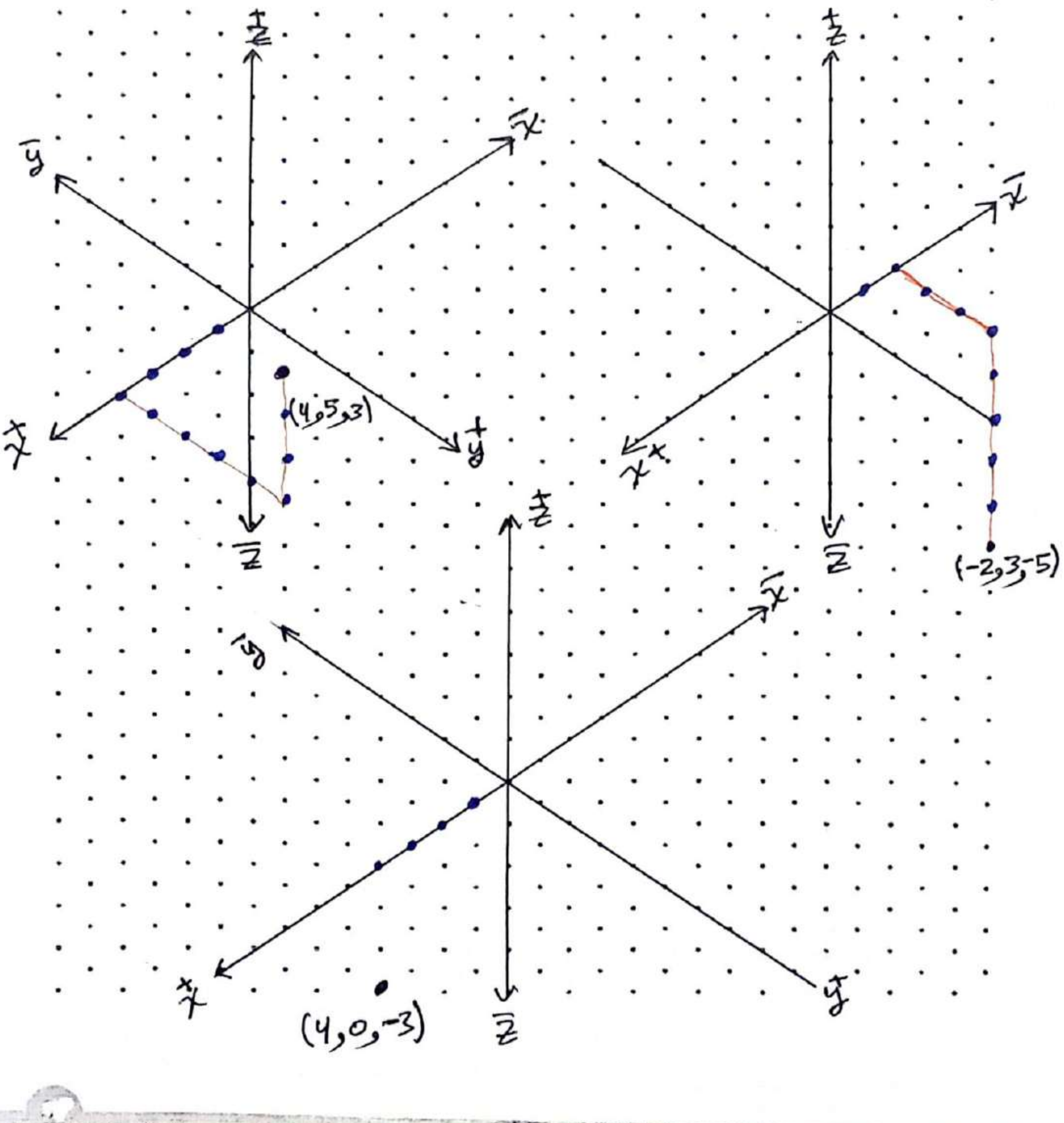
$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{21}} \langle 4, -1, 2 \rangle = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$

رافت ضاهي

اتدرب واحل المسائل

عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد

① $(4, 5, 3)$ ② $(-2, 3, -5)$ ③ $(4, 0, -3)$



جد الطول واحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي اعطي طرفاها في كل مما يأتي :-

④ $(3, -2, 8)$, $(5, 4, 2)$

⑤ $(-2, 7, 0)$, $(2, -5, 3)$

⑥ $(12, 8, -5)$, $(-3, 6, 7)$

⑦ $(-5, -8, 4)$, $(3, 2, -6)$

---

4) $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (4+2)^2 + (2-8)^2}$

$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = \sqrt{4 \times 19} = 2\sqrt{19}$

$N = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 1, 5)$

5) $AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-5-7)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$

$N = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{7-5}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

6) $AB = \sqrt{(-3-12)^2 + (6-8)^2 + (7+5)^2}$

$= \sqrt{225 + 4 + 144} = \sqrt{373}$

$N = \left(\frac{12-3}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 7, 1\right)$

7) $AB = \sqrt{(3+5)^2 + (2+8)^2 + (-6-4)^2}$

$= \sqrt{64 + 100 + 100} = \sqrt{264} = \sqrt{4 \times 66} = 2\sqrt{66}$

$N = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-8}{2}, \frac{-6+4}{2}\right) = (-1, -3, -1)$

رافت ضاحي

مثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء

8) $\vec{V} = \langle -3, -4, 5 \rangle$

9) $\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

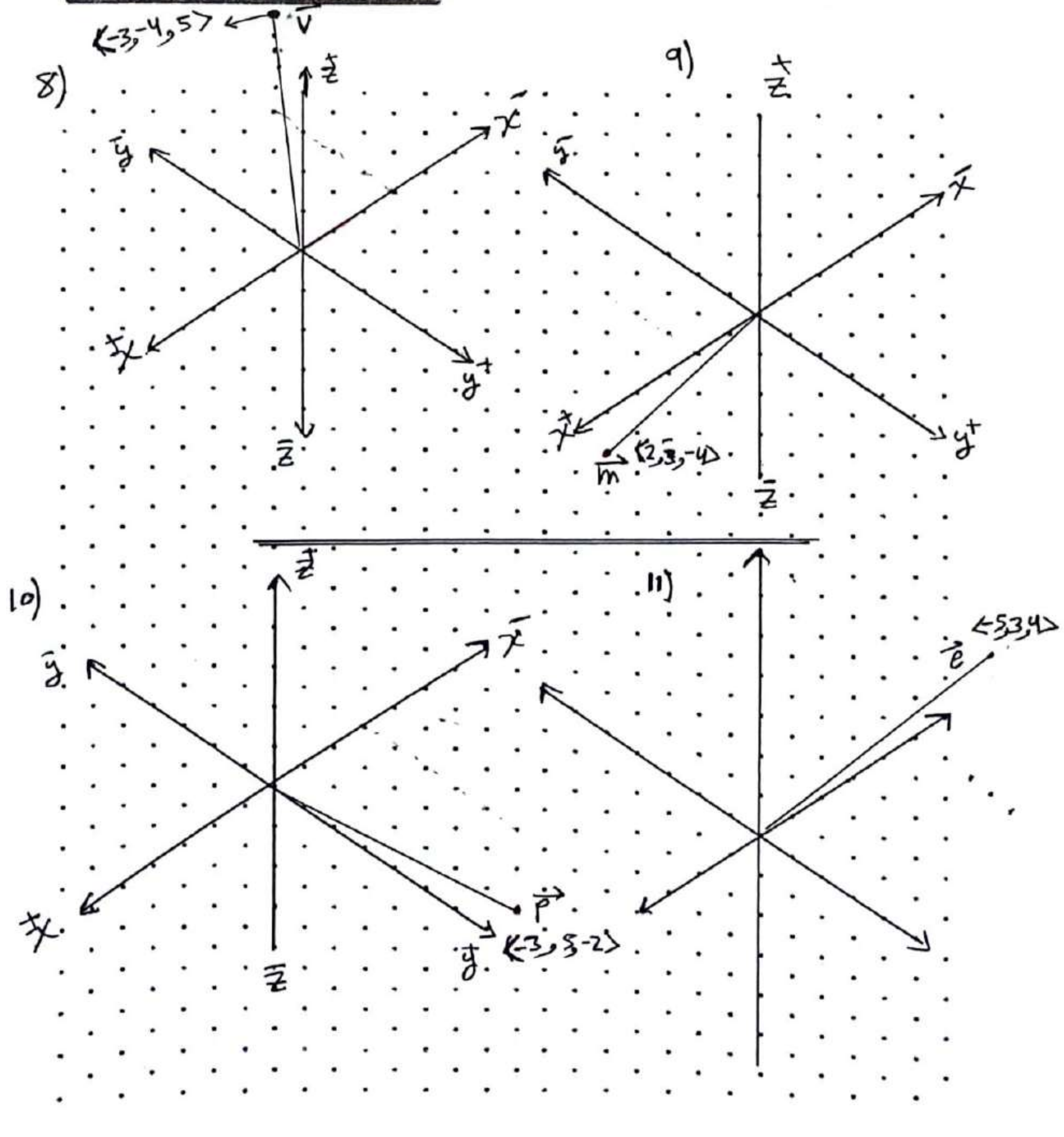
10) $\vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle$

11) $\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

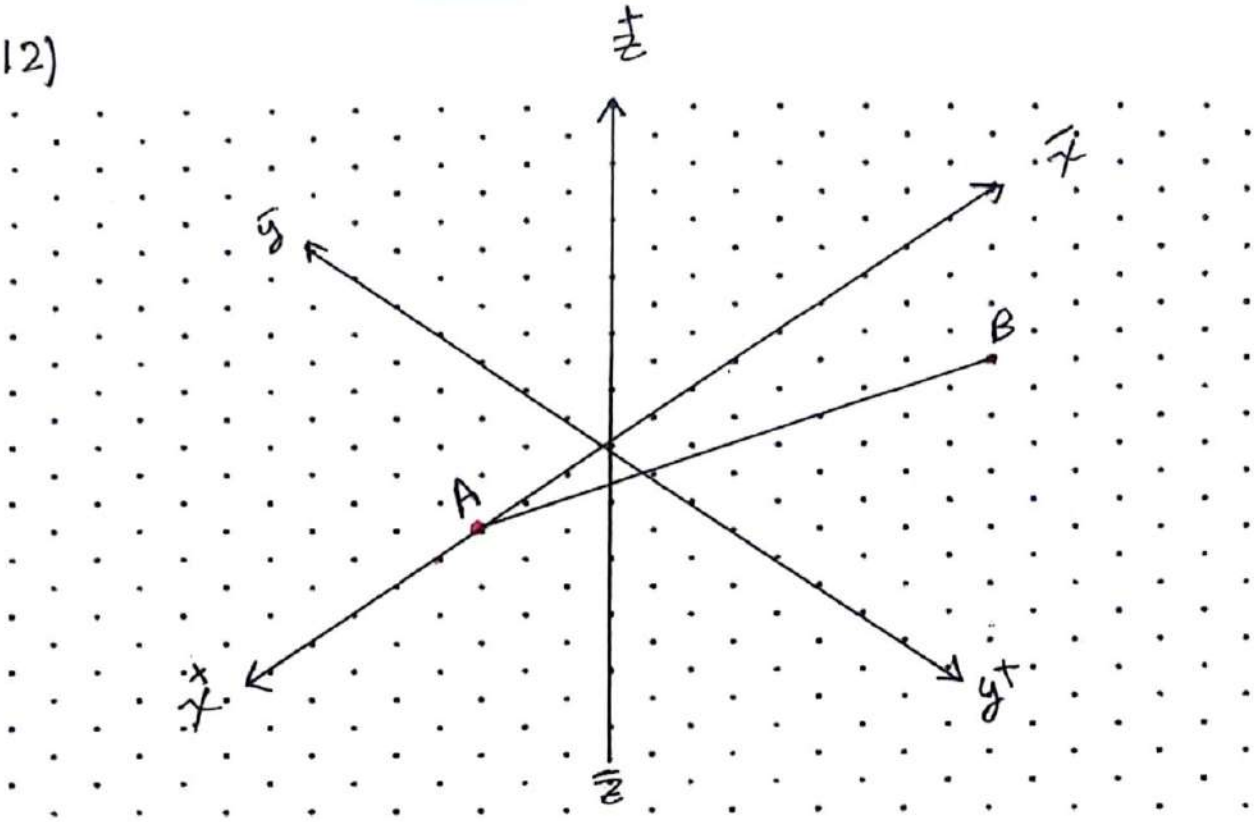
12) $\overrightarrow{AB}$: $A(4,1,1)$, $B(-3,6,3)$

13) $\overrightarrow{GH}$: $G(1,-3,5)$, $H(0,4,-2)$

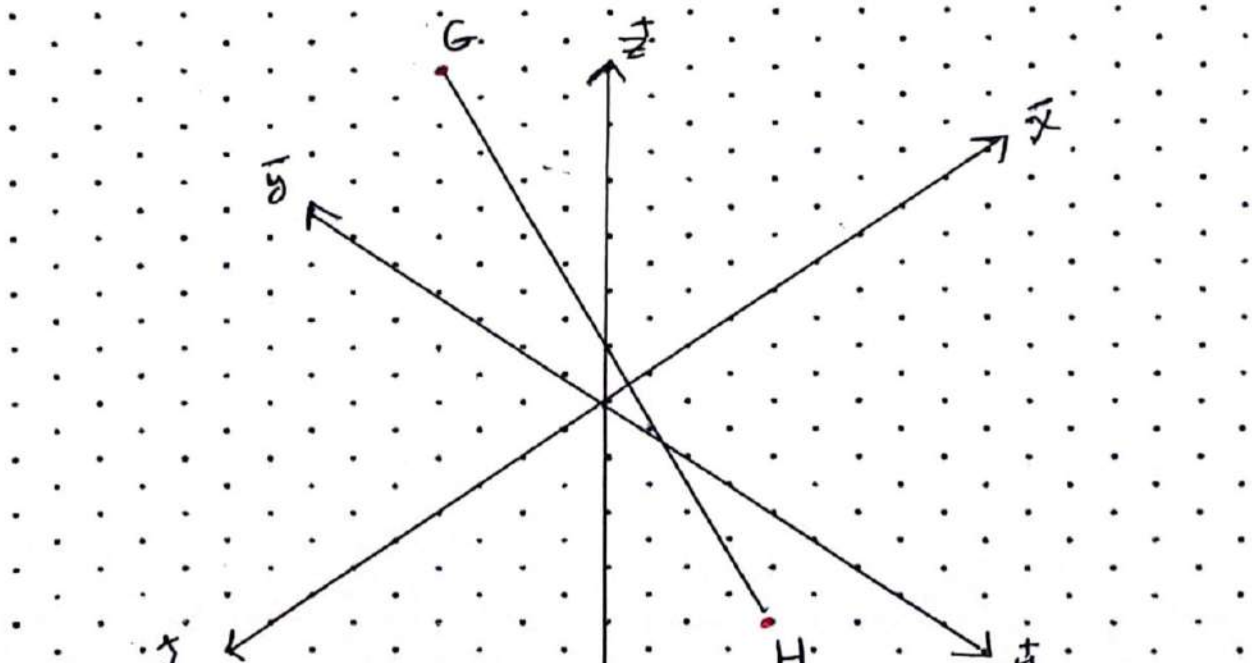
ورقة منقطة متساوية القياس



12)



13)



جد الصورة الاحداثية والمقدار للمتجه الذي اعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي :-

14) $A(4, 6, 9)$, $B(-3, 2, 5)$

15) $A(-8, 5, 7)$, $B(6, 3, 2)$

16) $A(12, -5, 4)$, $B(4, 1, -1)$

17) $A(24, -8, 10)$, $B(10, 6, 3)$

الحل :-

14) $\overrightarrow{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9 \rangle = \langle -7, -4, -4 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$

15) $\overrightarrow{AB} = \langle 6+8, 3-5, 2-7 \rangle = \langle 14, -2, -5 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196 + 4 + 25} = \sqrt{225} = 15$

16) $\overrightarrow{AB} = \langle 4-12, 1+5, -1-4 \rangle = \langle -8, 6, -5 \rangle$

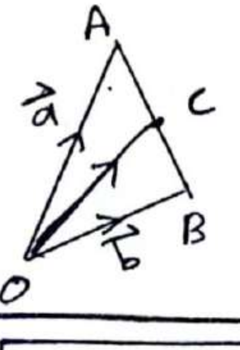
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

17) $\overrightarrow{AB} = \langle 10-24, 6+8, 3-10 \rangle = \langle -14, 14, -7 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196 + 196 + 49} = \sqrt{441} = 21$

---

18) اذا كان OAB مثلثاً فيه $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ والنقطة C هي منتصف $\overrightarrow{AB}$ فاكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



الحل :- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ ((قاعدة المثلث))

$= \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

رافت صافي

اذا كان $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$, $\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$ فجد كلاً مما يأتي

19) $3\vec{e} + 4\vec{f}$

20) $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$

21) $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$

22) $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

الحل :

19) $3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3, 9, -4 \rangle + 4\langle 5, -3, 7 \rangle$

$= \langle -9, 27, -12 \rangle + \langle 20, -12, 28 \rangle = \langle 11, 15, 16 \rangle$

20) $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3, 9, -4 \rangle + \langle 5, -3, 7 \rangle - 3\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle 2, 6, 3 \rangle - \langle -3, 24, -15 \rangle$

$= \langle 5, -18, 18 \rangle$

21) $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3, 9, -4 \rangle - 2\langle 5, -3, 7 \rangle + 3\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle -12, 36, -16 \rangle - \langle 10, -6, 14 \rangle + \langle -3, 24, -15 \rangle$

$= \langle -25, 66, -45 \rangle$

22) $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} = 2\langle -3, 9, -4 \rangle + 7\langle 5, -3, 7 \rangle - 2\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle -6, 18, -8 \rangle + \langle 35, -21, 49 \rangle - \langle -2, 16, -10 \rangle$

$= \langle 31, -19, 51 \rangle$

رافت صابحي

اذا كان $A(-1, 6, 5)$, $B(0, 1, -4)$, $C(2, 1, 1)$ نقاطاً في الفضاء ، جد كلاً مما يأتي :-

23) متجه موقع كل من النقاط A , B , C

24) متجه الازاحة من النقطة B الى النقطة A

25) متجه الازاحة من النقطة C الى النقطة B

26) المسافة بين النقطة C والنقطة B

الحل :-

23) $\overrightarrow{OA} = \langle -1, 6, 5 \rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0, 1, -4 \rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 2, 1, 1 \rangle$

24) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1, 6, 5 \rangle - \langle 0, 1, -4 \rangle = \langle -1, 5, 9 \rangle$

25) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \langle 0, 1, -4 \rangle - \langle 2, 1, 1 \rangle = \langle -2, 0, -5 \rangle$

26) $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4 + 0 + 25} = \sqrt{29}$

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الاساسية

27) $\vec{g} = \langle 5, 7, -1 \rangle$ 28) $\overrightarrow{ST}$: $S(1, 0, -5)$, $T(2, -2, 0)$

29) $-\vec{a} + 3\vec{b}$: $\vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

الحل :

27) $5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$

28) $\overrightarrow{ST} = (2-1)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (0+5)\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

29) $-(1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + 3(4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$-1\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k} = 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$

رافت ضاحي

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي

30) $-4\hat{i}+3\hat{j}$

31) $143\hat{i}-24\hat{j}$

32) $-72\hat{i}+33\hat{j}+56\hat{k}$

33) $\begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}$

34) $\begin{pmatrix}5\\-4\\-2\end{pmatrix}$

35) $\vec{n}=\langle -2,0,3\rangle$

الحل :- $\vec{V}=-4\hat{i}+3\hat{j}$

30) $|\vec{V}|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$\hat{V}=\frac{1}{5}\vec{V}=\frac{1}{5}(-4\hat{i}+3\hat{j})=\frac{-4}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}$

31) $|\vec{V}|=\sqrt{(143)^2+(-24)^2}=\sqrt{20449+576}=145$

$\hat{V}=\frac{1}{145}\vec{V}=\frac{1}{145}(143\hat{i}-24\hat{j})=\frac{143}{145}\hat{i}-\frac{24}{145}\hat{j}$

32) $|\vec{V}|=\sqrt{(-72)^2+(33)^2+(56)^2}=\sqrt{9409}=97$

$\hat{V}=\frac{1}{97}(-72\hat{i}+33\hat{j}+56\hat{k})=-\frac{72}{97}\hat{i}+\frac{33}{97}\hat{j}+\frac{56}{97}\hat{k}$

33) $|\vec{V}|=\sqrt{(11)^2+(13)^2+(8)^2}=\sqrt{354}$ $\quad \begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}=\langle 11,13,8\rangle$

$\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{354}}\begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{\sqrt{354}}\\ \frac{13}{\sqrt{354}}\\ \frac{8}{\sqrt{354}}\end{pmatrix}$

34) $|\vec{V}|=\sqrt{25+16+4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}5\\-4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

رافت صابر في
٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤

35) $|\vec{n}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

36) اذا كان $\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$ ، $\vec{b} = 7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$

وكان $3\vec{a} + c\vec{b} = -23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k}$ جد قيمة c

الحل :

$$3\vec{a} + c\vec{b} = 3(-3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}) + c(7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= -9\hat{i} + 12\hat{j} + 36\hat{k} + 7c\hat{i} + 39c\hat{j} - 2c\hat{k}$$

$$= (-9+7c)\hat{i} + (12+39c)\hat{j} + (36-2c)\hat{k}$$

بالمقارنة :

$$-9 + 7c = -23$$

$$7c = -14 \rightarrow \boxed{c = -2}$$

37) اذا كان $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix}$ وكان $k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$

جد قيمة كل من v و w و k

الحل :

$$k\vec{s} - 4\vec{t} = k\begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ kw+47k \\ -4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4v \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k-12 \\ kw+47k-4v \\ -4k-8 \end{pmatrix}$$

بالمقارنة

$$2k - 12 = 6 \rightarrow \boxed{k = 9} \quad , \quad -4k - 8 = w$$

$$-36 - 8 = w \rightarrow \boxed{w = -44}$$

وايضاً

$$kw + 47k - 4v = 31$$

عوض

$$-396 + 423 - 4v = 31$$

$$27 - 4v = 31$$

$$4v = -4$$

$$\boxed{v = -1}$$

راقت ضاحي

38) اذا كان $\vec{n} = \langle 6, 2, -3 \rangle$ و $\vec{p} = \langle 3, a, -1 \rangle$ ، $5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$

$\vec{m} = \langle 4, 1, -2 \rangle$ فما قيمة الثابت a

الحل :

$$5\vec{m} + 2\vec{p} = 5\langle 4, 1, -2 \rangle + 2\langle 2, a, -1 \rangle$$
$$= \langle 20, 5, -10 \rangle + \langle 4, 2a, -2 \rangle$$
$$= \langle 24, 5 + 2a, -12 \rangle$$

بالمقارنة $4\vec{n} = 4\langle 6, 2, -3 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$

$$5 + 2a = 8 \rightarrow 2a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

---

39) اذا كان $\vec{v} = \langle u-3, u+1, u-2 \rangle$ وكان $|\vec{v}| = 17$ اجد u

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(u-3)^2 + (u+1)^2 + (u-2)^2}$$

نربع $17 = \sqrt{u^2 - 6u + 9 + u^2 + 2u + 1 + u^2 - 4u + 4}$

نرتب $289 = 3u^2 - 8u + 14$

القانون العام $3u^2 - 8u - 275 = 0$

$$u = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(3)(-275)}}{6} = \frac{8 \pm 58}{6} = -\frac{25}{3}, \ 11$$

راقت صابح

40) اذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما

$\vec{g} = \langle -2, c+1, -8 \rangle$ ، و $\vec{h} = \langle c-1, -4, c+2 \rangle$

على الترتيب جد قيمة c علماً بأن $|\vec{GH}| = 19$ وأن $c > 0$

الحل :

$$\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG}$$

$$\vec{GH} = \langle c-1+2, -4-c-1, c+2+8 \rangle$$

$$= \langle c+1, -5-c, c+10 \rangle$$

$$|\vec{GH}| = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2}$$

$$19 = \sqrt{c^2+2c+1+25+10c+c^2+c^2+20c+100}$$ نربع

$$361 = 3c^2 + 32c + 126$$ نرتب

$$3c^2 + 32c - 235 = 0$$ القانون العام

$$c = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 2820}}{6} = \frac{-32 \pm 62}{6} = 5, \frac{-47}{3}$$

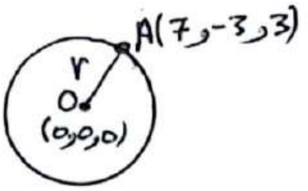
لكن $c > 0$ وعليه $c = 5$

رافت صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

مهارات تفكير عليا

(41) اكتشف الخطأ: قالت حنان: اذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل. فان النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج الكرة. في حين قالت هديل: النقطة B تقع داخل هذه الكرة. أي القولين صحيح



الحل: $r = OA = \sqrt{(7)^2+(-3)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{49+9+9} = \sqrt{67}$

$OB = \sqrt{(2)^2+(-8)^2+(-1)^2}$

$OB = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69}$

نلاحظ ان $OB > OA$ وعليه النقطة B تقع خارج الكرة.

---

(42) اذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي احد أقطار كرة. بيّن ان النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة.

الحل: مركز الكرة $O = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{17-1}{2}\right)$

$O = (-3, 4, 8)$

نصف القطر $OK = \sqrt{(-3+2)^2+(4-2)^2+(8-17)^2} = \sqrt{86}$

او نجد JK ونقسم على 2

نجد كل من OL و OJ ونقارنها بطول نصف القطر

$OL = \sqrt{(2+3)^2+(10-4)^2+(3-8)^2} = \sqrt{25+36+25} = \sqrt{86}$

$OJ = \sqrt{(4+3)^2+(-2-4)^2+(7-8)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86}$

وعليه تقعان على سطح الكرة لأن بعدهم عن المركز يساوي نصف القطر

43) تمثل النقاط $B(2,3,5)$ و $C(8,-3,5)$ و

$A(2,3,-1)$ ثلاثة من رؤوس مكعب خشبي ، كل وجهين

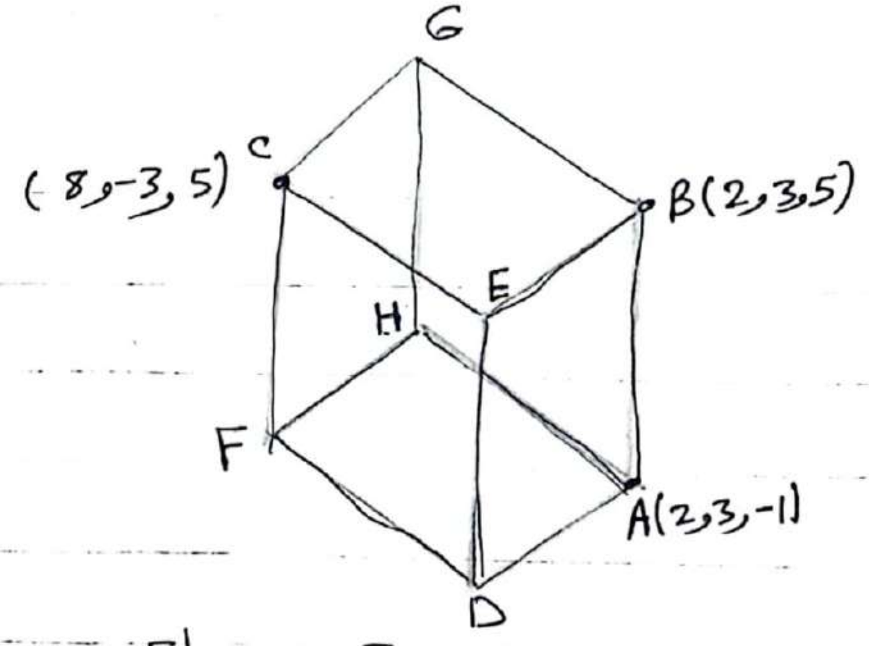
من أوجهه يوازيان أحد المستويات: xy و xz و yz

اكتب احداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى.

الحل :-

لاحظ B و A تختلف في الاحداثي z والفرق بينهما 6

وعليه طول ضلع المكعب 6 وعليه AB أحد أحرف المكعب



عمل ازاحات للرؤوس المعطاة بمقدار 6 وحدات

$F(8,-3,-1)$: ازاحة C باتجاه $\bar{z}$ 6 وحدات

$D(8,3,-1)$: ازاحة A باتجاه $\overset{+}{x}$ 6 وحدات

$E(8,3,5)$: ازاحة B باتجاه $\overset{+}{x}$ 6 وحدات

$G(2,-3,5)$: ازاحة B باتجاه $\bar{y}$ 6 وحدات

$H(2,-3,-1)$: ازاحة A باتجاه $\bar{y}$ 6 وحدات

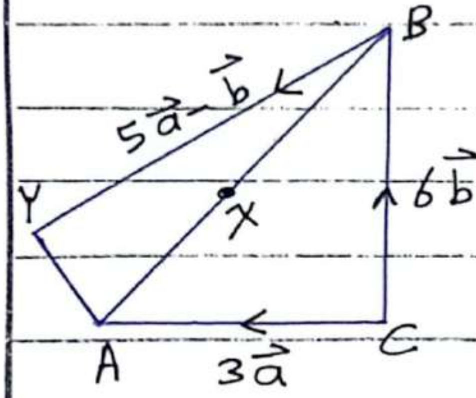
رافت صباحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

44) في الشكل الآتي ، اذا كان $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a}$ و

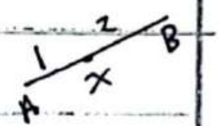
وكانت $\overrightarrow{CB} = 6\vec{b}$ تقع X على $\overline{AB}$ حيث $AX : XB = 1 : 2$

فاثبت ان $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$



الحل :

نجد اولاً $\overrightarrow{CX}$:



$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$$
$$= 3\vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= 3\vec{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$
$$= 3\vec{a} + \frac{1}{3}(-3\vec{a} + 6\vec{b})$$
$$= 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b}$$
$$= 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{——} \ 1$$

نجد $\overrightarrow{CY}$:

$$\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BY}$$
$$= 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b}$$
$$= 5\vec{b} + 5\vec{a}$$
$$= 5(\vec{b} + \vec{a}) \quad \text{——} \ 2$$

من معادله 1 فان $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$

من معادله 2 فان $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$

وعليه $\frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$

$$\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$$

إذا كانت متجهات الموقع للنقاط N و L و M هي :

$\vec{m} = -3\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{L} = 4\hat{i}-10\hat{j}+3\hat{k}$ ، $\vec{n} = 5\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$

اجب عن السؤالين الآتيين :

(45) أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية

(46) جد مساحة المثلث LMN

الحل :

نستخدم عكس نظرية فيثاغورس

$M(-3, -6, 1)$, $L(4, -10, 3)$, $N(5, 3, -9)$

$\vec{MN} = \langle 5+3, 3+6, -9-1\rangle = \langle 8, 9, -10\rangle$

$|\vec{MN}| = \sqrt{64+81+100} = \sqrt{245}$

$\vec{ML} = \langle 4+3, -10+6, 3-1\rangle = \langle 7, -4, 2\rangle \rightarrow |\vec{ML}| = \sqrt{49+16+4} = \sqrt{69}$

$\vec{NL} = \langle 4-5, -10-3, 3+9\rangle = \langle -1, -13, 12\rangle \rightarrow |\vec{NL}| = \sqrt{1+169+144} = \sqrt{\boxed{314}}$

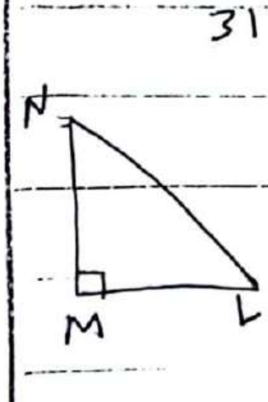
الوتر

$(NL)^2 = (ML)^2 + (MN)^2$

$314 = 69 + 245$

$314 = 314$

حسب عكس نظرية فيثاغورس فان المثلث قائم الزاوية في M



مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}(ML)(MN)$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{69}\,\sqrt{245} \rightarrow 49\times5$

$= \frac{7}{2}\sqrt{345}$ وحدة مربعة

رافت ضاحي

كتاب التمارين

عين كلاً من النقاط الآتية في نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد

1) $A(0, 2, -3)$ 2) $B(-1, 0, 4)$

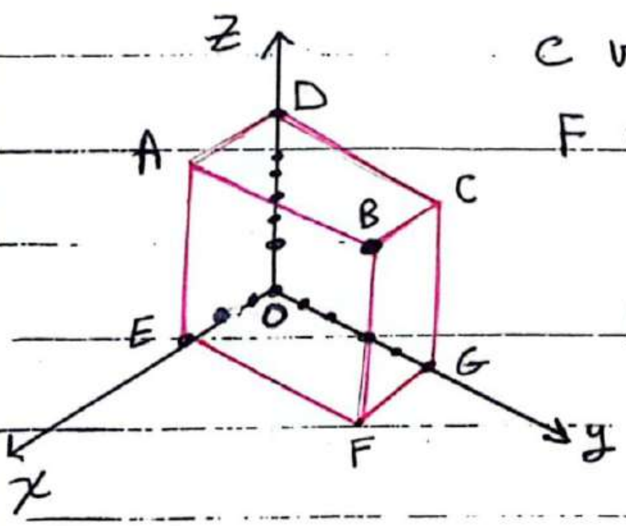
3) $C(2, 4, 3)$ 4) $D(-3, -2, -5)$

الحل: ورسم منقط

في الشكل المجاور متوازي مستطيلات 6 اذا كانت احداثيات الرأس B هي $(3, 5, 6)$ فاكتب احداثيات كل مما يأتي:

⑤ الرأس A ⑥ الرأس C

⑦ الرأس D ⑧ الرأس F



الحل:

⑤ تقع في المستوى xz وعليه y هي صفراً

حيث نحد عمود على المحورين z و x

$A(3, 0, 6)$

⑥ يقع في المستوى zy هنا x صفراً

$C(0, 5, 6)$

⑦ تقع على محور z هنا x و y صفراً $(0, 0, 6)$

⑧ تقع في المستوى xy هنا z صفراً $(3, 5, 0)$

⑨ جد مركز متوازي المستطيلات ABCDOEFG

الحل: نأخذ مثلاً منتصف $\overline{BO}$

$$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$$

راقت ضياء

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

اكتب الصورة الاحداثية لكل من المتجهات الآتية ثم جد مقدار كل منها

⑩ $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-2,5,0)$, $B(4,9,-3)$

⑪ $\overrightarrow{EF}$ حيث $E(3,4,6)$, $F(6,8,-6)$

⑫ $\overrightarrow{GH}$ حيث $H(10,7,8)$, $G(-2,3,2)$

الحل:

10) $\overrightarrow{AB} = \langle 4+2, 9-5, -3-0 \rangle = \langle 6, 4, -3 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+16+9} = \sqrt{61}$

11) $\overrightarrow{EF} = \langle 6-3, 8-4, -6-6 \rangle = \langle 3, 4, -12 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

12) $HG = \langle -2-10, 3-7, 2-8 \rangle = \langle -12, -4, -6 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{GH}| = \sqrt{144+16+36} = \sqrt{196} = 14$

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي :

13) $\overrightarrow{AC} = 8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\,\hat{k}$

14) $\vec{v} = \langle -5, 4, 20 \rangle$

الحل:

13)

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64+25+45} = \sqrt{134}$

$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{134}}(8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\hat{k}) = \frac{8}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{134}}\hat{j} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{k}$

14) $|\vec{v}| = \sqrt{25+16+400} = \sqrt{441} = 21$

$\hat{v} = \frac{1}{21}\langle -5, 4, 20 \rangle = \langle \frac{-5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{20}{21} \rangle$

رأفت ضاحي

15) جد متجهاً له نفس اتجاه المتجه $\vec{v} = 4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}$
ومقداره 52

حلا اسرع

نجد متجه الوحدة في نضربه بـ 52

الحل :-

نجد اولاً $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

نجد الثابت $|c\vec{v}| = c(13) = 52 \rightarrow c = 4$

$$c\vec{v} = 4(4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}) = 16\hat{i} - 48\hat{j} + 12\hat{k}$$

اذا كان $\vec{v} = \langle -4, 3, -6 \rangle$ و $\vec{u} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

جد كلاً مما يأتي :-

16) $2\vec{u} + 4\vec{v}$ 17) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

الحل :

$\vec{u} = \langle 3, 5, -7 \rangle$

16) $2\vec{u} + 4\vec{v} = 2\langle 3, 5, -7 \rangle + 4\langle -4, 3, -6 \rangle$

$$= \langle 6, 10, -14 \rangle + \langle -16, 12, -24 \rangle$$

$$= \langle -10, 22, -38 \rangle$$

17) $3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\langle 3, 5, -7 \rangle - 2\langle -4, 3, -6 \rangle$

$$= \langle 9, 15, -21 \rangle - \langle -8, 6, -12 \rangle$$

$$= \langle 17, 9, -9 \rangle$$

راقت ضاحي

18) جد قيمة كل من الاعداد الحقيقية c و b و c التي تحقق

$$a\vec{u} + 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

الحل :-

$a\vec{u} + 5\vec{v} = a\langle 3, 5, -7\rangle + 5\langle -4, 3, -6\rangle$

$= \langle 3a, 5a, -7a\rangle + \langle -20, 15, -30\rangle$

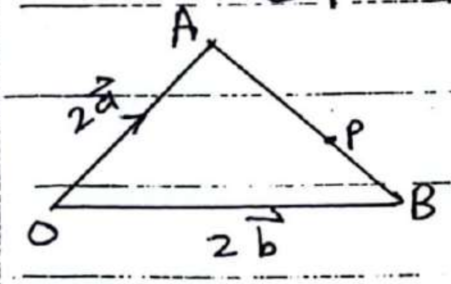
$= \langle 3a-20, 5a+15, -7a-30\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \langle -2, b, c\rangle$

بالمقارنة $3a - 20 = -2 \rightarrow a = 6$

$b = 5a + 15 = 30 + 15 = 45$

$c = -7a - 30 = -42 - 30 = -72$

19) في المثلث OAB المجاور ، تقع النقطة P على الضلع AB حيث $AP : PB = 5 : 3$ اذا كان $\vec{OP} = K(3\vec{a} + 5\vec{b})$ فما قيمة العدد الحقيقي K



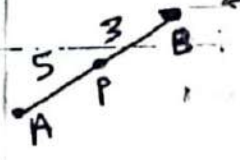
الحل :-

$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP}$ (قاعدة المثلث)

$\vec{OP} = 2\vec{b} + \vec{BP}$ ——— (1)

نحتاج الى كتابة $\vec{BP}$ بدلالة $\vec{a}$, $\vec{b}$

من المعطيات $AP : PB = 5 : 3$



فانا $\vec{BP} = \frac{3}{8}\vec{BA}$

نعود الى (1) :-

او نقارن:

$\frac{5}{4} = 5K$

$K = \frac{1}{4}$

$\vec{OP} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(\vec{BA})$ قاعدة المثلث

$\vec{OP} = 2\vec{b} + \frac{3}{8}(\vec{BO} + \vec{OA})$

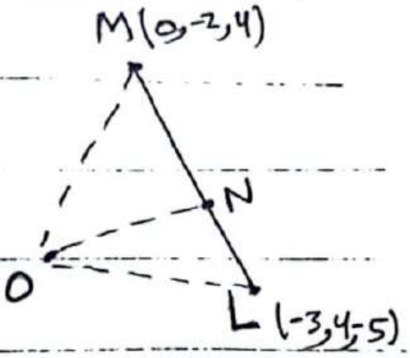
$= 2\vec{b} + \frac{3}{8}(-2\vec{b} + 2\vec{a}) = \frac{5}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$

$\vec{OP} = \frac{1}{4}(5\vec{b} + 3\vec{a})$

بالمقارنة $K = \frac{1}{4}$

رأفت ضاحي

20) متجها الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3,4,-5\rangle$ ، $\langle 0,-2,4\rangle$ على الترتيب. جد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$ علماً بأن $\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$



الحل:

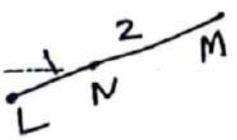
ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$

$$\overrightarrow{LN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$

متجه ازاحة

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LN}$$
$$=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$
$$=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL})$$
$$=\langle -3,4,-5\rangle+\frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$$
$$=\langle -3,4,-5\rangle+\langle 1,-2,3\rangle$$
$$=\langle -2,2,-2\rangle$$

$$\frac{LN}{NM}=\frac{1}{2}$$

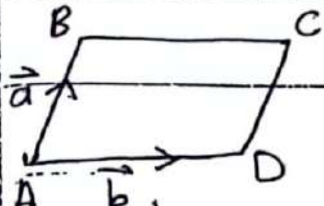


حل اسهل

$$\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$$
$$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON})$$
$$\frac{3}{2}\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}$$
$$\frac{3}{2}\overrightarrow{ON}=\langle 0,-1,2\rangle+\langle -3,4,-5\rangle$$
$$\overrightarrow{ON}=\langle -2,2,-2\rangle$$

---

21) $ABCD$ متوازي أضلاع، فيه $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ، $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ، $\overrightarrow{AC}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\overrightarrow{BD}=-6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$ جد كلاً من $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية



كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان

$\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

الحل:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$
$$2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}=\vec{b}+\vec{a} \quad (1)$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$$
$$-6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}=-\vec{a}+\vec{b} \quad (2)$$

حل المعادلتان:

بالجمع: $2\vec{b}=-4\hat{i}+6\hat{k}+10\hat{j}\rightarrow \vec{b}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$

بالطرح: $2\vec{a}=8\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\rightarrow \vec{a}=4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

راقت ضاحي

22) اذا كان $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ و $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ جد p, q, r
التي تحقق المعادلة $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\begin{pmatrix}28\\-12\\-5\end{pmatrix}$

الحل :-

$$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\begin{pmatrix}p\\0\\4p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2q\\0\\-3q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5r\\3r\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+2q-5r\\3r\\-4p-3q+r\end{pmatrix}$$

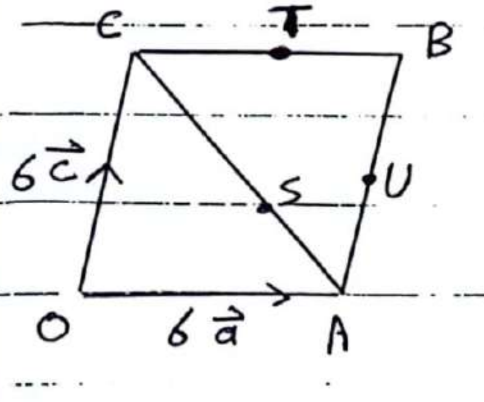
بالمقارنة : $3r=-12 \rightarrow r=-4$

$p+2q-5r=28 \rightarrow p+2q+20=28 \rightarrow p+2q=8$ — (1)

$-4p-3q+r=-5 \rightarrow 4p-3q-4=-5 \rightarrow -4p-3q=-1$ — (2)

بحل المعادلتان $p=2$ و $q=3$

في الشكل المجاور $OABC$ متوازي اضلاع فيه :-
$\vec{OC}=6\vec{c}$ و $\vec{OA}=6\vec{a}$ والنقطة T هي منتصف الضلع BC
والنقطة U تقع على الضلع AB حيث $AU:UB=2:1$ والنقطة S تقع
على القطر CA حيث $CS:SA=3:2$
احسب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة
$\vec{a}$ و $\vec{c}$



(23) $\vec{OB}$ (24) $\vec{AC}$

(25) $\vec{OU}$ (26) $\vec{UT}$

(27) $\vec{TA}$ (28) $\vec{OS}$

(29) $\vec{US}$ (30) $\vec{SB}$

م/ رأفت ضاحي

الحل:

23) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ || متوازي الأضلاع مضلع || $= 6\vec{a} + 6\vec{c}$

24) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -6\vec{a} + 6\vec{c}$

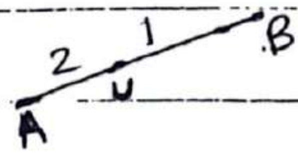
25)

$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}\,6\vec{c}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + 4\vec{c}$



26)

$\overrightarrow{UB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BT}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}(6\vec{c}) + \frac{1}{2}(-6\vec{a})$

$= 2\vec{c} - 3\vec{a}$

27) $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + -6\vec{c}$

$= \frac{1}{2}(6\vec{a}) - 6\vec{c} = 3\vec{a} - 6\vec{c}$

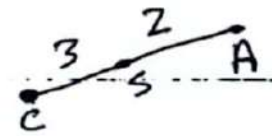
28) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA})$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}(-6\vec{c} + 6\vec{a})$

$= 6\vec{c} - \frac{18}{5}\vec{c} + \frac{18}{5}\vec{a} = \frac{12}{5}\vec{c} + \frac{18}{5}\vec{a}$



رأفت صابحي

29) $\overrightarrow{US} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AS}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}(-6\vec{c}) + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$

$= -4\vec{c} + \frac{2}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c})$

$= -4\vec{c} - \frac{12}{5}\vec{a} + \frac{12}{5}\vec{c} = \frac{-8}{5}\vec{c} - \frac{12}{5}\vec{a}$

30) $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB}$

$CB = OA$

خصائص متوازي
الاضلاع

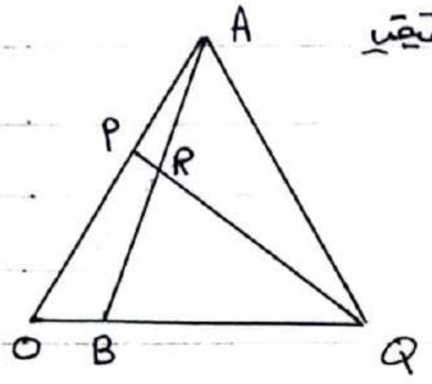
$= \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + 6\vec{a}$

$= \frac{3}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) + 6\vec{a}$

$= \frac{3}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c}) + 6\vec{a}$

$= \frac{-18}{5}\vec{a} + \frac{18}{5}\vec{c} + 6\vec{a} = \frac{12}{5}\vec{a} + \frac{18}{5}\vec{c}$

في المثلث OAQ المجاور، اذا كان $\vec{OA}=\vec{a}$ وكان $\vec{OB}=\vec{b}$ وكانت $OP:OA=3:5$ وكانت $OB:BQ=1:2$ اجب عن الاسئلة الآتية



(31) اذا علم ان $\vec{AR}=h\vec{AB}$ حيث h عدد حقيقي $0<h<1$ اثبت ان $\vec{OR}=(1-h)\vec{a}+h\vec{b}$

(32) اذا علم ان $\vec{PR}=k\vec{PQ}$ حيث k عدد حقيقي و $0<k<1$ فاكتب $\vec{OR}$ بدلالة k و $\vec{b}$ و $\vec{a}$

(33) جد قيمة كل من h و k

(34) جد النسبة $\vec{PR}:\vec{PQ}$

---

31) $\vec{OR}=\vec{OA}+\vec{AR}$ قاعدة المثلث

$\vec{OR}=\vec{a}+h\vec{AB}$ قاعدة المثلث

$=\vec{a}+h(\vec{AO}+\vec{OB})$

$=\vec{a}+h(-\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}+h\vec{b}-h\vec{a}$

$=(1-h)\vec{a}+h\vec{b}$

32) $\vec{OR}=\vec{OP}+\vec{PR}$

$=\frac{3}{5}\vec{OA}+k\vec{PQ}$

$=\frac{3}{5}\vec{a}+k(\vec{PO}+\vec{OQ})$

$=\frac{3}{5}\vec{a}+k(-\frac{3}{5}\vec{OA}+3\vec{OB})$

$=\frac{3}{5}\vec{a}+k(-\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b})$

$=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}k\vec{a}+3k\vec{b}$

$=(\frac{3}{5}-\frac{3}{5}k)\vec{a}+3k\vec{b}$

33) نقارن OR بالفرعين السابقين

$1-h=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}k$ —— (1)

$3k=h$ —— (2)

نحل المعادلتين حيث نعوض بدل h بـ 3K في معادله (1):

$1-3k=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}k$

$1-\frac{3}{5}=3k-\frac{3}{5}k$

$\frac{2}{5}=\frac{12}{5}k \rightarrow k=\frac{1}{6}$

وكذلك $h=3(\frac{1}{6})=\frac{1}{2}$

34) $\vec{PR}=k\vec{PQ}$

$\vec{PR}=\frac{1}{6}\vec{PQ}$

$\frac{\vec{PR}}{\vec{PQ}}=\frac{1}{6}$

توضيح

$OP:OA=3:5$

$\frac{OP}{OA}=\frac{3}{5}\rightarrow OP=\frac{3}{5}OA$

$\frac{OB}{BQ}=\frac{1}{2}$

$2OB=BQ$

$OQ=OB+BQ$

$OQ=OB+2OB$

$OQ=3OB$

0785824464 رأفت صافي

التحقق من فهمك ص 127

اذا كان $G(7,5,-11)$ و $H(4,4,-4)$ و $K(4,5,3)$ و $L(7,7,3)$

حدد ان كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا.

a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ b) $\overrightarrow{GL}$, $\overrightarrow{HK}$

الحل:

$\overrightarrow{GH} = \langle 4-7, 4-5, -4+11 \rangle = \langle -3, -1, 7 \rangle$

$\overrightarrow{KL} = \langle 7-4, 7-5, 3-3 \rangle = \langle 3, 2, 0 \rangle$

نلاحظ انه لا يوجد عدد حقيقي K حيث $\overrightarrow{GH} = K\overrightarrow{KL}$ وعليه غير متوازيين

b) $\overrightarrow{GL} = \langle 7-7, 7-5, 3+11 \rangle = \langle 0, 2, 14 \rangle$

$\overrightarrow{HK} = \langle 4-4, 5-4, 3+4 \rangle = \langle 0, 1, 7 \rangle$

$\langle 0, 2, 14 \rangle = 2\langle 0, 1, 7 \rangle$

وعليه $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$

تدريب: اذا كان $\vec{u} = \langle 3, a, 5 \rangle$ وكان $\vec{v} = \langle -6, 16, b \rangle$

وكان $\vec{u} \parallel \vec{v}$ جد قيمة الثابتين a و b

$a = -8$
$b = -10$

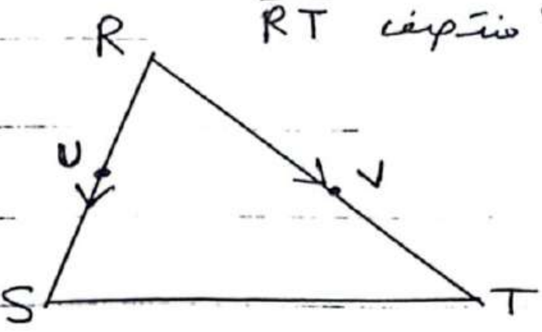
راقت صابحي

التحقق من فهمك ص 129

في المثلث RST المجاور، اذا كان $\overrightarrow{RS}=4\vec{a}$, $\overrightarrow{RT}=6\vec{b}$

والنقطة U منتصف $\overline{RS}$ والنقطة V منتصف $\overline{RT}$

أثبت ان $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$



الحل:

نكتب $\overrightarrow{ST}$ ، $\overrightarrow{UV}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RT}$$

$$=-4\vec{a}+6\vec{b} \quad \text{—— (1)}$$

$$\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{UR}+\overrightarrow{RV}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{SR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$$

$$=\frac{1}{2}(-4\vec{a})+\frac{1}{2}(6\vec{b})$$

$$\overrightarrow{UV}=-2\vec{a}+3\vec{b} \quad \text{—— (2)}$$

موقع K

$\frac{-4}{-2}=2$, $\frac{6}{3}=2$

من معادلة (1) $\overrightarrow{ST}=2(-2\vec{a}+3\vec{b})$

وعليه، $\overrightarrow{ST}=2\overrightarrow{UV}$

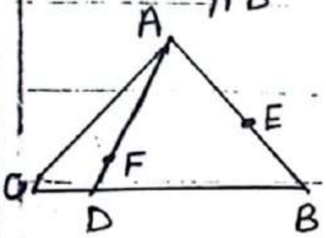
ومنه المتجهان $\overrightarrow{UV}$ و $\overrightarrow{ST}$ متوازيان

رأفت صابح

التحقق من فهمك ص 130

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB اذا كان $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$

وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$ والنقطة E منتصف $\overline{AB}$



والنقطة E تقع على $\overline{AD}$ حيث $\vec{OF}=\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$

أثبت ان O و F و E تقع على استقامة واحدة

الحل :-

نقوم باثبات ان $\vec{OF} \parallel \vec{OE}$

$$\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{BE}$$ (قاعدة المثلث)

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{BO} + \vec{OA})$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$$

$$= \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

هنا يكفينا منه فلو اعطاك $\vec{OE}$ لم نجد K

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a}) \rightarrow \vec{b}+\vec{a} = 2\vec{OE} \quad (1)$$

$$\vec{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b}) \rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \frac{5}{2}\vec{OF}$$

نعوض في (1)

$$\frac{5}{2}\vec{OF} = 2\vec{OE}$$

$$\vec{OF} = \frac{4}{5}\vec{OE}$$

هذا يعني ان المتجهين $\vec{OF}, \vec{OE}$ متوازيان وبما أنهما

من النقطة O نفسها فعليه النقاط O و E و F

على استقامة واحدة

رافت ضاحي

تحقق من فهمك ص 132

جد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$

ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$

الحل :-

متجه موقع النقطة U هو $\langle 0, -6, 9 \rangle$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 0, -6, 9 \rangle + t\langle 1, -4, -5 \rangle$$

تحقق من فهمك ص 133

جد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين $N(2, -4, 3)$، $M(3, 7, -9)$

الحل :-

$\overrightarrow{NM} = \langle 3-2, 7+4, -9-3 \rangle = \langle 1, 11, -12 \rangle$ الصورة الإحداثية

$\vec{r_0} = \langle 3, 7, -9 \rangle$

محيط

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$$

انتبه

توجد أكثر من صورة مكافئة للمعادلة بسبب اختلاف النقطة

راقت صافي

التحقق من فهمك ص 134

تمثل :- $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم L

a) بيّن ان النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم L

b) جد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم وتقابل القيمة $t = -3$

c) اذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم L جد قيمة v

الحل :-

a) $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + 7t\hat{i} - 2t\hat{j} + 5t\hat{k}$

$39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = (11 + 7t)\hat{i} + (5 - 2t)\hat{j} + (-6 + 5t)\hat{k}$

بالمقارنة

$39 = 11 + 7t$	$-3 = 5 - 2t$	$14 = -6 + 5t$
$7t = 28$	$2t = 8$	$5t = 20$
$t = 4$	$t = 4$	$t = 4$

بما أن للمعادلات الثلاث لها الحل نفسه $(t = 4)$ فان النقطة $(39, -3, 14)$ تقع على المستقيم L لانها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته

b) نعوض قيمة t $\quad \vec{r} = (11 + 7(3))\hat{i} + (5 - 2(-3))\hat{j} + (-6 + 5(-3))\hat{k}$

$\vec{r} = -10\hat{i} + 11\hat{j} - 21\hat{k}$

c) متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v-1)$ هو $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)k$

نعوض في معادلة المتجه $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k} = (11 + 7t)\hat{i} + (5 - 2t)\hat{j} + (-6 + 5t)k$

بالمقارنة

$v = 11 + 7t$ — ①

$-3v = 5 - 2t$ — ②

$5v - 1 = -6 + 5t$ — ③

نقوم بحل ① مع ② وينتج

$t = -2 , v = -3$

نتحقق منهما انهما تحقق معادلة ③

$5v - 1 = -6 + 5t$

$-15 - 1 = -6 - 10$ ✓

وعليه قيمة v هي -3

تنويه : نحل أي معادلتين ونتحقق في المعادلة الأخرى

مرافقت صابجي

136

التحقق من فهمي ص

اذا كانت $\vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_1

وكانت $\vec{r} = \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_2

حدد اذا كان المستقيمان L_1 و L_2 متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين

ثم جد احداثيات نقطة تقاطعهما اذا كانا متقاطعين

الحل:

اتجاه المستقيم L_1 هو $\vec{V_1} = \langle 1, 11, -12\rangle$

اتجاه المستقيم L_2 هو $\vec{V_2} = \langle 4, -6, 3\rangle$

نلاحظ انه لا توجد عدد حقيقي K بحيث $\vec{V_1} = K\vec{V_2}$ وعليه المستقيمين غير متوازيين

نفحص التقاطع

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين

$$\langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle = \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$$

$$\langle 3, 7, -9\rangle + \langle t, 11t, -12t\rangle = \langle -30, -6, 30\rangle + \langle 4u, -6u, 3u\rangle$$

$$\langle 3+t, 7+11t, -9-12t\rangle = \langle -30+4u, -6-6u, 30+3u\rangle$$

نقارن

$3+t = 30+4u$ —— ①

$7+11t = -6-6u$ —— ②

$-9-12t = 30+3u$ —— ③

بحل المعادلتين ① و ②

ينتج $u = 7$ و $t = -5$

لنتحقق من المعادلة ③ ←

$-9-12t = 30+3u$

$-9+60 = 30+21$ ✓

بما ان قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث فان المستقيمين متقاطعان

نعوض $t = -5$ في معادلة L_1

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + -5\langle 1, 11, -12\rangle$$
$$= \langle 3, 7, -9\rangle + \langle -5, -55, 60\rangle = \langle -2, -48, 51\rangle$$

وعليه يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2, -48, 51)$

رافت ضاهي

138

التحقق من فهمك صـ

أقلعت طائرة من موقع احداثياته: $(0,7,0)$ وفي الوقت نفسه أقلعت طائرة ثانية من موقع احداثياته $(-2,0,0)$ وبعد التحليق مدة قصيرة في مساريهما مستقيمين أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي احداثياته $(8,15,16)$ وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي احداثياته: $(22,24,48)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان أم متقاطعان أم متخالفان.

الحل:

اتجاه الطائرة الأولى: $\vec{V_1} = \langle 8-0, 15-7, 16-0\rangle = \langle 8,8,16\rangle$

نبسط بالقسمة على 8 فيصبح $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الطائرة الأولى: $\vec{r} = \langle 0,7,0\rangle + t\langle 1,1,2\rangle$

اتجاه الطائرة الثانية: $\vec{V_2} = \langle 22+2, 24-0, 48-0\rangle = \langle 24,24,48\rangle$

نبسط بالقسمة على 24 فيصبح $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الطائرة الثانية: $\vec{r} = \langle -2,0,0\rangle + u\langle 1,1,2\rangle$

نلاحظ ان المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه

$\langle 1,1,2\rangle = 1\langle 1,1,2\rangle$

حيث $k=1$

رافت صافي

التدريب وأحل المسائل

حدد اذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يلي :-

① $\langle 8, 12, 24\rangle$ و $\langle 15, 10, -20\rangle$ ② $\langle 27, -48, -36\rangle$ و $\langle 9, -16, -12\rangle$

③ $\langle -6, -4, 10\rangle$ و $\langle -3, -1, 13\rangle$ ④ $\langle 12, -8, 32\rangle$ و $\langle 21, -14, 56\rangle$

الحل :-

1) غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي بحيث $\langle 15, 10, -20\rangle = k\langle 8, 12, 24\rangle$

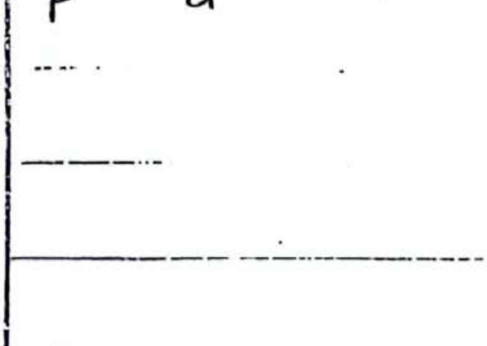
2) متوازيين لأن $\langle 27, -48, -36\rangle = 3\langle 9, -16, -12\rangle$

3) غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي بحيث $\langle -6, -4, 10\rangle = k\langle -3, -1, 13\rangle$

4) متوازيين لأن :- $\langle 12, -8, 32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21, -14, 56\rangle$

الافضل استخدام التناسب :- $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ ، $\frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$ ، $\frac{32}{56} = \frac{4}{7}$

يمثل الشكل المجاور متوازي الاضلاع PQRS الذي تقع فيه النقطة N على $\overline{SQ}$ حيث $SN:NQ = 3:2$ و $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ ، $\overrightarrow{PS} = \vec{b}$



⑤ اكتب $\overrightarrow{SQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

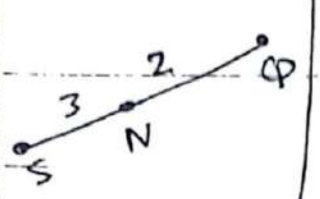
⑥ اكتب $\overrightarrow{NR}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل :-

(القاعدة المثلث) $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$

⑤ $\overrightarrow{SQ} = -\vec{b} + \vec{a}$

رأفت ضاحي



$SN = \frac{3}{5} SQ$

$NQ = \frac{2}{5} SQ$

(6) قاعدة المثلث $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QR}$ —— (1)

نكتب $\overrightarrow{NQ}$ ، $\overrightarrow{QR}$ بدلالة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

$$\overrightarrow{NQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{SQ}$$

$$= \frac{2}{5}(-b+\vec{a}) = -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}$$

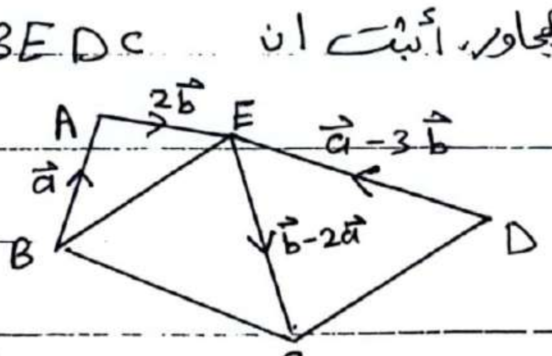
$\overrightarrow{QR} = \vec{b}$ ∵ كل ضلعين متقابلين في متوازي اضلاع متوازيان ومتساويان ∥

نعوض في (1) :-

$$\overrightarrow{NR} = -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

---

(7) معتمداً المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أثبت ان BEDC متوازي اضلاع.



الحل:

نبحث عن ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويين

قاعدة المثلث $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

$$= \vec{a} + 2\vec{b} \quad \text{—— (1)}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$$

$$= -b + 2\vec{a} + -\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$= a + 2\vec{b} \quad \text{—— (2)}$$

وعليه $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$

الضلعان $\overline{BE}$ و $\overline{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه وعليه BEDC متوازي اضلاع

∵ يكفي اثبات وجود ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين ∥ لاثبات ان الشكل متوازي اضلاع

رافت ضاحي

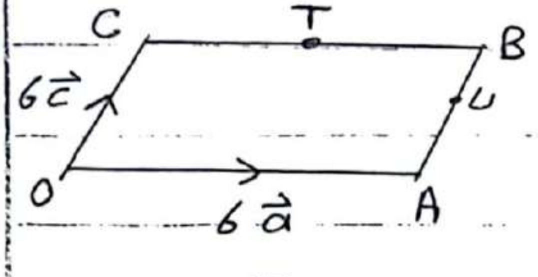
⑧ في متوازي الاضلاع OABC المجاور $\overrightarrow{OA}=6\vec{a}$ و $\overrightarrow{OC}=6\vec{c}$

والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$ والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة

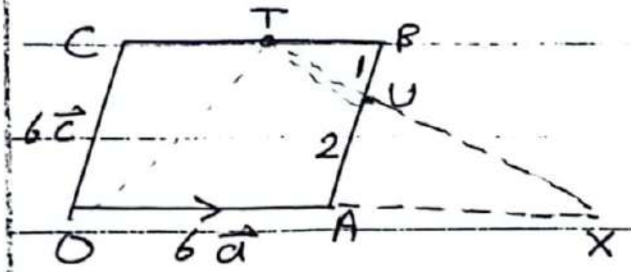
1:2 اذا مد الضلع $\overline{OA}$ على استقامة الى النقطة X حيث

$OA = AX$ أثبت ان :

T و U و X تقع على استقامة واحدة



الحل :



نقوم باثبات ان $\overrightarrow{XU}, \overrightarrow{XT}$ متوازيان

قاعدة المثلث $\overrightarrow{XU} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AU}$

$= -6\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{XU} = -6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c})$

$= -6\vec{a} + 4\vec{c}$ —— ①

$\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OT}$

$\cancel{\overrightarrow{XT} = (\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AO}) + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}}$

$\overrightarrow{XT} = (-6\vec{a} + -6\vec{a}) + 6\vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{XT} = -12\vec{a} + 6\vec{c} + \frac{1}{2}(6\vec{a})$

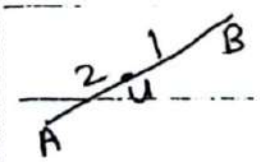
$\overrightarrow{XT} = -12\vec{a} + 6\vec{c} + 3\vec{a}$

$\overrightarrow{XT} = -9\vec{a} + 6\vec{c}$ —— ②

من معادلة ① :

$\overrightarrow{XU} = \frac{2}{3}(-9\vec{a} + 6\vec{c})$

$\overrightarrow{XU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$



$AU = \frac{2}{3}AB$

$UB = \frac{1}{3}AU$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

متجهان متوازيان ومتساويان

رافت ضاحي

جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$ ويمر بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ في كل مما يأتي:

9) $\vec{a} = -7\hat{i} + \hat{j}$ ، $\vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

10) $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ، $\vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

11) $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 9, -2 \rangle$

12) $\vec{a} = \langle 0, -1, 3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 10, 3, -6 \rangle$

الحل:

9) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + t(-7\hat{i} + \hat{j})$

10) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = -2\hat{i} + 8\hat{k} + t(-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

11) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = \langle 9, -2 \rangle + t\langle 4, 3 \rangle$

12) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = \langle 10, 3, -6 \rangle + t\langle 0, -1, 3 \rangle$

جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

13) $(10, 3, -6)$ ، $(0, -1, 3)$

14) $(11, -6, 9)$ ، $(1, 4, 29)$

15) $(-30, -6, 30)$ ، $(-26, -12, 23)$

16) $(-2, 9, 1)$ ، $(10, 5, -7)$

الحل: اتجاه المستقيم

13) $\vec{V} = \langle 10-0, 3+1, -6-3 \rangle = \langle 10, 4, -9 \rangle$

$\vec{r} = \langle 0, -1, 3 \rangle + t\langle 10, 4, -9 \rangle$

نشاط

14) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle 11-1, -6-4, 9-29\rangle = \langle 10, -10, -20\rangle$

$= \langle 1, -1, -2\rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, 29\rangle + t\langle 1, -1, -2\rangle$

15) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle -30+26, -6+12, 30-23\rangle = \langle -4, 6, 7\rangle$

$\vec{r} = \langle -26, -12, 23\rangle + t\langle -4, 6, 7\rangle$

نشاط

16) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle -2-10, 9-5, 1+7\rangle = \langle -12, 4, 8\rangle$

$= \langle -3, 1, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 10, 5, -7\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$

17) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين

$\vec{r} = \langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle$ ، $\vec{r} = \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$

الحل:

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين

$\langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle = \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$

$\langle 4, 4, -7\rangle + \langle -u, 3u, u\rangle = \langle -2, 2, -1\rangle + \langle t, 2t, -t\rangle$

$\langle 4-u, 4+3u, -7+u\rangle = \langle -2+t, 2+2t, -1-t\rangle$

$4-u = -2+t$ —— (1)

$4+3u = 2+2t$ —— (2)

$-7+u = -1-t$ —— (3)

بحل معادلة (1) و (2) ينتج

$u = 2, t = 4$

نعوضها في معادلة (3) للتأكد

$-7+2 = -1-4$ ✓

نعوض في معادلة r_1

$\vec{r} = \langle 4, 4, -7\rangle + 2\langle -1, 3, 1\rangle$

$= \langle 4, 4, -7\rangle + \langle -2, 6, 2\rangle = \langle 2, 10, -5\rangle$ عند $u = 2$

وعليه نقطة تقاطع المستقيمين هي

$(2, 10, -5)$

رأفت ضياء

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين G و H حدد اذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي

18) $E(3,-5,-7)$, $F(-11,9,14)$, $G(8,-1,-8)$, $H(2,5,1)$

19) $E(3,7,-9)$, $F(2,-4,3)$, $G(24,14,-29)$, $H(3,-21,20)$

الحل:

18) $\overrightarrow{EF} = \langle -11-3, 9+5, 14+7 \rangle = \langle -14, 14, 21 \rangle = \langle -2, 2, 3 \rangle$ نبسط

$\overrightarrow{GH} = \langle 2-8, 5+1, 1+8 \rangle = \langle -6, 6, 9 \rangle = \langle -2, 2, 3 \rangle$ نبسط

نلاحظ ان: $\langle -2, 2, 3 \rangle = \langle -2, 2, 3 \rangle$ وعليه متوازيان

19) $\overrightarrow{EF} = \langle 2-3, -4-7, 3+9 \rangle = \langle -1, -11, 12 \rangle$ نبسط

$\overrightarrow{HG} = \langle 24-3, 14+21, -29-20 \rangle = \langle 21, 35, -49 \rangle = \langle 3, 5, -7 \rangle$

غير متوازيان لسبب عدم وجود K حيث $\vec{V_1} = K\vec{V_2}$

نفحص التقاطع:

نجد معادلة كل مستقيم

معادلة $\overrightarrow{EF}$: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle -1, -11, 12 \rangle$

معادلة $\overrightarrow{GH}$: $\vec{r} = \langle 3, -21, 20 \rangle + u\langle 3, 5, -7 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$\langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle -1, -11, 12 \rangle = \langle 3, -21, 20 \rangle + u\langle 3, 5, -7 \rangle$

$\langle 3, 7, -9 \rangle + \langle -t, -11t, 12t \rangle = \langle 3, -21, 20 \rangle + \langle 3u, 5u, -7u \rangle$

$\langle 3-t, 7-11t, -9+12t \rangle = \langle 3+3u, -21+5u, 20-7u \rangle$

راقت ضياء

$3-t=3+3u$ — ①
$7-11t=-21+5u$ — ②
$-9+12t=20-7u$ — ③

بحل المعادلتين ① و ② ينتج
$u=-1$, $t=3$
نتحقق في معادلة ③
$-9+36=20+7$ ✓

معلمين متقاطعان ، نعوض $t=3$ في معادلة $\overrightarrow{EF}$ أو $u=-1$ في معادلة $\overrightarrow{GH}$

$\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle+3\langle -1,-11,12\rangle=\langle 3,7,-9\rangle+\langle -3,-33,36\rangle$
$=\langle 0,-26,27\rangle$

نقطة تقاطع المستقيمين هي $(0,-26,27)$

يمر المستقيم L بالنقطتين $A(-2,9,1)$ و $B(10,5,-7)$

20) اكتب معادلة متجهة للمستقيم L.

21) أبيّن ان النقطة $(19,2,-13)$ تقع على المستقيم L.

22) جد قيمة a اذا كانت النقطة $(1,a,-1)$ تقع على المستقيم L

~~24) جد نقطة تقع على المستقيم L ، وتقع أيضاً في المستوى xz~~

23) جد قيمة كل من b و c اذا كانت النقطة $(-8,b,c)$ تقع على المستقيم L

الحل:

20) $\overrightarrow{AB}=\langle 10+2,5-9,-7-1\rangle=\langle 12,-4,-8\rangle$
$=\langle 3,-1,-2\rangle$

$\vec{r}=\langle -2,9,1\rangle+t\langle 3,-1,-2\rangle$

21) $\langle 19,2,-13\rangle=\langle -2,9,1\rangle+t\langle 3,-1,-2\rangle$
$\langle 19,2,-13\rangle=\langle -2,9,1\rangle+\langle 3t,-t,-2t\rangle$
$\langle 19,2,-13\rangle=\langle -2+3t,9-t,1-2t\rangle$

رافت صابح

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه فإن النقطة (19,2,-13) تقع على المستقيم L لأننا نستنتج من تعويضها t=7 في معادلته

$19 = -2+3t \rightarrow t=7$

$2 = 9-t \rightarrow t=7$

$-13 = 1-2t \rightarrow t=7$

22) النقطة تقع وعليه تحقق معادلته

$\langle 1, a, -1\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$

$1-2t = -1 \rightarrow t = 1$

$a = 9-t \rightarrow a = 9-1 = 8$

23) النقطة (-8, b, c) تحقق معادلته

$\langle -8, b, c\rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t\rangle$

$-8 = -2+3t \rightarrow t = -2$

$b = 9-t \rightarrow b = 9+2 = 11$

$c = 1-2t \rightarrow c = 1+4 = 5$

24) هنا الإحداثي y صفراً وعليه لأنها تقع في المستوى xz

$\langle x, 0, z\rangle$

نعوض بدل r ونساوي الإحداثيات المتناظرة

$9-t=0 \Rightarrow t = 9$

$x = -2+3t = -2+27 = 25$

$z = 1-2t = 1-18 = -17$

$(25, 0, -17)$ النقطة المطلوبة

مرافقتي ضيافي

25) اذا كان $\vec{m} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ و $\vec{n} = \langle -5, 4, a \rangle$ وكان المتجهة $3\vec{n} + b\vec{m}$ يوازي المتجه $\langle 3, -3, 5 \rangle$ جد قيمة كل من a و b

الحل :

$$3\vec{n} + b\vec{m} = 3\langle -5, 4, a \rangle + b\langle 1, -2, 3 \rangle$$
$$= \langle -15, 12, 3a \rangle + \langle b, -2b, 3b \rangle$$
$$= \langle -15 + b, 12 - 2b, 3a + 3b \rangle$$

بما انه يوازي $\langle 3, -3, 5 \rangle$ فان

$$\langle -15 + b, 12 - 2b, 3a + 3b \rangle = k\langle 3, -3, 5 \rangle$$ بالمقارنة

$-15 + b = 3k$ — (1)
$12 - 2b = -3k$ — (2)
$3a + 3b = 5k$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) ينتج
$b = -3, \ k = -6$
نعوض في (3) :
$3a - 9 = -30 \rightarrow a = -7$

---

26) اذا كان $\vec{V} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ جد قيمة كل من a و b و c
علماً بان اتجاه $\vec{V}$ في اتجاه محور y الموجب و $|\vec{V}| = 34$

الحل :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 3a \\ -5a \\ 6a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 4b \\ 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b \\ -5a+4b \\ 6a+6c \end{pmatrix}$$

تذكير متجه محور y الموجب $\langle 0, 1, 0 \rangle$
متجه محور x الموجب $\langle 1, 0, 0 \rangle$
متجه محور z الموجب $\langle 0, 0, 1 \rangle$

بما انه في اتجاهه فهو يوازيه

وعليه

$$\begin{pmatrix} 3a+b \\ -5a+4b \\ 6a+6c \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \\ 0 \end{pmatrix}$$

وكذلك $|\vec{V}| = \sqrt{0 + K^2 + 0}$
$34 = \sqrt{K^2}$ ومنه $K = 34$

راقت صباحي ٠٧٥٠٠٠٠٢٤١

وعليه :

$$\begin{pmatrix}3a+b\\-5a+4b\\6a+6c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\34\\0\end{pmatrix}$$

نقارن :

$3a+b=0$ — (1)

$-5a+4b=34$ — (2)

$6a+6c=0$ — (3)

نحل المعادلات ونستنتج

$a=-2$ ، $b=6$ و $c=2$

متجهات المواقع للنقاط A و B و C الواقعة على مستقيم واحد هي

$\vec{a}=2\hat{i}+p\hat{j}+q\hat{k}$ ، $\vec{b}=-4\hat{i}+13\hat{j}-k$ ، $\vec{c}=14\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$

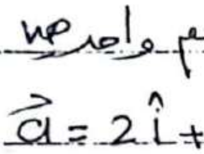
(27) جد قيمة p

(28) جد قيمة q

(29) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين A و B مع المستوى yz

(30) جد طول $\overrightarrow{AC}$ في صورة $a\sqrt{14}$ حيث a عدد صحيح

الحل : نجد معادلة المستقيم من خلال اختيار أي نقطتين تمر بها ، b و c
b و c لا تحتوي مجاهيل



المتجه الموازي : $\overrightarrow{BC}=(14+4)\hat{i}+(1-13)\hat{j}+(5+1)\hat{k}$

نبسط $\overrightarrow{BC}=18\hat{i}-12\hat{j}+6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{r}=-4\hat{i}+13\hat{j}-k+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

نعوض النقطة a بدل $\vec{r}$ لأنها تقع على المستقيم

بالمقارنة $2\hat{i}+p\hat{j}+q\hat{k}=-4\hat{i}+13\hat{j}-k+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$2=-4+3t \rightarrow t=2$

$p=13-2t \rightarrow p=13-4=9$

$q=-1+t \rightarrow q=-1+2=1$

رافت ضافي

نجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ وهي نفسها معادلة $\overleftrightarrow{BC}$

تذكير: النقطة التي تقع في المستوى yz هو $(0, y, z)$

نعوضها بدل $\vec{r}$ في معادلة المستقيم

$$y\hat{j} + z\hat{k} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

بالمقارنة

$$0 = -4 + 3t \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$y = 13 - 2t \rightarrow y = 13 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{31}{3}$$

$$z = -1 + t \rightarrow z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

النقطة المطلوبة $\left(0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3}\right)$

30) $A(2, 9, 1)$, $C(14, 1, 5)$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(14-2)^2 + (1-9)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{224}$$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(16)(14)} = 4\sqrt{14}$$

31) $A(1, 2)$ ، $B(2, 3)$ نقطتان في المستوى الاحداثي، جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين، ثم جد معادلة متجهة لهذا المستقيم مقارناً بين المعادلتين.

الحل: نجد الميل

$$m = \frac{2-3}{1-2} = 1$$

$$y - 3 = 1(x-2) \rightarrow y = x + 1$$

معادلة ديكارتية في المستوى xy

الآن نجد المعادلة المتجهة للمستقيم

المتجه الموازي $\vec{v} = \langle 1-2, 2-3 \rangle$

$= \langle -1, -1 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 2, 3 \rangle + t\langle -1, -1 \rangle$$

مرافق ضياء ٠٥٠٢٠٤

الملاحظة ـ يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة كما يلي

$$\vec{r} = \langle x, y \rangle = \langle 2-t , 3-t \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2-t \rightarrow t = 2-x \\ y = 3-t \rightarrow t = 3-y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2-x = 3-y \\ y = x+1 \end{array}$$

اذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطة $A(-3,-1,12)$ والنقطة $B(-2,0,11)$ وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1 ويمر بالنقطة $C(11,9,12)$ اجب عن السؤالين :

(32) جد معادلة متجهة للمستقيم l_1

(33) جد معادلة متجهة للمستقيم l_2

الحل :

32) المتجه الموازي $\vec{V} = \vec{AB} = \langle -2+3, 0+1, 11-12 \rangle$
$= \langle 1, 1, -1 \rangle$

$$\vec{r} = \langle -3, -1, 12 \rangle + t \langle 1, 1, -1 \rangle$$

33) النقطة جاهزة ، نحتاج المتجه الموازي وبما أن $l_2 \parallel l_1$ وعليه المتجه الموازي لهما متساوي $\langle 1, 1, -1 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 11, 9, 12 \rangle + t \langle 1, 1, -1 \rangle$$

رافت ضايفي

اذا كانت $A(-1,-2,1)$ ، $B(-3,4,-5)$ و $C(0,-2,4)$

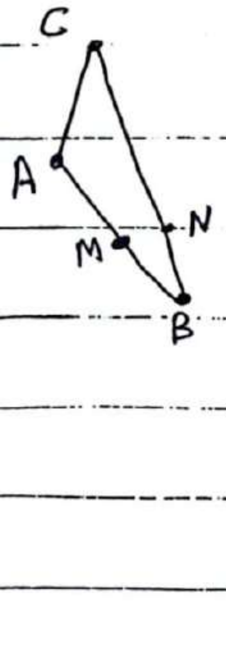
اجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) جد احداثيات النقطة M التي هي منتصف $\overline{AB}$

35) اذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ وكان $2|\overrightarrow{BN}|=|\overrightarrow{NC}|$ جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين M و N .

الحل 34) $M=\left(\frac{-3-1}{2},\frac{4-2}{2},\frac{-5+1}{2}\right)=(-2,1,-2)$

35) هنا تتوفر نقطة M وعليه نحتاج الى الاتجاه الموازي $\overrightarrow{MN}$



قاعدة المثلث $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}$ ①

هنا نحتاج معرفة $\overrightarrow{BN}$ بدلالة نقطتين

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BN}$$
$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

نعوض في ①

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{MN}=\langle -3+2,4-1,-5+2\rangle+\frac{1}{3}\langle 0+3,-2-4,4+5\rangle$$
$$\overrightarrow{MN}=\langle -1,3,-3\rangle+\langle 1,-2,3\rangle$$
$$\overrightarrow{MN}=\langle 0,1,0\rangle$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$: $\vec{r}=\langle -2,1,-2\rangle+t\langle 0,1,0\rangle$

رافت ضاحي

(26) مر القمر الصناعي S_1 بموقعين هما $A(30,-75,90)$ و $B(100,65,220)$ ومر القمر الصناعي S_2 بموقعين هما $C(-20,45,200)$ و $D(120,85,160)$ جد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ من معادلتيهما.

الحل:

$\overrightarrow{AB} = \langle 100-30, 65+75, 220-90 \rangle$

$= \langle 70, 140, 130 \rangle$ نبسط $\rightarrow \langle 7, 14, 13 \rangle$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{r} = \langle 30, -75, 90 \rangle + t\langle 7, 14, 13 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 120+20, 85-45, 160-200 \rangle$

$= \langle 140, 40, -40 \rangle$ نبسط $\rightarrow \langle 7, 2, -2 \rangle$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$: $\vec{r} = \langle -20, 45, 200 \rangle + u\langle 7, 2, -2 \rangle$

غير متوازيين لأن $\langle 7, 14, 13 \rangle \neq k\langle 7, 2, -2 \rangle$

نفحص التقاطع

$\langle 30, -75, 90 \rangle + t\langle 7, 14, 13 \rangle = \langle -20, 45, 200 \rangle + u\langle 7, 2, -2 \rangle$

$30 + 7t = -20 + 7u$ — (1)

$-75 + 14t = 45 + 2u$ — (2)

$90 + 13t = 200 - 2u$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) نجد أن $t = \frac{235}{21}$ و $u = \frac{385}{21}$

وعند التعويض في معادلة (3) لا تحققها وعليه غير متقاطعين

وعليه فإن المستقيمان متخالفان

رأفت ضاحي

37) أرسلت إشارة لاسلكية من موقع إحداثياته $(-1, 4, 5)$ إلى موقع إحداثياته $(-11, 9, 15)$ وفي الوقت نفسه أرسلت إشارة من موقع إحداثياته $(-5, 9, 3)$ إلى موقع إحداثياته $(2, -5, 17)$ إذا علمت أن الإشارة تسير في خط مستقيم، هل تتقاطع مسارا الإشارتين

الحل :-

نجد معادلة مسار كل إشارة

$$\langle -11+1, 9-4, 15-5\rangle = \langle -10, 5, 10\rangle$$
$$= \langle -2, 1, 2\rangle$$

$$\vec{r} = \langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -2, 1, 2\rangle$$

نبسط

$$\langle 2+5, -5-9, 17-3\rangle = \langle 7, -14, 14\rangle$$
$$= \langle 1, -2, 2\rangle$$

$$\vec{r} = \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle 1, -2, 2\rangle$$

نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$$\langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -2, 1, 2\rangle = \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle 1, -2, 2\rangle$$

$-1-2t = -5+u$ — (1)

$4+t = 9-2u$ — (2)

$5+2t = 3+2u$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) فينتج

$u = 2$, $t = 1$

نعوضها في (3) :-

$$5+2t = 3+2u$$
$$5+2 = 3+4$$
$$7 = 7 \checkmark$$

وعليه متقاطعان

لمعرفة نقطة التقاطع نعوض $t = 1$:

$$\vec{r} = \langle -1, 4, 5\rangle + \langle -2, 1, 2\rangle = \langle -3, 5, 7\rangle$$

نقطة التقاطع $(-3, 5, 7)$

رأفت ضاحي

38) يمر المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q} = \langle -6, 14, -19 \rangle$ ويمر أيضاً بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s} = \langle -4, 6, -3 \rangle$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ويوازي المستقيم $\vec{r} = \langle 5, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$ إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U فاثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين

الحل: نجد U

$$\vec{QS} = \langle -4+6, 6-14, -3+19 \rangle = \langle 2, -8, 16 \rangle$$
$$= \langle 1, -4, 8 \rangle$$

معادلة المستقيم l_1

$$\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + t\langle 1, -4, 8 \rangle$$

بما أن l_2 يوازي المستقيم $\vec{r} = \langle 5, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$ فإن $\vec{v} = \langle 4, 7, 4 \rangle$

معادلة المستقيم l_2

$$\vec{r} = \langle 1, 9, 9 \rangle + u\langle 4, 7, 4 \rangle$$

نساوي $\vec{r_1}$ في المعادلتين

$$\langle -6, 14, -19 \rangle + t\langle 1, -4, 8 \rangle = \langle 1, 9, 9 \rangle + u\langle 4, 7, 4 \rangle$$

$-6 + t = 1 + 4u$ — (1)

$14 - 4t = 9 + 7u$ — (2)

$-19 + 8t = 9 + 4u$ — (3)

بحل المعادلتان (2) و (3)

$t = 3$, $u = -1$

نعوض في معادلة (1)

$-6 + 3 = 1 - 4$ ✓

نقطة التقاطع

$$\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + 3\langle 1, -4, 8 \rangle$$
$$= \langle -3, 2, 5 \rangle$$

ومنه إحداثيات U هو $(-3, 2, 5)$

نجد أطوال أضلاع المثلث

$$TU = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-9)^2 + (5-9)^2} = 9$$

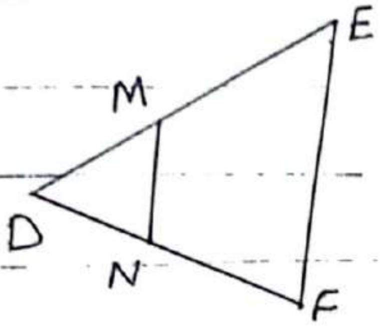
$$SU = \sqrt{(-3+4)^2 + (2-6)^2 + (5+3)^2} = 9$$

بما أن $TU = SU$

فإن المثلث متطابق الضلعين

أ. رأفت صافي

في الشكل المجاور $DE = 12\vec{a}$ ، $DF = 8\vec{b}$ والنقطة M تقسم DE بنسبة 2 : 1 والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة 1:2

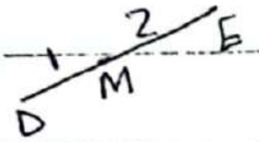


(39) اثبت ان FEMN شبه منحرف

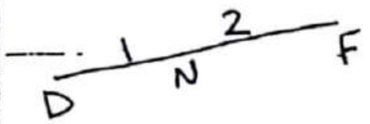
(40) اذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 جد مساحة FEMN

الحل :

(39) نبحث عن ضلعين متقابلين متوازيين



$MD = \frac{1}{3} ED$



$DN = \frac{1}{3} DF$

قاعدة المثلث $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

$\cancel{= \frac{1}{3}(-12\vec{a}) + \frac{1}{3}(8\vec{b})}$

$= \frac{1}{3}(-12\vec{a} + 8\vec{b})$ —— (1)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -12a + 8b$ —— (2)

نعوض معادلة (2) في (1)

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

وعليه $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{EF}$ ∴ الشكل FEMN رباعي فيه ضلعان متوازيان

فهو شبه منحرف

(40) مساحة شبه المنحرف هي مساحة المثلث الاكبر مطروح منه مساحة المثلث الاصغر

مساحة المثلث DNM $= \frac{1}{2}(DN)(DM)\sin D$ —— (1)

مساحة المثلث DFE $= \frac{1}{2}(DF)(DE)\sin D$ —— (2)

بقسمة المعادلتين

بتادلي

$\frac{\text{مساحة المثلث } DNM}{\text{مساحة المثلث } DFE} = \frac{(DN)(DM)}{(DF)(DE)} = \frac{(\frac{1}{3}DF)(\frac{1}{3}DE)}{(DF)(DE)} = \frac{1}{9}$

$\frac{\text{مساحة المثلث } DNM}{72} = \frac{1}{9}$ ⟶ مساحة المثلث DNM $= 8$

وعليه مساحة شبه المنحرف $72 - 8 = 64$

رافت ضاحي

(4: 1

جد جميع النقاط على المستقيم : $\vec{r} = \langle 3, -2, -6\rangle + t\langle 1, 2, 3\rangle$
التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل

الحل :-

احداثي النقط الواقعة على المستقيم المعطى تكون احداثياتها :-

$C\ (3+t\ ,\ -2+2t\ ,\ -6+3t)$

$OC = \sqrt{(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2}$ بعد C عن نقطة الأصل (0,0,0)

$29 = \sqrt{9+6t+t^2+4-8t+4t^2+36-36t+9t^2}$

$841 = 14t^2 - 38t + 49$ نربع الطرفين وبسط نرتب

$14t^2 - 38t - 792 = 0$

$7t^2 - 19t - 396 = 0$

$(t-9)(7t+44) = 0$

$t = 9\ ,\ t = \frac{-44}{7}$

عليه توجد نقطتان :-

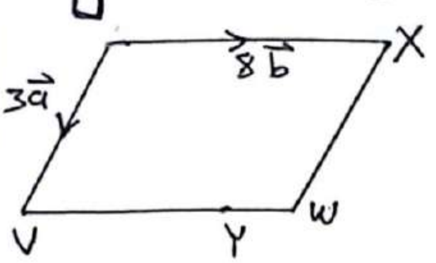
عند $t = 9 \longrightarrow (3+9, -2+18, -6+27) = (12, 16, 21)$

$t = \frac{-44}{7} \longrightarrow \left(-\frac{23}{7}, \frac{-102}{7}, \frac{-174}{7}\right)$

رافت ابراهيم صافي

يمثل الشكل المجاور متوازي الاضلاع UVWX اذا كان $\overrightarrow{UV} = 3\vec{a}$, $\overrightarrow{UX} = 8\vec{b}$ وكانت النقطة Y تقع بين V و W حيث $VY = 3YW$ و Z هيا نقطة حيث $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$

أثبت ان U و Y و Z على استقامة واحدة



الحل :- نقوم باثبات ان $\overrightarrow{UY} \parallel \overrightarrow{YZ}$

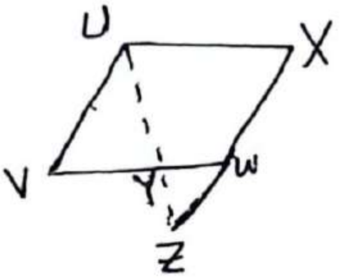
(قاعدة المثلث) $\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY}$

$= 3\vec{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{VW} \rightarrow \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{UX}$

$= 3\vec{a} + \frac{3}{4}(8\vec{b})$

$\overrightarrow{UY} = 3\vec{a} + 6\vec{b}$

$\overrightarrow{UY} = 3(\vec{a} + 2\vec{b})$ —— (1)



قاعدة المثلث $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{VW} + \frac{1}{3}\overrightarrow{XW}$

من هنا

$= \frac{1}{4}(8\vec{b}) + \frac{1}{3}(3\vec{a})$

$= 2\vec{b} + \vec{a}$ —— (2)

من المعطيات

$\overrightarrow{XW} = 3\vec{a}$

$\overrightarrow{VW} = 8\vec{b}$

$VW = VY + YW$

$VW = VY + \frac{1}{3}VY$

$VW = \frac{4}{3}VY$

$VY = \frac{3}{4}VW$

$VW = 3YW + YW$

$VW = 4YW$

$YW = \frac{1}{4}VW$

$XZ = XW + WZ$

$\frac{4}{3}XW = XW + WZ$

$WZ = \frac{1}{3}XW$

نعوض (2) في (1) :-

$\overrightarrow{UY} = 3\overrightarrow{YZ}$

وعليه $\overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{UY}$

بما انهما ينطلقان من النقطة Y فان النقاط Y و Z و U تقع على استقامة واحدة

رأفت ابراهيم صافي

كتاب التمارين

بيّن اذا كان الشكل الرباعي ABCD في الحالتين الآتيتين متوازي اضلاع أم لا.

① $A(3,-2,1)$ و $B(-4,0,8)$ و $C(-6,5,5)$ و $D(8,1,-9)$

② $A(12,5,-8)$ و $B(6,2,-10)$ و $C(-8,1,13)$ و $D(-2,4,15)$

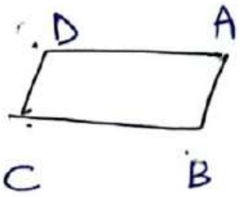
الحل:

1) $\overrightarrow{AB} = \langle -4-3, 0+2, 8-1 \rangle = \langle -7, 2, 7 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle -6+4, 5-0, 5-8 \rangle = \langle -2, 5, -3 \rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle 8-3, 1+2, -9-1 \rangle = \langle 5, 3, -10 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle -6-8, 5-1, 5+9 \rangle = \langle -14, 4, 14 \rangle$



$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC} \neq k\overrightarrow{AD}$

وعليه الشكل ليس متوازي اضلاع.

متوازي الاضلاع يكون كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين بالطول

2) $\overrightarrow{AB} = \langle 6-12, 2-5, -10+8 \rangle = \langle -6, -3, -2 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle -8-6, 1-2, 13+10 \rangle = \langle -14, -1, 23 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle -8+2, 1-4, 13-15 \rangle = \langle -6, -3, -2 \rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle -2-12, 4-5, 15+8 \rangle = \langle -14, -1, 23 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \longrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \longrightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

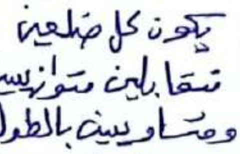
الشكل متوازي اضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان

---

③ اذا كان $A(2,3,1)$ و $B(6,5,4)$ و $C(3,1,5)$ وكان ABCD متوازي اضلاع، فما احداثيات D

$\overrightarrow{AB} = \langle 6-2, 5-3, 4-1 \rangle = \langle 4, 2, 3 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle 3-x, 1-y, 5-z \rangle$



$\langle 4, 2, 3 \rangle = \langle 3-x, 1-y, 5-z \rangle$

$3-x = 4 \rightarrow x = -1$

$1-y = 2 \rightarrow y = -1$

$5-z = 3 \rightarrow z = 2$

تساوي متجهان اذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه

احداثيات D هو $(-1, -1, 2)$

حل آخر

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

$\langle 6,5,4 \rangle - \langle 2,3,1 \rangle = \langle 3,1,5 \rangle - \overrightarrow{OD}$

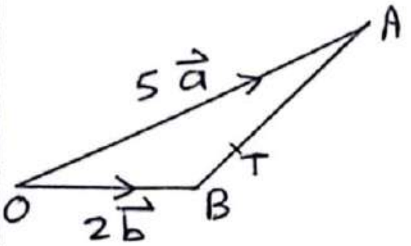
$\langle 4, 2, 3 \rangle = \langle 3,1,5 \rangle - \overrightarrow{OD} \longrightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3,1,5 \rangle - \langle 4,2,3 \rangle = \langle -1,-1,2 \rangle$

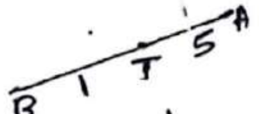
رأفت ابراهيم صافي

(4) في الشكل المجاور ، OAB مثلث فيه $\overrightarrow{OA}=5\vec{a}$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{b}$ والنقطة T تقع على الضلع AB حيث

$AT:TB=5:1$ بيّن ان $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{b}+\vec{a}$





$BT=\frac{1}{6}BA$

الحل :-

$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT}$ (قاعدة المثلث)

$=2\vec{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$

$=2\vec{b}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})$

$=2\vec{b}+\frac{1}{6}(-2\vec{b}+5\vec{a})$

$=2\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}$

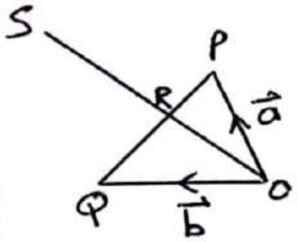
$=\frac{5}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}$

$\overrightarrow{OT}=\frac{5}{6}(2\vec{b}+\vec{a})$

وعليه $\overrightarrow{OT}\parallel(2\vec{b}+\vec{a})$

في الشكل المجاور ، OPQ مثلث فيه $\overrightarrow{RQ}=2\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ ، $\overrightarrow{OQ}=\vec{b}$



(5) بيّن ان $\overrightarrow{OS}=2\vec{a}+\vec{b}$

(6) اضيفت النقطة T الى الشكل ، حيث $\overrightarrow{OT}=-\vec{b}$ أثبت ان النقاط T و P و S تقع على استقامة واحدة

(5)

$\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}$

$=3(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR})$ قاعدة المثلث

$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ})$

$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}))$

$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b}))=3\vec{a}-\vec{a}+\vec{b}$

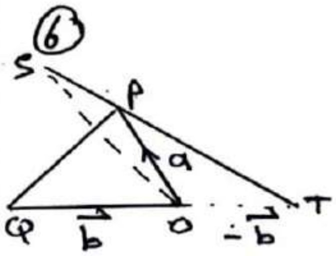
$=2\vec{a}+\vec{b}$

$PQ=PR+RQ$

$=PR+2PR$

$PQ=3PR$

(6)



$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OS}=\vec{b}+2\vec{a}+\vec{b}$

$=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OP}=\vec{b}+\vec{a}$

وعليه

$\overrightarrow{TS}=2\overrightarrow{TP}$

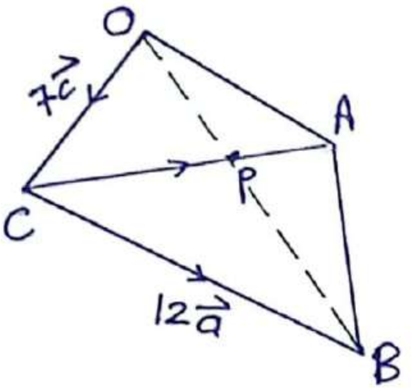
$\overrightarrow{TS}\parallel\overrightarrow{TP}$

النقاط T و P و S تقع على استقامة واحدة

رأفت ابراهيم صافي

1) في الشكل الرباعي OABC المجاور، $\vec{OA}=8\vec{a}$

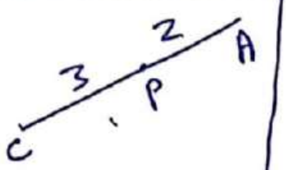
$\vec{OC}=7\vec{c}$، و $\vec{CB}=12\vec{a}$ والنقطة P تقسم $\overline{CA}$ بنسبة 3:2



(7) جد المتجه $\vec{OP}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{c}$

(8) أثبت ان النقاط O و P و B تقع على استقامة واحدة

(9) جد النسبة OP : PB



$AP=\frac{2}{5}AC$

الحل: (7) $\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$ « قاعدة المثلث »

$=8\vec{a}+\frac{2}{5}AC$

$=8\vec{a}+\frac{2}{5}(\vec{AO}+\vec{OC})$

$=8\vec{a}+\frac{2}{5}(-8\vec{a}+7\vec{c})$

$=8\vec{a}-\frac{16}{5}\vec{a}+\frac{14}{5}\vec{c}=\frac{24}{5}\vec{a}+\frac{14}{5}\vec{c}$

$=\frac{2}{5}(12\vec{a}+7\vec{c})$

---

(8) نثبت ان $\vec{OP}\parallel\vec{OB}$

$\vec{OB}=\vec{OC}+\vec{CB}$

$=7\vec{c}+12\vec{a}$

وعليه $\vec{OP}=\frac{2}{5}\vec{OB}$

ومنه $\vec{OP}\parallel\vec{OB}$ متوازيان وعليه B و P و O على استقامة واحدة

---

(9) $\frac{OP}{OB}=\frac{2}{5}$ من فرع (8)

$\frac{OP}{OP+PB}=\frac{2}{5}$ ضرب تبادلي

$5OP=2OP+2PB$

$3OP=2PB$ (تقسم على 3PB)

$\frac{OP}{PB}=\frac{2}{3}$

رأفت ابراهيم صافي

(10) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{v}=4\hat{j}-2\hat{k}$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها $2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

الحل:

$$\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+t(4\hat{j}-2\hat{k})$$

فك الأقواس وجمع الحدود المتشابهة

$$\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+4t\hat{j}-2t\hat{k}$$

$$\vec{r}=2\hat{i}+(3+4t)\hat{j}-(5+2t)\hat{k}$$

---

(11) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{v}=\langle -4,5,8\rangle$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو $\langle 2,-7,11\rangle$

الحل:

$$\vec{r}=\langle 2,-7,11\rangle+t\langle -4,5,8\rangle$$

فك الأقواس وتجميع

$$=\langle 2-4t,-7+5t,11+8t\rangle$$

جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي

(12) $(1,-7),(6,19)$

(13) $(-5,4,15),(7,13,-8)$

(14) $(5,22,-8),(13,10,3)$

(15) $(0,2,-5),(9,4,6)$

الحل:

(12)

$$\vec{v}=\langle 6-1,19+7\rangle=\langle 5,26\rangle$$

$$\vec{r}=\langle 1,-7\rangle+t\langle 5,26\rangle$$

(13)

$$\vec{v}=\langle 7+5,13-4,-8-15\rangle=\langle 12,9,-23\rangle$$

$$\vec{r}=\langle -5,4,15\rangle+t\langle 12,9,-23\rangle$$

(14)

$$\vec{v}=\langle 13-5,10-22,3+8\rangle=\langle 8,-12,11\rangle$$

$$\vec{r}=\langle 5,22,-8\rangle+t\langle 8,-12,11\rangle$$

(15)

$$\vec{v}=\langle 9-0,4-2,6+5\rangle=\langle 9,2,11\rangle$$

$$\vec{r}=\langle 0,2,-5\rangle+t\langle 9,2,11\rangle$$

أ/ أفنان ابراهيم صباغ

اذا كانت $\vec{r} = \langle -5, 8, 4 \rangle + t\langle 3, -2, 9 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، اجب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً

(16) هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l

(17) اذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l جد قيمة كل من b و c

(18) ما احداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz

الحل:

(16) $\langle 3, 7, 11 \rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t \rangle$

$-5+3t = 3 \longrightarrow t = \frac{8}{3}$

$8-2t = 7 \longrightarrow t = \frac{1}{2}$

$4+9t = 11 \longrightarrow t = \frac{7}{9}$

بما انه لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث فان النقطة $(3, 7, 11)$ لا تقع على المستقيم

(17) $\langle 1, b, c \rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t \rangle$

$-5+3t = 1 \rightarrow t = 2$

$b = 8-2t \rightarrow b = 8-4 = 4$

$c = 4+9t \rightarrow c = 4+18 = 22$

(18)

النقطة في المستوى xz احداثياتها $(x, 0, z)$

$\langle x, 0, z \rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t \rangle$

$8-2t = 0 \longrightarrow t = 4$

$x = -5+3t \rightarrow x = -5+12 = 7$

$z = 4+9t \rightarrow z = 4+36 = 40$

النقطة هي $(7, 0, 40)$

رأفت ابراهيم صافي

19) اذا كانت $\vec{r} = \langle 3, 2, 1\rangle + t\langle 4, a, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \langle -2, 4, 3\rangle + u\langle 3, -2, -9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$

الحل :-

فكك الأقواس ثم نقارن

$\langle 4, a, -12\rangle = k\langle 3, -2, -9\rangle$

$4 = 3k \rightarrow k = \frac{4}{3}$

$a = -2k \rightarrow a = (-2)(\frac{4}{3}) = \frac{-8}{3}$

يمر المستقيم l بالنقطتين $U(p, -3, -1)$ و $V(2, 5, -3)$ وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l.

20) جد قيمة p

21) اكتب معادلة متجهة للمستقيم l

22) جد قيمة q

الحل :- نجد معادلة المستقيم l

$\vec{VU} = \langle p-2, -3-5, -1+3\rangle$

$\vec{VU} = \langle p-2, -8, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle p-2, -8, 2\rangle$

كوضنا النقطة $(7, 1, q)$ بدل $\vec{r}$

$\langle 7, 1, q\rangle = \langle 2 + t(p-2), 5 + -8t, -3 + 2t\rangle$

$5 - 8t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{2}$

$q = -3 + 2t \rightarrow q = -3 + 1 = -2$

$7 = 2 + t(p-2) \rightarrow 5 = \frac{1}{2}(p-2) \rightarrow p - 2 = 10 \rightarrow p = 12$

معادله المستقيم حيث عوضنا بدل p و q

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle 10, -8, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle 5, -4, 1\rangle$

أ. رأفت ابراهيم صباغ

23) اذا كانت $A(3, -2, 4)$ ، وكانت $B(6, 0, 3)$
وكانت $\vec{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1 حيث $\lambda = 2$
جد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يمر بالنقطة D ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

الحل :-

$$\vec{D} = \langle 3, -2, 4\rangle + 2\langle 1, 2, -1\rangle = \langle 3+2, -2+4, 4-2\rangle = \langle 5, 2, 2\rangle$$

نحتاج نقطة ومتجه موازي

$$\overrightarrow{AB} = \langle 6-3, 0+2, 3-4\rangle = \langle 3, 2, -1\rangle$$

$$\vec{r} = \langle 5, 2, 2\rangle + t\langle 3, 2, -1\rangle$$

حدد اذا كان المستقيمان l_1 و l_2 متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي

24) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$ و $(4, 3, 3)$ ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين $(4, 1, 1)$ و $(5, 1, 0)$

25) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين $(5, 3, 1)$ و $(3, 1, -2)$ ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين $(-3, 7, 11)$ ، و $(9, 6, -2)$

الحل :

24) نجد معادلة كل مستقيم

$$l_1 : \vec{v} = \langle 5-4, 2-3, 1-3\rangle = \langle 1, -1, -2\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 4, 3, 3\rangle + t\langle 1, -1, -2\rangle$$

$$l_2 : \vec{v} = \langle 4-5, 1-1, 1-0\rangle = \langle -1, 0, 1\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 5, 1, 0\rangle + u\langle -1, 0, 1\rangle$$

غير متوازيان لأن

$$\langle 1, -1, -2\rangle \neq K\langle -1, 0, 1\rangle$$

نفحص التقاطع

رافت ابراهيم صافي

$\langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$

$4+t=5-u$ — ①
$3-t=1 \longrightarrow t=2$
$3-2t=u$ — ②

بحل معادلة ① :
$4+2=5-u$
$u=-1$

نعوض في معادلة ② :
$3-2t=u$
$3-4=-1$ ✓

وعليه المستقيمان متقاطعان

$\vec{r} = \langle 4,3,3\rangle + 2\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 4+2, 3-2, 3-4\rangle = \langle 6,1,-1\rangle$

وعليه نقطة التقاطع هي $(6,1,-1)$

---

25) نجد معادلة كل مستقيم :

اتجاه L_1 : $\langle 5-3, 3-1, 1+2\rangle = \langle 2,2,3\rangle$

$\vec{r} = \langle 3,1,-2\rangle + t\langle 2,2,3\rangle$

اتجاه L_2 : $\langle 11-9, 7-6, -3+2\rangle = \langle 2,1,-1\rangle$

$\vec{r} = \langle 9,6,-2\rangle + u\langle 2,1,-1\rangle$

غير متوازيين لأن : $\langle 2,2,3\rangle \neq k\langle 2,1,-1\rangle$

نفحص التقاطع :

$\langle 3+2t, 1+2t, -2+3t\rangle = \langle 9+2u, 6+u, -2-u\rangle$

$3+2t=9+2u$ — ①
$1+2t=6+u$ — ②
$-2+3t=-2-u$ — ③

بحل معادلة ① و ② فينتج
$u=-1 ,\ t=2$

نعوض في معادلة ③ :
$-2+3t=-2-u$
$-2+6=-2+1$
$4 \neq -1$ ✗

وعليه المستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين فهما متخالفين.

د. أفنان إبراهيم صافي

(26) يمر المستقيم l بالنقطتين $A(2,1,3)$ و $B(5,-2,1)$ اذا وقعت النقطة C على المستقيم l وكان $AC=3CB$ جد جميع احداثيات النقطة C الممكنة

الحل :- نجد معادلة المستقيم

$$\overrightarrow{AB} = \langle 5-2, -2-1, 1-3 \rangle = \langle 3, -3, -2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 2, 1, 3 \rangle + t\langle 3, -3, -2 \rangle$$

احداثي النقطة c هو $(2+3t, 1-3t, 3-2t)$

$$AC = 3\,CB$$

$$\sqrt{(2+3t-2)^2+(1-3t-1)^2+(3-2t-3)^2} = 3\sqrt{(2+3t-5)^2+(1-3t+2)^2+(3-2t-1)^2}$$

بتربيع الطرفين وحله ...

$$t = \frac{3}{2}, \quad t = \frac{3}{4}$$

عند $t = \frac{3}{2}$:

$$\left(2+\frac{9}{2}, 1-\frac{9}{2}, 3-3\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0\right)$$

$t = \frac{3}{4}$

$$\left(2+\frac{9}{4}, 1-\frac{9}{4}, 3-\frac{6}{4}\right) = \left(\frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

رأفت ابراهيم صافي

(27) المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي :-

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}$$

بيّن ان هذه المستقيمات تكون مثلثاً ، ثم جد اطوال اضلاعه.

الحل :-

هنا نثبت ان كل زوج من ازواج المستقيمات متقاطعان ونجد نقطة التقاطع

اولاً

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$-3+5t=1+s$ — (1)

$1-2t=5+s$ — (2)

$4-4t=-4-2s$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) نستنتج

$s=-4,\ t=0$

نعوض في (3) :-

$4-4t=-4-2s$

$4=-4+8$ ✓

نجد نقطة التقاطع ، نعوض $t=0$ في $\langle -3+5t,\ 1-2t,\ 4-4t\rangle$

$A(-3,1,4)$

الافضل كتابتها على صورة $\langle\ \rangle$

ثانياً :-

$\langle 1+s,\ 5+s,\ -4-2s\rangle=\langle 2+2q,\ -1-5q,\ 2q\rangle$

$1+s=2+2q$ — (1)

$5+s=-1-5q$ — (2)

$-4-2s=2q$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (2) ينتج

$q=-1,\ s=-1$

نعوض في معادلة (3) :-

$-4-2s=2q$

$-4+2=2(-1)$ ✓

نعوض $s=-1$

نقطة التقاطع

$\langle 1-1,\ 5-1,\ -4+2\rangle$

$B(0,4,-2)$

رافت ابراهيم صباغ

ثالثاً :- $\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$-3+5t = 2+2q$ — ①
$1-2t = -1-5q$ — ②
$4-4t = 2q$ — ③

بحل معادلة ② و ③
$q=0$, $t=1$
نعوضها في معادلة ① :-
$-3+5 = 2+0$
$2=2$ ✓

نقطة التقاطع بعوض $q=0$

$C(2,-1,0)$

وعليه كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة

بحث الأطوال :-

$$AB = \sqrt{(0+3)^2+(4-1)^2+(-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2+(-1-4)^2+(-2-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$$

$$AC = \sqrt{(2+3)^2+(-1-1)^2+(0-4)^2}$$
$$= \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45}$$

رأفت ابراهيم صالح

التحقق من فهمي ص١٤٤

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :

a) $\vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$

b) $\vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

الحل :

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (4)(-3) + (8)(7) + (-3)(2) = -12 + 56 - 6 = 38$

b) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (-3)(-12) + (5)(6) + (-1)(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$

التحقق من فهمي ص١٤٦ جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{w}$

a) $\vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

الحل :

$|\vec{u}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$

$|\vec{w}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (-3)(4) + (5)(2) + (-4)(-3)$

$= -12 + 10 + 12$

$= 10$ حادة

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{29}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right)$

$\simeq 74.8^\circ$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle$

$\vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$

الحل :

$|\vec{u}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$

$|\vec{w}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2)(-3) + (-10)(15) + (6)(-9)$

$= -6 - 150 - 54$

$= -210$ منفرجة

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\sqrt{315}}\right)$

$= \cos^{-1}(-1)$

$= 180^\circ$

رافت ضاهر

التحقق من فهمي ص 147

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت

$\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قياس

الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 الى أقرب درجة.

الحل:

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1)(2)+(0)(-5)+(-3)(-1) = 2+0+3 = 5$

$|\vec{u}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$ و $|\vec{v}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{30}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right)$

$\theta \simeq 73^\circ$

وعليه قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 و l_2 هو 73°

التحقق من فهمي ص 149

جد مساحة المثلث EFG الذي احداثيات رؤوسه هي

$E(2,1,-1)$ و $F(5,1,7)$, $G(6,-3,1)$

الحل:

$\overrightarrow{GF} = \langle 5-6, 1+3, 7-1\rangle = \langle -1, 4, 6\rangle$

$\overrightarrow{GE} = \langle 2-6, 1+3, -1-1\rangle = \langle -4, 4, -2\rangle$

$|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$, $|\overrightarrow{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE} = (-1)(-4)+(4)(4)+(6)(-2) = 4+16-12 = 8$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right)$

$\theta \simeq 79.4^\circ$

$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|\sin\theta$

$= \left(\frac{1}{2}\right)(6)(\sqrt{53})\sin 79.4 \simeq 21.5^\circ$

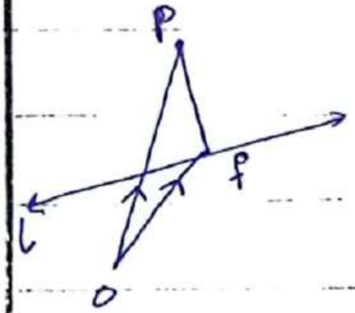
التحقق من فهمك ص ٦٣

اذا كانت $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t\langle 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}\rangle$

معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l

a) حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

b) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l.



الحل: نجهز $\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$

$$\vec{OP} = 2\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{k}$$

$$\vec{Of} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + (-3 - 3t)\hat{k}$$

$$\vec{Pf} = (14 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + (-\frac{19}{3} - 3t)\hat{k}$$

بما أن $\vec{Pf} \perp l$ فان $\vec{Pf} \cdot \vec{V} = 0$ حيث $\vec{V} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

$$(5)(14 + 5t) + (7)(11 + 7t) + (\frac{-19}{3} - 3t)(-3) = 0$$

$$70 + 25t + 77 + 49t + 19 + 9t = 0$$

$$166 + 83t = 0 \rightarrow t = -2$$

$$\vec{Of} = (16 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + (-3 + 6)\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

وعليه مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة $(6, -3, 3)$

b) نجد مقدار المتجه $\vec{Pf}$

$$\vec{Pf} = (14 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + (\frac{-19}{3} + 6)\hat{j}$$

$$\vec{Pf} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{j}$$

$$|\vec{Pf}| = \sqrt{16 + 9 + \frac{1}{9}} = \sqrt{25 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{226}{9}} = \frac{\sqrt{226}}{3}$$

[illegible]

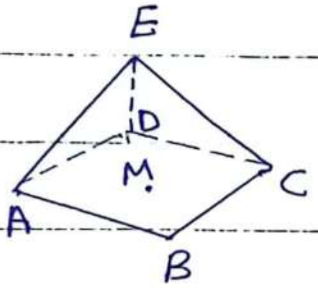
9

ثلاثية الأبعاد.

مثال: يظهر في الشكل المجاور الهرم ABCDE الذي قاعدته المربع ABCD واحداثيات رؤوسها:

$A(1,1,-1)$ ، $B(9,-1,-3)$ ، $C(9,-7,3)$ ، $D(1,-5,5)$ ، $E(8,3,7)$

ومركزه النقطة M:



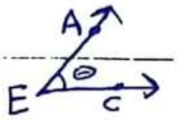
1) جد $m\angle AEC$ لأقرب عشر درجة

2) بيّن أن $m\angle AME = 90^\circ$

3) جد جيب $\angle EDB$

4) جد حجم الهرم.

الحل:



1) نجد متجهين لهما نقطة البداية نفسها

$\vec{EA} = \langle 1-8, 1-3, -1-7\rangle = \langle -7, -2, -8\rangle$

$\vec{EC} = \langle 9-8, -7-3, 3-7\rangle = \langle 1, -10, -4\rangle$

$\vec{EA}\cdot\vec{EC} = (-7)(1) + (-2)(-10) + (-8)(-4)$

$= -7 + 20 + 32 = 45$

$|\vec{EA}| = \sqrt{49+4+64} = \sqrt{117}$

$|\vec{EC}| = \sqrt{1+100+16} = \sqrt{117}$

ملاحظة: الحرف m واختصار قياس

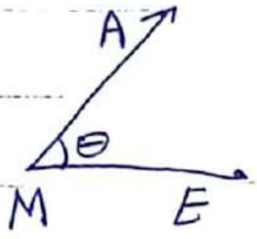
$$m\angle AEC = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{EA}\cdot\vec{EC}}{|\vec{EA}||\vec{EC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{117}\sqrt{117}}\right)$$

$$\approx 67.4^\circ$$

راقت صابح

2) M هي مركز المربع وعليه هي نقطة منتصف القطر $\overrightarrow{AC}$

$$M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (5, -3, 1)$$



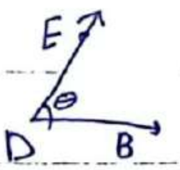
$$\overrightarrow{MA} = \langle 1-5, 1+3, -1-1 \rangle = \langle -4, 4, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{ME} = \langle 8-5, 3+3, 7-1 \rangle = \langle 3, 6, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = (-4)(3) + (4)(6) + (-2)(6)$$

$$= -12 + 24 - 12 = 0$$

بما أن $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$ فإن $\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MA}$ (متعامدان) وعليه $m\angle AME = 90^\circ$



3) $\overrightarrow{DE} = \langle 8-1, 3+5, 7-5 \rangle = \langle 7, 8, 2 \rangle$

$$\overrightarrow{DB} = \langle 9-1, -1+5, -3-5 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}, \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = (7)(8) + (8)(4) + (2)(-8) = 56 + 32 - 16 = 72$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) \simeq 56.3^\circ$$

4) حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة في ارتفاعه

القاعدة مربع ومساحة المربع هو مربع طول ضلعه

$$AB = \sqrt{(9-1)^2 + (-1-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو

EM حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة المربعة

$$EM = \sqrt{(5-8)^2 + (-3-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{9+36+36} = 9$$

$$\text{Area} = \frac{1}{3}\underbrace{\left(\sqrt{72}\right)^2}_{\text{مساحة المربع}}(9) = (3)(72) = 216$$

رأفت ضاحي

التدريب وحل المسائل

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

1) $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ، $\vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

2) $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}$ ، $\vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

3) $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle$ ، $\vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$

4) $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

الحل :-

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5)(7) + (-4)(6) + (3)(-2) = 35 - 24 - 6 = 5$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4)(12) + (-8)(9) + (-3)(-8) = 48 - 72 + 24 = 0$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5)(4) + (9)(6) + (17)(-2) = -20 + 54 - 34 = 0$

4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(3) + (-4)(10) + (12)(-5) = 3 - 40 - 60 = -97$

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين لأقرب عشر درجة .

5) $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ، $\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

الحل :-

$\vec{m} \cdot \vec{n} = (4)(3) + (-2)(4) + (5)(-2)$

$= 12 - 8 - 10 = -6$

$|\vec{m}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$

$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right)$

$\theta \simeq 99.6^\circ$

6) $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle$ و $\vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

الحل :-

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (3)(5) + (-2)(3) + (9)(-4)$

$= 15 - 6 - 36 = -27$

$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$

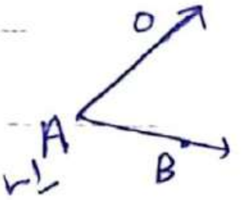
$|\vec{w}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94}\sqrt{50}}\right)$

$\theta \simeq 113.2^\circ$

راقت ضايع ٢٠٠٠٥ ٢

7) اذا كانت $A(3,5,-4)$ و $B(7,4,-3)$ و O نقطة الاصل جد $m\angle OAB$ الى اقرب درجة



الحل:

$\overrightarrow{AO} = \langle 0-3, 0-5, 0+4\rangle$
$= \langle -3, -5, 4\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7-3, 4-5, -3+4\rangle$
$= \langle 4, -1, 1\rangle$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = (-3)(4)+(-5)(-1)+(4)(1)$
$= -12+5+4 = -3$

$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50}\sqrt{18}}\right) \simeq 96^\circ$

---

8) يمر المستقيم l_1 بالنقطتين $(2,-1,4)$ و $(-3,5,7)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين $(1,2,-1)$ و $(6,-5,3)$ جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 الى اقرب جزء من عشرة

الحل:

اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v} = \langle -3-2, 5+1, 7-4\rangle = \langle -5, 6, 3\rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w} = \langle 1-6, 2+5, -1-3\rangle = \langle -5, 7, -4\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = (-5)(-5)+(6)(7)+(3)(-4) = 25+42-12 = 55$ (حادة)

$|\vec{v}| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}$, $|\vec{w}| = \sqrt{25+49+16} = \sqrt{90}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{70}\sqrt{90}}\right) \simeq 46.1^\circ$

رافت صابي

٩) اذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة :-

$\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\lambda\langle -6,g+5,3\rangle$ والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة $\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\mu\langle 5,g-6,-4\rangle$ متعامدين ، فما القيم الممكنة للثابت g

الحل :-

اتجاه المستقيم الاول : $\langle -6, g+5, 3\rangle$

اتجاه المستقيم الثاني :- $\langle 5, g-6, -4\rangle$

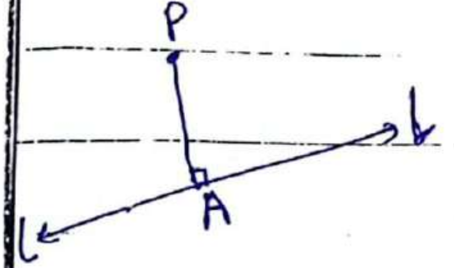
المستقيمان متعامدان ، فاتجاهاهما متعامدان وعليه $\vec{V}\cdot\vec{U}=0$

$$(-6)(5)+(g+5)(g-6)+(3)(-4)=0$$
$$-30+g^2-6g+5g-30-12=0$$
$$g^2-g-72=0$$
$$(g-9)(g+8)=0$$
$$g=9,\ g=-8$$

اذا كانت $\vec{r}=2\hat{j}-3\hat{k}+t(-\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k})$ معادلة متجهة المستقيم l والنقطة $P(-2,26,5)$ غير واقعة على المستقيم l أجب عن السؤالين :-

١٠) جد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

١١) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l



الحل :

١٠) نجهز $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP}=\langle -2,26,5\rangle$$
$$\overrightarrow{OA}=\langle -t, 2+2t, -3+5t\rangle$$
$$\overrightarrow{PA}=\langle -t,2+2t,-3+5t\rangle-\langle -2,26,5\rangle$$
$$\overrightarrow{PA}=\langle -t+2,-24+2t,-8+5t\rangle$$

بما أن $\overrightarrow{PA}\perp l$ فان :- $\overrightarrow{AP}\cdot\langle -1,2,5\rangle=0$

رأفت صبحي

$$(-t+2)(-1)+(-24+2t)(2)+(-8+5t)(5)=0$$
$$t-2-48+4t-40+25t=0$$
$$30t-90=0 \longrightarrow t=3$$

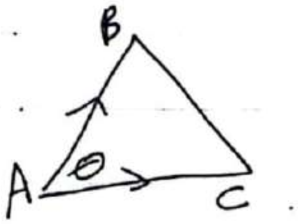
وعليه $A(-3, 2+2(3), -3+5(3))$

$$A(-3, 8, 12)$$

11) $PA=\sqrt{(-3+2)^2+(8-26)^2+(12-5)^2}$
$$=\sqrt{1+324+49}=\sqrt{374}$$

---

12) جد مساحة المثلث ABC حيث $\overrightarrow{AB}=\langle 4,9,1\rangle$ ، $\overrightarrow{AC}=\langle 9,1,4\rangle$



الحل:
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=36+9+4$$
$$=49$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{81+1+16}=\sqrt{98}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+81+1}=\sqrt{98}$$

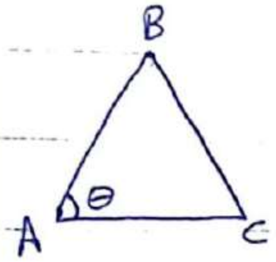
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}\sqrt{98}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\theta=60^\circ$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{98}\sqrt{98}\sin 60$$
$$=\frac{49\sqrt{3}}{2}$$

0785824464 رأفت صافي

13) جد مساحة المثلث ABC الذي احداثيات رؤوسه هي

$A(1,3,1)$ و $B(2,7,-3)$ و $C(4,-5,2)$



الحل: نجد الزاوية θ

$$\vec{AB} = \langle 2-1, 7-3, -3-1\rangle = \langle 1, 4, -4\rangle$$

$$\vec{AC} = \langle 4-1, -5-3, 2-1\rangle = \langle 3, -8, 1\rangle$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (1)(3) + (4)(-8) + (-4)(1)$$
$$= 3 - 32 - 4 = -33$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{\sqrt{33}\sqrt{74}}\right) \simeq 131.2^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\sqrt{74}\sin 131.2$$
$$\simeq 18.6$$

ملاحظة: نستطيع ايجاد $\sin\theta$ من $\cos\theta$ من المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

---

14) يمثل المتجه $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم من النقطة $(1,1,1)$ الى النقطة $(9,4,7)$ جد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F، علماً بأن القوة بالنيوتن N والمسافة بالمتر m ومقدار الشغل W المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة أي:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

الحل:

$$\vec{d} = \langle 9-1, 4-1, 7-1\rangle = \langle 8, 3, 6\rangle$$

$$\vec{F} = \langle 5, -3, 1\rangle$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (8)(5) + (3)(-3) + (6)(1) = 40 - 9 + 6$$
$$= 37$$

هنا d الازاحة

رافت صابح

15) اذا كانت النقطة $R(27,-17,-1)$ والنقطة $S(11,-9,11)$ تقعان على المستقيم L وكانت النقطة Q تقع على المستقيم L حيث $\overline{OQ}$ عمودي على L ، جد متجه متجه الموقع للنقطة Q

الحل :

نجد معادلة المستقيم L (نبسط)

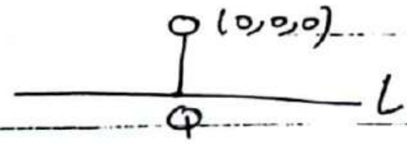
$\vec{V} = \langle 27-11, -17+9, -1-11 \rangle = \langle 16, -8, -12 \rangle$
$= \langle 4, -2, -3 \rangle$

$\vec{r} = \langle 11, -9, 11 \rangle + t\langle 4, -2, -3 \rangle$

النقطة Q هي المسقط العمودي على هذا المستقيم فيكون متجه موقعها هو $\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OQ} = \langle 11+4t, -9-2t, 11-3t \rangle$

حيث Q تحقق معادلة المستقيم



$\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{V} = 0$

$\langle 11+4t, -9-2t, 11-3t \rangle \cdot \langle 4, -2, -3 \rangle = 0$

$4(11+4t) + -2(-9-2t) + -3(11-3t) = 0$

$44 + 16t + 18 + 4t - 33 + 9t = 0$

$29t = 29 \rightarrow t = 1$

$\overrightarrow{OQ} = \langle 11+4, -9+2, 11+3 \rangle = \langle 7, -7, 14 \rangle$

اذا كانت متجهات مواقع النقاط A, B, D هي $\langle 2,-29,7 \rangle$ و $\langle 4,17,22 \rangle$ ، $\langle -4,13,22 \rangle$ على الترتيب ، اجب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً

16) اثبت ان $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

17) جد متجه موقع النقطة C اذا كان $ABCD$ مستطيلاً

18) جد مساحة المستطيل $ABCD$

19) جد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$

رافت صافي

16) الحل:

$A\langle -4, 13, 22\rangle$
$B\langle 4, 17, 14\rangle$
$D\langle 2, -29, 7\rangle$

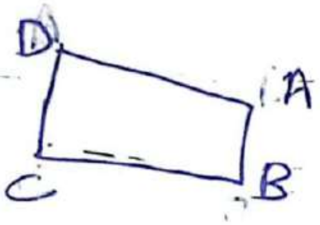
$\overrightarrow{AB} = \langle 4+4, 17-13, 14-22\rangle = \langle 8, 4, -8\rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle 2+4, -29-13, 7-22\rangle = \langle 6, -42, -15\rangle$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (8)(6) + (4)(-42) + (-8)(-15)$

$= 48 - 168 + 120 = 0$

17) عندما نرسم شكل تقريبي المهم هو ترتيب رؤوس المستطيل حسب عقارب الساعة او عكس عقارب الساعة



المطلوب $\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
كونه مستطيل

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\langle 6, -42, -15\rangle = \overrightarrow{OC} - \langle 4, 17, 14\rangle$

$\overrightarrow{OC} = \langle 6, -42, -15\rangle + \langle 4, 17, 14\rangle = \langle 10, -25, -1\rangle$

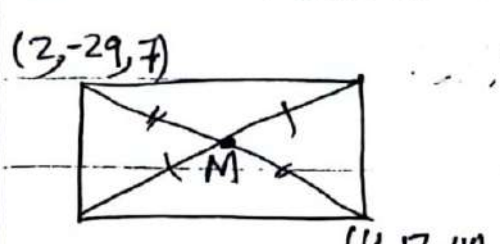
« يوجد اكثر من طريقة للحل » لا يمكن تضمينهم بالتوزيع

18) مساحة المستطيل هو الطول مضروب بالعرض

$Area = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}| = (\sqrt{84+16+84})(\sqrt{36+1764+225})$

$= (12)(45) = 540$

19) قطرا المستطيل ينصف كل منهما الآخر



$M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{17-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right)$

$M = \left(3, -6, \frac{21}{2}\right)$

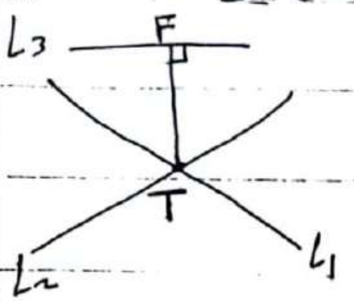
$\overrightarrow{OM} = \langle 3, -6, \frac{21}{2}\rangle$

تمثل :- $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وتمثل

$\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 وتمثل

$\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 :-

اذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3 حيث $\overrightarrow{TF} \perp l_3$ أجب عما يلي :-



20 جد احداثيات النقطة F

21 جد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3

الحل :-

نجد T وهي نقطة تقاطع l_2 و l_1 وعليه نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$$\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$$

نشكل معادلات :-

$-5+3t = 2+2u$ — (1)

$7+t = 8 \rightarrow t = 1$ — (2)

$1+4t = -1-3u$ — (3)

نعوض $t=1$ في معادلة (1) :-

$-5+3 = 2+2u \rightarrow u = -2$

نعوض في معادلة (3) :- $1+4 = -1+6$ ✓

وعليه المستقيمان متقاطعان

نقطة التقاطع

$T(-5+3, 7+1, 1+4)$

$T(-2, 8, 5)$

ملاحظة السؤال هو عدم اعطاء النقطة الخارجة عن المستقيم

نتبع نفس اسلوب المسقط!!

F وهي مسقط عمودي للنقطة T على المستقيم l_3

احداثيات F $(3-v, 19+3v, 10+v)$ لأنها تقع على المستقيم وتحقق معادلته.

$\overrightarrow{TF} = \langle 3-v+2, 19+3v-8, 10+v-5\rangle$

$\overrightarrow{TF} = \langle 5-v, 11+3v, 5+v\rangle$

$\overrightarrow{TF} \perp l_3 \rightarrow \overrightarrow{TF} \perp \langle -1, 3, 1\rangle$

$(5-v)(-1) + (11+3v)(3) + (5+v)(1) = 0$

$\boxed{v = -3}$

احداثيات F هو:

$(3+3, 19-9, 10-3)$

$(6, 10, 7)$

رافت صابحي

21) المطلوب هو القطعة المستقيمة TF

$$TF=\sqrt{(6+2)^2+(10-8)^2+(7-5)^2}=\sqrt{64+4+4}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

اذا كانت $\vec{r}=\langle 5,3,0\rangle+\lambda\langle -1,3,1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l

وكانت $A(3,-2,1)$ و $B(5,3,0)$ أجب عن السؤالين الآتيين تماماً:

22) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overline{AB}$ والمستقيم l

23) تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $AB=AC$ جد احداثيات C

الحل:

$\overrightarrow{AB}=\langle 5-3, 3+2, 0-1\rangle=\langle 2,5,-1\rangle$

اتجاه المستقيم l هو $\vec{V}=\langle -1,3,1\rangle$

22)

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}=(2)(-1)+(5)(3)+(-1)(1)=-2+15-1=12$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$ ، $|\vec{V}|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}}\right)\approx 48.7^\circ$

23) بما أن $AB=AC$ إذن A منتصف $\overline{AC}$

B — A — C

(5,3,0) (3,-2,1) C(x,y,z)

$$\left(\frac{5+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{z}{2}\right)=(3,-2,1)$$

بالمقارنة:

$\frac{5+x}{2}=3\rightarrow x=1$

$\frac{3+y}{2}=-2\rightarrow y=-7$

$\frac{z}{2}=1\rightarrow z=2$

احداثيات C هو $(1,-7,2)$

رافت صابح

تقع النقطة $A(-7,-4,9)$ والنقطة $B(8,5,3)$ على المستقيم l_1

وتقع النقطة $C(6,11,7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته

$$\vec{r} = \langle 6, 11, 7 \rangle + t\langle -1, 3, 2 \rangle$$

(24) بيّن ان النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

(26) جد $m\angle ABC$

(27) جد مساحة المثلث ABC

الحل:

(24) عوض بدل $\vec{r}$

$$\langle 8, 5, 3 \rangle = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle$$

$6 - t = 8 \rightarrow t = -2$

$11 + 3t = 5 \rightarrow t = -2$

$7 + 2t = 3 \rightarrow t = -2$

نفس القيمة

بما ان لهذه المعادلات الحل نفسه فإن النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) اتجاه l_1 هو

$\overrightarrow{AB} = \langle 8+7, 5+4, 3-9 \rangle$

$= \langle 15, 9, -6 \rangle$

$= \langle 5, 3, -2 \rangle$ بسط

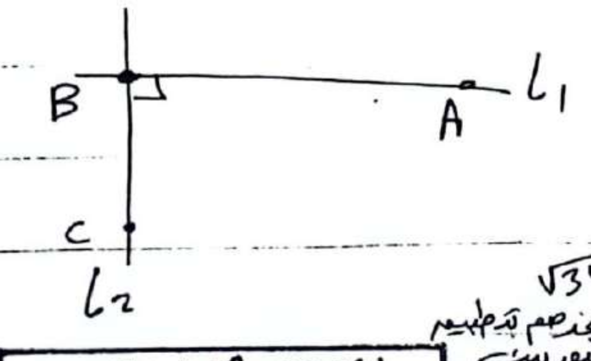
اتجاه l_2 هو $\vec{v} = \langle -1, 3, 2 \rangle$

لإثبات ان l_1 و l_2 متعامدان نستخدم الضرب القياسي

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = (5)(-1) + (3)(3) + (-2)(2) = -5 + 9 - 4 = 0$$

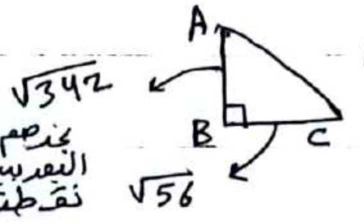
بما ان $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = 0$ فإنهما متعامدان

(26)



$$m\angle ABC = 90^\circ$$

(27)



$$Area = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{342} \sqrt{56}$$

$$\approx 69.2$$

رافت صافي

ABCD هرم ثلاثي ، اذا كانت احداثيات رؤوسه هي

$A(4,3,-1)$, $B(-4,5,2)$, $C(6,-1,0)$, $D(10,11,19)$

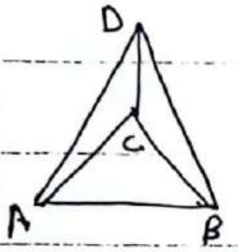
اجب عن الاسئلة الآتية :

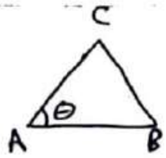
(28) جد مساحة المثلث ABC في صورة $a\sqrt{6}$

(29) اثبت ان $m\angle AED = 90°$ حيث $E(1,2,1)$

(30) اذا علمت ان النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC

جد حجم الهرم ABCD .





الحل :-

$\vec{AB} = \langle -4-4, 5-3, 2+1 \rangle$
$= \langle -8, 2, 3 \rangle$
$\vec{AC} = \langle 6-4, -1-3, 0+1 \rangle = \langle 2, -4, 1 \rangle$
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -16 + -8 + 3 = -21$

(28

$|\vec{AB}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$
$|\vec{AC}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \simeq 121.5°$

مساحة المثلث $Area = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\theta$
$= \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\sin 121.5$
$\simeq 17.14 \simeq 7\sqrt{6}$

لكن السؤال طالب في صورة $a\sqrt{6}$

نتبع طريقة مختلفة ، لنعود الى السؤال وهو ايجاد $\sin\theta$
دون ايجاد قيمة الزاوية θ

نبسط اولاً ان امكن

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{21}}{\sqrt{77}}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{21}{77}}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$

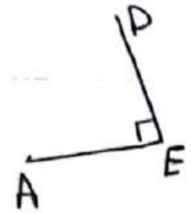
نأخذ cos للطرفين :- $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

متطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

رأفت صبحي



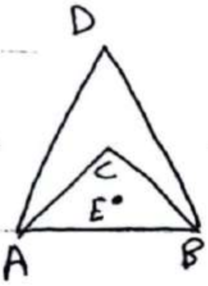
29) نفكر بالضرب القياسي

$\vec{EA} = \langle 4-1, 3-2, -1-1 \rangle = \langle 3, 1, -2 \rangle$

$\vec{ED} = \langle 10-1, 11-2, 19-1 \rangle = \langle 9, 9, 18 \rangle$

$\vec{EA} \cdot \vec{ED} = 27 + 9 - 36 = 0$

وعليه $\vec{EA} \perp \vec{ED}$ $\quad m\angle AED = 90^\circ$



30) ارتفاع الهرم $|\vec{ED}| = \sqrt{81 + 81 + 324}$

$= \sqrt{486}$

مساحة قاعدة المثلث هنا نفسها مساحة المثلث ABC

وعليه $= \left(\frac{1}{3}\right)(7\sqrt{6})(\sqrt{486})$

126

اذا كانت $A(3, 1, -6)$ و $B(5, -2, 0)$ و $C(8, -4, -6)$

اجب عن الأسئلة الآتية:

31) بيّن ان $\vec{AC} = n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح

32) بيّن ان قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$

33) اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\vec{AC}$

34) اذا كانت $D(6, -1, p)$ وعلم ان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ متعامدان فما قيمة p

35) بيّن ان الشكل ABCD معين ثم جد طول قطريه

الحل:

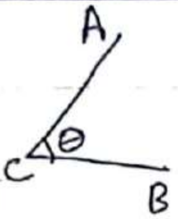
31) $\vec{AC} = \langle 8-3, -4-1, -6+6 \rangle = \langle 5, -5, 0 \rangle$

$= 5\langle 1, -1, 0 \rangle$

$\vec{AC} = 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

هنا $n = 5$

رأفت ضاحي



32) $\vec{CA} = \langle 3-8, 1+4, -6+6\rangle = \langle -5, 5, 0\rangle$

$\vec{CB} = \langle 5-8, -2+4, 0+6\rangle = \langle -3, 2, 6\rangle$

$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = 15+10+0 = 25$

$|\vec{CA}| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|\vec{CB}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{CA}|\cdot|\vec{CB}|}\right) = \cos^{-1}\frac{25}{(5\sqrt{2})(7)} = \cos^{-1}\frac{5}{7\sqrt{2}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$

بسط

33) المتجه الموازي

$\vec{AC} = \langle 5, -5, 0\rangle$
$= \langle 1, -1, 0\rangle$

نكتب المعادلة:

$\vec{r} = \langle 8, -4, -6\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle$

---

34) نكتب معادلة $\vec{BD}$

$\vec{BD} = \langle 6-5, -1+2, P\rangle = \langle 1, 1, P\rangle$

$\vec{r} = \langle 5, -2, 0\rangle + u\langle 1, 1, P\rangle$

المستقيمان متقاطعان:
نساوي $\vec{r}$ معاً

$\langle 8+t, -4-t, -6\rangle = \langle 5+u, -2+u, uP\rangle$

$8+t = 5+u$ —— (1)

$-4-t = -2+u$ —— (2)

$-6 = uP$ —— (3)

بحل المعادلتين (1) و (2)
ينتج $t = -\frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$

نعوض في معادلة (3):

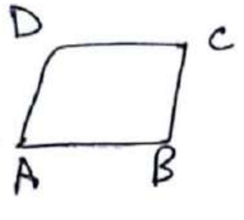
$-6 = \frac{1}{2}P$

$\boxed{P = -12}$

وعليه احداثيات D هو $(6, -1, -12)$

رافت صافي

35) المعين هو متوازي اضلاع جميع اضلاعه متساوية



لاثبات ان الشكل معينا :-

1) نثبت انه متوازي اضلاع
2) يوجد ضلعان متجاوران متساويان بالقياس

$\overrightarrow{AB} = \langle 5-3, -2-1, 0+6 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle 8-6, -4+1, -6+12 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle \longrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = \langle 8-5, -4+2, -6-0 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle 6-3, -1-1, -12+6 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle \longrightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

وعليه الشكل متوازي اضلاع

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

نجد طول ضلعان غير متقابلان

$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

وعليه الشكل معينا لانه متوازي اضلاع وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

---

36) اطلق صاروخ من النقطة (1, 2, 1) ، ثم وصل بعد ثانيتين الى النقطة (9, 13, 21) وفي الوقت نفسه ، اطلق صاروخ آخر من النقطة (4, -3, 2) ووصل بعد ثانيتين الى النقطة (14, 1, 18) ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين

الحل :

اتجاه مسار الصاروخ الاول

$\vec{V} = \langle 9-1, 13-2, 21-1 \rangle = \langle 8, 11, 20 \rangle$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني

$\vec{U} = \langle 14-4, 1+3, 18-2 \rangle = \langle 10, 4, 16 \rangle$

$\vec{V} \cdot \vec{U} = 80 + 44 + 320 = 444$

$|\vec{V}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585}$

$|\vec{U}| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372}$

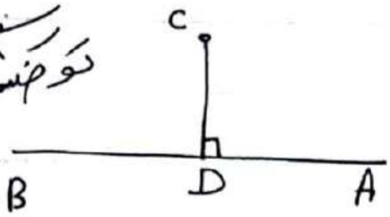
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{444}{\sqrt{585}\sqrt{372}}\right)$

$\theta \simeq 17.9^\circ$

مرافقة ضياء

37) اذا كانت $A(3,-2,4)$ و $B(1,-5,9)$ و $C(-4,7,-1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة، فما احداثيات النقطة D

رسم توضيحي



الحل :-

بما ان $m\angle CDA = 90^\circ$ فالنقطة D هي المسقط العمودي :-

نجد معادلة المستقيم :- $\overleftrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 9-4 \rangle = \langle -2, -3, 5 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 5 \rangle$$

احداثيات D هي $(3-2t, -2-3t, 4+5t)$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \langle 3-2t, -2-3t, 4+5t \rangle - \langle -4, 7, -1 \rangle$$

$$= \langle 7-2t, -9-3t, 5+5t \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(7-2t)(-2) + (-9-3t)(-3) + (5+5t)(5) = 0$$

$$-14 + 4t + 27 + 9t + 25 + 25t = 0$$

$$38t = -38 \longrightarrow t = -1$$

نعوض $\langle 3+2, -2+3, 4-5 \rangle$

احداثيات D هي $(5, 1, -1)$

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 متقاطع

هذان المستقيمان في النقطة P وكانت النقطة Q تقع على

المستقيم l_1 حيث $t=3$ والنقطة R تقع على المستقيم l_2

حيث $u>3$ و $PQ = PR$ فاجب عن الاسئلة الاربعة الاتية:

38) جد احداثيات كل من النقطة P والنقطة Q

39) جد احداثيات النقطة R

40) اذا كان $m\angle RPQ = \theta$ فأبين ان $\cos\theta = \frac{-3}{94}$

41) بيّن ان مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$

---

38) الحل: P نقطة تقاطع المستقيمان l_1, l_2 حيث نساوي $\vec{r}$ لنجدها

$\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t \rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u \rangle$

نشكل المعادلات

$-8+7t = -10+3u \rightarrow 7t-3u = -2$ — ①

$16-3t = 31-6u \rightarrow -3t+6u = 15$ — ②

$1-6t = -26+7u \rightarrow 7u+6t = 27$ — ③

بحل النظام

$u=3, t=1$

نعوضها في المعادلة لنجد P ← l_1 $\langle -8+7, 16-3, 1-6 \rangle$

النقطة P $(-1, 13, -5)$

Q تقع على المستقيم l_1 عند $t=3$ ← نعوض $\langle -8+21, 16-9, 1-18 \rangle$

النقطة Q $(13, 7, -17)$

39)

R تقع على المستقيم l_2 ← $\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u \rangle$

لكن: $PQ = PR \rightarrow |\vec{PQ}| = |\vec{PR}|$

نطبق قانون الطول حيث
نربع الطرفين للتخلص من الجذر

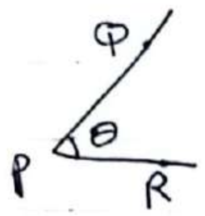
$(13+1)^2 + (7-13)^2 + (-17+5)^2 = (-10+3u+1)^2 + (31-6u-13)^2 + (-26+7u+5)^2$

بفك الاقواس وحل المعادلة $u=5$

النقطة R هي

$(-10+15, 31-30, -26+35) \rightarrow (5, 1, 9)$

0785824464
رأفت صافي



40) الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين L_1 و L_2

$\overrightarrow{PQ} = \langle 13+1, 7-13, -17+5 \rangle = \langle 14, -6, -12 \rangle$

$\overrightarrow{PR} = \langle 5+1, 1-13, 9+5 \rangle = \langle 6, -12, 14 \rangle$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (14)(6) + (-6)(-12) + (-12)(14) = -12$

$$\cos\theta = \frac{-12}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|} = \frac{-12}{\sqrt{196+36+144}\,\sqrt{36+144+196}}$$

$$= \frac{-12}{376} = \frac{-3}{94}$$

41) $\text{Area} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}| \sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{376}\sqrt{376}\sqrt{\frac{8827}{8836}}$$

$$= \frac{1}{2}(376)\frac{\sqrt{8827}}{94}$$

$$= 2\sqrt{8827}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{8836} = \frac{8827}{8836}$$

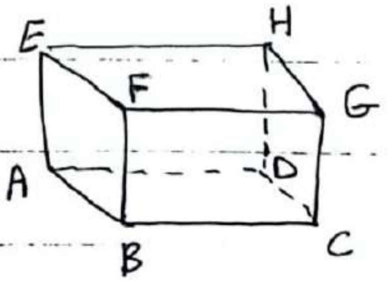
0785824464 رأفت صافي

رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات وكانت كالآتي :

$\overrightarrow{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$ ، $\overrightarrow{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k})$ ، $\overrightarrow{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

42) اذا كانت $B(8, 3, -2)$ جد احداثيات النقطة H

43) جد قياس الزاوية GAC مقرباً الى أقرب عشر درجة



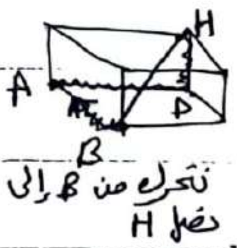
44) اذا كان X نقطة منتصف الضلع EF

جد جيب تمام الزاوية DXC

الحل :

بما أنه متوازي مستطيلات فان كل ضلعان متقابلان متوازيان

نفرض ان النقطة $H(x, y, z)$



42) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ ← نفسه $\overrightarrow{AE}$

$\langle x-8, y-3, z+2 \rangle = \langle -2, -4, -4 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle + \langle -6, -3, 6 \rangle$

$\langle x-8, y-3, z+2 \rangle = \langle -18, 3, -3 \rangle$

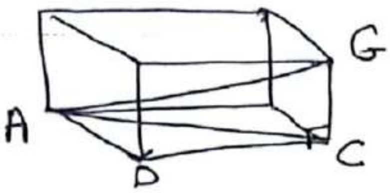
$x - 8 = -18 \rightarrow x = -10$

$y - 3 = 3 \rightarrow y = 6$

$z + 2 = -3 \rightarrow z = -5$

احداثيات النقطة $H(-10, 6, -5)$

رافت صافي



43

المثلث ACG قائم الزاوية

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\downarrow$$
$$AD$$

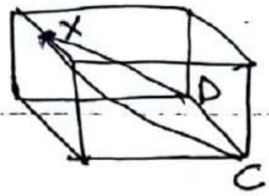
$$\tan\theta = \frac{|CG|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|}$$

$$= \frac{|\langle -6, -3, 6\rangle|}{|\langle 3, 4, 4\rangle + \langle -10, 10, -5\rangle|}$$

$$= \frac{|\langle -6, -3, 6\rangle|}{|\langle -8, 14, -1\rangle|} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}}$$

$$\tan\theta = \frac{9}{\sqrt{261}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}} \simeq 29.1^\circ$$



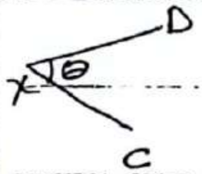
44

$$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}FE + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

معاكس AB

$$= \frac{1}{2}\langle -2, -4, -4\rangle + \langle 6, 3, -6\rangle + \langle -10, 10, -5\rangle$$



$$= \langle -1, -2, -2\rangle + \langle 6, 3, -6\rangle + \langle -10, 10, -5\rangle$$

$$\overrightarrow{XD} = \langle -5, 11, -13\rangle$$

$$|\overrightarrow{XD}| = \sqrt{25+121+169} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{XC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\langle 2, 4, 4\rangle + \langle 6, 3, -6\rangle + \langle -10, 10, -5\rangle = \langle -3, 15, -9\rangle$$

$$|\overrightarrow{XC}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XD} \cdot \overrightarrow{XD} = (-5)(-3) + 11(15) + (-13)(-9) = 297$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{297}{\sqrt{315}\sqrt{315}}\right) \rightarrow \cos\theta = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$$

رأفت صبحي

كتاب التمارين

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :

1) $\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle -2, 3, -7 \rangle$

2) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

3) $\vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k}$, $\vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$

الحل :

1) $(4)(-2) + (5)(3) + (-3)(-7) = -8 + 15 + 21 = 28$

2) $\vec{e} \cdot \vec{f} = (-13)(-2) + (8)(3) + (-5)(10) = 26 + 24 - 50 = 0$

3) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (7)(2) + (4)(-5) + (-9)(10) = 14 - 20 - 90 = -96$

---

4) اذا كان المتجه $\vec{v} = \langle 6, 5, a \rangle$ يعامد المتجه $\vec{w} = \langle 15, 24, -7 \rangle$ ، جد (a)

الحل :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$
$$(15)(6) + (24)(5) + (-7)(a) = 0$$
$$90 + 120 - 7a = 0$$
$$7a = 210 \longrightarrow a = \frac{210}{7} = 30$$

---

5) جد قياس الزاوية θ بين المتجهين الى اقرب عشر درجة

$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5)(2) + (2)(-1) + (3)(-2)$$
$$= 10 - 2 - 6 = 2$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \simeq 83.8°$$

6) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(-1) + (1)(-1) + (-1)(4)$$
$$= -1 - 1 - 4 = -6$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) \simeq 144.7°$$

الأستاذ ابراهيم صباغ

7) اذا كان المتجه $\vec{a}=\lambda\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ والمتجه $\vec{b}=\lambda\hat{i}+4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ متعامدين ، فما قيم λ

الحل :-

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\lambda^2-12+4\lambda=0$

$\lambda^2+4\lambda-12=0 \longrightarrow (\lambda+6)(\lambda-2)=0$

$\lambda=-6 \,,\, \lambda=2$

---

8) اذا كانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\3\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}-5\\14\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة.

الحل :- اتجاه l_1 : $\vec{v}=\langle 2,-6,3\rangle$

اتجاه l_2 : $\vec{w}=\langle 3,-4,12\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=(2)(3)+(-6)(-4)+(3)(12)$

$=6+24+36$

$=66$ "حادة"

$|\vec{v}|=\sqrt{4+36+9}=7$

$|\vec{w}|=\sqrt{9+16+144}=13$

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{66}{(7)(13)}\right)\simeq 43.5^\circ$

رافت ابراهيم صافي

(9) يمر المستقيم r_1 بالنقطتين $(3,-5,9)$ و $(-2,11,6)$ ويمر المستقيم r_2 بالنقطتين $(4,3,8)$ و $(-5,9,12)$ جد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة

الحل :

اتجاه r_1 : $\vec{V} = \langle 3+2, -5-11, 9-6 \rangle = \langle 5, -16, 3 \rangle$

اتجاه r_2 : $\vec{W} = \langle 4+5, 3-9, 8-12 \rangle = \langle 9, -6, -4 \rangle$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = 45 + 96 - 12 = 129$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290} \quad , \quad |\vec{W}| = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \simeq 48.9^\circ$$

---

(10) اذا كان قياس الزاوية بين المتجه $\langle v, 0, -1 \rangle$ والمتجه $\langle 2, -1, 0 \rangle$ هو 60° جد قيمة v

الحل :

$$\vec{m} = \langle v, 0, -1 \rangle \quad , \quad \vec{n} = \langle 2, -1, 0 \rangle$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2v$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{v^2+1} \quad , \quad |\vec{n}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{2v}{\sqrt{5}\sqrt{v^2+1}}$$

تبادلي

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{v^2+1} = 2v$$

نضرب بـ (2) ثم نربع

$$5(v^2+1) = 16v^2$$

$$16v^2 - 5v^2 = 5$$

$$11v^2 = 5 \longrightarrow v^2 = \frac{5}{11} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}} \;,\; -\sqrt{\frac{5}{11}}$$

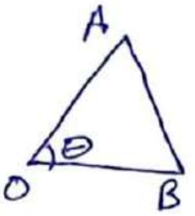
لو كانت سالبة

مرفوضة لأن الزاوية حادة

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2v$

رأفت ابراهيم صافي

(11) اذا كان $A(3,-2,6)$ وكان $B(-5,4,1)$ جد مساحة المثلث AOB حيث O نقطة الاصل



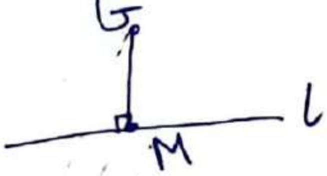
الحل:-

$$\vec{OA} = \langle 3-0, -2-0, 6-0\rangle = \langle 3,-2,6\rangle$$
$$\vec{OB} = \langle -5-0, 4-0, 1-0\rangle = \langle -5,4,1\rangle$$
$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -15-8+6 = -17$$
$$|\vec{OA}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$
$$|\vec{OB}| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right) \simeq 112^\circ$$
$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{OA}||\vec{OB}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42})\sin 112^\circ \simeq 21.03$$

اذا مر المستقيم l بالنقطتين $E(-3,7,12)$ و $F(1,-3,5)$ وكانت النقطة $G(0,-6,4)$ لا تقع على المستقيم l ، جد:-

(12) مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l

(13) البعد بين النقطة G والمستقيم l.



الحل:-

نجد معادلة المستقيم l

اتجاه المستقيم

$$\vec{EF} = \langle 1+3, -3-7, 5-12\rangle$$
$$\vec{EF} = \langle 4,-10,-7\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 1,-3,5\rangle + t\langle 4,-10,-7\rangle$$

بما ان M تقع على المستقيم l فان

$$\vec{OM} = \langle 1+4t, -3-10t, 5-7t\rangle$$
$$\vec{OG} = \langle 0,-6,4\rangle$$

$$\vec{GM} = \vec{OM} - \vec{OG}$$

$$\vec{GM} = \langle 1+4t, 3-10t, 1-7t\rangle$$

رأفت ابراهيم صافي

بما أن $GM \perp L$ فان $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{EF}$ وعليه

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

$$(1+4t)(4) + (3-10t)(-10) + (-7)(1-7t) = 0$$

$t = \frac{33}{165}$ بحل المعادلة

نعوض $t = \frac{33}{165}$ ← $M\left(1+4\left(\frac{33}{165}\right), -3-10\left(\frac{33}{165}\right), 5-7\left(\frac{33}{165}\right)\right)$

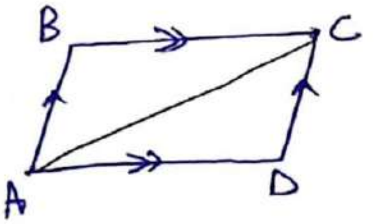
$$M(1.8, -5, 3.6)$$

البعد بين G والمستقيم L $GM = \sqrt{(1.8-0)^2 + (-5+6)^2 + (3.6-4)^2}$

$GM \simeq 2.1$

---

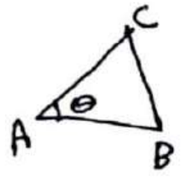
(14) يبين الشكل المجاور متوازي اضلاع ABCD حيث $\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}$ ، $\overrightarrow{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ جد مساحة متوازي الاضلاع ABCD



الحل :

قطر متوازي الاضلاع يقسم متوازي الاضلاع الى مثلثين متطابقين

وعليه نجد مساحة المثلث BAC



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (15)(6) + (8)(-2) + (5)(11) = 129$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4+121} = \sqrt{161}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225+64+25} = \sqrt{314}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \simeq 55°$$

نضرب مساحة المثلث في (2) ← $\text{Area} = \left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right)(2)$

$$= (\sqrt{161})(\sqrt{314})\sin 55° \simeq 184.2$$

رافت ابراهيم صافي

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 والنقطة $A(9,-1,-14)$ تقع على المستقيم l_1 والنقطة C تقع على المستقيم l_2

اجب عن الاسئلة الآتية :-

(15) اذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان جد قيمة q

(16) اذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين ، جد قيمة p واحداثيات نقطة تقاطعهما

(17) رسمت دائرة مركزها النقطة C فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين A و B جد متجه الموقع للنقطة B

الحل :- (15) اتجاه l_1 : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، واتجاه l_2 : $\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-q + 6 - 2 = 0 \rightarrow q = 4$$

---

(16) نساوي $\vec{r}$ لكونهما متقاطعان ، حيث $q = 4$

$$\langle 8-t, 2+3t, -12+2t \rangle = \langle -4+4u, 10+2u, p-u \rangle$$

$8 - t = -4 + 4u$ — (1)

$2 + 3t = 10 + 2u$ — (2)

$-12 + 2t = p - u$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (2) ينتج

$t = 4$ ، $u = 2$

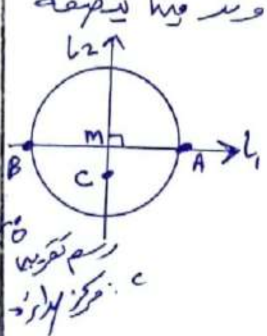
نعوضها في معادلة (3) :-

$-12 + 8 = p - 2$

$\boxed{p = -2}$

عند $t=4$ نعوضها لمعرفة نقطة التقاطع $M(8-4, 2+12, -12+8) = (4, 14, -4)$

(17) نفرض نقطة تقاطع المستقيمين l_1 و l_2 هي $m(4,14,-4)$ وبما ان العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه فان النقطة m هي منتصف $\overline{AB}$



رسم تقريبي

C : مركز الدائرة

نفرض احداثيات $B(x, y, z)$

$$\left(\frac{x+9}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{-14+z}{2}\right) = (4, 14, -4)$$

بالمقارنة

$x = -1$ ، $y = 29$ ، $z = 6$

$$B(-1, 29, 6) \rightarrow \vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 29 \\ 6 \end{pmatrix}$$

حل آخر

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

$\vec{OB} = \vec{OA} + 2\vec{AM}$

$= \langle 9, -1, -14 \rangle + 2\langle -5, 15, 10 \rangle$

$= \langle -1, 29, 6 \rangle$

رأفت ابراهيم صافي

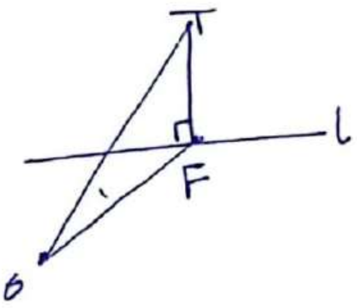
اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-19\\14\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\a\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

والنقطة $T(-2, 5, 8)$ تقع خارج المستقيم l والنقطة F تقع على المستقيم l حيث $\overrightarrow{TF}$ يعامد المستقيم l، اجب عما يلي :

(18) بيّن ان قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هو $t=\dfrac{13a+44}{a^2+10}$

(19) اذا كانت $t=5$ في الفرع السابق، جد متجهي الموقع الممكنين للنقطة F

الحل :



F تقع على المستقيم l وعليه

$\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at \rangle$

$\overrightarrow{OT} = \langle -2, 5, 8 \rangle$

(18)

$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{TF} = \langle -17+t, 9-3t, -13+at \rangle$

$\overrightarrow{TF} \perp l$ وعليه :

$\langle -17+t, 9-3t, -13+at \rangle \cdot \langle 1, -3, a \rangle = 0$

$-17+t-27+9t-13a+a^2t=0$

$10t+a^2t = 13a+44$

$t(10+a^2) = 13a+44 \rightarrow t = \dfrac{13a+44}{10+a^2}$

(19) عوض $t=5$ حيث نحتاج الى a :

$5 = \dfrac{13a+44}{10+a^2} \rightarrow 50+5a^2 = 13a+44$

$5a^2-13a+6=0$

$(5a-3)(a-2)=0$

$a=\frac{3}{5}$, $a=2$

عند $a=2$, $t=5$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+10 \rangle = \langle -14, -1, 5 \rangle$

عند $a=\frac{3}{5}$, $t=5$ $\longleftarrow$ $\overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+3 \rangle = \langle -14, -1, -2 \rangle$

رأفت ابراهيم صايغ

اذا كانت $A(3,-2,4)$ و $B(1,-5,6)$ و $C(-4,5,-1)$ نقاط والمستقيم l يمر بالنقطة A وله المعادلة المتجهة :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}7\\-7\\5\end{pmatrix}$$

(20) بيّن ان النقطة C تقع على المستقيم l

(21) جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

(22) اذا وقعت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، جد احداثيات النقطة D

الحل :

(20)

$\langle -4,5,-1\rangle = \langle 3+7u, -2-7u, 4+5u\rangle$

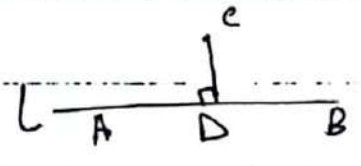
$-4 = 3+7u \rightarrow u=-1$

$5 = -2-7u \rightarrow u=-1$

$-1 = 4+5u \rightarrow u=-1$

وعليه C تقع على المستقيم l المعطى لانها تنتج من تعويض $u=-1$ في معادلته المتجهة

(21) المطلوب



$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 6-4\rangle = \langle -2,-3,2\rangle$

$\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$

(22) النقطة D تقع على المستقيم ← تحقق معادلته

$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1\rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \rightarrow \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle \cdot \langle -2,-3,2\rangle = 0$

$\boxed{\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}}$

$-14+4t+21+9t+10+4t=0$

$17t = -17 \rightarrow t=-1$

$D(3+2, -2+3, 4-2) = (5,1,2)$

راقت صافي

اذا كان $\vec{r} = \begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت

$\vec{r} = \begin{pmatrix}-9\\21\\-4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 .

أجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

23) ابيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

24) ابيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$

الحل :- اتجاه المستقيم l_1 : $\langle 2, -1, -2\rangle$

23) اتجاه المستقيم l_2 : $\langle 1, -2, 2\rangle$

$\langle 2, -1, -2\rangle \cdot \langle 1, -2, 2\rangle = 2 + 2 - 4 = 0$

وعليه المستقيمان متعامدان

24) يتقاطع المستقيمان اذا وجدت قيم حقيقية لـ t و u تحقق :

$\langle 8+2t, 2-t, -2t\rangle = \langle -9+u, 21-2u, -4+2u\rangle$

$8+2t = -9+u$ — (1)

$2-t = 21-2u$ — (2)

$-2t = -4+2u$ — (3)

بحل المعادلتان (1) و (3) ينتج

$u = 7$ و $t = -5$

نتحقق في معادلة (2) :

$2 + 5 \stackrel{?}{=} 21 - 14$

$7 = 7$ يتحقق

نعوضها في $\vec{r_1}$ معادلة : $\langle 8-10, 2+5, -2(-5)\rangle$

نقطة التقاطع $(-2, 7, 10)$

0785824464

رأفت صافي

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الاجابة الصحيحة في كل ما يأتي :-

1) اذا كانت $B(5,-2,3)$ و $A(-3,4,9)$ فان الصورة الاحداثية المتجه $\overrightarrow{AB}$ هي :-

a) $\langle -2,2,12 \rangle$ b) $\langle 8,-6,-6 \rangle$ c) $\langle -1,1,6 \rangle$ d) $\langle -8,6,-6 \rangle$

الحل :-

$$\overrightarrow{AB} = \langle 5+3, -2-4, 3-9 \rangle = \langle 8, -6, -6 \rangle$$

2) اذا كان $\vec{V} = \langle 2, c, -5 \rangle$ وكان $|\vec{V}| = 3\sqrt{5}$ فان c تساوي

a) 4 b) $-3,5$ c) 15 d) $-4,4$

الحل :- نربع

$$|\vec{V}| = \sqrt{4 + c^2 + 25} = 3\sqrt{5}$$

$$c^2 + 29 = 45 \longrightarrow c^2 = 45 - 29 = 16$$

$$c = 4, -4$$

3) اذا كان PQR مستقيماً، حيث $PQ : QR = 3:1$ و $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ فان التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو :-

a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ b) $\frac{1}{4}\vec{a}$

c) $\frac{-1}{3}\vec{a}$ d) $\frac{-1}{4}\vec{a}$

الحل :-

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{3}{1}$$

$$PQ = 3\,QR$$

$$QR = \frac{1}{3} PQ$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{a}$$

رافت صابحي

4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة:
$\vec{r} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$ والاحداثي y لها 10 هي

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$ c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

الحل:-

احداثيات النقطة على المستقيم: $(4-2t, -2+t, 5+3t)$.

$-2+t = 10 \rightarrow t = 12$

نعوض $t=12 \longrightarrow (-20, 10, 41) \leftarrow (4-24, -2+12, 5+36)$

5) اذا كان $\vec{V} = \langle 2, -2, 5\rangle$ وكان $\vec{W} = \langle -3, 4, 6\rangle$ فإن $3\vec{V} - 2\vec{W}$

a) $\langle 0, 2, 3\rangle$ b) $\langle 12, -14, 3\rangle$ c) $\langle 13, -16, -8\rangle$ d) $\langle -13, 16, 8\rangle$

الحل:-

$3\vec{V} - 2\vec{W} = 3\langle 2, -2, 5\rangle - 2\langle -3, 4, 6\rangle$
$= \langle 6, -6, 15\rangle + \langle 6, -8, -12\rangle = \langle 12, -14, 3\rangle$

6) اذا كان قياس الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو 60° وكان $\vec{a}\cdot\vec{b} = 30$ وكان $|\vec{a}| = 10$ فإن مقدار $\vec{b}$ هو:

a) 3
b) 5
c) 6
d) 24

الحل:-

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

$\cos 60^\circ = \dfrac{30}{10|\vec{b}|} = \dfrac{3}{|\vec{b}|}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{|\vec{b}|}$

$\boxed{|\vec{b}| = 6}$

رافت ضايفي

7) اذا كان $\vec{U} = \langle -4, 2, a \rangle$ وكان $\vec{V} = \langle 2, b, 5 \rangle$ وكان $\vec{U} \parallel \vec{V}$ فان قيمة a هي :

a) -10
b) -5
c) -1
d) 5

الحل :

$$\langle 2, b, 5 \rangle = K \langle -4, 2, a \rangle$$
$$\langle 2, b, 5 \rangle = \langle -4K, 2K, Ka \rangle$$
$$-4K = 2 \rightarrow K = \frac{-1}{2}$$
$$5 = Ka \rightarrow a = \frac{5}{K} = \frac{5}{\frac{-1}{2}} = -10$$

---

8) اذا كان المتجه $\vec{U} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه $\vec{V} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين ، فان قيمة q هي :

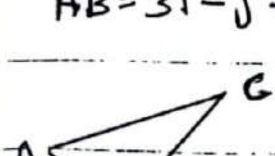
a) 0　　b) 8
c) 10　　d) 18

الحل :

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$$
$$30 - 84 + 3q = 0$$
$$3q = 54$$
$$q = \frac{54}{3} = 18$$

---

9) في المثلث المجاور ، اذا كانت $\vec{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ، $\vec{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
جد قياس الزاوية ABC الى أقرب عشر درجة



هنا نحتاج $\vec{BA}$

الحل : $\vec{BA} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3)(-2) + (1)(4) + (-2)(3)$$
$$= 6 + 4 - 6 = 4$$
$$|\vec{BA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$|\vec{BC}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}\right)$$
$$\theta \simeq 78.5$$

رافت ضاحي

10) اذا وقعت النقاط $E(2,0,4)$ و $F(h,5,1)$ و $G(3,10,K)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h و K.

الحل:-

بما انها على مستقيم واحد فهي على استقامة واحدة

بمعنى $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EF}=\langle h-2, 5, -3\rangle$ و $\overrightarrow{EG}=\langle 1, 10, K-4\rangle$

$\therefore \langle h-2, 5, -3\rangle = c\langle 1, 10, K-4\rangle$

$h-2=c$ —— (1)

$5=10c \to c=\frac{1}{2}$

$-3=c(K-4)$ —— (2)

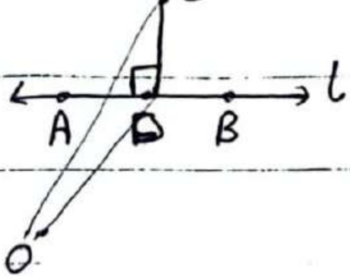
نعوض قيمة (c) في معادلة (1) $h-2=\frac{1}{2} \to h=\frac{5}{2}$

في معادلة (2) $-3=\frac{1}{2}(K-4) \to -6=K-4$

$K=-2$

---

11) اذا كانت $A(3,-2,4)$ ، $B(1,-5,6)$ ، $C(-4,5,-1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة، جد احداثي النقطة D.



الحل:- D تمثل مسقط

نجد معادلة المستقيم $\overrightarrow{AB}=\langle 1-3, -5+2, 6-4\rangle$

$\overrightarrow{AB}=\langle -2, -3, 2\rangle$

$\vec{r}=\langle 3, -2, 4\rangle + t\langle -2, -3, 2\rangle$

النقطة D تقع على المستقيم $\overrightarrow{OD}=\langle 3-2t, -2-3t, 4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1\rangle$

$=\langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle$

رأفت صباح

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

بحل المعادلة $-2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0$

$t = -1$

نعوض $t=-1 \leftarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$

وعليه احداثي D هو $(5, 1, 2)$

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 اجب عما يلي

(12) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين l_1, l_2

(13) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2

الحل :

(12) نساوي $\vec{r_1}$ في المعادلتين

$\langle -2-5\lambda, -5, 9+7\lambda \rangle = \langle -3+2\mu, -17+4\mu, 5-\mu \rangle$

$-2-5\lambda = -3+2\mu$ — (1)

$-5 = -17+4\mu \rightarrow \mu = 3$

$9+7\lambda = 5-\mu$ — (2)

نعوض $\mu=3$ في معادلة (1) :

$-2-5\lambda = -3+6$

$5\lambda = -5 \rightarrow \lambda = -1$

نعوضها في معادلة (3) :

$9+7\lambda = 5-\mu$

$9-7 = 5-3$ ✓

نعوض $\lambda = -1$ لمعرفة نقطة التقاطع في معادلة l_1

$(-2+5, -5, 9-7)$

$(3, -5, 2)$

رافت صباح

13 اتجاه المستقيم l_1 $\vec{v} = \langle -5, 0, 7 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 $\vec{u} = \langle 2, 4, -1 \rangle$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = -10 + 0 - 7 = -17$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \quad , \quad |\vec{u}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\sqrt{21}}\right) \simeq 115.5^\circ$$

قياس الزاوية الحادة : $180 - 115.5^\circ = 64.5^\circ$

اذا كانت $A(1, 4, -5)$ و $B(3, 0, 2)$ و $C(-4, 1, 3)$

اجب عن الاسئلة الاربعة الآتية تباعاً :-

14 اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

15 اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

16 اذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ فاثبت ان :

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

17 جد مساحة المثلث ABC

الحل :-

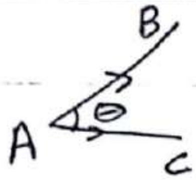
14 $\overrightarrow{AB} = \langle 3-1, 0-4, 2+5 \rangle = \langle 2, -4, 7 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + t\langle 2, -4, 7 \rangle$$

15 $\overrightarrow{AC} = \langle -4-1, 1-4, 3+5 \rangle = \langle -5, -3, 8 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + u\langle -5, -3, 8 \rangle$$

رافت ضاهر



(16) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10+12+56 = 58$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{58}{\sqrt{69}\,\sqrt{98}}$$

$$\cos\theta = \frac{58}{\sqrt{69}\,\sqrt{49\times 2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

(17) نحتاج $\sin\theta$ وعليه :

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{69}\,\sqrt{98}\,\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$$

---

18) اذا كانت $\vec{r} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l وكانت النقطة V تقع على المستقيم l حيث $l \perp \overline{OV}$ فما احداثيات النقطة V

الحل: V تقع على المستقيم l فان احداثياتها $(3+4t, -25+5t, 13-t)$

$\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle$

بما ان $l \perp \overrightarrow{OV}$ معطاة $\vec{w}\cdot\overrightarrow{OV} = 0$ حيث $\vec{w}$ اتجاه l

$\langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle \cdot \langle 4, 5, -1\rangle = 0$

$12+16t-125+25t-13+t = 0$

$42t = 126 \rightarrow t = 3$

احداثي V هي: $(3+12, -25+15, 13-3)$

$(15, -10, 10)$

رافت صابحي

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين G, H حدد اذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي :-

(19) $E(17, 6, 34)$ و $F(5, 9, 16)$ و $G(1, 21, -2)$ و $H(-13, -14, 19)$

(20) $E(-3, -5, 16)$ و $F(12, 0, 1)$ و $G(7, 2, 11)$ و $H(1, -22, 23)$

الحل :-

19) $\overrightarrow{EF} = \langle 5-17, 9-6, 16-34 \rangle = \langle -12, 3, -18 \rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle -13-1, -14-21, 19+2 \rangle = \langle -14, -35, 21 \rangle$

لا يوجد عدد حقيقي K احقيق $\overrightarrow{EF} = k\,\overrightarrow{GH}$ وعليه غير متوازيان

نفحص التقاطع :-

$\vec{r} = \langle 17, 6, 34 \rangle + t\langle -12, 3, -18 \rangle$ معادلة l_1

$\vec{r} = \langle 1, 21, -2 \rangle + u\langle -14, -35, 21 \rangle$ معادلة l_2

نساوي $\vec{r}$

$\langle 17-12t, 6+3t, 34-18t \rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u \rangle$

$17 - 12t = 1 - 14u$ — (1)

$6 + 3t = 21 - 35u$ — (2)

$34 - 18t = -2 + 21u$ — (3)

بحل معادلة (1) و (3) ينتج $u = \frac{2}{7}$, $t = \frac{5}{3}$

نتحقق في معادلة (2)

$6 + 3\left(\frac{5}{3}\right) = 21 - 35\left(\frac{2}{7}\right)$

$11 = 11$ ✓

نعوض في $\vec{r}$ معادلة :-

$\langle 17 - 12\left(\frac{5}{3}\right), 6 + 3\left(\frac{5}{3}\right), 34 - 18\left(\frac{5}{3}\right) \rangle$

$(-3, 11, 4)$

2) $\overrightarrow{EF} = \langle 12+3, 0+5, 1-16 \rangle = \langle 15, 5, -15 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle 3, 1, -3 \rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle 1-7, -22-2, 23-11 \rangle = \langle -6, -24, 12 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle -1, -4, 2 \rangle$

غير متوازيان لعدم وجود ثابت بحيث $\langle 15, 5, -15 \rangle = k \langle -6, -24, 12 \rangle$

نتفحص التقاطع :-

معادلة المستقيم l_1 $\quad \vec{r} = \langle -3, -5, 16 \rangle + t \langle 3, 1, -3 \rangle$

معادلة المستقيم l_2 $\quad \vec{r} = \langle 7, 2, 11 \rangle + u \langle -1, -4, 2 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ $\quad \langle -3+3t, -5+t, 16-3t \rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u \rangle$

$-3+3t = 7-u \quad \text{—— } (1)$

$-5+t = 2-4u \quad \text{—— } (2)$

$16-3t = 11+2u \quad \text{—— } (3)$

بحل معادلة (1) و (3) نتيج

$u = -5 \quad , \quad t = 5$

نعوضها في معادلة (2) :

$-5+t = 2-4u$

$-5+5 = 2+20$

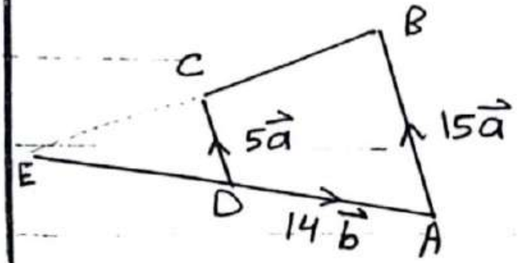
$0 \neq 22 \quad \times$

وعليه المستقيمان غير متقاطعان وعليه متخالفان :)

راقت صابح

9

21) في الشكل الرباعي $ABCD$ مُدَّ AD على استقامته ليصل الى النقطة E حيث $AD = 2DE$ اذا كان $\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$ وكان $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$ وكان $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$ فاثبت ان B و C و E على استقامة واحدة



الحل :-

نثبت ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

نكتب كل منهما بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}(-14\vec{b})$$
$$= -7\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) + 15\vec{a}$$
$$= 7\vec{b} + 14\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 21\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 3(7\vec{b} + 5\vec{a}) \quad \text{—— } 1$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$
$$= 7\vec{b} + 5\vec{a} \quad \text{—— } 2$$

من معادلة 1 و 2 فان :-

$$\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC}$$

وهذا يعني ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها وعليه النقاط E و C و B تقع على استقامة واحدة

رافت صابي

0