المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب التمارين

11

فريق التأليف

إضافة إلى جهود فريق التأليف، فقد جاء هذا الكتاب ثمرة جهود وطنية مشتركة من لجان مراجعة وتقييم علمية وتربوية ولغوية، ومجموعات مُركَّزة من المعلِّمين والمشرفين التربويين، وملاحظات مجتمعية من وسائل التواصل الاجتماعي، وإسهامات أساسية دقيقة من اللجنة الاستشارية والمجلس التنفيذي والمجلس الأعلى في المركز، ومجلس التربية والتعليم ولجانه المتخصِّصة.

الناشر

المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج، ووزارة التربية والتعليم – إدارة المناهج والكتب المدرسية، استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية: هاتف: 8-5/4617304، فاكس: 4637569، ص. ب: 1930، الرمز البريدي: 11118، أو بوساطة البريد الإلكتروني: scientific.division@moe.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2020/7)، تاريخ 2020/12/1 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2020/176)، تاريـخ 2020/12/17 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2020 / 2021 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2020.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 041 - 7

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية:
(2020/8/2973)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: كتاب التمارين (الصف العاشر)/ المركز الوطني لتطوير المناهج.– عمان: المركز، 2020،

ج**2** (**29**) ص.

ر.إ.: 2020/8/2973

الواصفات: / الرياضيات/ / التعليم الإعدادي/ / المناهج/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Lecensing Agency Ltd, Barnard›s Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) **1441 هـ / 2020 م**

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 1 البرمجة الخطية

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ **6**

الدرسُ 1 حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا 8

الدرسُ 2 حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا 9

الدرسُ 3 البرمجة الخطية 10

الوحدةُ 2 مبدأ العد والتباديل والتوافيق

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ **11**

الدرسُ 1 مبدأ العد الأساسي 13

الدرسُ 2 مضروب العدد 14

الدرسُ 3 التباديل 15

الدرسُ 4 التوافيق 16

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 3 الاحتمالات

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ **17**

الدرسُ 1 الاحتمال بالتباديل والتوافيق 19

الدرسُ 2 المتغير العشوائي 20

الدرسُ 3 احتمال المتغير العشوائي 21

الدرسُ 4 توقع المتغير العشوائي 22

الوحدةُ 1: البرمجة الخطية

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المحلول.

• حَلُّ المتباينات الخطية بمتغير واحد

أحُلُّ المتباينتين الخطيتين الآتيتين:

1) $2x + 3 \leq 5x - 2$

2) $9x - 7 > 2(3x + 8)$

مثالٌ: أحُلُّ المتباينة الخطية: $8x - 5 \leq 4x + 7$

المتباينة الخطية	$8x - 5 \leq 4x + 7$
بطرح $4x$ للطرفين	$4x - 5 \leq 7$
بجمع العدد 5 للطرفين	$4x \leq 12$
بالقسمة على العدد 3 للطرفين	$x \leq 3$
مجموعة الحَلِّ	$(-\infty , 3]$

• تمثيل المتباينة الخطية بمتغير واحد في المستوى الإحداثي

أُمثِّل المتباينتين الخطيتين الآتيتين في المستوى الاحداثي:

1) $2y - 1 < 3$

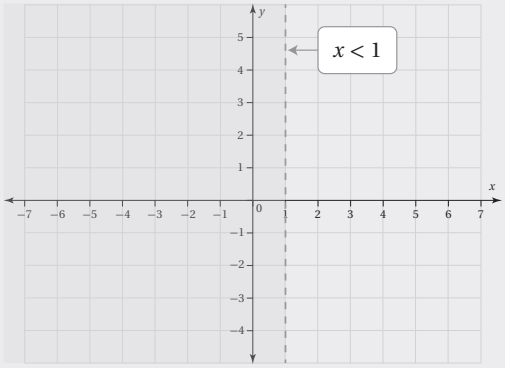
2) $7x - 4 \geq 3$

مثالٌ: أُمثِّل المتباينة: $5x - 4 < 1$ في المستوى الاحداثي.

أحُلُّ المتباينة: $5x - 4 < 1$

المتباينة الخطية	$5x - 4 < 1$
بجمع العدد 4 للطرفين	$5x < 5$
بقسمة الطرفين على العدد 5	$x < 1$
مجموعة الحَلِّ	$(-\infty , 1)$

يُمكِن تمثيل مجموعة الحَلِّ في المستوى الاحداثي كما يأتي:



الوحدةُ 1: البرمجة الخطية

• حَلُّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف

أحُلُّ أنظمة المعادلات الخطية الآتية بطريقة الحذف:

1 $x + y = 5$
$x - y = 1$

2 $2x + y = 9$
$x - y = 0$

3 $x - y = 5$
$x + 2y = -1$

مثالٌ: أحُلُّ نظام المعادلات الخطية الآتي بطريقة الحذف:

$$2x + y = 4$$
$$x + 3y = 7$$

	$2x + y = 4$
بضرب المعادلة الثانية في العدد 2	$2x + 6y = 14$
بطرح المعادلتين	$-5y = -10$
بقسمة طرفي المعادلة على العدد -5	$y = 2$
بتعويض قيمة y في المعادلة الثانيةِ	$x + 3(2) = 7$
بطرح العدد 6 من الطرفينِ	$x = 1$
حَلُّ النظام	$(1 , 2)$

• تمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الاحداثي

أمثل كل من المعادلات الاتية في المستوى الإحداثي:

1 $x - 2y = 10$

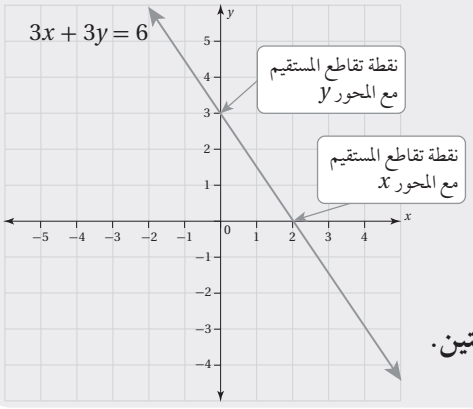
2 $3x + y = 27$

3 $-7x - 2y = -14$

مثالٌ: أمثل المعادلة $2x + 3y = 6$ في المستوى الاحداثي:

لتمثيل المعادلة الخطية أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$

بتعويض $y=0$ في المعادلة	$2x + 3(0) = 6$
بالتبسيط	$x = 3$
بتعويض $x=0$ في المعادلة	$2(0) + 3y = 6$
بالتبسيط	$y = 2$



إذن، نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x هي $(3, 0)$ ونقطة تقاطعه مع المحور y هي $(0, 2)$.

لتمثيل المعادلة بيانياً، أرسم في المستوى الإحداثي مستقيم يمر بهاتين النقطتين.

الدرسُ 1

حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا
Solving linear inequality in two variables

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $2x - 8y \geq -6$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(1 , 1)$ **2** $(0 , 3)$ **3** $(2 , -3)$

4 أُحدِّد المتباينة الخطية التي يُمثِّل الزوج $(-1 , 2)$ حَلًّا لها ممّا يأتي:

$5x - y > -2$ $2x + 3y \geq 4$ $x + y < 1$

أُمثِّل كلًّا من المتباينات الخطية الآتية على المستوى الإحداثي:

5 $7x - 2y < 5$ **6** $-6x + 4y \geq -2$ **7** $5x + 7y \leq 3$

8 $-x - y > -1$ **9** $x - 9y \geq -6$ **10** $-4x - 7y < 8$

11 **طلاء:** أراد زياد شراء نوعين من ألوان الطلاء، سعر النوع الأول دينار واحد لكل كيلوغرام، وسعر النوع الثاني 1.25 دينار لكل كيلوغرام. كم كيلوغرامًا من كل نوع سيشتري زياد إذا كان معه 6 دنانير؟

12 **مطاعم:** يبيع مطعم للوجبات السريعة نوعين من الوجبات، سعر النوع الأول 4 دنانير، وسعر النوع الثاني 3 دينار. أجد عدد الوجبات التي يجب بيعها من كل نوع يوميًّا، بحيث لا يقل سعرها عن مصروفات المطعم اليومية التي تبلغ 750 دينارًا.

13 **صناعة:** ينتج مصنع نوعين من أنابيب الماء، سعر النوع الأول ديناران للمتر، وسعر النوع الثاني 1.5 دينار للمتر. أجد عدد الأمتار الممكن انتاجها لكل نوع من الأنابيب، بحيث لا تقل إيرادات المصنع عن 3200 دينار يوميًّا.

14 يلزم 18 kg من مادة بلاستيكية لصنع خزان ماء صغير وَ 40 kg لصنع خزان كبير. أجد عدد الخزانات الصغيرة والكبيرة التي يمكن صنعها باستعمال 1000 kg من المادة البلاستيكية.

الدرسُ 2

حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving system of linear inequalities in two variables

أُمثِّل منطقة حَلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

1 $7x - 5y > 1$
$x + 3y < 1$

2 $-8x - 5y \leq -3$
$2x + 7y < 6$

3 $4x - 8y \geq 5$
$-2y + x < -3$

4 $9x + 3y \leq 6$
$3x + y \geq 2$

5 $-x - y \leq 2$
$7x - 6y \geq 4$
$2x + 5y > 4$

6 $9x + y < 8$
$4x + 3y \geq 6$
$-8x + y \geq -5$

7 $x - 3y < 1$
$2x - 6y \geq 5$
$4x - 12y \geq 9$

8 $-6x - 3y \geq -12$
$3x + \frac{3}{2}y \geq 6$
$x + \frac{1}{2}y \leq 2$

عمل خيري: مع حاتم 20 دينارًا، أراد شـــراء نوعين من وجبات الإفطار في شـــهر رمضان للتصدُّق بها، سعر النوع الأول a هو 1.5 دينار، وسعر النوع الثاني b هو ديناران، وقد قرَّر حاتم شراء أكثر من 9 وجبات من كلا النوعين:

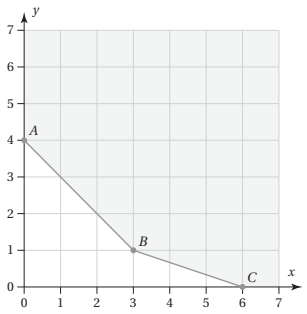
9 أكتب نظام المتباينات الخطية الذي يُمثِّل عدد الوجبات التي يُمكِن لحاتم شراؤها من كلا النوعين.

10 أُمثِّل نظام المتباينات بيانيًّا.

11 أجد ثلاثة من الحلول الممكنة لنظام المتباينات الاتي:

$$x + y \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \geq 0$$

البرمجة الخطية
Linear Programming



1 إذا كان التمثيل البياني للقيود الآتية كما في الشكل المجاور، فأجد إحداثيي النقطة $(x\,,y)$ التي تجعل الاقتران: $Q = 4\,x + 2\,y$، أصغر ما يُمكِن:

$$x + y \geq 4$$
$$x + 3y \geq 6$$
$$x \geq 0\,,\, y \geq 0$$

2 أجد إحداثيي النقطة $(x\,,y)$ التي تجعل الاقتران: $W = x + 2\,y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 20$$
$$2\,x + y \leq 30$$
$$x \geq 0\,,\, y \geq 0$$

3 **درّاجات هوائية:** ينتج مصنع نوعين من الدرّاجات الهوائية A,B. ويُبيِّن الجدول المجاور عدد الساعات التي يستغرقها إنتاج كلٍّ من النوعين في أقسام المصنع الثلاثة:

القسم	النوع A	النوع B
التجميع	2 h	2 h
الدهان	4 h	1 h
التغليف	1 h	0.5 h

إذا كان عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم لا يزيد على 40 h للتجميع، و 48 h للدهان، و 13 h للتغليف، وكان ربح الدرّاجة الواحدة المبيعة 45 دينارًا للنوع A، و30 دينارًا للنوع B، فكم درّاجة من كل نوع يتعيَّن على المصنع إنتاجها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

4 **صالة زفاف:** أرادت فاطمة دعوة 250 شخصًا إلى حفل زفاف، وتعيَّن عليها استئجار طاولات ليجلس حولها المدعوون. عرضت عليها صالة زفاف تأجيرها نوعين من الطاولات: طاولات مستطيلة الشكل تتسع لـ 6 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 28 دينارًا. وطاولات دائرية الشكل تتسع لـ 10 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 52 دينارًا. إذا كانت الصالة تسع 35 طاولة من كلا النوعين على الأكثر، وكان أكبر عدد يُمكِن توفيره من الطاولات المستطيلة الشكل 15 طاولة، فما عدد الطاولات التي يُمكِن لفاطمة استئجارها من كلا النوعين بأقل تكلفة ممكنة؟

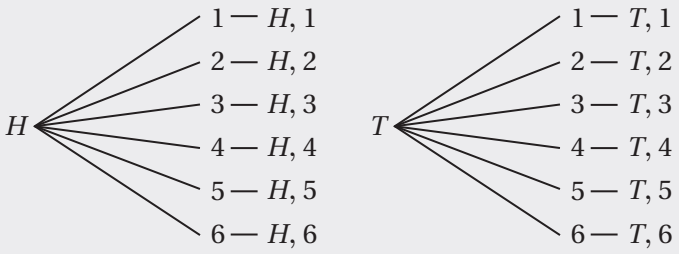
الوحدةُ 2: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المحلول.

• استعمال الرسم الشجري

1 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعتي نقود متمايزتين مرَّة واحدة، مُستعمِلًا الرسم الشجري.

مثالٌ: أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعة نقود وحجر نرد مرَّة واحدة، مُستعمِلًا الرسم الشجري.



إذن، عدد النواتج المُمكِنة هو 12 ناتجًا.

• استعمال الجدول

2 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا، الواحدة تلو الأُخرى ودون إرجاع، من صندوق يحوي كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة سوداء، مُستعمِلًا الجدول.

3 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعة نقود مرَّتين، مُستعمِلًا الجدول.

مثالٌ: أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي حجري نرد متمايزين مرَّة واحدة، مُستعمِلًا الجدول.

الحجر الأول / الحجر الثاني	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

إذن، عدد النواتج المُمكِنة هو 36 ناتجًا.

استعمال القائمة المنظمة

4 أجــد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة اختيار عائلة لديها ثلاثة أطفال، وتســجيلهم بحســب الجنس وتسلســل الولادة، مُستعمِلًا القائمة المنظمة.

مثالٌ: أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة اختيار عائلة لديها طفلان، وتســجيلهما بحســب الجنس وتسلسل الولادة، مُستعمِلًا القائمة المنظمة.

أرمز إلى الذكر بالحرف M، وأرمز إلى الأنثى بالحرف F، ثم أكتب قائمة النواتج المُمكِنة على النحو الآتي:

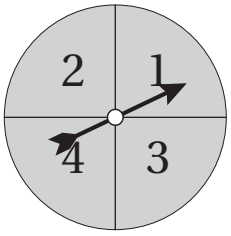
M, M $\quad$ M, F

F, M $\quad$ F, F

إذن، عدد النواتج المُمكِنة هو 4 نواتج.

5 أجد عدد النواتج الممكنة في تجربة ســحب ثلاث كرات معا عشــوائيًا من صندوق يحــوي 4 كرات حمراء مرقمة من (4 – 1) و 4 كرات زرقاء مرقمة من (4 – 1) وجميع الكرات متماثلة ، باستعمال القائمة المنظمة.

6 أجد عدد النواتج الممكنة إذا دار المؤشــر في القرص المجاور مرتين ، وتم تسجيل العددين الذين توقف عندهما ، مستعملاً القائمة المنظمة.



مثالٌ: أجد باستعمال القائمة المنظمة عدد النواتج الممكنة في تجربة سحب بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من بين 3 بطاقات متماثلة تحمل كل منها أحد الأرقام 1 , 2 , 3

1, 1 $\quad$ 1, 2 $\quad$ 1, 3

2, 1 $\quad$ 2, 2 $\quad$ 2, 3

3, 1 $\quad$ 3, 2 $\quad$ 3, 3

إذن، يوجد 9 نواتج ممكنة.

الدرسُ 1

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لظهور شـــخص بزي مُكوَّن من بنطال يتوافر منه 3 ألوان (أســـود، وأزرق، وبني)، و3 قمصان يتوافر منها 3 ألوان (أبيض، وأخضر، ورمادي)، مُستعمِلًا:

1. الرسم الشجري.
2. الجدول.
3. القائمة المنظمة.
4. في محل لبيع القرطاســية 8 أنواع مختلفة من الأقلام، و6 أنواع مختلفة من الدفاتر المدرسية. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار قلم واحد ودفتر واحد.

بكم طريقة يُمكِن لنجلاء اختيار نوعين من الحلويات من بين 7 أنواع مختلفة، ونوعين من المشروبات الساخنة من بين 5 أنواع مختلفة:

5. إذا سُمِح بالتكرار؟
6. إذا لم يُسمَح بالتكرار؟
7. إذا سُمِح بتكرار أنواع الحلويات فقط؟

أجد عـــدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رمز دخول للبريـــد الإلكتروني، يتألَّف من حرفين من الحـــروف الإنجليزية دون الاهتمام لحجم الحرف (عددها 26 حرفًا)، ورقمين من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

8. إذا سُمِح بالتكرار.
9. إذا لم يُسمَح بالتكرار.
10. إذا كان الحرف الأول B، ولا يُسمَح بالتكرار.
11. **جامعات:** ترغب فاطمة باختيار تخصصها الجامعي من بين سبعة تخصصات ،واختيار جامعه من بين أربع جامعات قريبة لمنزلها. بكم طريقة يمكنها يمكنها اختيار التخصص والجامعة؟

الدرسُ 2

مضروب العدد
Factorial

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

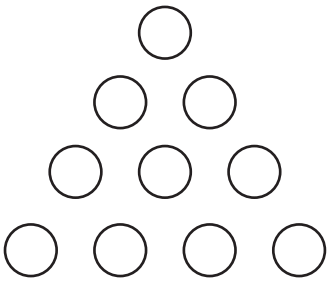
1. $7!$
2. $(6-2)!$
3. $(5!)(3!)$
4. $\frac{6!}{4!}$
5. $\frac{2!}{4!}$
6. $\frac{9!}{(7!)(2!)}$

7. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس 4 طلبة على 4 كراسي موضوعة في صف واحد.

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8. FORMING

9. REARRANGE



كوَّن فريق للعروض الرياضية هرمًا بشـــريًّا بوقوف بعضهم على أكتاف بعض كما في الشكل المجاور:

10. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي فقط تبادل الأماكن في ما بينهم.

11. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة فقط تبادل الأماكن في ما بينهم.

12. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي تبادل الأماكن في ما بينهم، وأمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة تبادل الأماكن في ما بينهم.

13. **سياحة:** أجد عدد الطرائق التي يمكن بها ترتيب زيارة إلى الاماكن الأثرية الاتية:

البتراء،وادي رم ، قلعة العقبة ، قلعة الشوبك ، قلعة الكرك

الدرسُ 3

التباديل
Permutations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

1. ${}_{15}P_5$
2. $({}_8P_5)({}_7P_3)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

3. $\frac{{}_{17}P_9}{{}_{10}P_6}$
4. $\frac{{}_9P_8}{({}_8P_3)({}_3P_2)}$

5. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف 3 أشخاص في خط مستقيم.
6. بكم طريقة قد يكون لـِ 3 أصدقاء تواريخ ميلاد مختلفة بافتراض أنَّ في السنة 365 يومًا؟
7. بكم طريقة يُمكِن لسمير ترتيب 7 كتب مختلفة على رفٍّ في غرفته؟
8. كم عددًا من منزلتين يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5 , 4 , 3 , 2 , 1 على فرض عدم السماح بالتكرار؟
9. بكم طريقة يُمكِن اختيار 3 سائقين عشوائيًّا من بين 10 سائقين، بحيث يتولّى الأول سياقة حافلة للطلاب، والثاني سياقة حافلة للطالبات، والثالث سياقة حافلة الموظفين في إحدى الجامعات؟
10. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لأسيل ترتيب 6 أنواع مختلفة من العصير بعضها بجانب بعض في الرفِّ الذي في باب الثلّاجة.
11. بكم طريقة يُمكِن لرسّام اختيار 6 لوحات فنية عشوائيًّا من بين 10 لوحات مختلفة رسمها، ثم عرض بعضها بجانب بعض في صف واحد على حائط؟
12. بكم طريقة يُمكِن لمُدرِّب فريق كرة قدم اختيار 5 لاعبين عشوائيًّا من بين 11 لاعبًا؛ لتنفيذ ركلات الترجيح الخمس بعد انتهاء الشوطين الإضافيين من المباراة؟
13. أجد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار طالب للمشاركة في الكشافة المدرسية وطالب للمشاركة في الخدمة الاجتماعية من صف يحوي 22 طالباً.

الدرسُ 4

التوافيق
Combinations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

1. ${}_9C_5$
2. $({}_{10}C_6)-({}_9C_7)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

3. $({}_{15}C_2)({}_8C_3)$
4. $\frac{{}_{12}C_3}{{}_{11}C_3}$

5. كم لجنة تضم 3 أشخاص يُمكِن تكوينها عشوائيًّا من بين 8 أشخاص؟
6. أجد عدد الطرائق لتكوين لجنة تضم 2 من المُعلِّمين و4 من الطلبة الذين اختيروا عشوائيًّا من بين 7 مُعلِّمين و9 طلبة.
7. كم مجموعة جزئية من رقمين يُمكِن تكوينها من الأرقام: 5 , 4 , 3 , 2 , 1 ؟
8. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لطبيب اختيار نوعين من الضمادات الطبية من بين 9 أنواع مختلفة متوافرة لديه.

يراد اختيار 4 طلاب عشوائيًّا من صف فيه 22 طالبًا؛ للمشاركة في مسابقات تُنظِّمها المدرسة:

9. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلاب.
10. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلاب إذا كان الأول سيشارك في مسابقة الشِّعر، والثاني سيشارك في مسابقة الرياضيات، والثالث سيشارك في مسابقة الثقافة العامة، والرابع سيشارك في مسابقة مهارات الحاسوب.
11. ذهب سعيد إلى محل لبيع الملابس، فوجد فيه 9 ألوان مختلفة من القمصان، و8 ألوان مختلفة من البناطيل. أجد عدد الطرائق المختلفة التي يُمكِن بها لسعيد شراء 3 قمصان و4 بناطيل من هذا المحل.
12. أجد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار كتابين من 5 كتب ثقافية وثلاثة كتب من 5 كتب تاريخية .

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المحلول.

• حساب مضروب العدد

1 أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\frac{9!}{3!\times 6!}$

مثالٌ: أجد قيمة $\frac{12!}{4!\times 8!}$ في أبسط صورة.

تعريف مضروب العدد $\frac{12!}{4!\times 8!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8!}{4\times 3\times 2\times 8!}$

بالتبسيط $=495$

2 أحُلُّ المعادلة الآتية: $(n+1)!=24$

مثالٌ: أحُلُّ المعادلة الآتية: $(n-1)!-20=700$

بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة $(n-1)!=720$

بكتابة 720 في صورة مضروب العدد $(n-1)!=6!$

بحَلِّ المعادلة $n-1=6$

بإضافة 1 إلى طرفي المعادلة $n=7$

• استعمال المبدأ الأساسي للعَدِّ، والتباديل، والتوافيق

1 بكم طريقة يُمكِن تكوين أعداد تحوي كلٌّ منها 3 منازل مختلفة باستعمال الأرقام: 5, 4, 3, 2, 1؟

مثالٌ: بكم طريقة يُمكِن لأحمد أنْ يظهر بزي مختلف يتكوَّن من بنطال وقميص وربطة عنق إذا كان لديه ملابس في الخزانة كما في الجدول المجاور.

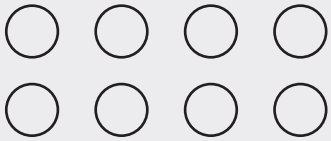
الزي	بنطال	قميص	ربطة عنق
الألوان المتوافرة	أسود، أزرق، رمادي.	أبيض، أزرق، أسود، أخضر، رمادي.	حمراء، سوداء.

أفتــرض أنَّ عدد طرائق اختيــار أحمد الزي هو m، وأنَّ عــدد طرائق اختياره البنطال هــو n_1، وأنَّ عدد طرائق اختياره القميص هو n_2، وأنَّ عدد طرائق اختياره ربطة العنق هو n_3:

مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2 \times n_3$
بالتعويض، وإيجاد حاصل الضرب	$= 3 \times 5 \times 2 = 30$

2 بكم طريقة يُمكِن اختيار رئيس ونائب للرئيس وعضوين من بين 10 مُعلِّمين للجنة مدرسية؟

مثالٌ: بكم طريقة يُمكِن لـ 8 صديقات، بينهن سلوى وزبيدة، الجلوس على 8 مقاعد مُرتَّبة في صفين، كما في الشكل المجاور، إذا قرَّرت سلوى وزبيدة الجلوس على المقاعد التي عند طرفي الصفين؟



أفترض أنَّ العدد الكلي لطرائق جلوس الصديقات هو m:

عدد طرائق جلوس سلوى	$n_1 = 4$
عدد طرائق جلوس زبيدة	$n_2 = 3$
عدد طرائق جلوس البقية (6 صديقات ترتيبهن مهم)	$n_3 = {}_6\mathrm{P}_6 = 6! = 720$
مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2 \times n_3$
بالتعويض، وإيجاد حاصل الضرب	$= 4 \times 3 \times 720 = 8640$

3 بكم طريقة يُمكِن اختيار كتابي تاريخ وكتابي علوم من رفٍّ عليه 6 كتب تاريخ مختلفة و6 كتب علوم مختلفة؟

مثالٌ: بكم طريقة يُمكِن تكوين لجنة فيها 3 من الذكور و2 من الإناث من بين 7 موظفين و7 موظفات؟

أفترض أنَّ العدد الكلي لطرائق تكوين اللجنة هو m:

عدد طرائق اختيار 3 من 7 ذكور	$n_1 = {}_7C_3 = 35$
عدد طرائق اختيار 2 من 7 إناث	$n_2 = {}_7C_2 = 21$
مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2$
بالتعويض، وإيجاد حاصل الضرب	$= 35 \times 21 = 735$

الدرسُ 1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

1. رُتِّبت 4 بطاقات مُتماثِلة عشوائيًّا في صف واحد، وحملت كلٌّ منها أحد الأرقام من 1 إلى 4، ما احتمال أنْ يظهر الرقمان 2 و4 متجاورين؟

2. يتكوَّن مجلس الطلبة في إحدى المدارس من 5 أعضاء، بينهم خليل ومجدي. ما احتمال اختيار خليل رئيسًا للمجلس، ومجدي مُقرِّرًا له إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

3. صندوق فيه كرات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل أحد الأرقام من 1 إلى 9، إذا اختيرت عشوائيًّا 3 كرات دفعة واحدة، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المختارة أعدادًا فردية؟

يعمل في شركة 6 موظفين و6 موظفات، ويريد مدير الشركة تكوين فريق يضم 4 منهم عشوائيًّا؛ لحضور ندوة عن تسويق المُنتَجات. أجد احتمال اختيار المدير:

4. فريقًا يضم 2 من الموظفين و2 من الموظفات.

5. الموظفة مريم لتكون رئيس الفريق، والموظفة لبنى لتكون نائبتها، وبقية الفريق من الذكور.

6. فريقًا ليس فيه إناث.

7. فريقًا يضم 3 موظفات على الأقل.

في كيسٍ 10 حبّات حلوى مُغلَّفة بورق أزرق، و10 أُخرى مُغلَّفة بورق أحمر، اختارت هدى 5 حبّات عشوائيًّا من الكيس، الواحدة تلو الأُخرى، ثم أكلتها. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

8. أكْل هدى حبَّتين مُغلَّفتين بورق أزرق، وأكْلها 3 حبّات مُغلَّفة بورق أحمر.

9. عدم أكْل هدى أيَّ حبَّة حلوى مُغلَّفة بورق أحمر.

10. أكْل هدى 3 حبّات على الأقل مُغلَّفة بورق أحمر.

الدرسُ 2

المتغير العشوائي
Random Variable

1. في تجربة لاختيار عائلة لديها طفلان عشوائيًّا، وتسجيلهما بحسب الجنس وتسلسل الولادة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الذكور، فأجد مجموعة قيم X.

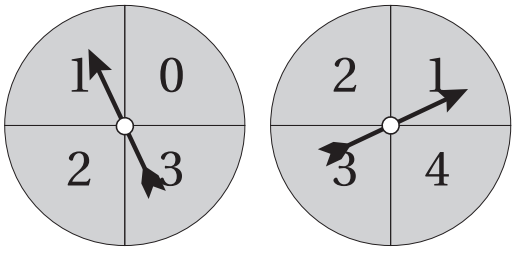
(**إرشاد:** أستعمل حرف B للذكور، وحرف G للإناث).

2. في تجربة إلقاء 4 قطع نقد معدنية عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قيم X.

(**إرشاد:** أستعمل حرف H للصورة، وحرف T للكتابة).

3. في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي **من دون إرجاع** من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

4. في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي **مع الإرجاع** من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.



إذا دُوِّر مُؤشِّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قيم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:

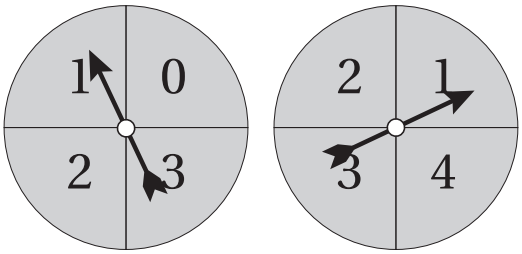
5. مجموع العددين.

6. القيمة المطلقة للفرق بين العددين.

7. حاصل ضرب العددين.

الدرسُ 3

احتمال المتغير العشوائي
Probability of a Random Variable



إذا دُوِّر مُؤشِّــرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، ودلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1. التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.
2. التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

إذا دُوِّر المُؤشِّران عشوائيًّا، ودلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

3. التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.
4. التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

5. أجد قيمة a.
6. أجد $P(x = 3)$.
7. أجد $P(2 \leq x < 4)$.
8. أجد $P(1 \leq x < 2)$.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, k), (1, 2k), (2, 2k)\}$$

9. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.
10. أجد قيمة k.
11. أجد $P(x \leq 1)$.
12. في تجربة ســحب كرتين عشــوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات حمراء، و5 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشــوائي X على عدد الكرات الحمراء في الســحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الدرسُ 4

توقع المتغير العشوائي
Expected Value of a Random Variable

يُبيِّن الجدول الآتي جزءًا من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؛ لأنَّ فيه قيمة مفقودة:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.3	?	0.4	0.05

1. أجد القيمة المفقودة في الجدول.
2. أجد التوقُّع $E(x)$.
3. يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 100 من طلبة إحدى الجامعات لمعرفة عدد المواد التي سجَّلها الطلبة في فصل دراسي مُعيَّن:

عدد المواد (x)	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	36	44	15	5

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد المواد المُسجَّلة، أجد التوقُّع $E(x)$.

4. إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	a	0.25	b	0.25

وكان التوقُّع $E(x)=2.2$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x=1), P(x=3)$.

5. إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	3	4	5	6
$P(x)$	0.15	0.45	0.25	0.15

فأجد التوقُّع $E(x)$، والتباين σ^2.