التكامل

الفرع العلمي

اختبار نهاية الوحدة

رأفت صافي 0785824464

مدرسة سمر الثانوية للبنين

التكامل || اختبار نهاية الوحدة

اختر رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

① قيمة $\int_0^2 e^{2x}\,dx$

a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ $\boxed{d)}$ $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

الحل :

$$\int_0^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0$$

$$= \frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$$

---

② قيمة $\int_{-4}^{4}(4-|x|)\,dx$

a) 0 b) 4

$\boxed{c)}$ 16 d) 8

الحل :

$-x$ \| x : $\boxed{-4}$, 0 , $\boxed{4}$

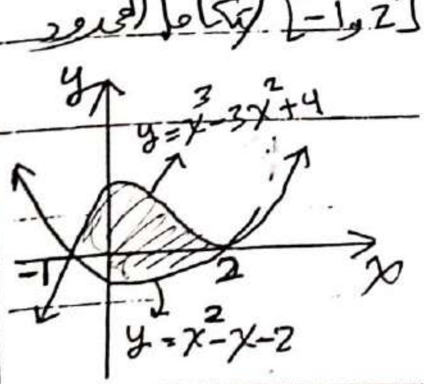
$$\int_{-4}^{0}(4+x)\,dx+\int_0^4(4-x)\,dx$$

$$\left(4x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-4}^{0}+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$0-(-16+8)+(16-8)=8+8=16$$

---

③ يبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $y=x^3-3x^2+4$ ، $y=x^2-x-2$ في الفترة $[-1,2]$ التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المظللة



$\boxed{a)}$ $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+x+6)\,dx$ b) $\int_{-1}^{2}(-x^3+4x^2-x-6)\,dx$

c) $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2-x+2)\,dx$ d) $\int_{-1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

الحل :

$$A=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)-(x^2-x-2)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+x+6)\,dx$$

رأفت ضاحي

14) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2xy$ الذي يحقق النقطة (1,0)

$\boxed{a)}\ y = e^{x^2}$ b) $y = x^2y$ c) $y = x^2y + 1$ d) $y = \frac{x^2y^2}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

نجد c حيث $x = 0$

$$\ln 1 = 0 + c \rightarrow c = 0$$

$$\ln|y| = x^2 \rightarrow |y| = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2} \ /\ y = -e^{x^2}$$ تحقق النقطة (1,0)

جد كلاً من التكاملات الآتية:

5) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$ 6) $\int (\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x})\,dx$

7) $\int \csc^2 x(1 + \tan^2 x)\,dx$ 8) $\int \frac{e^{-2x}}{e^{2x} + 5}\,dx$

9) $\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2}\,dx$ 10) $\int \sec^2(2x - 1)\,dx$

11) $\int \cot(5x + 1)\,dx$ 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

13) $\int_0^{\pi} \cos^2 0.5x\,dx$ 14) $\int_0^2 |x^3 - 1|\,dx$

راقت ضياء

15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + \cos 4x)\,dx$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2x+\frac{\pi}{3}) - 1 + \cos 2x)\,dx$

17) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \cos 2x)\,dx$

18) $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

19) $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$

20) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

21) $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}\,dx$

22) $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\,dx$

23) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx$

24) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

25) $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\,dx$

26) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}$

27) $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$

28) $\int (x+1)^2 \sqrt{x-2}\,dx$

29) $\int x \csc^2 x\,dx$

30) $\int (x^2-5x)e^x\,dx$

31) $\int x \sin 2x\,dx$

الحل :

5) $\int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{\frac{-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} = -2e^{-\frac{1}{2}x} + c$

6) $\int (\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x})\,dx = \int (\frac{-1}{2} \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x})\,dx$

$= \frac{-1}{2} \ln|\cos 2x| + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|x| + c$

رافت صباح ٠٥٤٥٥٠٦٢٠٠٥

7) $\int \csc^2 x \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} = \int \frac{dx}{(\frac{1}{2}\sin 2x)^2} = \int 4\csc^2 2x \, dx$

$= -\frac{4}{2}\cot 2x = -2\cot 2x + c$

8) $\int \frac{1}{2} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5} dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+5) + c$

9) $\int (2x + 11 + \frac{19}{x-2}) dx$

$= x^2 + 11x + 19\ln|x-2| + c$

$$\begin{array}{r} 2x + 11 \\ x-2 \overline{)\, 2x^2+7x-3} \\ -2x^2-4x \\ \hline 11x-3 \\ -11x-22 \\ \hline 19 \end{array}$$

10) $\frac{1}{2}\tan(2x-1) + c$

11) $\int \frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} dx = \int \frac{1}{5} \frac{5\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} dx$

$= \frac{1}{5}\ln|\sin(5x+1)| + c$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

مرافقت صباحي

13) $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{1}{2}x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(x+\sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi+0) - \frac{1}{2}(0+0) = \frac{1}{2}\pi$

14) $\int_0^1 (1-x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3-1)\,dx$

$x^3-1=0$

$x=1$

$\boxed{0} \quad 1 \quad \boxed{2}$

$(x-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1 + (\frac{x^4}{4}-x)\Big|_1^2$

$(1-\frac{1}{4})-0+(4-2)-(\frac{1}{4}-1) = \frac{7}{2}$

15) $(\tan x + \frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (1+\frac{1}{4}(0)) - (0+\frac{1}{4}(0)) = 1$

16) $(\frac{-1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3}) - x + \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$(\frac{-1}{2}\cos\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}) - (-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} - 0 + \frac{1}{2}\sin 0)$

$(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}) - (\frac{-1}{4}+0) = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

17) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}\sin 4x\,dx = \frac{-1}{8}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{-1}{8}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cos 0$

$= 0 + \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{8}$

رأفت ضاحي

18) $\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$

$= \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

$\frac{4}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$4 = A(x+2) + B(x-2)$

$4 = 4A \rightarrow A = 1$ عند $x=$

$4 = -4B \rightarrow B = -1$ عند $x = -2$

19) $\int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

$2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$

$\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$

$x+7 = A(x+2) + B(x-3)$

$10 = 5A \rightarrow A = 2$ عند $x=3$

$5 = -5B \rightarrow B = -1$ عند $x = -2$

20) $\int \frac{1}{2} \frac{(2x-2)}{x^2-2x-8} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-8| + C$

21) $\int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)} dx$

$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}\right) dx$

$\int \left(\frac{3}{x} - \frac{(2x)}{x^2+1}\right) dx$

$= 3\ln|x| - \ln|x^2+1| + C$

$= \ln\left|\frac{x^3}{x^2+1}\right| + C$

$\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$

$x^2+3 = A(x^2+1) + (Bx+c)(x)$

$3 = A$ عند $x=0$

$4 = 6 + B + c$ عند $x=1$

$B + c = -2$

$4 = 6 - c + B$ عند $x=-1$

بحل المعادلتان $c = 0$ و $B = -2$

رأفت صافي

22) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}\right) dx$

$\int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} + \frac{1}{1-x}\right) dx$

$= \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|1-x| + C$

$= \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} + C$

$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$

$1 = Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2$

$1 = B$ عند $x = 0$

$1 = C$ $x = 1$

$1 = -2A - B + 4C$ $x = 2$

$1 = -2A + 1 + 4$

$2A = 2 \rightarrow A = 1$

23) $u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{u^2 - 3u} \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{-1}{u^2 - 3u} du$

$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{-\frac{1}{3}}{u-3}\right) du$

$= \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|u-3| + C$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{u-3}\right| + C$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos x - 3}\right| + C$

$\frac{-1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$

$-1 = A(u-3) + Bu$

$-1 = -3A \rightarrow A = \frac{1}{3}$ $u = 0$ عند

$-1 = 3B \rightarrow B = -\frac{1}{3}$ $u = 3$ عند

راقت صافي ٠٥٥٥٤١٢٠٥

24) $u=\sqrt{x}$

$u^2=x$

$2u\,du=dx$

$\int \frac{2u^2}{u^2-4}\,du$

$=\int (2+\frac{8}{u^2-4})\,du$

$=\int (2+\frac{2}{u-2}+\frac{-2}{u+2})\,du$

$=2u+2\ln|u-2|-2\ln|u+2|+c$

$=2u+2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+c$

$=2\sqrt{x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|+c$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ u^2-4 & 2u^2 \\ & -2u^2-8 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$\frac{8}{(u-2)(u+2)}=\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+2}$

$8=A(u+2)+B(u-2)$

$8=4A \Rightarrow A=2$ $u=2$ نعوض

$8=-4B \Rightarrow B=-2$ $u=-2$

25) $u=1+\tan x$

$\frac{du}{dx}=\sec^2 x \rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x \tan x \sqrt{u}\,\frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \tan x\sqrt{u}\,du$ $\tan x = u-1$ لكن

$\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$

$\int (u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})\,du$

$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$

$\frac{2}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$

راقت ٢٠٠٣ صافي

$u^3 = 4 - 3x$

$x = \frac{4 - u^3}{3}$

26) $u = \sqrt[3]{4-3x}$

$u^3 = 4 - 3x$

$3u^2 du = -3\,dx \rightarrow dx = -u^2 du$

حل ايضاً بالاجزاء والجدول

$\int \frac{\frac{4-u^3}{3}}{u} \, -u^2 du = \int \frac{-4u + u^4}{3} du$

$= \frac{1}{3}\left(-2u^2 + \frac{u^5}{5}\right) = \frac{-2}{3}u^2 + \frac{1}{15}u^5 + c$

$= \frac{-2}{3}\sqrt[3]{(4-3x)^2} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(4-3x)^5} + c$

27) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x\,du$

$\int \frac{u^6}{x} x\,du = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} = \frac{1}{7}(\ln x)^7 + c$

$u^2 = x - 2$

$x = u^2 + 2$

28) $u = \sqrt{x-2}$

$u^2 = x - 2$

$2u\,du = dx$

$\int (u^2+3)^2 u \,(2u\,du) = \int 2u^2 (u^2+3)^2 du$

$= \int 2u^2(u^4 + 6u^2 + 9) du = \int (2u^6 + 12u^4 + 18u^2) du$

$= \frac{2u^7}{7} + \frac{12u^5}{5} + 6u^3 + c$

$= \frac{2}{7}\sqrt{(x-2)^7} + \frac{12}{5}\sqrt{(x-2)^5} + 6\sqrt{(x-2)^3} + c$

رافت صابحي

29) $u = x \qquad dv = \csc^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$$\int x\csc^2 x\,dx = -x\cot x + \int \cot x\,dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + c$$

30) الجدول

x^2-5x		e^x
$2x-5$	$+$	e^x
2	$-$	e^x
0	$+$	e^x

$$\int (x^2-5x)e^x\,dx = (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + 2e^x + c$$

الجدول

x		$\sin 2x$
1	$+$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
0	$-$	$-\frac{1}{4}\sin 2x$

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

رأفت صابحي

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

32) $\int_0^1 t\,3^{t^2}\,dt$ 33) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\,dx$

34) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}\,dx$ 35) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-x}{-x^2+x-2}\,dx$

36) $\int_1^2 \frac{32x^2+4}{16x^2-1}$ 37) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x\ln 2x\,dx$

الحل :-

32) $u=t^2$

عند $t=0$ فان $u=0$

$t=1$ فان $u=1$

$\frac{du}{dt}=2t \rightarrow dt=\frac{du}{2t}$

$\int_0^1 t\,3^u\,\frac{du}{2t}=\frac{1}{2}\int_0^1 3^u\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{3^u}{\ln 3}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2\ln 3}-\frac{1}{2\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}$

33) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\cot^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x(\csc^2 x-1)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\csc^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\,dx$

$u=\cot x$

$\frac{du}{dx}=-\csc^2 x$

$dx=\frac{du}{-\csc^2 u}$

عند $x=\frac{\pi}{4}$

$u=1$

عند $x=\frac{\pi}{3}$

$u=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} u\csc^2 x\,\frac{du}{-\csc^2 x}-\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$-\frac{u^2}{2}\Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\left(\ln|\sin\tfrac{\pi}{3}|-\ln|\sin\tfrac{\pi}{4}|\right)$

$\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}-\left(\ln\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$\frac{1}{3}-\ln\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

رافت صافي ٠٧٧٠٠٠٤٠٠٠

34) $u = 4 + 3\sin x$

عند $x = \pi$ فإن $u = 4 + 0 = 4$

عند $x = -\pi$ فإن $u = 4 + 0 = 4$

$$\frac{du}{dx} = 3\cos x$$

$$dx = \frac{du}{3\cos x}$$

$$\int_4^4 \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \frac{du}{3\cos x} = \frac{1}{4}\int_4^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 0$$

لتساوي حدود التكامل

35) $$\int_{-1}^{0} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x+2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x+2 & x \\ & -x+2 \\ \hline & -2 \end{array}$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = \left(x - 2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{0}\right)$$

$$= (0 - 2\ln 2) - (-1 - 2\ln 1) = -2\ln 2 + 1 = 1 - 2\ln 2$$

36) $$\int_1^2 \left(2 + \frac{6}{16x^2-1}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 16x^2-1 & 32x^2+4 \\ & -32x^2-2 \\ \hline & 6 \end{array}$$

$$= \int_1^2 \left(2 + \frac{3}{4x-1} + \frac{-3}{4x+1}\right)dx$$

$$\frac{6}{16x^2-1} = \frac{6}{(4x-1)(4x+1)}$$

$$\frac{6}{(4x-1)(4x+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+1}$$

$$6 = A(4x+1) + B(4x-1)$$

عند $x = \frac{1}{4}$: $6 = 2A \to A = 3$

$x = \frac{-1}{4}$: $6 = -2B \to B = -3$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\ln|4x-1| - \frac{3}{4}\ln|4x+1|\right|_1^2$$

$$(4 + \frac{3}{4}\ln 7 - \frac{3}{4}\ln 9) - (2 + \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5)$$

$$2 + \frac{3}{4}\ln\frac{7}{9} - \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\ln 5$$

$$2 + \frac{3}{4}\left(\ln\left(\frac{\frac{7}{9}}{3}\right)(5)\right)$$

$$= 2 + \frac{3}{4}\ln\frac{35}{27}$$

رافقت صباحي

37) $u = \ln 2x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x\ln 2x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln 2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \left(\frac{e^2}{8}\ln e - \frac{1}{8}\ln 1\right) - \left(\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= \frac{e^2}{8} - 0 - \left(\frac{1}{4}\frac{e^2}{4} - \frac{1}{16}\right)$$

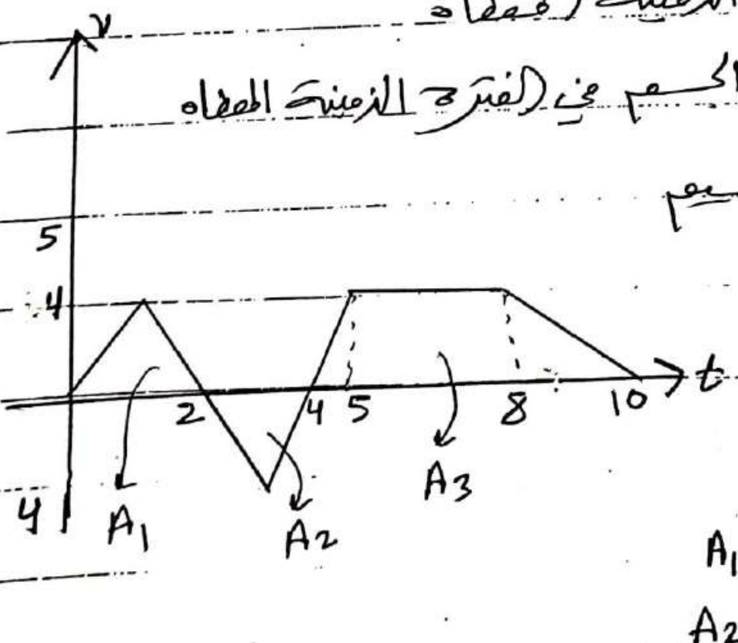
$$= \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(e^2+1)$$

يبين الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$ اذا بدأ الجسم الحركة من $x=0$ عندما $t=0$ فاجب عن الاسئلة الآتية

38) جد ازاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

39) جد المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

40) جد الموقع النهائي للجسيم



الحل: نجد المساحات

مساحة مثلث $A_1 = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$

مساحة مثلث $A_2 = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$

مساحة شبه منحرف $A_3 = \frac{1}{2}(6+3)(4) = 18$

رافت ضاحي

38) $S(10) - S(0) = \int_0^{10} v(t)\,dt =$

$$= \int_0^{2} v(t)\,dt + \int_2^{4} v(t)\,dt + \int_4^{10} v(t)\,dt$$

$$= 4 - 4 + 18 = 18\ m$$

39) $\int_0^{10} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 4 + 18 = 26\ m$

40) $S(10) - S(0) = \int_0^{10} v(t)\,dt$

$S(10) - 0 = 18 \rightarrow S(10) = 18\ m$

(41) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$g(x) = x^2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

$g = f$

$x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$ ، $x = 1$

$f > g$

0 1

$$A = \int_0^1 (f - g)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{رأفت ضافي}}$

42) جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$g(x) = x \quad ، \quad f(x) = x^3$

الحل :

$f = g$

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$0 \quad , \quad \pm 1$

$$\underset{-1}{} \quad g < f \quad \underset{0}{} \quad g > f \quad \underset{1}{}$$

$$A = \int_{-1}^{0} (f - g)\,dx + \int_{0}^{1} (g - f)\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

---

43) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$f(x) = {}^-x \quad ، \quad g(x) = x^2 + 2$ والمستقيمان $x = {}^-2 \quad ، \quad x = 2$

الحل :

$f(x) = g(x)$

$-x = x^2 + 2$

$x^2 + x + 2 \neq 0$ المميز سالب ∴ لا يحلل

$$\underset{-2}{} \quad g > f \quad \underset{2}{}$$

$$A = \int_{-2}^{2} (g - f)\,dx = \int_{-2}^{2} (x^2 + 2 + x)\,dx$$

$$A = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$A = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(\frac{-8}{3} - 4 + 2\right) = \frac{40}{3}$$

رأفت صافي

44) اثبت ان :

$$\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = 3+\frac{1}{2}\ln 2$$

الحل :

$$x^2-1 \overline{\big)\, x^2 \,}^{\,1} \qquad -\frac{x^2}{x^2-1} \qquad 1$$

$$\int_2^5 \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1)+B(x-1)$$

عند $x=1$ فان $A=\frac{1}{2}$

$x=-1$ فان $B=\frac{-1}{2}$

$$\int_2^5 \left(1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|\right)\Big|_2^5$$

$$\left(5+\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 6\right)-\left(2+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 3\right)$$

$$5+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{6}\right)-2+\frac{1}{2}\ln 3$$

$$3+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\ln 3 = 3+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right) = 3+\frac{1}{2}\ln 2$$

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران

$$v(t)=\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}$$

45) جد ازاحة الجسم في الفترة $[1,10]$

46) جد المسافة ~~الكلية~~ التي قطعها الجسم في الفترة $[1,10]$

الحل :

45)

$$S(10)-S(1)=\int_1^{10} v(t)\,dt = \int_1^{10}\left(\frac{t}{9}-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left(\frac{1}{9}\frac{t^2}{2}-2(t+6)^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{10}$$

$$=\left(\frac{1}{18}t^2-2\sqrt{t+6}\right)\Big|_1^{10}$$

$$=\left(\frac{1}{18}(100)-2\sqrt{16}\right)-\left(\frac{1}{18}-2\sqrt{7}\right)$$

$$=\left(2\sqrt{7}-\frac{5}{2}\right)\ m$$

راقت ضاحي

(46 [illegible]

$$\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}=0$$

[illegible] $$\frac{t}{9}=\frac{1}{\sqrt{t+6}}$$

$$\frac{t^2}{81}=\frac{1}{t+6} \longrightarrow t^3+6t^2=81$$

$$t^3+6t^2-81=0$$

$$(t-3)(t^2+9t+81)=0$$

$$t=3$$

$$\begin{array}{ccc} - - - & \cdot & + + + \\ 1 & 3 & 10 \end{array}$$

$$d=\int_1^3 |v(t)|\,dt = -\int_1^3\left(\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}\right)dt+\int_3^{10}\left(\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}\right)dt$$

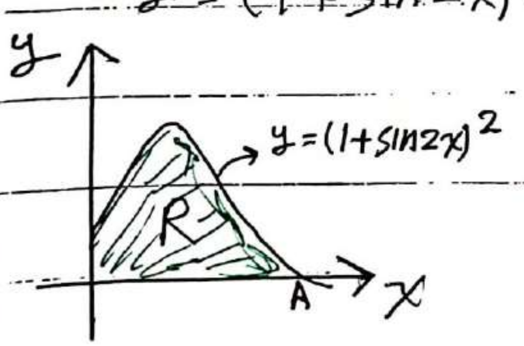
$$=-\left(\frac{t^2}{18}-2\sqrt{t+6}\right)\Big|_1^3+\left(\frac{t^2}{18}-2\sqrt{t+6}\right)\Big|_3^{10}$$

$$=-\left(\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{9}\right)-\left(\frac{1}{18}-2\sqrt{7}\right)\right)+\left(\left(\frac{100}{18}-2\sqrt{16}\right)-\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{9}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+6+\frac{1}{18}-2\sqrt{7}+\frac{100}{18}-8-\frac{1}{2}+6=\frac{155}{18}-2\sqrt{7}$$

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y=(1+\sin 2x)^2$

حيث $0\le x\le \frac{3\pi}{4}$



(47) جد احداثيي النقطة A

(48) جد مساحة المنطقة R

الحل:

(47) نضع $y=0$

$$(1+\sin 2x)^2=0$$
$$1+\sin 2x=0$$
$$\sin 2x=-1$$
$$2x=\frac{3\pi}{2} \longrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

احداثيي A هو $A\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

رافت صافي

$$R = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1+\sin 2x)^2\, dx$$ (48

$$R = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1+2\sin 2x + \sin^2 2x)\, dx$$

$$R = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(1+2\sin 2x + \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right) dx$$

$$R = \left(x + \cos 2x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

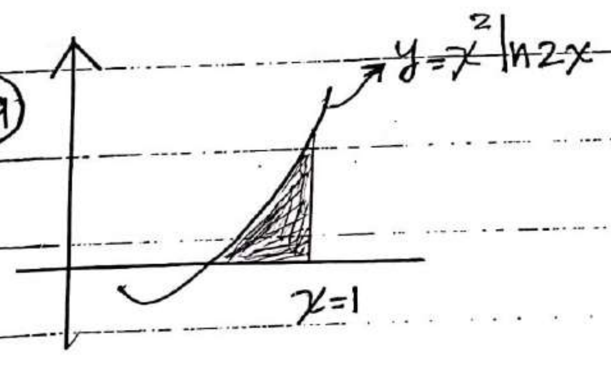
$$R = \left(\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 3\pi\right)\right) - \left(0 - 1 + \frac{1}{2}(0-0)\right)$$

$$R = \frac{3\pi}{4} - 0 + \frac{3\pi}{8} + 1 = \frac{9\pi}{8} + 1$$

---

49) جد مساحة المنطقة المظللة في كل من تمثيلات البيانيات الآتية:

49



الحل:

$$y = 0$$

$$x^2 \ln 2x = 0$$

مرفوض $x=0$ $\quad$ $\ln 2x = 0$

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln 2x\, dx$$

$u = \ln 2x \qquad dv = x^2\, dx$

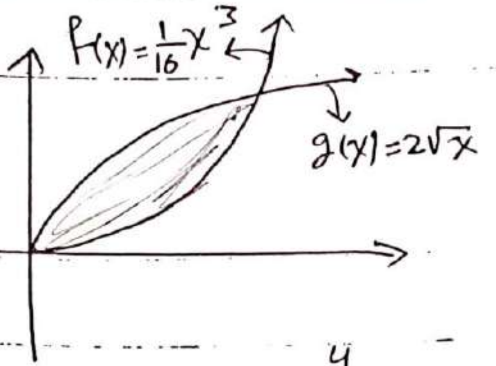
$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln 2x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3}x^2\, dx \rightarrow \frac{1}{9}x^3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{24}\ln 1\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{72}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{7}{72}$$

رأفت صافي

(50) 

الحل :

$f=g$

$\frac{1}{16}x^3=2\sqrt{x}$

$x^3=32\sqrt{x}$

$x^6=1024x$

$x^6-1024x=0$

$x(x^5-1024)=0$

$x=0 \quad x=4$

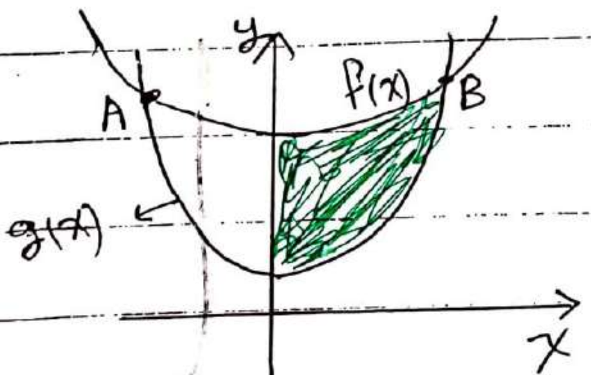
$A=\int_0^4 (g-f)\,dx=\int_0^4 (2\sqrt{x}-\frac{1}{16}x^3)\,dx$

$A=\int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{16}x^3)\,dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{64}x^4)\Big|_0^4=\frac{4}{3}(8)-\frac{256}{64}=$

$=\frac{32}{3}-\frac{256}{64}=\frac{20}{3}$

يبين الشكل الآتي منحنيي الاقترانين $f(x)=x^2+14$

$g(x)=x^4+2$



(51) اذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B جد احداثيي نقطتي التقاطع

(52) جد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x

الحل :

(51)

$f=g$

$x^2+14=x^4+2$

$x^4-x^2-12=0$

$(x^2-4)(x^2+3)=0$

$x=\pm 2$ مستحيل

عند $x=2$ فان $f(2)=18$

$x=-2$ فان $f(-2)=18$

احداثيي A هي $(-2,18)$

احداثيي B هي $(2,18)$

راقت ضاحي ٠٧٩٠٥٥٢٠

(52) $V = \pi\int_0^2 (f^2(x) - g^2(x))\,dx$

$V = \pi\int_0^2 ((x^2+14)^2 - (x^4+2)^2)\,dx$

$V = \pi\int_0^2 (x^4+28x^2+196 - x^8 - 4x^4 - 4)\,dx$

$V = \pi\int_0^2 (-x^8 - 3x^4 + 28x^2 + 192)\,dx$

$V = \pi\left(\frac{-x^9}{9} - \frac{3x^5}{5} + \frac{28x^3}{3} + 192x\right)\Big|_0^2 = \frac{17216\pi}{45}$

(53) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{xe^{-x}}$ والمحور x والمستقيمين $x=1$, $x=2$ حول المحور x

الحل :
$$V = \pi\int_1^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_1^2 xe^{-x}\,dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$\int_1^2 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_1^2 + \int_1^2 e^{-x}dx$

$= -xe^{-x}\Big|_1^2 - e^{-x}\Big|_1^2$

$= -2e^{-2} + e^{-1} - e^{-2} + e^{-1}$

$= -3e^{-2} + 2e^{-1} = \frac{2e-3}{e^2}$

راقت صافي

$V = \left(\frac{2e-3}{e^2}\right)\pi$

حل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية

54) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$

55) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x}\sec y$

56) $3y^{2}\dfrac{dy}{dx} = 8x$

57) $x\dfrac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

الحل :

54) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$

$\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dx}{x}$

$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int \dfrac{dx}{x}$

$2y^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + c \longrightarrow 2\sqrt{y} = \ln|x| + c$

55) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x}\sec y$

$\dfrac{dy}{\sec y} = xe^{x}\,dx$

$\int \cos y\,dy = \int xe^{x}\,dx$

$\sin y = xe^{x} - e^{x} + c$

ايجاد تكامل

$\int xe^{x}\,dx$

$u = x \qquad dv = e^{x}dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$

$= xe^{x} - e^{x}$

رأفت ضاحي

56) $3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$

$3y^2\,dy = 8x\,dx$

$\int 3y^2\,dy = \int 8x\,dx$

$y^3 = 4x^2 + c$

---

57) $x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

$x \frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\,(3x+4)$

$x\,dy = \sqrt{y}\,(3x+4)\,dx$ نقسم على $x\sqrt{y}$

$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \left(\frac{3x+4}{x}\right) dx$

$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int \left(3 + \frac{4}{x}\right) dx$

$2y^{\frac{1}{2}} = 3x + 4\ln|x| + c$

جد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي

58) $\frac{dy}{dx} + 4y = 8$ و $y(0) = 3$

59) $\frac{dy}{dx} = \frac{5e^x}{(2x+1)(x-2)}$ و $y(-3) = 0$

الحل :

58) $\frac{dy}{dx} = (8 - 4y)$

$\frac{dy}{8-4y} = dx$ تكامل الطرفين

رأفت صالحي

$$\int \frac{dy}{8-4y} = \int dx$$

نجد c حيث $x=0/y=3$

$$\frac{-1}{4}\ln|8-4y| = x + c$$

$$\frac{-1}{4}\ln 4 = c$$

الحل الخاص :

اضرب 4

$$\frac{-1}{4}\ln|8-4y| = x - \frac{1}{4}\ln 4$$

$$-\ln|8-4y| = 4x - \ln 4 \rightarrow -\ln|4-y| = 4x$$

5a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5e^{y}}{(2x+1)(x-2)}$

$$\frac{1}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$1 = A(x-2) + B(2x+1)$$

عند $x=2$: $1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5}$

$x = \frac{-1}{2}$: $1 = \frac{-5}{2}A \rightarrow A = \frac{-2}{5}$

$$\frac{dy}{5e^{y}} = \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$$

$$\frac{1}{5}\int e^{-y}dy = \int \frac{1}{(2x+1)(x-2)}dx$$

$$\frac{-1}{5}e^{-y} = \int \left(\frac{\frac{-2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2}\right)dx$$

نجد c حيث $y=0/x=3$

$$\frac{-1}{5}e^{-y} = \frac{-1}{5}\ln|2x+1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + c$$

$$\frac{-1}{5}e^{0} = \frac{-1}{5}\ln 5 + \frac{1}{5}\ln 5 + c$$

$$c = \frac{-1}{5}$$

الحل الخاص

$$\frac{-1}{5}e^{-y} = \frac{-1}{5}\ln|2x+1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}$$

$$\frac{-1}{5}e^{-y} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(\ln|x-2| - \ln|2x+1|\right)$$

$$\frac{1-e^{-y}}{5} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|$$

$$1 - e^{-y} = \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|$$

تتغير عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt} = 0.2x$ حيث x عدد الأسماك و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة :-

(60) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علماً بأن عددها هذه السنة هو 300 سمكة

(61) جد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات

الحل :-

$$\frac{dy}{dt} = 0.2x$$

$$\frac{dy}{x} = 0.2\,dt$$ تكامل الطرفين

$$\ln|x| = 0.2t + c$$

نجد c حيث $x = 300 / t = 0$

$$\ln 300 = c$$

$$\ln x = 0.2t + \ln 300$$

$$x = e^{(0.2t + \ln 300)}$$

$$x = 300e^{0.2t}$$

نجد x عند $t = 5$

$$x = 300e \simeq 815$$

رأفت صافي

يمثل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج بالمئات. اذا كان

$p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، جد $p(x)$ علماً بان سعر القطعة الواحدة هو 75 JD عندما تكون عدد القطع المبيعة من المنتج 400 قطعة

الحل :-

$$p(x) = \int p'(x)\,dx = \int \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}\,dx$$

$$u = 9 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$p(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{u^3}} \cdot \frac{du}{2x} = \int -150\, u^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$p(x) = (-150)(-2)u^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$p(x) = \frac{300}{\sqrt{u}} + c = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + c$$

عند $x = 4$

$P = 75$

$$75 = \frac{300}{5} + c \Rightarrow c = 75 - 60$$

$$c = 15$$

راقت ضامن

$$p(x) = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + 15$$