الاول ثانوي
علمي

الوحدة
السادسة

المتطابقات والمعادلات المثلثية

شرح مفصل

حل جميع اسئلة الوحدة

رافت صافي

0785824464

مدرسة سمر الثانوية

الوحدة 6

المتطابقات المثلثية (1)

المتطابقات المثلثية الاساسية :

1) متطابقات المقلوب :-

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

2) المتطابقات النسبية

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3) متطابقات فيثاغورس

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

4) متطابقات الزوايا السالبة

$\sin-\theta = -\sin\theta$, $\cos-\theta = \cos\theta$

$\tan-\theta = -\tan\theta$

5) متطابقات الزاويتين المتتامتين

1) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

2) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

3) $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

4) $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$

5) $\sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta$

6) $\csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta$

راقت ضابي

مثال: جد قيمة $\sec\theta$ اذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ربع ثاني

الحل :-

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5} , -\frac{4}{5}$$

الربع الثاني $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{-4}{5}} = \frac{-5}{4}$$

التدريب واحل المسائل ص 56

جد قيمة $\tan\theta$ اذا كان $\sec\theta = \frac{-3}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ثالث

الحل :-

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{-2}{3}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta + \frac{4}{9} = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} , -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

الربع الثالث $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

حل آخر

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$\frac{9}{4} = 1 + \tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta = \frac{5}{4} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تبسيط المقادير الجبرية

هو كتابة المقادير ... بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط
(إن أمكن)

مثال: بسطها :-

① $\sin x \cos^2 x - \sin x$

الحل :-

عامل مشترك

$= \sin x(\cos^2 x - 1)$

متطابقة فيثاغورس

$= (\sin x)(-\sin^2 x) = -\sin^3 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

---

② $\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

هنا نوحد المقامات

$$\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cancel{\sin x + 1}}{\cos x\cancel{(1+\sin x)}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

---

③ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x$

$= \sin x \cot x$

$= (\sin x)\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \cos x$

(التحقق من فهمك) بسط كلاً مما يلي

ص 57

a) $\sin x(\csc x - \sin x)$

b) $1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

c) $\sin(\frac{\pi}{2} - x)\sec x$

---

a) $\sin x \csc x - \sin^2 x$ — فك أقواس

$= (\sin x)(\frac{1}{\sin x}) - \sin^2 x$ — المقلوب

$= 1 - \sin^2 x$ — متطابقة فيثاغورس $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$= \cos^2 x$

---

b) $1 + \dfrac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ — توحيد مقامات

$= 1 + \dfrac{\sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)}$

$= 1 + \dfrac{1}{\cos x}$

$= 1 + \sec x$

---

c) $(\cos x)(\sec x)$ — المتممة

$= (\cos x)(\frac{1}{\cos x})$ — المقلوب

$= 1$

كتابة المقدار المثلثي دون كسر

تذكير

$$\frac{a \pm b \pm c}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} \pm \frac{c}{d}$$

هنا نلجأ الى الضرب بالمرافق

$$a \pm b \xrightarrow{\text{مرافقه}} a \mp b \xrightarrow{\text{الضرب}} a^2 - b^2$$

مثال :- اعيد كتابة $\frac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسراً

الحل :-

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

المقام موحد هنا

نوزع البسط على المقام

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

مقلوب

$$= \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x \cos x}$$

$$= \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec^2 x - \tan x \sec x$$

57 ص (التحقق من فهمي)

اعيد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسراً

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$

متطابقة فيثاغورس
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \csc^2 x - \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$= \csc^2 x - \cot x \csc x$$

اثبات صحة متطابقة مثلثية

يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لاثبات صحة متطابقات مثلثية وعن طريق تحويل احد طرفي المتطابقة المثلثية المراد اثبات صحتها الى الطرف الآخر باتباع سلسلة من الخطوات.

مثال: اثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1) $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

الحل: ابدأ الطرف الايسر

$(\sin x)\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

متطابقة فيثاغورس

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$

$= \sec x - \cos x$

2) $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

عامل مشترك في البسط مع فرق مربعين للمقام

$$= \frac{\cos x \cancel{(1+\sin x)}}{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}$$

$$= \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

حل آخر ↓ ابدأ من الطرف الايمن

---

3) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$

الحل :-

الطرف الايسر

نوحد مقامات

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 + \cos x + \cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$= \frac{2 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$

$$= \frac{2\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{(1+\cos x)}\sin x}$$

$$= \frac{2}{\sin x}$$

$$= 2\csc x$$

8

{تحقق من فهمك ص 60}

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية

a) $\cot x \cos x = \csc x - \sin x$

b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

c) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

الحل : الطرف الأيسر

a) $\cot x \cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \cos x$

متطابقات المطلوب

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \csc x - \sin x$$

---

b) الطرف الأيسر وضرب بالمرافق

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

---

c) توحيد مقامات

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cancel{\cos x}+1-\cancel{\cos x}}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2\csc^2 x$$

في بعض اسئلة الاثبات يكون هناك صعوبة في البدء بأحد الأطراف للوصول للطرف الآخر، هنا في هذه الحالة نبسط كل طرف الى أن يتساوا.

مثال: أثبت صحة المتطابقة

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$$

الحل:-

الطرف الايمن :-

متطابقة

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$$

$$= \frac{\cancel{(\sec x - 1)}(\sec x + 1)}{\cancel{\sec x - 1}} = \sec x + 1$$

الطرف الأيسر :

المقام موحد

هنا وزعنا البسط على المقام

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \sec x + 1$$

بما أن الطرفين متساويين اذن المتطابقة صحيحة

حل آخر لو بدأنا من الطرف الايمن :-

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \frac{\cancel{(\sec x - 1)}(\sec x + 1)}{\cancel{\sec x - 1}}$$

$$= \sec x + 1$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 1 \qquad \text{نوحد مقامات}$$

$$= \frac{1+\cos x}{\cos x}$$

التحقق من فهمك ص 60

اثبت صحة المتطابقة $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

الحل:

الطرف الايسر

$$(\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x$$
$$= \sec^2 x - 1 + 2(\tan x)\left(\frac{1}{\tan x}\right) + \csc^2 x - 1$$
$$= \sec^2 x \cancel{-1} + \cancel{2} + \csc^2 x \cancel{-1}$$
$$= \sec^2 x + \csc^2 x$$

متطابقات المجموع والفرق

1) $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

2) $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

3) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

4) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

5) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$

6) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

مثال : جد قيمة كل مما يلي دون آلة حاسبة

① $\sin 15^\circ$

② $\tan \frac{5\pi}{12}$

③ $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$

الحل :-

نكتب 15 بصورة زاويتين مشهورتين

① $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$

$= \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 75$

② $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

---

③ $\underbrace{\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ}_{\text{مطابقة}} \sin 40^\circ = \cos(20^\circ + 40^\circ)$

$= \cos 60^\circ$

$= \frac{1}{2}$

(التحقق من فهمك) ص62 جد قيمة ما يلي دون استعمال الآلة الحاسبة

a) $\cos 75^\circ$ b) $\tan\frac{\pi}{12}$ c) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

الحل:..

الكتب 75 على صورة زاويتين مشهورتين

a)

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$$

b)

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \tan 30} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

أو

$$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$$

c)

$$\underbrace{\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ}_{\text{مطابقة}}$$

$$\sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

يمكن ايضاً استعمال متطابقات المجموع والفرق لاثبات صحة متطابقات مثلثية اخرى .

مثال :- اثبت صحة كل متطابقة مما يأتي :-

① $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

② $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

الحل :-

الطرف الايسر

① $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x$$
$$=(0)\cos x+(1)\sin x$$
$$=\sin x$$

الطرف الايمن

② $$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$
$$=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

(تحقق من فهمك) 3 اثبت صحة كل متطابقة مما يأتي

a) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

الحل :-

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$
$$=\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=\cot x$$

b) $\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

الحل :-

الطرف الايمن

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\tan x-1}{1+\tan x}$$

التدريب وحل المسائل

جد قيمة كل من نسب المثلثات الآتية ضمن الفترة المعطاة

① $\cot\theta$ ، $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل :-

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{1}{9} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

الربع الأول

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times 3 = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$$

② $\sec\theta$ ، $\tan\theta = \frac{-3}{7}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

الحل :-

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$
$$= \frac{9}{49} + 1 = \frac{58}{49}$$
$$\sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}, \frac{\sqrt{58}}{7}$$

الربع الثاني سالب

$$\sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$$

③ $\tan\theta$ ، $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

الحل :-

$$\csc\theta = \frac{-5}{3} \rightarrow \sin\theta = \frac{-3}{5}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}$$

الربع الثالث سالب

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

(4) $\sin\theta$ ، $\sec\theta = \frac{9}{4}$ ، $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

الحل :-

الربع الرابع

$\cos\theta = \frac{4}{9}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{16}{81} = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{65}}{9}$ ، $-\frac{\sqrt{65}}{9}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{65}}{9}$

((

ابسط كلاً من العبارات المثلثية الآتية

(5) $\cos x \tan x$

(6) $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x}$

(7) $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x} + \cos^2\theta$

(8) $\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

(9) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x}$

(10) $\frac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

((

الحل :-

المطلوب

(5) $\cos x \tan x = (\cancel{\cos x})\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = \sin x$

(6) $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\sin x}$

$= \left(\frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\sin x}}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

---

(7) $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x} + \cos^2\theta = \frac{\sin x}{\csc x} + \cos^2\theta$

$= \sin^2 x + \cos^2\theta$

$= 1$

(8) $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}$ ونوحد المقام

$= \tan x - 1 + \cot x - 1$

$= \tan x + \cot x - 2$

---

(9) $\frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1}{\sin x\cos x} = \frac{\cancel{1} + 2\sin x\cos x - \cancel{1}}{\sin x\cos x}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 2$

---

(10) $\frac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \sin x$

اثبت كلاً من العبارات المثلثية الآتية

(11) $\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

الحل :-

الطرف الايسر :-

$-\cot x\cos x - \sin x = \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos x) - \sin x$

$= \frac{-\cos^2 x}{\sin x} - \sin x$

$= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x}$

$= \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin x} = \frac{-1}{\sin x}$

$= -\csc x$

(12) $(\sin x+\cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

الحل : الطرف الايسر

$$(\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$$
$$= 1 + 2\sin x\cos x$$

---

(13) $$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

الحل :

الطرف الايسر

المرافق

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$
$$= \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} \times \frac{\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

---

(14) $$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\sec x-\tan x)^2$$

الطرف الايسر

المرافق

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$
$$= \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}$$
$$= \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$
$$= (\sec x-\tan x)^2$$

(15) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

الطرف الايمن :-

فرق مربعين

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{}$$

1

$$= \sin^2 x - \cos^2 x$$

---

(16) $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x \tan x$

الطرف الايسر

توحيد مقامات

$$\frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= 2\tan x \sec x$$

---

(17) $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$

الحل :-

خصائص اللوغاريتمات

$$\ln\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$$

---

(18) $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

خصائص اللوغاريتمات

$$\ln|(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)|$$

$$\ln|\sec^2\theta - \tan^2\theta| = \ln 1 = 0$$

(19)

جد قيمة كل من النسب المثلثية الآتية من دون آلة حاسبة

(19) $\sin 165°$

$\sin(180-165) = \sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ⟶ الحل مكرر

(20) $\tan 195°$

$\tan(195-180) = \tan 15° = \tan(45-30)$

$= \dfrac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \tan 30}$

$= \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

(21) $\sec\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)$

نجد $\cos\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12} = 15°$

$\cos 15° = \cos(60-45)$

$= \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sec\frac{\pi}{12} = \dfrac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

(22) $\sin\frac{17\pi}{12}$ $\left(\frac{17\cancel{\pi}}{12}\right)\left(\frac{180}{\cancel{\pi}}\right)=255$

$\sin(255)=-\sin(255-180)=-\sin 75$

$=-\sin(45+30)=-(\sin 45\cos 30+\cos 45\sin 30)$

$=-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$

---

(23) $\underbrace{\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{18}}_{\text{متطابقة}}\sin\frac{5\pi}{18}$

$\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}\right)=\sin\frac{6\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

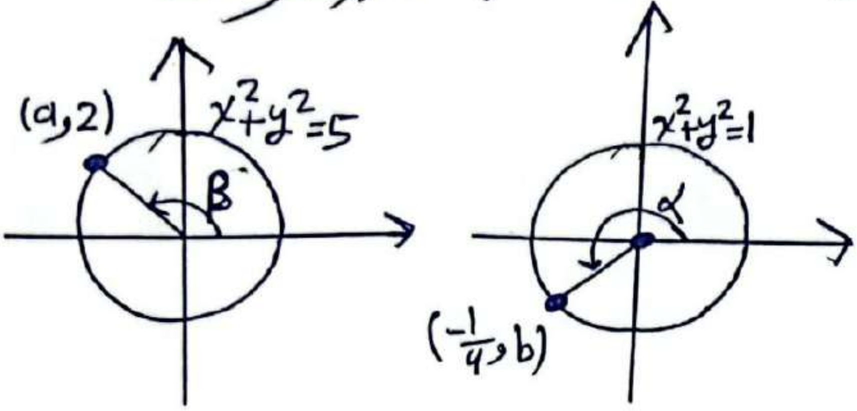
---

(24) $\frac{\tan 40-\tan 10}{1+\tan 40\tan 10}$

الحل: متطابقة

$\tan(40-10)=\tan 30=\frac{1}{\sqrt{3}}$

استعمل الشكل المجاور لايجاد قيمة كل من الاقترانات الآتية، علماً بأن:



$f(x)=\sin x$
$g(x)=\cos x$
$h(x)=\tan x$

(25) $f(\alpha+\beta)$ (26) $g(\alpha-\beta)$ (27) $h(\alpha+\beta)$

الحل:

(25) $f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

لنعود الى الدائرتان ← هنا $(-\frac{1}{4}, b)$ تقع على الدائرة $x^2+y^2=1$

$\frac{1}{16}+b^2=1 \rightarrow b^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$b=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ حسب الربع الثالث

وكذلك $(a,2)$ تقع على الدائرة $x^2+y^2=5$

$a^2+4=5$
$a^2=1$
$a=1, -1$
$a=-1$ للربع الثاني

$\sin\alpha$
بالنسبة الى الزاوية α ضلع انتهائها $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ $\cos\alpha$

$r=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{15}{16}}=1$

بالنسبة الى الزاوية β ضلع انتهائها $(-1, 2)$

$r=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ و $\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$

نفود لفرع (25)

$$\sin(\alpha+\beta)=\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt5}\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)$$
$$=\frac{-\sqrt{15}}{4\sqrt5}-\frac{2}{4\sqrt5}=\frac{-\sqrt{15}-2}{4\sqrt5}$$

---

(26) $$g(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt5}\right)+\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)$$
$$=\frac{1-2\sqrt{15}}{4\sqrt5}$$

---

(27) $$h(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\frac{-\sqrt{15}}{4}}{\frac{-1}{4}}=\sqrt{15}$$
$$\tan\beta=\frac{\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{-1}{\sqrt5}}=-2$$

---

(28) منشور: يمكن قياس معامل انكسار الضوء الابيض في المنشور باستعمال المعادلة $n=\frac{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}}$ اذا كانت $\alpha=60°$ فأثبت ان معادلة معامل الانكسار تكتب في صورة

$$n=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

الحل: نعوض $\alpha=60$

$$n=\frac{\sin(\frac{\theta}{2}+30)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos30+\cos\frac{\theta}{2}\sin30}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt3}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac12\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ نوزع بسط على (المقام)

$$n=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\cot\frac{\theta}{2}$$

(29) اذا كان $g(x)=\cos x$ اثبت ان

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=-\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

عامل مشترك $\cos x$

$$=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

وزع

$$=\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}$$

$$=\frac{-\cos x(1-\cos h)}{h}-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

اثبت صحة كل من المتطابقات الآتية

(31) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=\sin A\cos B+\cancel{\cos A\sin B}+\sin A\cos B-\cancel{\cos A\sin B}$$

$$=2\sin A\cos B$$

(32) $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

الحل :-

الطرف الايمن

$$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

من اقواس

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$$

$$=\sin A+\cos A$$

(33) $$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$$

نوزع بسط على مقام

$$\frac{\sin A\cancel{\cos B}}{\cos A\cancel{\cos B}}-\frac{\cancel{\cos A}\sin B}{\cancel{\cos A}\cos B}+\frac{\sin B\cancel{\cos C}}{\cos B\cancel{\cos C}}-\frac{\cancel{\cos B}\sin C}{\cancel{\cos B}\cos C}+\frac{\sin C\cancel{\cos A}}{\cos C\cancel{\cos A}}-\frac{\cancel{\cos C}\sin A}{\cancel{\cos C}\cos A}=$$

$$\cancel{\tan A}-\cancel{\tan B}+\cancel{\tan B}-\cancel{\tan C}+\cancel{\tan C}-\cancel{\tan A}=0$$

---

(34) $$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$$

الطرف الايسر

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\underbrace{(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)}$$

$$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$$

متطابقة فيثاغورس ملاحظة

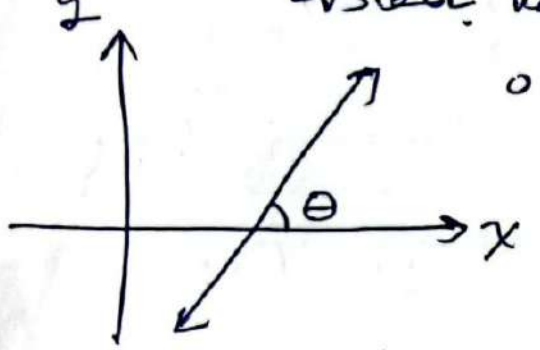
$$=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$$

$$=\cos^2 x-\cancel{\cos^2 x\sin^2 y}-\sin^2 y+\cancel{\sin^2 y\cos^2 x}$$

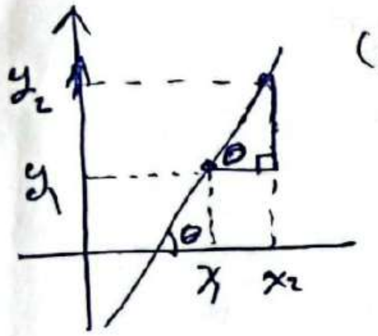
$$=\cos^2 x-\sin^2 y$$

---

(35) اذا كان L مستقيماً في المستوى الاحداثي
θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب
فان الزاوية θ تسمى زاوية ميل المستقيم L
أثبت ان ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة
$m = \tan\theta$ حيث $0 < \theta < \pi$



الحل :-



افرض نقطتين على المستقيم $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

قانون الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ ظل الزاوية θ

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

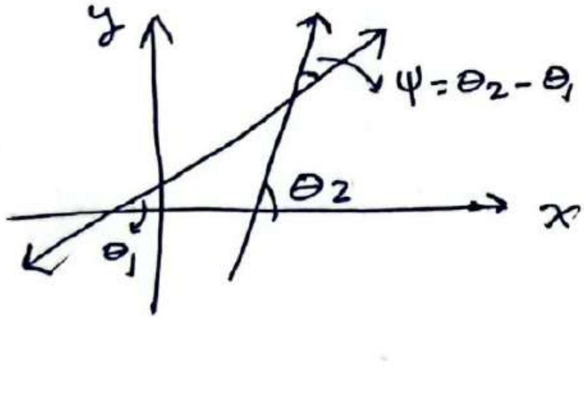
ومنه ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية الميل θ

---

(36) اذا كان l_1 و l_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الاحداثي وميل كل منهما m_1 و m_2 على الترتيب وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فاستعمل النتيجة من السؤال السابق لاثبات ان

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

تعرف باسم

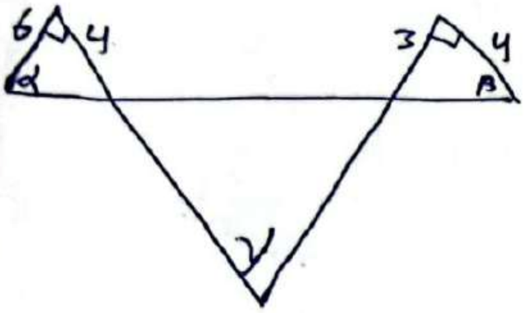


الحل

$$\tan\psi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

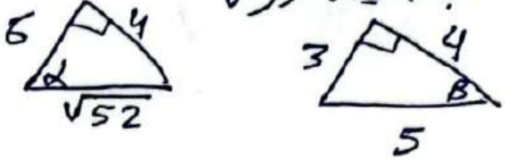
مهارات تفكير عليا :-

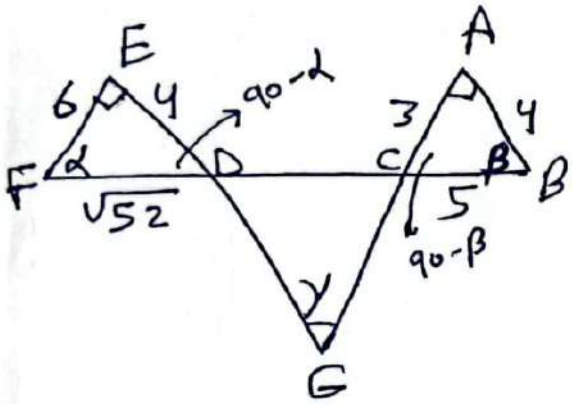
(37) اعتماداً على الشكل الآتي ، أثبت ان



$\tan\gamma$ $\alpha+\beta=\gamma$

الحل :- نطبق فيثاغورس





الزاوية ACB والزاوية DCG

متقابلتان بالرأس وكذلك الزاويتان

EDF و CDG إذن :-

قياس الزاوية DCG يساوي $90-\beta$

وقياس الزاوية CDG يساوي $90-\alpha$

((مجموع زوايا المثلث 180)) $\gamma+\cancel{90}-\beta+\cancel{90}-\alpha=\cancel{180}$

$\gamma-\beta-\alpha=0$

$\alpha+\beta=\gamma$

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$ 90

$$=\frac{\frac{4}{6}+\frac{3}{4}}{1-\frac{4}{6}\times\frac{3}{4}}=\frac{17}{6}$$

(38) اذا كان $\tan\alpha = x+1$ و $\beta = x-1$ فاثبت ان $2\cot(\alpha-\beta) = x^2$ مبرراً اجابتي

الحل:-

$$2\cot(\alpha-\beta) = \frac{2}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{2}{\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

$$= \frac{2}{\frac{x+1-x+1}{1+(x+1)(x-1)}} = \frac{2}{\frac{2}{1+x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x^2}} = \left(\frac{x^2}{2}\right)(2) = x^2$$

---

(39) جد قيمة

$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الحل:-

$$\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Big/ \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

---

(40) اكتشف الخطأ

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \qquad \times$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

الحل:- الخطأ في المطابقة

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ نفسها $\leftarrow$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$

(28)

ورقة عمل

أثبت ما يلي :-

1. $\sin(\pi + x) = -\sin x$
2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$
3. $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \tan x + \tan y$
4. $\tan(\frac{\pi}{4} - x)\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 1$
5. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\csc x} = 1$
6. $\dfrac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$

بسّط :-

1. $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$
2. $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

جد قيمة

1. $\dfrac{\sin 75 + \sin 15}{\cos 15 - \cos 75}$
2. $\dfrac{\tan 78 - \tan 48}{1 + \tan 78 \tan 48}$

المتطابقات المثلثية (2)

أولاً :- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

③ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال :- اذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ جد قيمة

① $\sin 2\theta$ ② $\cos 2\theta$ ③ $\tan 2\theta$

الحل :-

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= (2)(\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{-24}{25}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta + \frac{9}{25} = 1$

$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}, \frac{-4}{5}$

② $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= 1 - (2)(\frac{9}{25}) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

③ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4}$

$= \dfrac{(2)(-\frac{3}{4})}{1-(\frac{-3}{4})^2} = \dfrac{\frac{-3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \dfrac{\frac{-3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{-24}{7}$

(التحقق من فهمي)

اذا كان $\cos\theta = \frac{-2}{3}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ جد قيمة كل مما يأتي

ⓐ $\sin 2\theta$ ⓑ $\cos 2\theta$ ⓒ $\tan 2\theta$

الحل :-

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{4}{9} = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9}$

$\sin^2\theta = \frac{5}{9}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt5}{3} , -\frac{\sqrt5}{3}$

a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= (2)\left(\frac{\sqrt5}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-4\sqrt5}{9}$

ⓑ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{-1}{9}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt5}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{-\sqrt5}{2}$

c) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{(2)\left(\frac{-\sqrt5}{2}\right)}{1 - \frac{5}{4}}$

$= \frac{-\sqrt5}{\frac{-1}{4}} = 4\sqrt5$

(ثانياً :-) نستطيع استعمال متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات مجموع زاويتين لايجاد قيمة اقتران مثلثي عند 3θ باستعمال قيمة الاقتران عند θ

(مثال) :- اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$

الحل :-

استخدم متطابقة المجموع

$3\theta = 2\theta + \theta$

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$

$= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(تحقق من فهمك صـ68) اكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$

الحل:

$3\theta = 2\theta + \theta$

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$$

$$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta$$

$$= 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta$$

ثالثاً: المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

* متطابقات تقليص القوة

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \text{ و } \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

مثال: اعد كتابة $\sin^2\phi\cos^2\phi$ بدلالة القوة الاولى لجيب التمام

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\cos^2 2\theta}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2\theta}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1+\cos 4\theta}{8}$$

توضيح

$$\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$$

$$\cos^2 6\theta = \frac{1+\cos 12\theta}{2}$$

$\vdots \qquad \vdots$

69 ص (التحقق من فهمك)

اعيد كتابة $\sin^4 x \cos^2 x$ بدلالة القوة الاولى لجيب التمام

$$\sin^2 x \underbrace{\sin^2 x \cos^2 x}_{\text{الفرع السابق}}$$

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right)$$

متطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال :- جد قيمة $\sin 22.5^\circ$

$$\sin 22.5^\circ = \sin\left(\frac{45}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}}$$ موجب (الربع الاول)

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

---

70 ص (التحقق من فهمك) جد قيمة $\cos 112.5$

$$\cos 112.5 = \cos\frac{225}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 225}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

سالب

$\cos 225$

$\cos(225-180)$

$-\cos(45)$

$\frac{-1}{\sqrt{2}}$

مثال اذا كان $\cos x = \frac{-3}{5}$ حيث $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ جد قيمة :

① $\sin\frac{x}{2}$ ② $\cos\frac{x}{2}$ ③ $\tan\frac{x}{2}$

الحل :

x ربع ثالث

$\frac{x}{2}$ تقع بالربع ثاني

① $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

② $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{-3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

③ $\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1+\frac{-3}{5}}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -\sqrt{4} = -2$

(التحقق من صحة) اذا كان $\sin x = \frac{2}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

ص 71

a) $\sin\frac{x}{2}$ ② $\cos\frac{x}{2}$ ③ $\tan\frac{x}{2}$ جـ

الحل :-

x ربع ثاني

$\frac{x}{2}$ ربع أول

a) $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$

b) $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$

c) $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{5+\sqrt{21}}{5}}{\frac{5-\sqrt{21}}{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{4}{25} + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \frac{4}{25}$

$\cos^2 x = \frac{21}{25}$

$\cos x = \frac{-\sqrt{21}}{5}$

رابعاً :-

اولاً :- متطابقات التحويل من الضرب الى مجموع أو فرق

1) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

2) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

3) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

مثال : اعد كتابة $\sin 3x \sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق

الحل :-

$$\sin 3x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x))$$

نهمل السالب

$$= \frac{1}{2}(\cos -2x - \cos 8x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x$$

التحقق من فهمك ص 72

اعيد كتابة $\sin 7x \cos x$ في صورة مجموع أو فرق

الحل :-

$$\sin 7x \cos x = \frac{1}{2}(\sin(7x-x) + \sin(7x+x))$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 8x) = \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 8x$$

ثانياً :- متطابقات تحويل المجموع أو الفرق الى ضرب

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

3) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4) $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

مثال: اعد كتابة $\sin 5x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

الحل:

$$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$
$$= 2\cos 4x \sin x$$

---

73 ص (التحقق من فهمك)

اعد كتابة $\cos 3x + \cos 2x$ في صورة ضرب.

الحل:

$$\cos 3x + \cos 2x = 2\cos\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{5}{2}x\cos\frac{1}{2}x$$

الاثبات: اثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

① $$\frac{\sin 3x}{\sin x\cos x} = 4\cos x - \sec x$$

الحل:
الطرف الايسر

$$\frac{\sin 3x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(2x+x)}{\sin x\cos x} = \frac{\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x}{\sin x\cos x}$$

وزع بسط على مقام

$$= \frac{\sin 2x\cancel{\cos x}}{\sin x\cancel{\cos x}} + \frac{\cos 2x\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}\cos x}$$
$$= \frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\cos x}$$
$$= \frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}} + \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}$$

متطابقات الضعف

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= 2\cos x + 2\cos x - \sec x$$
$$= 4\cos x - \sec x$$

(2) $$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$$

الحل:- الطرف الأيسر

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)} = \frac{2\cancel{\cos 2x}\sin x}{2\cancel{\cos 2x}\cos x}$$

$$= \tan x$$

التمرين صفحة ص 74 أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي :-

(a) $$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$$

b) $$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

الحل :-

(a) الطرف الأيسر

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left(\frac{2\sin x}{\cos x}\right)\left(\cos^2 x\right) = 2\sin x\cos x$$

$$= \sin 2x$$

(b) الطرف الأيسر

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}}$$

$$= \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

أتدرب وأحل المسائل

جد قيمة كل من $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2}$، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$

① $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

② $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

③ $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

④ $\csc\theta = -\sqrt{5}$ ، $\cos\theta < 0$

⑤ $\cot\theta = \frac{2}{3}$ ، $\sin\theta > 0$

⑥ $\sec\theta = 3$ ، $\sin\theta > 0$

---

①

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (2)\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$$
$$\cos^2\theta = \frac{144}{169}$$
$$\cos\theta = \frac{12}{13}$$

---

②

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-2}{3}\sqrt{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta + \frac{2}{3} = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

---

③

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (2)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{-2}{\sqrt{5}}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\sec\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2} \rightarrow \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\frac{4}{5} + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{5}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

(4) $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{1}{5} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ✓

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

---

(5) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9}$

$\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3} \longrightarrow \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{9}{13} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{13}$

$\cos^2\theta = \frac{4}{13}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ✓, $\frac{-2}{\sqrt{13}}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= (2)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - (2)\left(\frac{9}{13}\right) = 1 - \frac{18}{13} = \frac{-5}{13}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$

---

(6) $\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{1}{9} = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9}$

$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (2)\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{8}}{9}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = 1 - \frac{16}{9} = \frac{-7}{9}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{6}}$

$= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

استعمل متطابقات المثلثات لتقليص القوة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوة الأولى لجيب التمام

⑦ $\sin^4 x$ ⑧ $\cos^4 x$ ⑨ $\cos^4 x \sin^2 x$

الحل :-

⑦ $$(\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

⑧ $$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

⑨

$$\cos^2 x \cos^2 x \sin^2 x$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$$

جد قيمة كل مما يأتي

(10) $\cos 22.5$

(11) $\sin 195$

(12) $\tan \frac{7\pi}{8}$

---

10) $\cos 22.5 = \cos \frac{45}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

11) $\sin 195 = -\sin(195-180) = -\sin 15 = -\sin\frac{30}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}$

$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

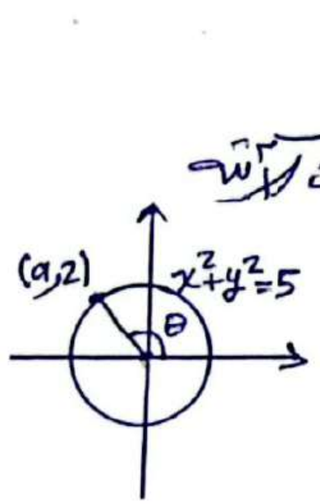
12) $\tan 157.5^\circ = -\tan(180-157.5) = -\tan 22.5$

$= -\tan\left(\frac{45}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos 45}{1+\cos 45}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

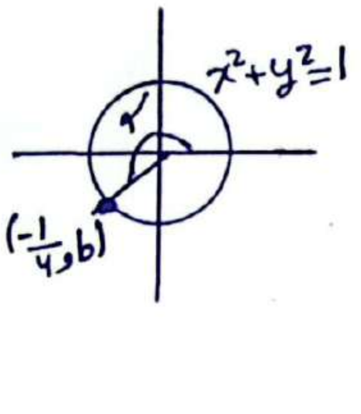
استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كل من الاقترانات الآتية

علماً بأن $f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x,\ h(x)=\tan x$



(13) $g(2\theta)$ (14) $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(15) $f(2\alpha)$ (16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



الحل: $(a,2)$ تحقق معادلة الدائرة $x^2+y^2=5$

$a^2+4=5 \rightarrow a = 1, -1$

$a=-1$

$(-\frac{1}{4},b)$ تحقق معادلة الدائرة

$\frac{1}{16}+b^2=1 \rightarrow b^2=\frac{15}{16}$

$b=\frac{-\sqrt{15}}{4}$

$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ⟵ $(-1, 2)$ ⟵ θ بالنسبة للزاوية

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\quad r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ⟵ دائرة الوحدة ⟵ α بالنسبة للزاوية

$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

(13) $g(2\theta) = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)$
$= 1 - \frac{8}{5} = \frac{-3}{5}$

(14) $g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

(15) $f(2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = (2)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{16}$
$= \frac{\sqrt{15}}{8}$

(16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

أعيد كتابة كل مقدار مما يأتي في صورة مجموع أو فرق

(17) $\sin 2x \cos 3x$ (18) $\sin x \sin 5x$ (19) $3\cos 4x \cos 7x$

الحل:

(17) $\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin(2x-3x) + \sin(2x+3x)\right)$
$= -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 5x$

(18) $\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}\left(\cos(x-5x) - \cos(x+5x)\right)$
$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x$

(19) $(3)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\cos(4x-7x) + \cos(4x+7x)\right)$
$\frac{3}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\cos 11x$

اعيد كتابة كل مقدار مما يأتي في صورة ضرب

(20) $\sin x - \sin 4x$ (21) $\cos 9x - \cos 2x$ (22) $\sin 3x + \sin 4x$

الحل :

20) $\sin x - \sin 4x = 2\cos\left(\frac{x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-4x}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{-3x}{2} = -2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$

21) $\cos 9x - \cos 2x = -2\sin\left(\frac{9x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{9x-2x}{2}\right)$

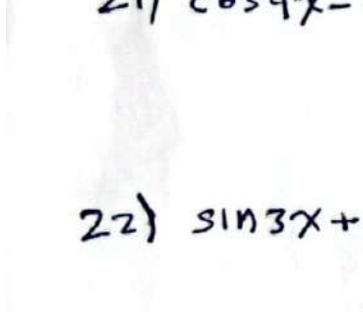
$= -2\sin\frac{11}{2}x\,\sin\frac{7}{2}x$

22) $\sin 3x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{3x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-4x}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{7}{2}x\cos\frac{x}{2}$

يقوم فن الاوريغامي (فن طي الورق) الياباني على طي قطعة واحدة من الورق بصورة متكررة لصنع اشكال فنية ، فعند طي الجزء الايمن الى الاسفل من ورقة مستطيلة بعداها 21.6 cm ، 28 cm كما في الشكل المجاور، فان طول خط الطي L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة

$$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta}$$



(23) اثبت ان علاقة طول خط الطي تكافئ العلاقة

$$L = \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$$

(24) جد طول الخط L اذا كانت θ=30

الحل :-

(23) $L = \frac{10.8}{\underbrace{\sin\theta\cos\theta}\cos\theta} = \frac{10.8}{\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta}$

$\frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}$

$= \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$

(24) عوض θ=30 $L = \frac{10.8}{\sin 30\cos^2 30} = \frac{10.8}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 28.8$

اثبت صحة كل من المتطابقات الآتية

25) $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

الحل :-

$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

متطابقة
$\cos 2x$

---

26) $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

الطرف الايمن

$\frac{1}{2}(\sin x \underbrace{\sin 2x} + 2\cos^3 x) = \frac{1}{2}((\sin x)(2\sin x \cos x) + 2\cos^3 x)$

$= \sin^2 x \cos x + \cos^3 x$

$= \cos x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = \cos x$

---

27) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$

الحل :-

الطرف الايسر

$\underbrace{\cos 2x}_{\text{متطابقة}} + 2\cos x + 1 = 2\cos^2 x \cancel{-1} + 2\cos x \cancel{+1}$

$= 2\cos x(\cos x + 1)$

---

28) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

الطرف الايسر

$\sin 3x = \sin(2x + x)$

$= \underbrace{\sin 2x} \cos x + \underline{\cos 2x} \sin x$

$= 2\sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$

$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

29) $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

الطرف الايسر

$$\tan 3x = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1-\tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1-\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)\tan x} = \frac{\frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x}}{1 - \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{\cancel{1-\tan^2 x}}}{\frac{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x}{\cancel{1-\tan^2 x}}} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

---

30) $\sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$

متطابقة $\sin 2x$

الطرف الايمن

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{2}$$

$$= 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

---

31) $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

الطرف الايسر

متطابقة $\cos 2x$

$$\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \tan^2 x$$

$$= \frac{2\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$= 2 - \sec^2 x + \tan^2 x$$

$$= 2 - \cancel{\sec^2 x} + \cancel{\sec^2 x} - 1 = 1$$

32) $\cos^2 2x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

الطرف الأيسر

$\cos^2 2x = (\cos 2x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2$ مفكوك التربيع

$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

33) $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

الطرف الأيسر

$$\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \frac{2\cancel{(\tan x - \cot x)}}{\cancel{(\tan x - \cot x)}(\tan x + \cot x)} = \frac{2}{\tan x + \cot x}$$

$$= \frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{1} = \sin 2x$$

34) $\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

متطابقة

الطرف الأيسر

$$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

متطابقة

35) $\cot^2 \frac{x}{2} = \dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

الحل:

الطرف الأيسر

$$\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \frac{1}{\sec x}}{1 - \frac{1}{\sec x}} = \frac{\frac{\sec x + 1}{\sec x}}{\frac{\sec x - 1}{\sec x}}$$

$$= \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$$

36) $\ln|\sin x| = \frac{1}{2}\left(\ln|1-\cos 2x| - \ln 2\right)$

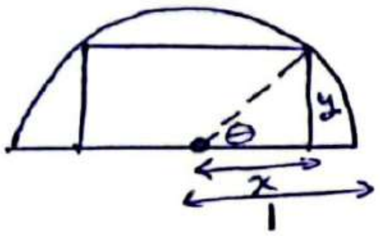
الطرف الايمن

$$\frac{1}{2}\left(\ln|1-\cos 2x| - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln \sin^2 x = \ln|\sin x|$$

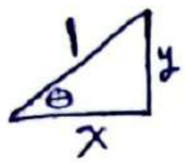
---

37) يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً في نصف دائرة طول نصف قطرها وحدة واحدة:



37) عبر باقتران بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل الموضح في الشكل المجاور، مبرراً اجابتي

38) أثبت أن $A(\theta) = \sin 2\theta$



الحل:- $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$

$$A = 2xy = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= \sin 2\theta$$

اثبت صحة كل مما يأتي:-

39) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

40) $\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(3 + \cos 4x + 4\cos 2x\right)$

الحل :-

$$39)\ \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(\ \sin 2x\ )^2$$
$$= 1 - 2(2\sin x \cos x)^2$$
$$= 1 - 2(4\sin^2 x \cos^2 x)$$
$$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

$$40)\ \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)\right)$$
$$= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

الوحدة (6) | حل المعادلات المثلثية

المعادلة المثلثية :- هي معادلة تحوي اقترانات مثلثية

حل المعادلات المثلثية

حالة (1) :- المعادلة على صورة $T(\theta)=c$ حيث c عدد

مثال :- حل المعادلات الآتية :-

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ 2) $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

الحل :- هنا الجيب موجب في الربع الأول والثاني وزاوية المرجع هي $\frac{\pi}{6}$

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$

$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ((لمعرفة مكان الزاوية في الربع الثاني $\pi -$ (زاوية المرجع)))

السؤال لم يحدد المجال هنا نضيف $2k\pi$ لأن الدورة 2π

2) $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

هنا جيب التمام سالب في الربع الثاني والثالث وزاوية المرجع $\frac{\pi}{4}$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ((الربع الثاني)

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ ((لمعرفة الربع الثالث هنا نضيف π))

نضيف $2k\pi$

حل المعادلات الآتية :- التحقق من فهمي ص 79

a) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

الجيب سالب في الربع الثالث والرابع وزاوية المرجع $\frac{\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

لمعرفة الزاوية في الربع الرابع $2\pi -$ (زاوية المرجع)

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

الربع الأول والرابع والمرجع $\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

نضيف $2k\pi$

راقت ضامن

في المثال السابق، اذا لم تكن الزوايا معروفة، هنا نلجأ الى الآلة الحاسبة

مثال :- حل المعادلات الآتية

① $\cos x = 0.65$ (الاول/الرابع)

shift → $\cos^{-1}$ → 0.65
نظام الراديان

$x = \cos^{-1}(0.65)$
$x = 0.68$
$x = 2\pi - 0.68 = 5.6$

نزيد $2k\pi$

2) $\tan x = -2$

$x = \tan^{-1} -2 = -1.11$

الظل سالب في الربع الثاني والرابع ودورته π مع العلم ان الظل ضمن دورة $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

نضيف π

(التحقق من فهمك) ص 80 حل المعادلات الآتية :-

1) $\sin x = 0.23$

$x = \tan^{-1} 0.23$

$x = 0.23$ الربع الاول

$x = \pi - 0.23$ الربع الثاني
$= 2.91$

2) $\tan x = -10$

$x = \tan^{-1} -10$

$x = -1.47$

نضيف (π) طول الدورة

حالة (2) معادلة تحوي اقتران مثلثي واحد

$2x+1 = x+5$ مشابهة لما سبق / $2x - 1 = 8$

مثال : حل المعادلات الآتية

① $3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$

الحل :-

$3\sin x - 5\sin x = -1 + 2$
$-2\sin x = 1$
$\sin x = \frac{-1}{2}$

الربع الثالث والرابع والمرجع $\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

② $\tan^2 x - 3 = 0$
$\tan^2 x = 3$
$\tan x = \sqrt{3}$, $\tan x = -\sqrt{3}$
$x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad x = -\frac{\pi}{3}$

②

التحقق من فهمك ص 82 — حل المعادلات الآتية

1) $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$

الحل :-

$5\sin x - 3\sin x = \sqrt{3}$

$2\sin x = \sqrt{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الربع الأول والثاني

والمرجع $\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

2) $2\cos^2 x - 1 = 0$

المرجع $\frac{\pi}{4}$

$2\cos^2 x \underset{+1}{-1} = \underset{+1}{0}$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ / $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

حل (3) : حل معادلات بالتحليل

(استخدام التحليل/عامل مشترك)

مثال $x^2 - 2x = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

عبارة تربيعية

مثال : حل المعادلات الآتية :-

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

الحل :-

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

2) $\cos x \sin x = 3\cos x$

$\cos x \sin x - 3\cos x = 0$

$\cos x(\sin x - 3) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$

$\sin x - 3 = 0$

$\sin x = 3$ مستحيل

التحقق من فهمك ص 83 حل المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$

a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

الحل :-

$(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ (المرجع $\frac{\pi}{6}$)

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

b) $\sin x \cos x = 2\sin x$

الحل :-

$\sin x \cos x - 2\sin x = 0$

$\sin x(\cos x - 2) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0, \pi$

$\cos x - 2 = 0$

$\cos x = 2$ مستحيل

حالة (4) : وجود أكثر من اقتران مثلثي مختلف / اختلاف الزاوية

مثال : حل المعادلات :-

الحل :-

1) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=0$

$2-2\sin^2 x+3\sin x=0$

$2\sin^2 x-3\sin x-2=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-2)=0$

$2\sin x+1=0$

$\sin x=\frac{-1}{2}$ (الربع الثالث والرابع) والمرجع $\frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

$\sin x-2=0$

$\sin x=2$ مستحيل

الحل :-

2) $\sin 2x-\cos x=0$

هنا نوحد الزوايا

$2\sin x\cos x-\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$2\sin x-1=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$

$x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

(تحقق من فهمك) 85 ص

حل المعادلات الآتية :-

a) $2\sin^2 x-3\cos x=0$

الحل :-

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x=0$

$2-2\cos^2 x-3\cos x=0$

$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+2)=0$

$2\cos x-1=0$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

$\cos x=-2$ مستحيل

b) $2\sin 2x-3\sin x=0$

$2(2\sin x\cos x)-3\sin x=0$

$4\sin x\cos x-3\sin x=0$

$\sin x(4\cos x-3)=0$

$\sin x=0$

$x=0, \pi$

$4\cos x-3=0$

$\cos x=\frac{3}{4}$

آلة حاسبة

حالة (5): وجود $\sin x$ مع $\cos x$ في حالة جمع وطرح هنا نربع الطرفين ثم نختبر الاجابات

مثال: حل المعادلة $\cos x + 1 = \sin x$

الحل: نربع الطرفين ثم نطابقها

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos x(\cos x + 1) = 0$$

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$

$\cos x = -1$, $x = \pi$

ضرورة التحقق حيث نعوضها في المعادلة الاصلية حيث عند $x = \frac{3\pi}{2}$ لا تحقق

وعليه مجموعة الحل π و $\frac{\pi}{2}$

التحقق من فهمك 86 حل المعادلة

$$\cos x - \sin x = 1$$

الحل: نربع الطرفين

$$\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 1$$

$$1 - 2\sin x\cos x = 1$$

$$-2\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x\cos x = 0$$

$\sin x = 0$, $x = 0, \pi$

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} , 3\frac{\pi}{2}$

نتحقق

$x = \pi$ لا تحقق

$x = \frac{\pi}{2}$ لا تحقق

مجموعة الحل $x = 0 , \frac{3\pi}{2}$

حالة (6): حل معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية

مثال: حل المتباينة:

$$\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$2\cos x \sin x = -1$$

$$\sin 2x = -1$$ نضرب الطرفين ب 2

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$ نقسم على (2)

$$x = \frac{3\pi}{4} + K\pi$$ نجرب ونتأكد أنها ضمن الدورة

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \pi, \frac{3\pi}{4} + 2\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$ → نهمل لأنها خارج الدورة

التحقق من فهمي ص 87

حل المعادلة

$$2\cos 2x = 1$$

الحل:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$$ نقسم على (2)

$$x = \frac{\pi}{6} + K\pi \;/\; x = \frac{5\pi}{6} + K\pi$$

نجرب

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi, \ldots$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

حالة (7) : معادلات تحوي اقترانات نصف الزاوية

مثال: حل المعادلة $2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$

الحل:

$$2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ الربع الأول والثاني

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ اضرب ب (2)

$x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{4\pi}{3}$

تحقق من صفحة 88 حل المعادلة $2\cos\frac{x}{2}-1=0$

الحل:

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0$$

$$2\cos\frac{x}{2}=1$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$ الأول والرابع

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ / $\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}$ اضرب ب (2)

$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi$ / $x=\frac{10\pi}{3}$

خارج الدورة

الحل $x=\frac{2\pi}{3}$

اكدرب واحل المسائل

حل المعادلات الآتية:-

① $2\sin x+3=2$

$2\sin x=2-3$

$2\sin x=-1$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}$

الربع الثالث والرابع وزاوية المرجع $\frac{\pi}{6}$

$x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

نضيف $2k\pi$

2) $1-\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$

الربع الاول والرابع والمرجع $\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{3}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

نضيف $2k\pi$

③ $\sin x=-0.3$ آلة حاسبة

4) $\cos x=0.32$ آلة حاسبة

5) $\tan x=5$ آلة حاسبة

6) $\sec^2 x-2=0$

هنا زاوية المرجع $\frac{\pi}{4}$

$\sec^2 x=2$

$\sec x=\sqrt{2}$, $\sec x=-\sqrt{2}$

$x=\frac{\pi}{4}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

نضيف $2k\pi$

7) $\cot x+1=0$

$\cot x=-1$

الربع الثاني والرابع المرجع $\frac{\pi}{4}$

$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$x=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

نضيف $k\pi$

⑧

8) $\csc^2 x - 4 = 0$

زاوية المرجع $\frac{\pi}{6}$

نضيف $2k\pi$

$\csc x = 2$ | $\csc x = -2$

$x = \frac{\pi}{6}$

$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

---

9) $3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

$3\sqrt{2}\cos x = -3$

$\cos x = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

المربع الثاني والثالث

م المرجع $\frac{\pi}{4}$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

نضيف $2k\pi$

حل المعادلات في الفترة $[0, 2\pi)$

10) $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

11) $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$

$(3\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 2$ مستحيل

$\sin x = \frac{1}{3}$

آلة حاسبة

12) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ الربعين الثاني والثالث

والمرجع $\frac{\pi}{3}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

13) $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$

$(\tan^2 x - 9)(\tan^2 x - 4) = 0$

$\tan^2 x - 9 = 0$

$\tan x = 3 / \tan x = -3$

آلة حاسبة

$\tan x = 2 / \tan x = -2$

آلة حاسبة

14) $\sin x + 2\sin x\cos x = 0$

$\sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0, \pi$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

---

15) $\tan^2 x\cos x = \tan^2 x$

$\tan^2 x\cos x - \tan^2 x = 0$

$\tan^2 x(\cos x - 1) = 0$

$\tan^2 x = 0$

$x = 0, \pi$

$\cos x = 1$

$x = 0$

حل المعادلات الأسية :-

حل المعادلات الآتية

16) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

$2(1-\sin^2 x) + \sin x = 1$

$2 - 2\sin^2 x + \sin x = 1$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

17) $\tan^2 x - 2\sec x = 2$

$\sec^2 x - 1 - 2\sec x = 2$ نرتب

$\sec^2 x - 2\sec x - 3 = 0$

$(\sec x - 3)(\sec x + 1) = 0$

$\sec x = 3$ $\quad$ $\sec x = -1$

آلة حاسبة $\quad$ $x = \pi$

18) $\csc^2 x = \cot x + 3$

$\cot^2 x + 1 = \cot x + 3$ نرتب

$\cot^2 x - \cot x - 2 = 0$

$(\cot x - 2)(\cot x + 1) = 0$ $\quad$ المرجع $\frac{\pi}{4}$

$\cot x = 2$ $\quad$ $\cot x = -1 \rightarrow \tan x = -1$

آلة حاسبة $\quad$ $x =$ $\quad$ $x = \frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{7\pi}{4}$

19) $\sin 2x = 3\cos 2x$

نقسم على $\cos 2x$

$\tan 2x = 3$

$2x = \tan^{-1}(3)$ آلة حاسبة

20) $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos x = \frac{-1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

عندما يدور القمر حول الارض ، فان الجانب المواجه للارض يكون في الغالب مضاء جزئياً بواسطة الشمس. تصف اطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه . ويمكن قياس فلكيا للطور بالعلاقة

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

حيث θ الزاوية بين الارض والشمس والقمر $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ جد قياس الزاوية θ لكل طور مما يأتي :-

(21) القمر الجديد $F = 0$

(22) الهلال $F = 0.25$

(23) القمر المكتمل $F = 1$

الحل :- (21) عوضنا $F = 0$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 0$$
$$1 - \cos\theta = 0$$
$$\cos\theta = 1$$
$$\theta = 0 , 360^\circ$$

(22) عوضنا $F = 0.25$
$= \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{4}$$
$$1 - \cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ و } \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$
$$\theta = \frac{5\pi}{3}$$

---

(23) عوضنا $F = 1$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 1$$
$$1 - \cos\theta = 2$$
$$\cos\theta = -1$$
$$\theta = \pi$$

---

24) تقطع شراعة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة $y=4e^{-3t}\sin 2\pi t$
ما الأوقات (قيم t) التي تكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y=0)$

الحل:

$$4e^{-3t}\sin 2\pi t = 0$$

$4e^{-3t} \neq 0$ $\sin 2\pi t = 0$

$2\pi t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ تعمم على 2π

$t = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

$t=0$ مرفوض

$t = \frac{1}{2} + k$ حيث k عدد صحيح

حل المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$

25) $\sin 2x + \cos x = 0$

$2\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) = 0$

$\cos x = 0$ $\sin x = \frac{-1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

---

26) $\tan\frac{x}{2} - \sin x = 0$

$\tan\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

$\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2}} - 2\cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$\sin\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

$x = 0, 2\pi, 4\pi$
✓ ✗ ✗

الحلول

$\frac{1 - 2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 0$

$1 - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

اضرب بـ (2)

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}, \frac{5\pi}{2}$ ✗

---

27) $2\sin^2 x = 2 + \cos 2x$

$2\sin^2 x = 2 + 1 - 2\sin^2 x$

$4\sin^2 x = 3$

$\sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

نأخذ بنقطها الأرباع

$x = \frac{\pi}{3}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

---

28) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

$2(1 - \cos^2\frac{x}{2}) - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

$2 - 2\cos^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

$2\cos^2\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} - 2 = 0$

$(2\cos\frac{x}{2} - 1)(\cos\frac{x}{2} + 2) = 0$

$\cos\frac{x}{2} = -2$ مستحيل

$2\cos\frac{x}{2} = 1$

$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{x}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \rightarrow x = \frac{10\pi}{3}$ ✗

خارج الفترة

29) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

نقسم على $\cos x$

$\tan x - \sqrt{3} = 0$

$\tan x = \sqrt{3}$ بالربع الأول والثالث

$x = \frac{\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

30) $\cos 2x = \cos x$

$2\cos^2 x - 1 = \cos x$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\cos x = 1$

$x = 0$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

اذا كان $\tan x + \frac{K}{\tan x} = 2$ حيث K ثابت، اجب عما يلي :-

31) أثبت عدم وجود حل للمعادلة عندما $K > 1$

32) حل المعادلة عندما $K = -8$ حيث $-\pi < x < \pi$

الحل :- نوحد المقامات

31

$\tan^2 x + K = 2\tan x$

تربيعية $\tan^2 x - 2\tan x + K = 0$

نجد مميزها

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4K$

هنا اذا $K>1$ يكون المميز سالب وعليه لا يوجد حل

32

$\tan^2 x - 2\tan x - 8 = 0$

$(\tan x - 4)(\tan x + 2) = 0$

$\tan x = 4$ $\tan x = -2$

آلة حاسبة   آلة حاسبة

جد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $\sin(\cos x) = 0$

(33)

$\cos x = 0, \pi, \dots$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\cos x = \pi \rightarrow$ ليس لها حل

هنا π قيمتها 3.14

الحل العام

$\frac{\pi}{2} + 2\pi K$

$\frac{3\pi}{2} + 2\pi K$

---

(34) حل المعادلة

$\tan x + \cot x = 5$ حيث $0 \leq x < 2\pi$

$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5$

$\frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = 5$

$\tan^2 x + 1 = 5 \tan x$

$\tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$ هنا نحل بالقانون العام

$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2}$ أكمله

---

(35) حل المتباينة

$|\sin x| < \frac{1}{2}$ حيث $0 \leq x < 2\pi$

هنا ذهب المطلق

$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$

هنا المرجع $\frac{\pi}{6}$

$[0, \frac{\pi}{6}], [\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}], \dots$