الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الفرع الأدبي

11

فريق التأليف

إضافة إلى جهود فريق التأليف، فقد جاء هذا الكتاب ثمرة جهود وطنية مشتركة من لجان مراجعة وتقييم علمية وتربوية ولغوية، ومجموعات مُركَّزة من المعلِّمين والمشرفين التربويين، وملاحظات مجتمعية من وسائل التواصل الاجتماعي، وإسهامات أساسية دقيقة من المجلس التنفيذي والمجلس الأعلى في المركز، ومجلس التربية والتعليم ولجانه المتخصِّصة.

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدِّمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمِّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أولى المركز هـــذا المبحث عناية كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلســة، ضمن ســياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُســهِمَ في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المُقدَّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشــروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة للمفاهيــم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المســائل يُعَدُّ إحدى أهمِّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخــل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا ندرك جيدًا حرص المعلِّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

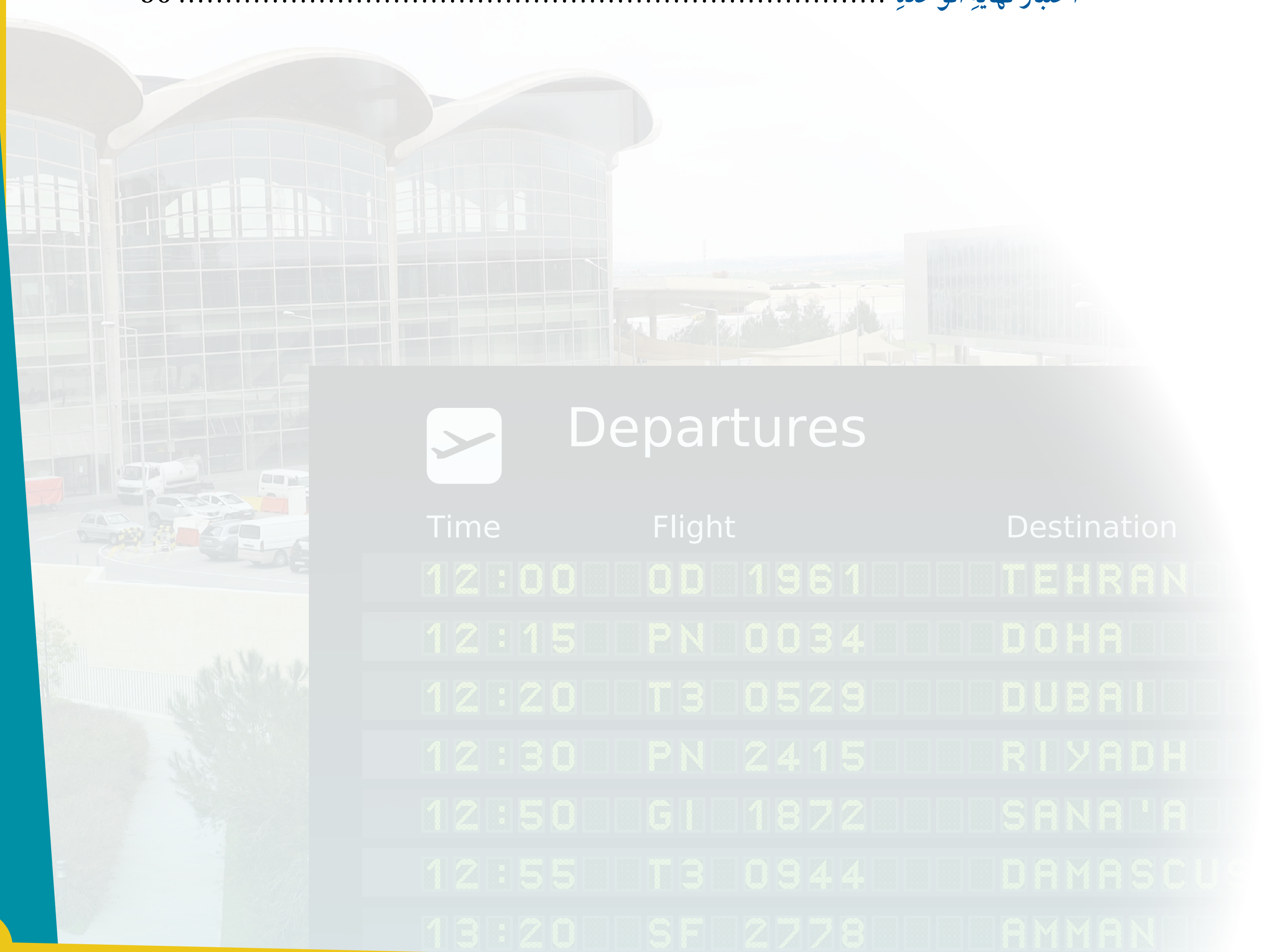
من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُســتخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيَّما على شبكة الإنترنــت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقــدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت أبناءنا الطلبة أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتســارع في عالَــم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحــن إذ نُقدِّم هذا الكتــاب، نأمل أنْ ينال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلِّميهــم، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ



الوحدةُ
1

البرمجة الخطية
Linear Programming

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

طُوِّرت نظرية البرمجة الخطيــة في بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعمِلت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منهــا الشــركات التجارية لزيــادة الأربــاح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف. ســأتعرَّف في هذه الوحدة البرمجية الخطية، وبعض تطبيقاتها الحياتية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ متباينة خطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين على المستوى الإحداثي.
- ✓ حَلَّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانيًّا.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.
- حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.
- حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين باستعمال برمجية جيوجبرا.
- حَلَّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

الدرسُ 1

حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving linear inequality in two variables

فكرةُ الدرسِ حَلُّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحاتُ منطقة الحلول المُمكِنة، المستقيم الحدودي.

مسألةُ اليومِ تصنع نهى أساور وأطواقًا من الخرز، وتستعمل 10 حبّات من الخرز لصنع السِّوار الواحد، و45 حبَّة لصنع الطوق الواحد.

كم سِوارًا وطوقًا يمكنها أن تصنع من 214 حبَّة خرز؟

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المتباينة الخطية جملة رياضية تحوي الرمز $\geq$، أو $\leq$، أو $>$، أو $<$، وأنَّها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين.

من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$\boxed{x - 4y < -1}$ $\boxed{3x + 2y > 2}$ $\boxed{2x + y \leq 1}$

يكون الزوج المُرتَّب (a, b) حَلًّا للمتباينة الخطية بمتغيرين إذا كان الناتج صحيحًا عند تعويض إحداثييه في المتباينة.

أتذكَّر

تكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد a حَلًّا للمتباينة: $x>a$، وتكون جميع الأعداد التي تزيد على (أو تساوي) العدد a حَلًّا للمتباينة: $x \geq a$.

مثال 1

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x - y \leq 3$، في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(1, 2)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية $x - y \leq 3$

بالتعويض $1 - 2 \overset{?}{\leq} 3$

الناتج صحيح $-1 \leq 3$ ✓

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، $(1, 2)$ يُمثِّل حَلًّا لها.

أتذكَّر

يتغيَّر اتجاه إشارة المتباينة عند ضرب طرفيها في عدد سالب، أو قسمتها عليه. فمثلًا، $-x > a$ تصبح $x < -a$ بعد ضرب طرفيها في العدد -1، حيث a عدد حقيقي.

2 $(7, 3)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(7, 3)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية	$x - y \leq 3$
بالتعويض	$7 - 3 \overset{?}{\leq} 3$
الناتج غير صحيح	$4 \nleq 3$ ✗

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، $(7, 3)$ لا يُمثِّل حَلًّا لها.

3 $(2, -1)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(2, -1)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية	$x - y \leq 3$
بالتعويض	$2 - (-1) \overset{?}{\leq} 3$
الناتج صحيح	$3 \leq 3$ ✓

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، $(2, -1)$ يُمثِّل حَلًّا لها.

أتحقق من فهمي

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$، في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(2, 3)$ **b)** $(1, -2)$ **c)** $(1, 0)$

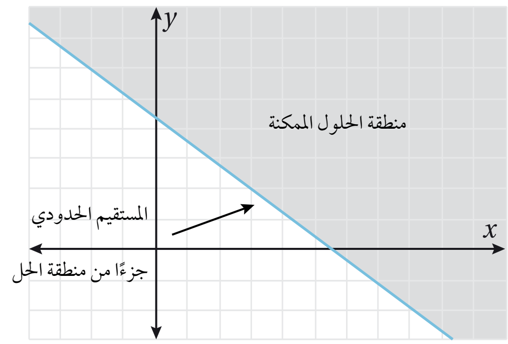
لغة الرياضيات

يمكن استعمال عدة رموز للدلالة على عدم تحقق المتباينة فمثلاً للتعبير عن عدم تحقق (أقل أو يساوي) يمكن استعمال أحد الرمزين الآتين:

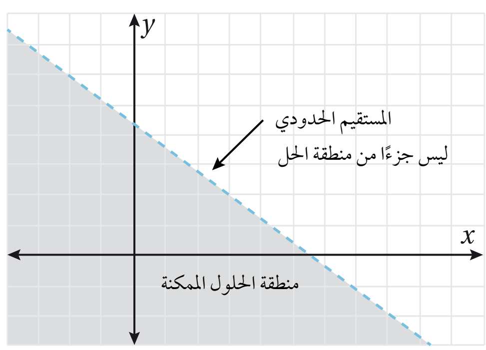
$\nleq$ $\not\leq$

عند تمثيل المتباينة الخطية بيانيًّا على المستوى الإحداثي، فإنَّ النقاط التي تُمثِّل جميع حلولها المُمكِنة تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible reagion). لتمثيل المتباينة بيانيًّا، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المُرفَقة بالمتباينة بعد استبدال الرمز $(\leq ، \geq ، < ، >)$ برمز المساواة $(=)$، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة مستقيمًا يُسمّى **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسِّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول المُمكِنة.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$ أو الرمز $\leq$، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي.



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $<$ أو الرمز $>$، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل الآتي.



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكِنة، أختار النقطة (a, b) التي لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوِّضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقِّقها (أيْ ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلِّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا أُظلِّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

أُمثِّل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ على المستوى الإحداثي.

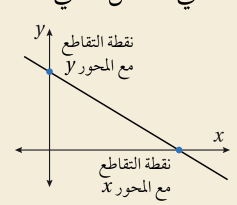
الخطوة 1: تمثيل المستقيم الحدودي.

المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$، أُنشِئ جدول قِيَم لأجد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين:

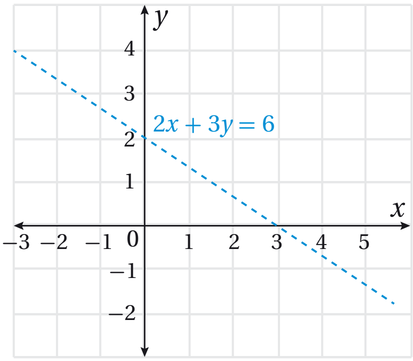
x	0	3
y	2	0

أتذكّر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين على المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y=0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x=0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل الآتي.



أُعيِّن النقطتين $(3, 0)$ و$(0, 2)$ على المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمر بهما. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإنَّه يُرسَم متقطعًا كما في الشكل المجاور.



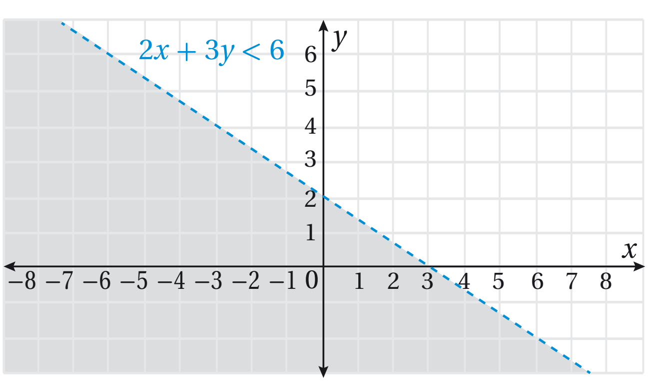
الخطوة 2 : تحديد منطقة الحلول المُمكِنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(1, -2)$، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطية	$2x + 3y < 6$
بالتعويض	$2(1) + 3(-2) \overset{?}{<} 6$
الناتج صحيح	$-4 < 6$ ✓

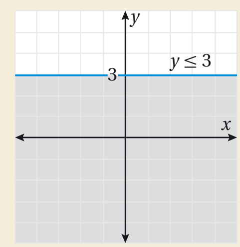
الخطوة 3 : تظليل منطقة الحلول المُمكِنة.

بما أنَّ النقطة $(1, -2)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي.

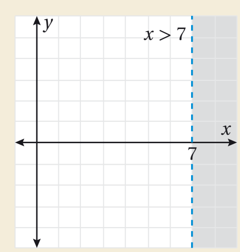


أتذكّر

تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $y \leq 3$، كما في الشكل الآتي.



في حين تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $x > 7$، كما في الشكل الآتي.

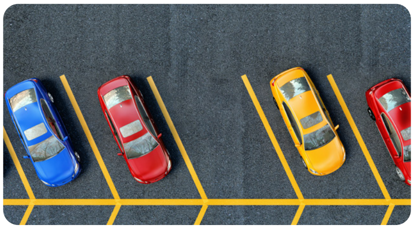


أتحقق من فهمي

أُمثِّل المتباينة الخطية: $4x - 5y \geq 2$ على المستوى الإحداثي.

للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلِّق بتحديد القيم المُمكِنة ضمن شروط مُحدَّدة.

مثال 3 : من الحياة



مواقف: موقف سيّارات تبلغ مساحته $1400\ m^2$، ويتّسع لعدد x من السيّارات الصغيرة، وعدد y من السيّارات الكبيرة. إذا كانت المساحة التي تقف عليها السيّارة الصغيرة $14\ m^2$، والمساحة التي تقف عليها السيّارة الكبيرة $35\ m^2$، فأجد عدد السيّارات الصغيرة والكبيرة التي يمكن أن يتّسع لها هذا الموقف.

الخطوة 1 : التعبير عن المسألة جبريًّا بمتباينة خطية.

$$14x + 35y \leq 1400$$

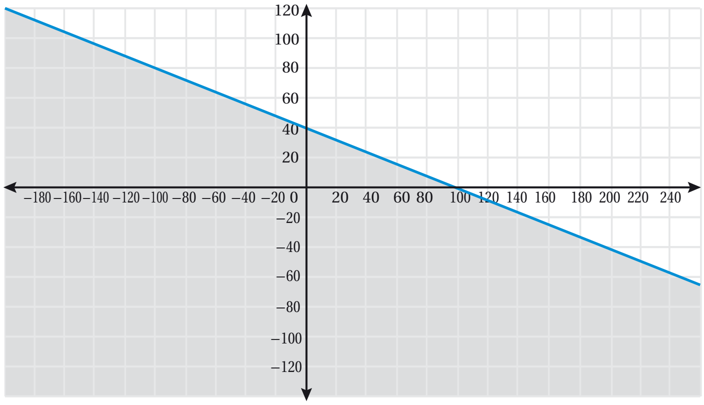
الخطوة 2 : تمثيل المتباينة بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيم الحدودي: $14x + 35y = 1400$، وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّ المستقيم يُرسَم متصلًا.

أختار أي نقطة، مثل $(20, 30)$، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطية	$14x + 35y \leq 1400$
بالتعويض	$14(20) + 35(30) \overset{?}{\leq} 1400$
الناتج صحيح	$1330 \leq 1400$ ✓

بما أنَّ النقطة $(20, 30)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي.



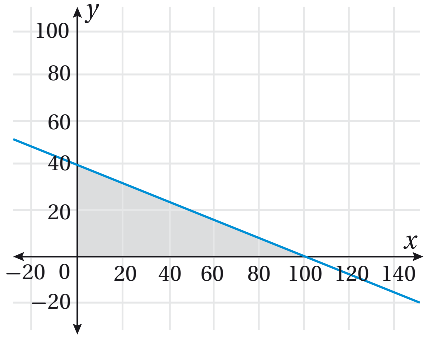
معلومة

تعد مواقف السيارات من أهم الحلول لمشكلة تزايد عدد السيارات المتسارع وحاجتها الى مواقف.

ومن أشكال مواقف السيارات المسطحه والطابقية والالكتروتية وغيرها.

الخطوة 3 : تحديد حَلِّ المسألة.

أُلاحِـظ أنَّ قِيَم x وy يجب أنْ تكون صحيحة وموجبة؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد سـيّارات؛ ما يُقلِّص منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ أيضًا أنَّ أيَّ نقطة إحداثياها عددان صحيحان موجبان، وتقع على المستقيم الحدودي، أو ضمن المنطقـة المُظلَّلة التـي تظهر كمثلـث تُعَدُّ حلًّا. فمثلًا، النقطـة $(40, 20)$ تُمثِّل حَلًّا للمتباينة؛ لأنَّ المساحة التي تَشْغَلُها 40 سيّارة صغيرة و20 سيّارة كبيرة $1260\ m^2$، وهي أقل من مساحة موقف السيارات البالغة $1400\ m^2$.

أتحقق من فهمي

مطاعم: مطعم مسـاحة صالته $64\ m^2$، وهي تتَّسع لعدد x من الطاولات الصغيرة، وعدد y من الطاولات الكبيرة. تَشْـغَل الطاولة الصغيرة مسـاحة $2.5\ m^2$، وتَشْغَل الطاولة الكبيرة مساحة $4\ m^2$. أجد عدد الطاولات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن وضعها في صالة المطعم.

أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x - 3y \geq 5$:

1. $(1, -2)$
2. $(5, 0)$
3. $(-4, 1)$
4. $(-3, -4)$
5. $(-4, 0)$
6. $(5, 2)$

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $5x - 2y < 6$:

7. $(0, 0)$
8. $(2, 2)$
9. $(4, 1)$
10. $(-2, -1)$
11. $(-2, -8)$
12. $(-1, -6)$

أُمثِّل كلًّا من المتباينات الخطية الآتية على المستوى الإحداثي:

13. $8y + 3x < 2$
14. $4x \leq 8$
15. $2x - 9y \geq -3$
16. $5y - 8x \geq 1$
17. $-3y < 12$
18. $6x + 3y > -5$

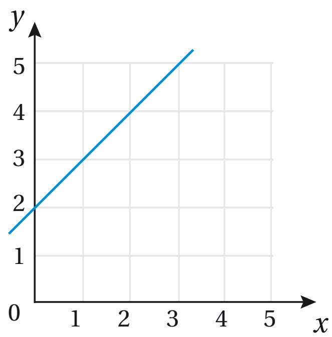
19 **اختبارات:** تُمثِّل المتباينة: $3x + 2y \geq 93$ عدد أسئلة الاختيار من مُتعدِّد (x)، وأسئلة ملء الفراغ (y) التي يتعيَّن على منى الإجابة عنها بصورة صحيحة لنيل درجة A في اختبار التربية الإسلامية. إذا أجابت إجابة صحيحة عن 20 سؤالًا من أسئلة الاختيار من مُتعدِّد، وعن 18 سؤالًا من أسئلة ملء الفراغ، فهل ستنال درجة A في الاختبار؟

20 **شاحنات:** تستطيع شاحنة حمل 4000 kg من صناديق البضائع. إذا كان يوجد عدد x من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 50 kg، وعدد y من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 95 kg، فما عدد الصناديق التي يُمكِن للشاحنة حملها من كلا النوعين؟

21 أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ المتباينة من الصورة: $x + y < c$، حيث c عدد حقيقي موجب.

22 أيُّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثِّل منطقة حَلِّ المتباينة، مُبرِّرًا إجابتي؟

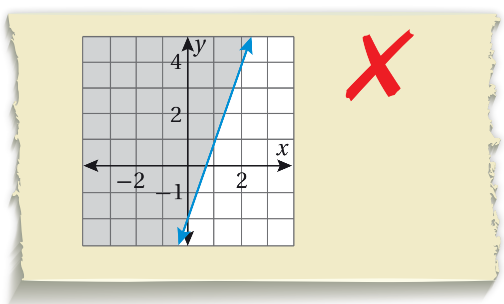
$$y \leq x + 2$$



23 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** مثَّل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانيًّا على النحو الآتي:



أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أُصحِّحه.

25 **تبرير:** عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أُبرِّر إجابتي.

26 **تحدٍّ:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-5, -2)$ و$(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(6, 5)$ و$(2, 3)$ في منطقة الحلول المُمكِنة، ثم أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

الدرسُ 2

حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving system of linear inequalities in two variables

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحاتُ نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحَلِّ.

مسألةُ اليوم قدَّم محَلٌّ لتبديل زيوت السيّارات عرضًا مجانيًّا لغسل السيّارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك هو غسل 30 سيّارة يوميًّا، بتكلفة لا تزيد على 75 دينار، فكم سيّارة كبيرة وصغيرة يُمكِن غسلها يوميًّا بحسب هذا العرض؟

تكلفة غسل السيّارة الكبيرة 3 دنانير

تكلفة غسل السيّارة الصغيرة ديناران

يتكوَّن **نظام المتباينات الخطية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحَلِّ** (Solution set). فمثلًا، يتكوَّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

المتباينة الأولى $x + y < 2$

المتباينة الثانية $-2x + y > -1$

المتباينة الثالثة $x - 3y \leq -2$

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنَّه يُحقِّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الأولى $-1 + 2 = 1 < 2$ ✓

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثانية $-2(-1) + 2 = 4 > -1$ ✓

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثالثة $-1 - 3(2) = -7 \leq -2$ ✓

لحَلِّ نظام متباينات، أُمثِّل كل متباينة فيه بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، ثم أُظلِّل المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها التي تُمثِّل حَلَّ النظام.

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدل عبارة (الزوج المُرتَّب يُحقِّق متباينة) على أنَّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

مثال 1

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$$4x + 3y \leq 12$$

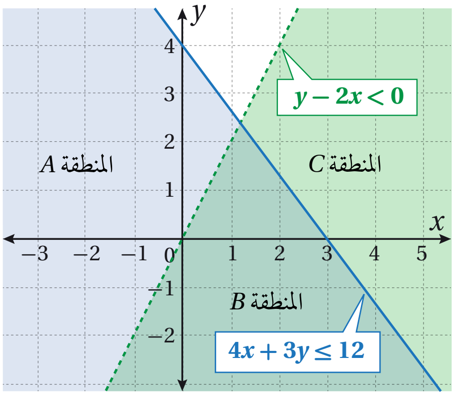
$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: تمثيل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$

$$y - 2x = 0$$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين على المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.



أتذكَّر

إذا تضمَّنت المتباينة رمز $>$ أو رمز $<$، فإنَّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحَلِّ، ويكون تمثيله بخط مُتقطِّع.

الخطوة 2: تحديد منطقة التقاطع بين حَلَّي المتباينتين.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A وB، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حَلِّ المتباينتين هي منطقة حَلِّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: التحقُّق من صحة الحَلِّ.

أتحقَّق من صحة الحَلِّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حَلِّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثم أُعوِّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى	$4x + 3y \leq 12$
بالتعويض	$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\leq} 12$
الناتج صحيح	$5 \leq 12$ ✓
المتباينة الثانية	$y - 2x < 0$
بالتعويض	$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$
الناتج صحيح	$-5 < 3$ ✓

أتذكَّر

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في جميع متباينات النظام؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المتباينات مِنْ دونِ الأُخريات.

أتحقق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$$2x - 4y \geq -5$$
$$x + 7y < 7$$

لا يكـون لنظام المتباينات حَلٌّ أحيانًا؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات المُكوِّنة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحَلِّ هي المجموعة الخالية.

أتذكَّر

يُرمَز إلى المجموعة الخالية بالرمز { } ، أو الرمز ∅ (تُقرَأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

مثال 2

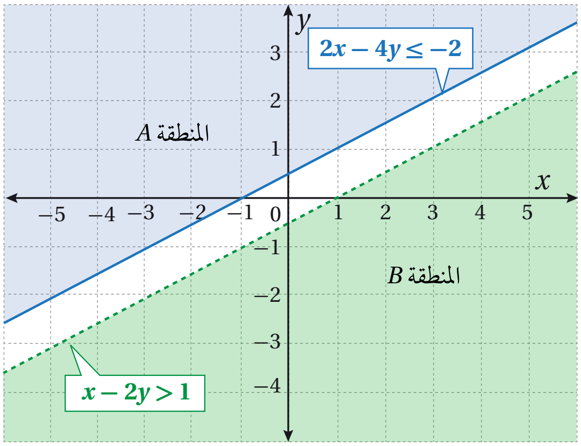
أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$2x - 4y \leq -2$$
$$x - 2y > 1$$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين:

$$2x - 4y = -2$$
$$x - 2y = 1$$

على المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.



أتعلَّم

أُلاحِظ في المثال 2 عدم وجود منطقة حَلٍّ مشتركة؛ لأنَّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وأنَّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حَلِّ المتباينتين. إذن، حَلُّ النظام هو المجموعة الخالية ∅.

أتحقق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$
$$2.5x - y \geq 2$$

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحَلِّ هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها.

مثال 3

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$

$$x + y < 8$$

$$x > 2$$

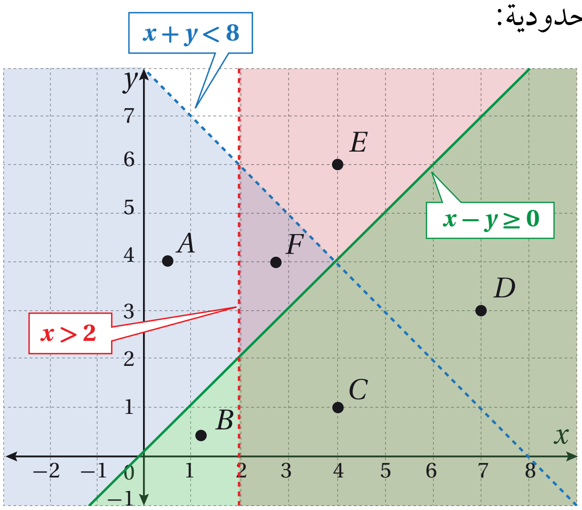
الخطوة 1: أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية:

$$x - y = 0$$

$$x + y = 8$$

$$x = 2$$

على المستوى الإحداثي نفسه كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: تحديد منطقة الحَلِّ.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: C, D, E, F.

أُلاحِظ أنَّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حَلِّ النظام.

أتذكَّر

للتحقُّق من أنَّ الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا لنظام المتباينات، يجب تعويضه فيها جميعًا.

أتحقق من فهمي

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$

$$x - 5y > 6$$

$$2x - 5y < -3$$

تُســتعمَل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكِن بها تحديد القِيَم المُمكِنة للمتغيرات وَفق شروط مُحدَّدة.

مثال 4 : من الحياة

كرة قدم: في دوري كرة القدم المدرسي، يحصل الفريق الفائز على 3 نقاط، ويحصل الفريق المتعادل علــى نقطة واحدة، ولا يحصل الفريق الخاسر على أيِّ نقطة.

إذا فاز فريق مدرســة ســلمان في x من المباريات، وتعادل في y مــن المباريات، وجمع منها 18 نقطــة على الأكثر، وكان عدد مرّات فوزه أكثر من عدد مــرّات تعادله، وتعادل مرَّتين على الأقل؛ فأجد العدد المُمكِن مــن المباريات التي فاز بها الفريق، والعدد المُمكِن من المباريات التي تعادل فيها الفريق.

أُقيمــت أول بطولــة لــكأس العالم فــي كرة القــدم بالأوروغواي عام 1930م، وتحديــدًا فــي مدينة مونتيفيدو.

الخطوة 1 : التعبير عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أنَّ عــدد مرّات الفوز هو x، وأنَّ عدد مرّات التعادل هــو y، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة.

عدد نقاط الفوز والتعادل 18 على الأكثر $\quad 3x + y \leq 18$

عدد مرّات الفوز أكثر من عدد مرّات التعادل $\quad x > y$

تعادل الفريق مرَّتين على الأقل $\quad y \geq 2$

الخطوة 2 : تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا.

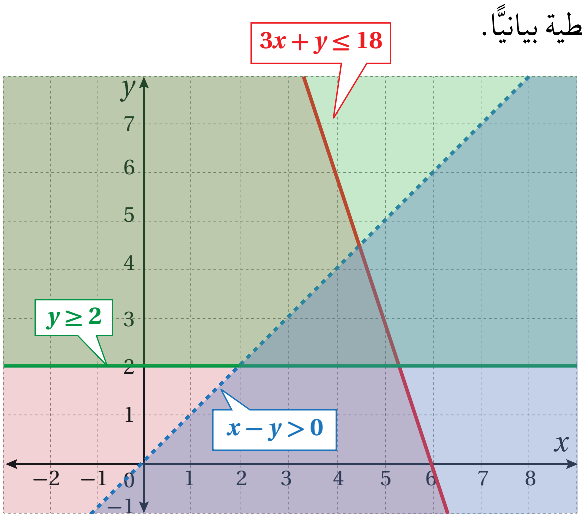
أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية:

$$3x + y = 18$$

$$x - y = 0$$

$$y = 2$$

ثم أُظلِّل منطقة الحَلِّ لكل متباينة.



أُلاحِظ أنَّ مناطق الحَلِّ تتقاطع في منطقة على شكل مثلث، هي منطقة حَلِّ النظام، وأنَّه يُمكِن اختيار نقطة مثل $(4, 3)$ ضمن هذه المنطقة، والتأكُّد أنَّها تُحقِّق المتباينات جميعها على النحو الآتي:

المتباينة الخطية الأولى	$3x + y \leq 18$
بالتعويض	$3(4) + 3 \overset{?}{\leq} 18$
ناتج صحيح	$15 \leq 18$ ✓
المتباينة الخطية الثانية	$x - y > 0$
بالتعويض	$4 - 3 \overset{?}{>} 0$
ناتج صحيح	$1 > 0$ ✓
المتباينة الخطية الثالثة	$y \geq 2$
بتعويض قيمة y، يكون الناتج صحيحًا	$3 \geq 2$ ✓

الخطوة 3: تحديد حَلِّ المسألة.

أيُّ نقطة تقع في منطقة الحَلِّ تُعَدُّ حَلًّا لنظام المتباينات الخطية. وفي هذه الحالة، ولأنَّ عدد المباريات يجب أنْ يكون صحيحًا؛ فإنَّ النقطة $(4, 3)$ تُمثِّل أحد الحلول المُمكِنة؛ ما يعني أنَّ الفريق فاز بـ 4 مباريات، وتعادل في 3 مباريات، وجمع 15 نقطة.

أتحقق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرِف على إطعامها والاعتناء بها أنَّ:

- **في المحمية 6 حيوانات على الأقل.**
- **عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيوانًا.**
- **عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.**
- **في المحمية اثنان من الغزلان على الأقل.**

a) ما أقل عدد مُمكِن من الأيائل؟

b) ما أكثر عدد مُمكِن من الغزلان؟

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافِئ $x \leq a$، و b على الأقل تُكافِئ $x \geq b$.

أفكِّر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يُمكِن أنْ تكون حلولًا مُمكِنة لنظام المتباينات الخطية في المثال 4.

تقع محمية الغزلان في دبين ضمن إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن، وتمتد على مساحة 186 دونم من أحراش جرش، وقد تأسَّست عام 2000م.

أتدرب وأحل المسائل

أُمثِّل منطقة حَلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1) $x + 3y > 1$
$5x - y \leq 2$

2) $-3x - 12y > -9$
$x + 4y \geq 5$

3) $x - 11y < 6$
$-2x + 22y > -12$

4) $3x + 5y \leq 1$
$3x + 5y \leq 3$

5) $2x - 7y > 2$
$2x - 7y \leq 2$

6) $13x - y < 11$
$x + y \geq 0$

7) $9x - y < 2$
$x + 3y > -1$
$x - y > -3$

8) $5x - 5y < 2$
$2x - 2y > 1$
$x \geq y$

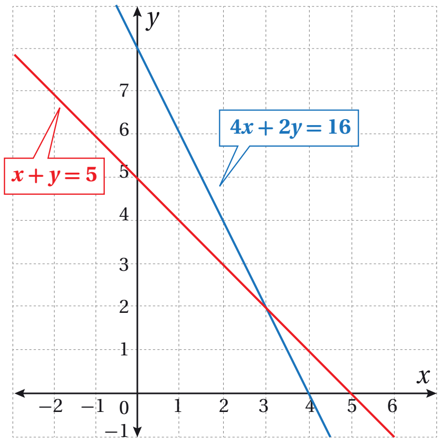
9) $x \leq y$
$x - 5y < 6$
$10x - y > 3$

10) **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، وديناراً واحداً للأطفال، ويتّسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، وy تُمثِّل عدد الأطفال، فما عدد البالغين والأطفال الذي قد يوجد على متن القارب، علمًا بأنَّ رَيْع بيع التذاكر أقل من 12 دينارًا.

11) **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة 25 دينارًا، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة 50 دينارًا. إذا كان رَيْع بيع التذاكر 1600 دينار على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر الممكن لكل درجة.

12) أُظلِّل منطقة حَلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكِنة، علمًا بأنَّ x, y أعداد صحيحة موجبة.

$$x + y \geq 5$$
$$4x + 2y \leq 16$$



13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معًا؛ بشرط ألّا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألّا يقل في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة.

أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعيَّن على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.

14 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

15 **تبرير:** أَصِف منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانيًّا:

$$2x + y \leq 7$$

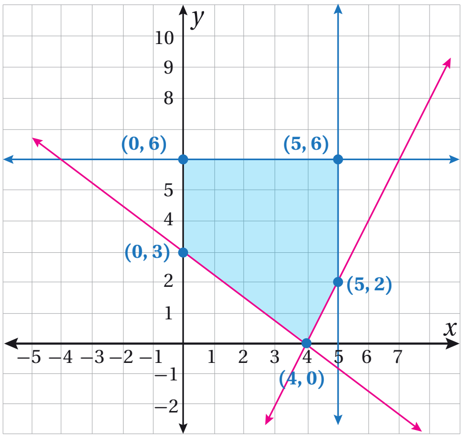
$$2x + y \geq 7$$

مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوَّن كلٌّ منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحَلِّ:

16 مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

17 المجموعة الخالية.

18 **تحدٍّ:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حَلِّه هي المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني الآتي:



معمـلُ برمجيـةِ جيوجبـرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Graphing system of linear inequalities in two variables

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا على المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحَلِّ.

مثال 1

أُمثِّل بيانيًّا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

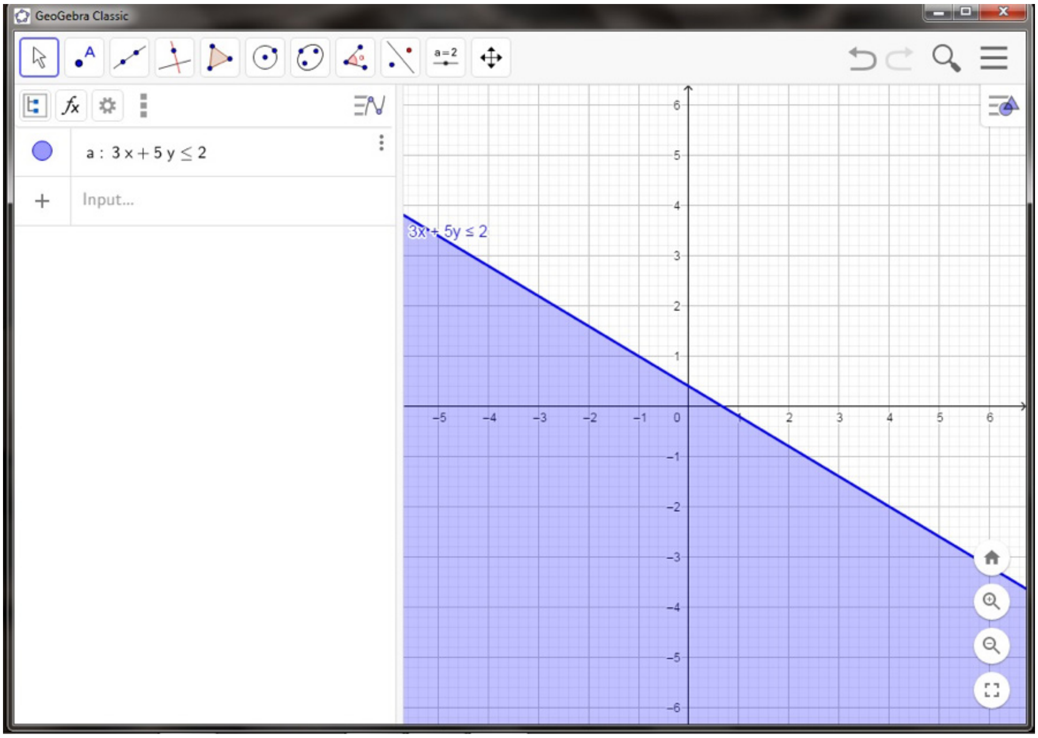
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: تمثيل المتباينة الأولى بيانيًّا باتباع الآتي:

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3	x	+	5	y	≤	2

أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2 : تمثيل المتباينة الثانية بيانيًّا باتباع الآتي:

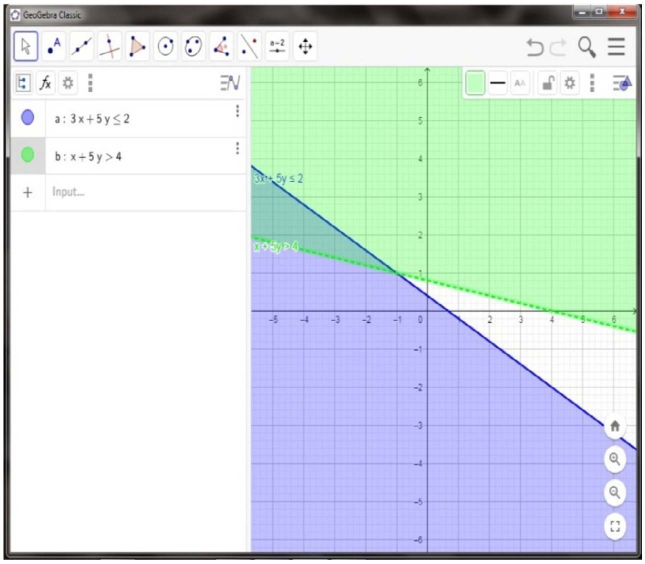
أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

4	>	y	5	+	x

الخطوة 3 : تغيير اللون.

ألاحظ ان برمجية جيوجبرا قد حددت منطقة حل كلاً من المتباينتان باللون الازرق، لذا يجب تغير لون منطقة حل احدى المتباينتان للتفريق بين منطقة حل كل متباينة بلون مختلف.

أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز ⋮ الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.



الخطوة 4 : تفسير المناطق الظاهرة.

أُلاحِظ وجود أربع مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟

أتدرب

أُمثِّل بيانيًّا كلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

1) $-5x - 2y \geq 3$

$x + y < -3$

2) $0.5x + 7y > -2$

$x < y$

3) $x - y \geq 0$

$x + y \leq 0$

4) $9x - 6y > 8$

$27x - 18y < 1$

الدرس 3

البرمجة الخطية
Linear Programming

فكرةُ الدرسِ نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكِن حَلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانيًّا.

المصطلحاتُ القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكِنة، الاقتران الهدف، الحَلُّ الأمثل.

مسألةُ اليومِ دخلت سلمى محلًّا لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 دنانير ثمنًا لـ 15شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المحلِّ معلومات عن النوعين. كم شـــتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كَمٍّ مُمكِن من البندورة؟

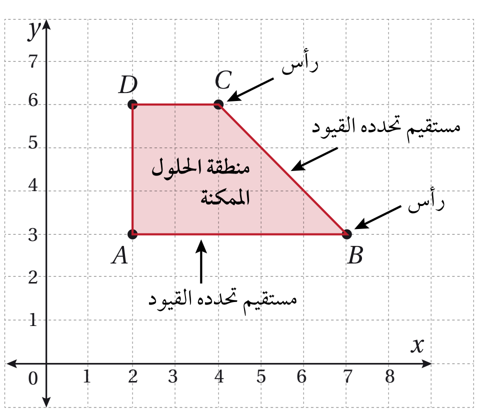
نوع شتلة البندورة:	A	B
الثمن بالدينار:	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتوقَّع:	4 kg	5 kg

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني على المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكِنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكِنة (قيمة صغرى) لاقتران يُســمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمـــن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثِّل كلٌّ منها متباينة خطية. فبتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدَّد منطقة حَلٍّ مشتركة لها تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region)، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكِنة، أو أصغر قيمة مُمكِنة للاقتران الهدف عند رؤوس المضلع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُعــرَّف البرمجة الخطية أيضًا بأنَّها طريقة البحث عن **الحَــلِّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوَّن مسألتها من:

1. **الاقتران الهدف:** يكون في صورة: $P = ax + by$، حيث:
   P: اسم الاقتران (مثل الربح).
   a, b: عددان حقيقيان. x, y: متغيران.

2. **القيود:** نظام من المتباينات الخطية، وهي تُكتب بدلالة المتغيرين x, y، وتُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



مفهومٌ أساسيٌّ

إذا وُجِدت قيمة عظمــى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنَّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

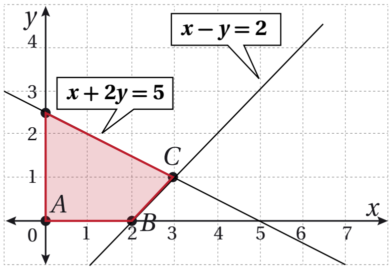
مثال 1

أجـد إحداثيـي النقطـة (x, y) التـي تجعـل الاقتـران: $P = 2x + y$ أكبـر مـا يُمكِـن ضمـن القيـود الآتيـة:

$$x + 2y \leq 5$$
$$x - y \leq 2$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

الخطوة 1: تمثيل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتبايـنـات الخطية (القيود) بيانيًّا، ثم أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: تحديد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُعيِّن إحداثيي كلٍّ من نقاط رؤوس منطقة الحلــول المُمكِنة، وهي: A, B, C, D، ثم أضعها في جدول أحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلٍّ منها.

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 2x + y$
$A(0, 0)$	$P = 2(0) + 0 = 0$
$B(2, 0)$	$P = 2(2) + 0 = 4$
$C(3, 1)$	$P = 2(3) + 1 = 7$
$D(0, 2.5)$	$P = 2(0) + 2.5 = 2.5$

الخطوة 3: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ أنَّ أكبر قيمة للاقتران P هي 7، وأنَّها تتحقَّق عندما $x = 3, y = 1$.

أتحقق من فهمي

أجـد إحداثيـي النقطـة (x, y) التي تجعـل الاقتـران: $Q = 50x + 40y$ أكبر مـا يُمكِن ضمن القيـود الآتية:

$$x + y \leq 8$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

أتذكَّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

أتعلَّم

تُسـمّى المتباينتـان $x \geq 0 , y \geq 0$ قيـود، (أو شـروط) عـدم السـالبية، وهما توجدان فـي مسـائل البرمجـة الخطيـة الحياتية بصورة ضمنية.

يُمكِن حَلُّ المسائل الحياتية التي تتضمَّن إيجاد أكبر ربح مُمكِن بطريقة البرمجة الخطية، واتباع خطوات تُشبِه الخطوات الواردة في المثال 1، ولكن يتعيَّن قبل ذلك تحديد متغيرين، مثل x, y، وكتابة نظام متباينات خطية بدلالة كلٍّ منهما لتمثيل قيود المسألة، وكتابة اقتران الربح بدلالتيهما أيضًا.

مثال 2 : من الحياة

يمتلك مُزارِع 50 دونمًا من الأرض، ويريد تهيئة التربة في جزء منها لزراعتها بالذرة، أو بالقمح، أو بكليهما كما في الجدول المجاور.

	الذرة	القمح
تكلفة تهيئة التربة لكل دونم	60 دينارًا	30 دينارًا
عدد أيام العمل في كل دونم	3 أيام	4 أيام
الربح المُتوقّع من كل دونم	180 دينارًا	100 دينار

غير أنَّ المُزارِع لا يُمكِنه إنفاق أكثر من 1800 دينار على ذلك، ويتعيَّن عليه تهيئة التربة وزراعتها في 120 يومًا على الأكثر قبل بدء موسم الأمطار. كم دونمًا سيزرع من كل محصول لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

الخطوة 1 : صياغة الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الدونمات التي ستُزرع ذرةً هو x، وأنَّ عدد الدونمات التي ستُزرَع قمحًا هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ المُزارِع سيبيع كل إنتاجه من المحصولين، فإنَّ الربح المُتوقَّع هو:

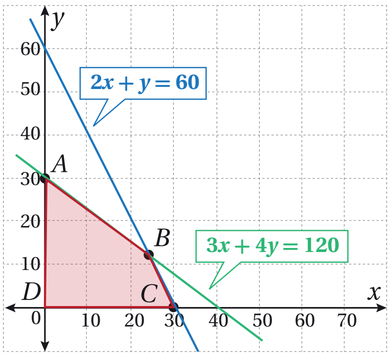
$$\text{P} = 180x + 100y$$

أراد المُزارِع أنْ يكون الربح أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$60x + 30y \leq 1800 \ , \ 3x + 4y \leq 120 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

الخطوة 2 : تمثيل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



أتذكّر

لإيجاد إحداثيي النقطة B، أَحُلُّ المعادلتين معًا بطريقة الحذف والتعويض، ويُمكِن أيضًا استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

الخطوة 3 : تحديد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة الربح P عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 180x + 100y$
$A(0, 30)$	$P = 180(0) + 100(30) = 3000$
$B(24, 12)$	$P = 180(24) + 100(12) = 5520$
$C(30, 0)$	$P = 180(30) + 100(0) = 5400$
$D(0, 0)$	$P = 180(0) + 100(0) = 0$

الخطوة 4 : تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أكبر ربح مُمكِن هو 5520 دينارًا، وأنَّه يتحقَّق عند زراعة 24 دونمًا بالذرة، و12 دونمًا بالقمح.

أتحقق من فهمي

يُنتِج مشغل للصناعات اليدوية معاطف وحقائب جلدية، ويتوافر لديه أسبوعيًّا $40\ m^2$ على الأكثر من الجلد الخام. يتطلَّب صنع المعطف الواحد استعمال $2\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق ساعتي عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 5 دنانير، ويتطلَّب صنع الحقيبة الواحدة استعمال $1\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق 3 ساعات عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 4 دنانير.

إذا كان عدد ساعات العمل في المصنع لا يزيد على 60 ساعة أسبوعيًّا، فما عدد كلٍّ من المعاطف والحقائب التي يتعيَّن صنعها أسبوعيًّا ليُحقِّق المشغل أكبر ربح مُمكِن؟ (أفترض أنَّ المشغل يبيع إنتاجه كاملًا)

أُلاحِظ من المثالين السابقين أنَّ منطقة الحلول المُمكِنة التي تُحدِّدها القيود كانت مغلقة؛ لأنَّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنَّ بعض المسائل الحياتية تتضمَّن إيجاد أقل تكلفة مُمكِنة، أو أقل كمية مُستهلَكة، وغير ذلك، فتكون منطقة الحلول عندئذٍ مفتوحة؛ لأنَّ قيودها تفرض ذلك.

مثال 3 : من الحياة

يخلط بعض مُربّي الماشــية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقـل. ويُبيِّن الجــدول التالي تكلفة الكيــس الواحد من كل نوع، وعــدد الوحدات التــي يحويها من البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًّا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحــدة من المعــادن، و60 وحدة من الفيتامينــات على الأقل، فكم كيسًــا من النوع A والنوع B معًا يُمكِن أنْ تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكِنة؟

	النوع B	النوع A
تكلفة الكيس الواحد	JD 12	JD 10
عدد وحدات البروتينات	30	40
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	30	10

يعتمد تســمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعَدٍّ بنســب مدروسة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشــعير)، والتبــن، وقشــور الفــول، وملح الطعام، والفيتامينات، ويُعرَف هذا الخليط بالعليقة.

الخطوة 1: صياغة الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الأكياس من النوع A هو x، وأنَّ عدد الأكياس من النوع B هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدَّم لها من النوعين يوميًّا، فإنَّ التكلفة C هي:

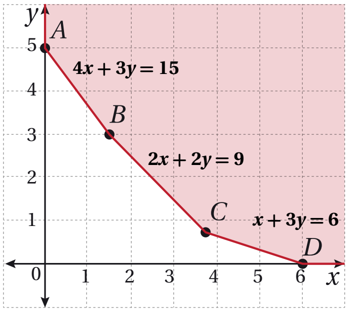
$$C = 10\,x + 12\,y$$

المطلوب أنْ تكون التكلفة أقل ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150\,,\;\; 20x + 20y \geq 90\,,\; 10x + 30y \geq 60\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0$$

الخطوة 2 : تمثيل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3 : تحديد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة التكلفة C عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$C = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$C = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$C = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$C = 10(3.75) + 12(0.57) = 46.5$
$D(6, 0)$	$C = 10(6) + 12(0) = 60$

الخطوة 4: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أقل تكلفة مُمكِنة تساوي 46.5 دينارًا، وأنَّ الماشية تستهلك وقتئذٍ 3.75 أكياس من العلف A، و0.75 كيس من العلف B، لتلبية الحد الأدنى الذي يَلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أثبت الباحثون أنَّ عدد السعرات الحرارية التي (calories : cal) يحصل عليها الجسم من الغذاء يزداد بنحو 200 cal مع التقدُّم في العُمر عامًا بعد عام.

أتحقق من فهمي

حمية غذائية: يشترط نظام للحمية الغذائية توافر ما لا يقل عن **300** سعرة حرارية، و**36** وحدة من فيتامين A، و**90** وحدة من فيتامين C، ضمن الجزء السائل من الوجبة الغذائية. يُبيِّن الجدول التالي تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السعرات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكِن أنْ يستهلكها يوميًّا شخص يتَّبِع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكِنة؟

	النوع 2	النوع 1
سعر العلبة الواحدة	JD 0.3	JD 0.25
عدد السعرات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	6	12
عدد وحدات فيتامين C	30	10

أتدرب وأحل المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P = 4x + 3y$

$x + 2y \leq 4$

$x - y \leq 1$

$x \geq 0 , y \geq 0$

2) $R = 10x + 7y$

$0 \leq x \leq 60$

$0 \leq y \leq 60$

$5x + 6y \leq 420$

3) $Z = 1.5x + y$

$x + 3y \leq 15$

$4x + y \leq 16$

$x \geq 0 , y \geq 0$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

4) $Q = 4x + 5y$

$x + y \geq 8$

$3x + 5y \geq 30$

$x \geq 0 , y \geq 0$

5) $C = 8x + 4y$

$x + 2y \geq 4$

$3x + y \geq 7$

$2y - x \geq 7$

$x \geq 0 , y \geq 0$

6) $K = 25x + 35y$

$8x + 9y \leq 7200$

$8x + 9y \geq 3600$

$x \geq 0 , y \geq 0$

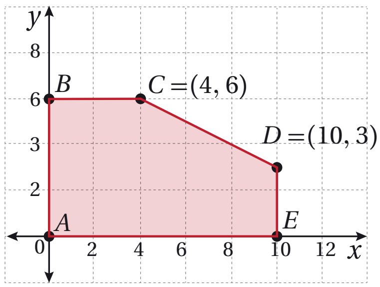
7 **صناعات**: يُنتِج أحد المصانع شوكولاتة مُغطّاة بالفستق، ويجني ربحًا مقداره JD 1.5 عن كل علبة مبيعة، ويُنتِج نوعًا آخر منها مُغطّى بالبندق، ويجني ربحًا مقداره JD 2 عن كل علبة مبيعة. وقد بيَّنت دراسة أجراها قسم التسويق في المصنع بهدف زيادة الربح أنَّ إنتاج كلا النوعين من الشوكولاتة يجب ألّا يزيد على 1200 علبة شهريًّا، وأنَّ الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق لا يزيد على نصف الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق، وأنَّ عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق يجب أنْ يكون أقل من (أو يساوي) 600 علبة، مضافًا إليها ثلاثة أمثال عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق شهريًّا. كم علبة شوكولاتة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع شهريًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، مُفترِضًا بيع الإنتاج كاملًا كل شهر؟

8 **رحلات**: تُخطِّط لجنة الأنشطة في إحدى المدارس لاستئجار حافلات كبيرة وصغيرة، للذهاب برحلة ترفيهية مدرسية إلى قلعة الكرك. تحوي الحافلة الكبيرة 40 مقعدًا عاديًّا، ومقعدًا واحدًا لذوي الحاجات الخاصة، وتبلغ تكلفة استئجارها 180 دينارًا، في حين تحوي الحافلة الصغيرة 8 مقاعد عادية، و3 مقاعد لذوي الحاجات الخاصة، وتبلغ تكلفة استئجارها 100 دينار. إذا كانت اللجنة بحاجة إلى استئجار حافلات تحوي 320 مقعدًا عاديًّا على الأقل، و36 مقعدًا لذوي الحاجات الخاصة على الأقل، فكم حافلة من كل سعة يجب استئجارها بأقل تكلفة مُمكِنة؟

9 **دعاية**: أراد صلاح طباعة كُتيِّبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتَجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيِّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيِّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرَّر صلاح أنَّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثَّلةً في 50 كُتيِّبًا على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم كُتيِّبًا ونشرة يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكِن؟

10 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا



11 **تبرير:** يتحقَّــق أحيانًا أكبر ربــح مُمكِن عند نقطتين مــن رؤوس منطقة الحَلِّ. وفــي هذه الحالة يُمكِــن إيجاد نقاط أُخــرى لتحقيق أكبر ربح عندها، بالرغــم من أنَّ قيمة الربح وحيدة. أجد أكبــر قيمة مُمكِنة للربح $P = x + 2y$ ضمن منطقة الحلول المُمكِنة المُمثَّلة في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي. ثم أجد نقاطًا أُخرى ضمن منطقة الحَلِّ، يتحقَّق عندها أكبر قيمة مُمكِنة للربح.

12 **تحــدٍّ:** أجد الاقتران الهدف الذي صورته: $G = ax + by$، حيث a, b عددان حقيقيان، وله أكبر قيمة عند النقطة $(2, 3)$، وهي 18، ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 8$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

13 **تحدٍّ:** أجد مجموعة قِيَم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل للاقتران الهدف:

$$D = 3x + ny$$

أكبر قيمة مُمكِنة عند النقطة $(3, 4)$، ضمن القيود الآتية:

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

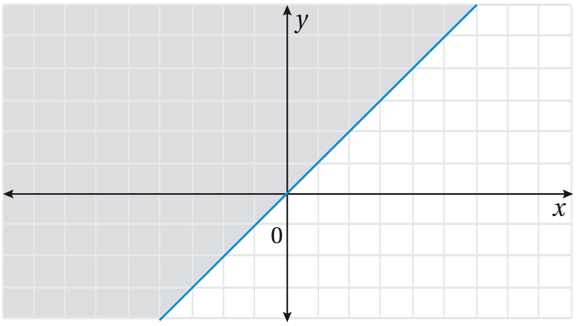
أَضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $7y-8x>-10$، هو:

a) $(3, 2)$ b) $(3, 1)$

c) $(-4, -7)$ d) $(2, 5)$

2 المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي هي:



a) $x-y\leq 0$ b) $x-y\geq 0$

c) $x+y\leq 0$ d) $x+y\geq 0$

3 المتباينة التي يكون الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ حَلًّا لها هي:

a) $2x+7y<2$ b) $x-11y\geq -2$

c) $y-13x\leq -6$ d) $2y-x>9$

4 الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا لنظام المتباينات الآتي هو:

$$y+5x<7$$
$$2x-y\geq -3$$

a) $(3, 2)$ b) $(0, 0)$

c) $(-4, -2)$ d) $(2, 8)$

أَحُلُّ كلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

5 $x-8y\leq 9$
$4x+7y>3$

6 $12x+10y>1$
$-5x-8y<2$
$3x+y\geq -6$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدرِّبات x، وعدد الطلاب المُتدرِّبين y، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

7 أشرح بالكلمات معنى: $2y\geq x$.

8 إذا كان عدد الطالبات المُتدرِّبات 6، فما العدد المُمكِن للطلاب المُتدرِّبين؟

9 أجد جميع الحلول المُمكِنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عددان صحيحان موجبان:

$$m+n>4$$
$$3m+7n\leq 21$$

10 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P=4x+y$، ضمن القيود الآتية:

$$x+y\leq 50$$
$$3x+y\leq 90$$
$$x\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

11 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C=200x+500y$، ضمن القيود الآتية:

$$x+2y\geq 10$$
$$3x+4y\leq 24$$
$$x\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

12 يُنتِج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع يوميًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

	القطعة الثانية	القطعة الأولى
زمن المعالجة في الآلة A	1 h	2 h
زمن المعالجة في الآلة B	1 h	1 h
مقدار الربح	JD 15	JD 20

13 أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و6 وحدات على الأقل من فيتامين C.

يُبيِّن الجدول الآتي وحدات الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كل نوع:

	الطحين العادي	طحين الشوفان
السعر	JD 0.5 / kg	JD 0.8 / kg
فيتامين A	3 وحدات لكل كيلوغرام	4 وحدات لكل كيلوغرام
فيتامين B	5 وحدات لكل كيلوغرام	2 وحدتان لكل كيلوغرام
فيتامين C	1 وحدة لكل كيلوغرام	3 وحدات لكل كيلوغرام

كم كيلوغرامًا من نوعي الطحين يتعيَّن على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كل فيتامين وبأقل تكلفة؟

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

14 إذا كان $y > 4$، فأيٌّ ممّا يأتي يجب وضعه في المربع لتكون $\frac{3y+2}{5} \square y$ صحيحة:

a) $>$ b) $<$

c) $\leq$ d) $\geq$

15 إذا كان $x < y < 0$، فأيٌّ ممّا يأتي صحيح:

a) $xy^2 < x$ b) $xy < y^2$

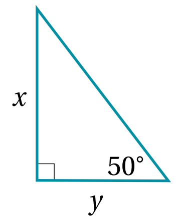
c) $xy < x^2$ d) $y - 1 < x$

16 إذا كانت $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة متتالية، وكان $x = a + b + 1$، وكان $y = b+c-1$، فإنَّ:

a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

17 أيٌّ ممّا يأتي صحيح اعتمادًا على المثلث المجاور:



a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

18 إذا كانت $k < n < 0$ ، فأيٌّ ممّا يأتي ناتجه عدد موجب:

a) $k - n$ b) kn

c) k^2n d) $k^2n + kn^2$

الوحدةُ 2

مبدأ العد والتباديل والتوافيق
Counting Principle, Permutations and Combinations

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُسهِم العَدُّ بدور رئيس في كثير من العلوم، مثل: الإحصاء، والاحتمال، والحاسوب، ويتطلَّب أحيانًا استعمال طرائق مُتطوِّرة لإجرائه، ويُعَدُّ مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق إحدى أهم الطرائق التي تُسهِّل عملية العَدِّ عند دراسة الاحتمال. سأتعرَّف في هذه الوحدة بعض استعمالات طرائق العَدِّ في المواقف الحياتية، مثل تنظيم مواعيد إقلاع الطائرات وهبوطها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال المُخطَّط الشجري للعَدِّ.
- ✓ استعمال الجدول للعَدِّ.
- ✓ استعمال القوائم المنظمة للعَدِّ.
- ✓ حَلَّ مسائل حياتية عن طرائق العَدِّ.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ماهية مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حَلِّ المسائل.
- ماهية مضروب العدد، واستعماله في حَلِّ المسائل.
- ماهية التباديل، واستعمالها في حَلِّ المسائل.
- ماهية التوافيق، واستعمالها في حَلِّ المسائل.

الدرس 1

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

فكرةُ الدرسِ تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حَلِّ المسائل.

المصطلحاتُ مبدأ العَدِّ الأساسي.

مسألةُ اليومِ بكم طريقة يُمكِن لرولا اختيار قطعة شــوكولاتة من بين 3 أنواع، وقطعة بسكويت من بين 6 أنواع؟

يُمكِن بســهولة تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب عناصــر مجموعة صغيرة. فمثلًا، توجد طريقتان فقــط لترتيب عناصر المجموعة $\{a , b\}$، هما: ab و ba، ولكن إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق الممكنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا.

تعلَّمْتُ ســابقًا بعض طرائــق تحديد عناصر فضــاء العيِّنة لتجربة عشــوائية، مثل: المُخطَّط الشــجري، والجداول، والقوائم المنظمة؛ لذا يُمكِن الاســتفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة ما.

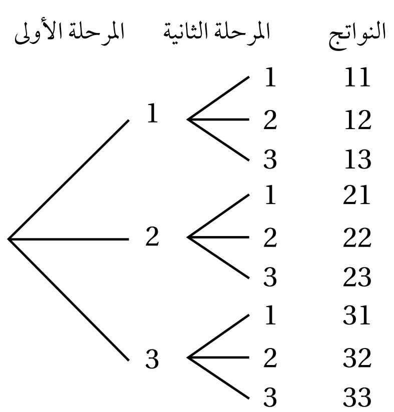
مثال 1

أجد باســتعمال كل من الطرق الآتية عــدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم ســري من منزلتين باستعمال الأرقام: 1 , 2 , 3، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

1 المُخطَّط الشجري:

أرسم شكل شجرة مُكوَّنة من مرحلتين؛ الأولى تُمثِّل خيارات رقم منزلة العشرات، والثانية تُمثِّل خيارات رقم منزلة الآحاد كما في الشكل المجاور.

بعد عَدِّ النواتج المحصورة، أُلاحِظ أنَّه يُمكِن تكوين رقم سري من منزلتين بـ 9 طرائق مختلفة.



أتعلَّم

تُمثِّــل الأرقام الســرية التســعة الناتجة عناصر فضــاء العيِّنــة لتجربــة تكوين رقم ذي منزلتين من الأرقام: 3,2,1

أفكِّر

هل يمكن استعمال الجدول في المسائل التي تحتوي اكثر من مرحلتين ؟

2 الجدول:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بتنظيم الأرقام السرية التي يُمكِن تكوينها باستعمال جدول على النحو الآتي:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

3 القائمة المنظمة:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بكتابة قائمة منظمة، يقترن فيها كل رقم من منزلة العشرات بجميع الأرقام المُمكِنة لمنزلة الآحاد في الرقم السري، على النحو الآتي:

13	12	11
23	22	21
33	32	31

أتحقق من فهمي

أجد باستعمال كل من الطرق الاتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام 3, 5, 7, 9، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

a) المُخطَّط الشجري.

b) الجدول.

c) القائمة المنظمة.

في كثير من الحالات يكون الاهتمام بمعرفة عدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون الاهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العِدِّ الأساسي** (Principle Counting Fundamental) لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من مراحلها ببعضها.

مبدأ العَدِّ الأساسي

مفهومٌ أساسيٌّ

للتجربة العشــوائية التي يُمكِن تنفيذها في n مرحلــة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة في المرحلــة الأولى هو K_1 ، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الثانية هو K_2 ، ... ، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الأخيرة هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق التي يُمكِن تنفيذ التجربة بها هو $K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$

أتعلَّم

يُطلَق أيضًا علـى مبدأ العَدِّ الأساسي مصطلح قاعدة الضرب.

مثال 2 : من الحياة

يحتوي جدول الحصص الأســبوعي لمنال على 7 مواد دراسية يوم الثلاثاء. أجد عدد التراتيب المُمكِنة لأول 3 حصص، علمًا بأنَّه لا توجد حصص مُكرَّرة لأيِّ مادة دراسية في هذا اليوم.

يوجد للحصة (المرحلة) الأولى 7 خيارات (مواد دراسـية)، في حيـن يوجد للحصة الثانية 6 خيارات؛ لأنَّ منال لن تعيد دراسة مادة الحصة الاولى، أمّا الحصة الثالثة فلها 5 خيارات.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثالثة		عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثانية		عدد طرائق اختيار مادة الحصة الأولى
210 =	5	×	6	×	7

إذن، توجد 210 طرائق لترتيب المواد الدراســية في الحصص الثلاث الأولى من جدول منال ليوم الثلاثاء، وألاحظ أنه يصعب كتابة هذه الطرائق لأنَّ عددها كبير.

أتحقق من فهمي

طعــام: بكم طريقــة مختلفة يُمكِن لشــخص اختيار وجبــة غدائه المُكوَّنة مــن طبق رئيس واحد، وطبــق مقبلات واحد، وطبق حســاء واحد، من قائمة وجبة اليــوم التي يُقدِّمها أحد المطاعم.

يتأثَّر العدد الكلي للنواتج المُمكِنة للتجربة العشوائية بالشروط المُحدِّدة لكيفية تنفيذ مراحلها، مثل: السماح بتكرار اختيار العناصر أو عدم السماح بذلك، وتثبيت بعض العناصر في مواضع مُعيَّنة.

مثال 3

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين كلمة (ليس بالضرورة لها معنى) من 3 أحرف، مُستعمِلًا الأحرف: أ، ب، جـ، د، هـ:

1 **إذا سُمِح بتكرار الأحرف في الكلمة.**

أُلاحِظ أنَّه يُمكِن اختيار أيٍّ من الأحرف الخمسة في كل مرحلة.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
125 =	5	×	5	×	5

إذن، يُمكِن تكوين 125 كلمة.

2 **إذا لم يُسمَح بتكرار الأحرف في الكلمة.**

أُلاحِظ أنَّ الحرف المُستعمَل في الخيار الأول لا يجوز تكراره في الخيار الثاني، وكذلك الحرفان المستعملان في الخيارين الأول والثاني، لا يجوز استعمالهما في الخيار الثالث.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
60 =	3	×	4	×	5

إذن، يُمكِن تكوين 60 كلمة.

أفكِّر

لماذا نقص عدد الكلمات عند اضافة شرط عدم السماح بالتكرار؟

3 إذا كان الحرف الأول من هذه الكلمات هو (جـ)، ولا يُسمَح بتكرار الأحرف.

أُلاحِظ أنَّه توجد طريقة واحدة لاختيار الحرف الأول (جـ).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
12 =	3	×	4	×	1

إذن، يُمكِن تكوين 12 كلمة.

أتعلَّم

أكتب جميع الكلمات التي نتجت في الفرع الثالث من المثال 3

أتحقق من فهمي

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم مركبة مُكوَّن من 5 منازل، مُستعمِلًا الأرقام: 9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1:

a) إذا سُمِح بالتكرار.

b) إذا لم يُسمَح بالتكرار.

c) إذا سُمِح بالتكرار؛ شرط وضع الرقم 9 في أول منزلة من اليسار.

أتدرب وأحل المسائل

شراء: ترغب حنين في شراء هاتف محمول، فذهبت إلى أحد محالِّ بيع الهواتف، ووجدت فيه 4 أنواع مختلفة من الهواتف: H, I, S, N، لكل نوع منها ثلاثة ألوان: أحمر: R، وأسود: B، وأبيض: W.

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء حنين هاتفًا محمولًا باستعمال:

1 المُخطَّط الشجري. 2 الجدول. 3 القائمة المنظمة.

4 طعام: يُعِدُّ مطعمٌ البيتزا باستعمال نوعين من العجينة، و8 خلطات مختلفة. إذا كان لهذه البيتزا 3 حجوم، فكم عدد الخيارات المُمكِنة لشراء بيتزا واحدة منها؟

5 يشــترط موقع تعليمي في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدِم حسابًا محميًّا بكلمة مرور تحوي 4 أحرف إنجليزية دون الاهتمام لحجم الخط متبوعة بعدد مُكوَّن من رقم واحد. ما عدد كلمات المرور المختلفة التي يُمكِن إنشاؤها؟

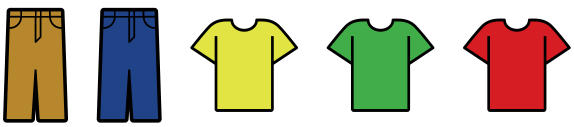
كــرات: يحتوي صندوق على كــرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة بيضاء. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لســحب كرتين على التوالي في الحالتين الآتيتين:

6 إذا سُمِح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

7 إذا لم يُسمَح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

8 مختبر: تريد شــيماء اختيار زميلتين لتكوين مجموعة ثلاثية تُنفِّذ تجربة في مختبر العلوم. بكم طريقة مختلفة يُمكِنها تكوين مجموعتها، علمًا بأنَّ عدد طالبات الصف 21 طالبة؟

9 لدى حاتم ثلاثة قمصان بالوان مختلفة وبنطلونين بلونين مختلفين. أجد عدد الطرائق الممكنه لاختيار حاتم قميص وبنطال؟



10 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

11 تحدٍّ: يســتطيع بشــير اســتعمال 480 طريقة مختلفة لاختيــار وجبة غدائه مــن بين المقبــلات، والطبق الرئيس، والحلويــات. إذا كان للمقبلات 6 خيارات، وللطبق الرئيس 10 خيارات، فمــا عدد الخيارات المُمكِنة للحلويات علمًا بأنه اختار طبقًا واحدًا من كل صنف؟

12 تبرير: كم عددًا من 4 منازل يقبل القسمة على 5، ويُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، اذا سمح بالتكرار مُبرِّرًا إجابتي؟

13 تحدٍّ: كم عددًا فرديًّا من 3 منازل يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام (0–9)، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار؟

14 أكتب: كيف يستفاد من مبدأ العَدِّ الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المختلفة لإجراء تجربة عشوائية مُتعدِّدة المراحل؟

الدرسُ
2

مضروب العدد
Factorial

فكرةُ الدرسِ تعرُّف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحاتُ مضروب العدد.

مسألةُ اليومِ شاركت داليا في معرض فني بـ 5 لوحات، خُصِّص لعرضها مســاحة على الحائط. بكم طريقة مختلفــة يُمكِنها ترتيب لوحاتها على الحائط في صفٍّ واحد بجانب بعضها؟

يُمكِن التعبير عن $3 \times 2 \times 1$ باستعمال الرمز $3!$ الذي يُقرَأ: **مضروب** (factorial) العدد ثلاثة.

أتعلَّم

بالتعريف، فإنَّ:

$0! = 1$

$1! = 1$

مفهومٌ أساسيٌّ — **مضروب العدد**

بالكلمـات: مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n.

بالرموز: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $6!$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 720$ الناتج

2 $(7-3)!$

$(7-3)! = 4!$ بإيجاد ناتج الطرح

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 24$ الناتج

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلًا، لإيجاد مضروب العدد 7، أضغط على الأزرار الآتية من اليسار إلى اليمين:

7 ! =

أفكِّر

هل $(7-3)! = 7! - 3!$

3 $\frac{8!}{5!}$

$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}^{1}}{\cancel{5!}}$ تعريف المضروب

$= 8 \times 7 \times 6$ باختصار !5 من البسط والمقام

$= 336$ الناتج

أتحقق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $7!$ b) $(4+1)!$ c) $4! + 1!$ d) $\frac{12!}{7!}$

أتعلَّم

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24$
$= 120$
بوجه عام، فإنَّ:
$n! = n(n-1)!$

يُمكن استـــعمال مضروب العدد لحَلِّ المسائل بدلًا من اســـتعمال مبدأ العَدِّ الأساسي الذي درسْتَه سابقًا.

مثال 2

تُخطِّط ماريا لزيارة بيت جدِّها، وبيت خالها، وبيت عمِّها أول أيام عيد الأضحى المبارك. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب مواعيد زيارتها؟

يُمكِن تحديد عدد هذه الطرائق باســـتعمال مضروب العدد 3؛ لأنَّ ماريا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد من البدائل من دون تكرار، فيكون عدد الطرائق مساويًا لمضروب العدد 3:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

أتحقق من فهمي

شـــارك 7 طلبة في ســـباق، وارتدى كلٌّ منهم قميصًـــا مُرقَّمًا من 1 إلى 7، أجـــد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب وصول الطلبة إلى خط النهاية.

يُمكن أيضًا اســـتعمال المضروب لإيجاد عدد طرائق ترتيب عناصر مجموعة؛ ســـواء أكانت بعض العناصر مُكرَّرة أم لا.

مثال 3

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

1 **JORDAN**

أُلاحِظ أنَّ كلمة (JORDAN) تحوي 6 أحرف مختلفة غير مُكرَّرة، وأنَّ عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب هذه الأحرف يساوي مضروب العدد 6:

$$6! = 720$$

إذن، يوجد 720 كلمة يُمكِن تكوينها من تراتيب مختلفة للأحرف الستة.

2 **MOHAMMAD**

أُلاحِظ أنَّ كلمة (MOHAMMAD) تحوي 8 أحرف، تَكرَّر منها الأحرف الآتية:

$$M_1 , M_2 , M_3 , A_1, A_2$$

لا يُؤثِّر في الحَلِّ ترتيب الأحرف المُكرَّرة المتشابهة، فمثلا لا فرق بين $A_1 A_2$، و$A_2 A_1$؛ لذا تستثنى طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة عند عَدِّ الطرائق الكلية المُمكِنة لتراتيب أحرف الكلمة، وذلك بالقسمة على عدد طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة فيها.

$8! = 40320$ عدد طرائق ترتيب 8 أحرف مختلفة

$3! = 6$ عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر M

$2! = 2$ عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر A

$$\frac{8!}{(3!)\ (2!)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3!)\ (2!)}$$ باختصار عدد طرائق ترتيب الحرفين المُكرَّرين

$$= 3360$$

إذن، توجد 3360 طريقة لترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD).

أتحقق من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

a) PETRA **b)** AMMAN

أتذكر

- عدد حروف اللغة العربية 28
- عدد حروف اللغة الإنجليزية 26

البترا مدينة نحتها الأنباط بالصخر منذ أكثر من 2000 عام، ولا يُمكِن للزائر دخولها إلّا بالسير في السيق؛ وهو شق طبيعي بين الجبال الصخرية، طوله 2.5 km تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

1 $5!$

2 $(18-13)!$

3 $(4+3)!$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{17!}{11!}$

5 $\frac{10!}{4! \times 6!}$

6 $\frac{13!}{(6!)(13-6)!}$

7 **سياحة:** يريد سائح زيارة المعالم الأثرية الآتية:
جرش، أم قيس، البحر الميت، المُدرَّج الروماني، قلعة عجلون، بكم طريقة يمكنه ترتيب زيارة هذه المواقع الاثرية.

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8 PALESTINE

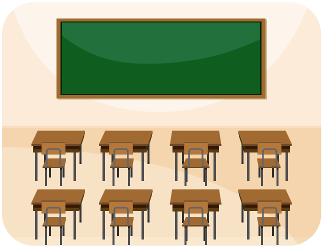
9 AJLOUN

10 **زراعة:** يريد مروان زراعة 4 أشــجار لوزيات من أنــواع مختلفة في صفٍّ واحد بحديقة منزلــه. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لتنظيم زراعة هذه الأشجار.

11 **مدرسة:** تريد منال حَلَّ الواجبات المدرسية للمواد الآتية:
الرياضيات، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الثقافة العامة، الجغرافيا.
بكم طريقة يُمكِنها ترتيب حَلِّ هذه الواجبات؟

12 **مطالعة:** تريد داليا قراءة 5 كتب لديها. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب قراءة هذه الكتب؟

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: يوجد في صفٍّ 8 طالبات، يتعيَّن عليهنَّ الجلوس في صفين كما في الشكل المجاور:

13 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس هؤلاء الطالبات.

14 إذا تعيَّن على نور وشمس الجلوس على مقعد إحدى الزوايا الأربع، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؟

15 إذا قسَّــمت المُعلِّمة طالبات الصف إلى مجموعتين، في كلٍّ منهما 4 طالبات، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؛ شــرط أنْ تكون المقاعد الأربعة في الصف الأول للمجموعة الأولى، والمقاعد الأربعة في الصف الثاني للمجموعة الثانية؟

الدرس 3

التباديل
Permutations

فكرةُ الدرس تعرُّف التباديل، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحاتُ التباديل.

مسألةُ اليومِ بكم طريقة يُمكِن لثلاث أخوات من بين خمسٍ الوقوف بجانب بعضهنَّ لتلتقط سميرة صورة لهنَّ؟

التباديل (permutations) هي عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

عدد التباديل الحرف A: (1)	A	توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار الحرف (A)
عدد التباديل الحرفان A,B: $(2 \times 1 = 2)$	$AB \quad BA$	يُمكِن اختيار الحرف (B) قبل الحرف (A)، أو بعده
عدد التباديل الحروف A,B,C: $(3 \times 2 \times 1 = 6)$	$ABC \quad ACB \quad CAB \quad BAC \quad BCA \quad CBA$	يُمكِن اختيار الحرف (C) أولًا، أو ثانيًا، أو ثالثًا

قد لا يَلزم أحيانًا إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلًا، إذا أردْتُ تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار لجنة مكونه من 3 أشخاص (رئيس ومساعد وعضو)، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص، فإنَّه يُمكِنني استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي كما يأتي:

$$\underbrace{210}_{} = \underbrace{5}_{\text{عدد طرائق اختيار عضو اللجنة}} \times \underbrace{6}_{\text{عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة}} \times \underbrace{7}_{\text{عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة}}$$

إذن، يُمكِنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص باستعمال 210 طرائق مراعياً مهمة كل شخص.

يُمكِنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص السبعة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي:

$$\frac{\text{طرائق اختيار سبعة أشخاص}}{\text{طرائق اختيار أربعة أشخاص}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

يُمكِن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون:

التباديل

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: r ,n: عددان صحيحان موجبان و $r \leq n$

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

رموز رياضية

يمكن استعمال اي من الرموز الاتية للتعبير عن تباديل n من العناصر أخذ منها r كل مرة

${}_nP_r$, $P(n,r)$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{{}_{10}P_4}$

$${}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!}$$ تعريف التباديل

$$= \frac{(10)\,(9)\,(8)\,(7)\,(\cancel{6!})^{1}}{\cancel{6!}}$$ باختصار !6 من البسط والمقام

$$= 5040$$ بالضرب

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ:

${}_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$؛

أي إنَّ الضرب يبدأ من 10 نزولًا 4 مرّات.

بوجه عام، فإنَّ:

${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

2 $\dfrac{{}_{12}P_7}{{}_{9}P_4}$

$$\frac{{}_{12}P_7}{{}_{9}P_4} = \frac{12!}{(12-7)!} \times \frac{(9-4)!}{9!}$$ تعريف التباديل

$$= \frac{12!}{5!} \times \frac{5!}{9!}$$ بإيجاد ناتج الطرح

$$= \frac{(12)(11)(10)(\cancel{9!})^{1}}{\cancel{9!}}$$ باختصار !9 من البسط والمقام

$$= 1320$$ الناتج

أتعلَّم

$nPn = n!$

$nP1 = n$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) ${}_{5}P_{5}$

b) $\dfrac{{}_{13}P_3}{{}_{13}P_1}$

يُمكِنني إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهمًّا، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رف.

يُعَدُّ استعمال التباديل طريقة سهلة، مقارنةً بالطرائق التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مبدأ العَدِّ الأساسي، والمُخطَّط الشجري، والجدول، والقوائم المنظمة.

مثال 2

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار طالبين عشوائيًّا من الطلاب: محمود، وعلي، وحسن، ومعتز، وتعيين الأول مسؤولًا عن الإذاعة المدرسية، وتعيين الثاني رئيسًا لمجلس الطلبة.

يُمكِنني استعمال الجدول لحصر الخيارات المُمكِنة جميعها على النحو الآتي:

مسؤول الإذاعة المدرسية / رئيس المجلس	معتز	حسن	علي	محمود
محمود	(محمود، معتز)	(محمود، حسن)	(محمود، علي)	
علي	(علي، معتز)	(علي، حسن)		(علي، محمود)
حسن	(حسن، معتز)		(حسن، علي)	(حسن، محمود)
معتز		(معتز، حسن)	(معتز، علي)	(معتز، محمود)

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فالاختيار (علي، حسن) يعني أنَّ عليًّا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ حسنًا هو رئيس مجلس الطلبة. أمّا الاختيار (حسن، علي) فيعني أنَّ حسنًا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ عليًّا هو رئيس مجلس الطلبة.

بناءً على الجدول، يُمكِنني عَدُّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار، وهو 12

يُمكِنني أيضًا استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار، حيث:

عدد طرائق اختيار رئيس مجلس الطلبة   عدد طرائق اختيار مسؤول الإذاعة المدرسية

$$12 = 3 \times 4$$

أو استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار:

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مراعيًا الترتيب

قانون التباديل

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

الناتج

$$=12$$

أتحقق من فهمي

بكم طريقة يُمكِن أنْ تختار سلمى وروان ورزان 3 عيِّنات عشوائيًّا من بين 5 عيِّنات مختلفة متوافرة في مختبر العلوم لفحصها بالمجهر الضوئي؟

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلًا، لإيجاد ناتج ${}_4P_2$، أضغط على الأزرار الآتية:

4 nPr 2 =

أفكِّر

هل الترتيب مهم في مسألة أتحقق من فهمي المجاورة؟ لماذا؟

يُمكِن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلَّب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًّا من بين مجموعة عناصر؛ لأنَّ ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال 3

أجـد عدد الكلمات الثلاثية (ليس بالضرورة لها معنى) التـي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة العربية، بحيث لا تحوي أيُّ كلمةٍ أحرفًا مُكرَّرة.

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأنَّ التكرار غير مسموح به؛ فإنَّ ترتيب الحروف مهم.

إذن، يُمكِن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 3 أحرف من بين 28 حرفًا:

$$ {}_{28}P_3 = \frac{28!}{(28-3)!} $$ قانون التباديل

$$ =19656 $$ الناتج باستعمال الآلة الحاسبة

أي يُمكِن تكوين 19656 كلمة تتألَّف من ثلاثة أحرف.

معظم مفردات اللغة العربية أصلها ثلاثي، فرباعي، فخماسي.

أتحقق من فهمي

أجد عدد الكلمات الخماسية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة الإنجليزية، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار.

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

1) ${}_{9}P_5$

2) ${}_{7}P_0$

3) ${}_{99}P_2$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4) $\frac{{}_{10}P_3}{{}_{8}P_2}$

5) $({}_{13}P_9)-({}_{7}P_4)$

6) $({}_{7}P_3)\times({}_{4}P_3)$

7) **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس شخصين على 5 مقاعد موضوعة في صفٍّ واحد.

8 **محاضرات:** اعتمدت فيحاء جدولها الدراسي للفصل الأول في الجامعة، بحيث اختارت 4 مواد من بين 12 مادة مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب فيحاء مواد جدولها الدراسي.

9 **سياحة:** أعلنت شركة سياحية عن وجود رحلات إلى 8 مدن مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار شخص رحلتين إلى مدينتين مختلفتين بحيث يسافر للأولى بهدف التجارة وللثانية بهدف الاستجمام.

10 **رياضة:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف 5 طلبة بجانب بعضهم قبيل انطلاقهم في مسابقة الجري.

11 **ترقيم:** أجد عدد المنازل التي يُمكِن ترقيمها باستعمال رموز تحوي 3 أرقام من 0 إلى 9؛ شرط ألّا يحتوي رمز أيِّ منزل على رقم مُكرَّر.

12 **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس 6 طلاب على 6 مقاعد رُتِّبت في صفٍّ واحد.

13 **كتب:** لدى طلال 4 كتب رياضيات (M) و 3 كتب لغة انجليزية (E). أجد عدد الطرق الممكنة لترتيب الكتب السبعة على الشكل:

$$M\ E\ M\ E\ M\ E\ M$$

14 **مركبات:** تقف سبعة سيارات في دورها امام مركز متخصص لصيانة السيارات من ضمنهما سيارتي فؤاد و غيث . أجد عدد الطرق الممكنة لاصطفاف سيارتي فؤاد وغيث في الدور.

مهارات التفكير العليا

15 **تحدٍّ:** أجد قيمة r إذا كان $_{10}P_r = 5040$

16 **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $_nP_n = n!$

الدرسُ 4

التوافيق

Combinations

فكرةُ الدرسِ تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحاتُ التوافيق.

مسألةُ اليومِ نظَّمــت الملكية الأردنية 12 رحلة إلــى بعض الدول العربية في يوم واحد من وإلى مطار الملكة علياء. بكم طريقة يُمكِن اختيار 3 رحلات منها عشوائيًا دون اهتمام بترتيب اقلاعها؟

قد لا يكون مهمًّا ترتيب العناصر المختارة عشوائيًّا في بعض المواقف. فمثلًا، اختيار شخصين a و b لتشــكيل لجنة من مجموعة فيها n من الأشــخاص، لا يتطلَّــب اهتمامًا بالترتيب؛ لأنَّ الترتيب ab هو نفسه الترتيب ba ضمن اللجنة.

لكي أجد عدد طرائق الاختيار المُمكِنة في هذه الحالة؛ أَقسِم $_nP_2$ على $2!$، مُهمِلًا التكرار، في ما يُعرَف **بالتوافيق** (combinations).

مفهومٌ أساسيٌّ **التوافيق**

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

حيث: n, r: عددان صحيحان موجبان و $r \leq n$

فمثلاً، عدد توافيق 7 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$$_7C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

أتعلَّم

فــي **التباديــل** يكــون الترتيــب abc مختلفًــا عــن الترتيــب bac، وعــن الترتيب cba. أمّا فــي **التوافيق** فــإنَّ هذه التراتيب جميعها تكون متكافئة.

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا، لإيجاد ناتج $_5C_3$، أضغط على الأزرار الآتية:

5 nCr 3 =

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\mathbf{(_{10}C_7) - (_8C_3)}$

$$(_{10}C_7) - (_8C_3) = \frac{10!}{7!(10-7)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!}$$ تعريف التوافيق

$$= 120 - 56$$ بحساب التوافيق

$$= 64$$ الناتج

2 $\mathbf{(_9C_6) \times (_6C_2)}$

$$(_9C_6) \times (_6C_2) = \frac{9!}{6!(9-6)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!}$$ تعريف التوافيق

$$= (84)(15)$$ بحساب التوافيق

$$= 1260$$ الناتج

أتعلَّم

$nCo = 1$

$nC1 = n$

$nCn = 1$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(_{13}C_5)\times(_8C_8)$

b) $(_7C_0)\times(_7C_7)$

إذا لم يكن مهمًّا ترتيب العناصر المختارة في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق التي تُختار بها تلك العناصر.

مثال 2

أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار طالبينِ من بين 4 طلاب مُترشِّحين (علاء، فريد، يونس، ربيع) للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثِّل المدرسة.

يُمكِنني استعمال القائمة المنظمة لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبينِ على النحو الآتي:

(علاء، فريد) (علاء، يونس) (علاء، ربيع) (فريد، يونس) (فريد، ربيع) (يونس، ربيع).

إذن، توجد 6 طرائق لاختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة.

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، بحيث لا يوجد فرق في الاختيار بين (علاء، فريد) و(فريد، علاء)؛ أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة على النحو الآتي:

تعريف التوافيق $${}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

الناتج $$= 6$$

أتحقق من فهمي

أجد عدد طرائق اختيار لجنةٍ تُنظِّم عملية دخول طالبات مدرسة، تضم 3 طالبات من بين 10 طالبات تطوَّعْنَ لأداء هذه المهمة.

يُمكِنني استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتباديل، والتوافيق في المواقف التي تتطلَّب إيجاد عدد العناصر المُمكِنة لفضاء العيِّنة لتجربة عشوائية، أو إيجاد عدد العناصر التي يتكوَّن منها حادث مُعيَّن في تلك التجربة، حيث يكون عدد العناصر هو عدد طرائق الاختيار ضمن شروط مُحدَّدة.

مثال 3

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء مرقمة من (5 - 1) و4 كرات زرقاء مرقمة من (4 - 1) جميعها مُتماثِلة:

1 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب 3 كرات حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبت الكرات دفعةً واحدة.

أفترض أنَّ $n(A)$ عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب 3 كرات حمراء. ولمّا كان العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5، وترتيب سحب الكرات ليس مهمًّا، فإنَّ:

عدد طرائق سحب 3 عناصر من بين 5 عناصر $$n(A) = {}_5C_3$$

بالتعويض في قانون التوافيق $$= \frac{5!}{3! \times (5-3)!}$$

بايجاد ناتج الطرح $$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!}$$

الناتج $$=10$$

أتعلَّم

اذا رمزنا للكرة الحمراء بالحرف R فإن النواتج الممكنة لتجربة سحب 3 كرات حمراء هي:

$(R1,R2,R3),(R1,R2,R4)$

$(R1,R2,R5),(R1,R3,R4)$

$(R1,R3,R5),(R1,R4,R5)$

$(R2,R3,R4),(R2,R3,R5)$

$(R2,R4,R5),(R3,R4,R5)$

2 **أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.**

أفترض أنَّ $n(B)$ عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب كرتين حمراوين وكرة زرقاء.

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة. فمثلًا، سحب الكرات (حمراء 1، حمراء 2، زرقاء 3) يختلف عن سحب الكرات (حمراء 1، زرقاء 3، حمراء 2) و (زرقاء 3، حمراء 1، حمراء 2)، (حمراء 2، حمراء 1، زرقاء3)، (حمراء2،زرقاء3،حمراء1)، (زرقاء 3، حمراء 2، حمراء 1). ولمّا كان العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5، والعدد الكلي للكرات الزرقاء في الصندوق 4، فإنَّ:

$n(B) = {}_5P_2 \times {}_4P_1$ اختيار عنصرين من بين 5 عناصر واختيار عنصر واحد من بين 4 عناصر

$= \dfrac{5!}{(5-2)!} \times \dfrac{4!}{(4-1)!}$ بالتعويض في قانون التباديل

$= 20 \times 4$ بالتبسيط

$= 80$ الناتج

أتعلَّم

أستعمل مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء، وذلك بضرب ${}_5P_2$ في ${}_4P_1$

أتحقق من فهمي

مُعتمِدًا المثال 3، أجد ما يأتي:

a) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبتا معًا.

b) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي دون استعمال الالة الحاسبة:

1) ${}_{10}C_7$

2) ${}_9C_0$

3) ${}_7C_1 + {}_6C_3$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

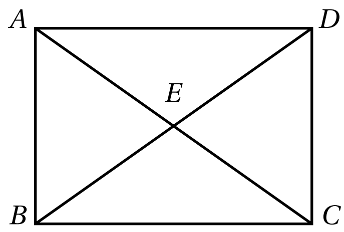
4) $({}_{12}C_5)\times({}_5C_3)$

5) $\dfrac{{}_{10}C_6}{{}_8C_5}$

6) $\dfrac{{}_9C_5}{({}_8C_5)\times({}_3C_2)}$

7 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار نوعي فاكهة من 7 أنواع مختلفة متوافرة في محل لبيع الفواكه.

8 لـدى قيس 8 كتب مختلفة، أراد إهداء 3 كتب منها إلى مكتبة المدرسـة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الكتب المهداة.



9 هندسة: أجد عدد المثلثات التي يمكن تكوينها من أضلاع الشكل المجاور.

رياضة: أراد مُعلِّم التربية الرياضية اختيار طالبينِ من بين 15 طالبًا للمشاركة في المباريات المدرسية:

10 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبينِ.

11 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبينِ للمشـاركة في المباريات، علمًا بأنَّ الأول سيشارك في مباراة كرة القدم، والثاني سيشارك في مباراة كرة السلَّة.

12 هدايا: أرادت إيمان شراء باقة ورد لأمها من أحد محالِّ بيع الورد. بكم طريقة يُمكِن لإيمان شراء باقة فيها 5 وردات من بين 9 وردات ألوانها مختلفة؟

13 أجد عدد الطرائق المُمكِنة التي يريد بها سمير شراء 4 أقلام من بين 10 أقلام مختلفة.

مهارات التفكير العليا

14 أكتشـف الخطأ: وجد كلٌّ من سـعيد وهمام عدد الطرائق المُمكِنـة لاختيار 3 طلبة في الصف مـن بين 11 طالبًا للمشاركة في مشروع تصميم مُخطَّط هندسي لمدرستهم. أيُّهما إجابته صحيحة؟

سعيد	همام
${}_{11}C_3$	${}_{11}P_3$

15 تبرير: هل يُمكِن أنْ يكون ${}_nP_r = {}_nC_r$، حيث n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$؟ أُبرِّر إجابتي.

16 تحد: اذا كان ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$ فاجد صيغة عامه لهذه العلاقة.

أَضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) ناتج $_7C_6$ هو:

a) 1 b) 6

c) 7 d) 42

2) ناتج $_9P_1$ هو:

a) 1 b) 9

c) 18 d) 27

3) ناتج !4 هو:

a) 1 b) 4

c) $_4C_4$ d) $_4P_4$

4) ناتج $_nC_n$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1 b) n

c) $2n$ d) n^2

5) ناتج $_nP_1$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1 b) n

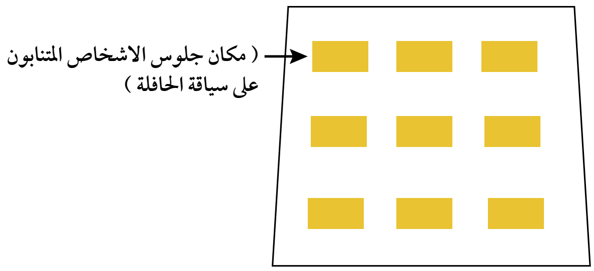
c) $2n$ d) n^2

6) **زراعة:** في محل أشتال 6 ألوان مختلفة من الورد الجوري، و4 ألوان مختلفة من ورد القرنفل. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء شتلة واحدة من الورد الجوري، وشتلة واحدة من ورد القرنفل.

7) **بناء:** في محل 25 نوعًا مختلفًا من بلاط الأرضيات، و36 نوعًا من بلاط الجدران. بكم طريقة يُمكِن لمصطفى اختيار بلاط الأرضيات والجدران لمطبخ منزله؟

8) تُستعمَل في جداول رحلات الطيران 3 أحرف من اسم المدينة. فمثلًا، يُكتَب اسم (AMMAN) في الجدول بالرمز AMM. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين رموز بهذه الطريقة باستعمال حروف اللغة الإنجليزية.

سافر 9 أصدقاء، منهم وليد وخالد وسفيان، في حافلة صغيرة تحوي 9 مقاعد مُوزَّعة على 3 صفوف كما في الشكل المجاور:



9) بكم طريقة يُمكِن أنْ يجلس الأصدقاء في الحافلة إذا تعيَّن على وليد أو خالد أو سفيان سياقتها؟

10) بكم طريقة يُمكِن أنْ يجلس الأصدقاء في الحافلة إذا تعيَّن على وليد سياقتها، وجلس خالد في الصف الثاني من المقاعد، وجلس سفيان في الصف الثالث منها؟

11 **متاحف:** يراد توزيـــع 15 بطاقة دخول لمتحف الاردن بشكل عشوائي لصف يحوي 20 طالباً بحيث لا ياخذ الطالـــب اكثر من تذكـــره . أجد عدد الطـــرق الممكنة لذلك.

12 **مدرســـة:** يراد اختيار طالبين من المرحله الاساسية من بين 5 طلاب و 4 طلاب مـــن المرحلة الثانوية من بين 6 طلاب للمشاركة بنشـــاط مدرسي. أجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الطلبة.

13 **قارب:** يريد ســـتة أصدقاء الذهاب فـــي رحلة بقارب يحيوي ســـتة مقاعد في صف واحد. أجد عدد الطرق التي يمكن للأصدقاء الجلوس في القارب .

14 **تمريض:** يـــراد اختيـــار فريق تمريضـــي يتكون من 3 ممرضين مـــن بين 7 ممرضين ذكور و 5 ممرضات من بين 10 ممرضات. أجد عـــدد الطرق الممكنة لاختيار الممرضين الثمانية.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

15 رُسِـــمت 8 نقاط على دائرة. عدد المثلثات التي يُمكِن تكوينهـــا من النقاط، بحيث تُمثِّـــل كل 3 نقاط رؤوس المثلث، هو:

a) 40320 b) 336

c) 56 d) 8

16 يـــراد تكوين رقم مـــن 3 منـــازل باســـتعمال الأرقام (0 – 9). عـــدد الأرقام التي يُمكِـــن تكوينها من دون تكرار هو:

a) 720 b) 120

c) 3628800 d) 648

17 لقـــوس قزح 7 ألوان. عدد الطرائق التي يُمكِن أنْ يظهر فيها ترتيب ألوان قوس قزح، بافتراض أنَّه يُمكِن إعادة ترتيب الألوان، هو:

a) 1 b) 7 c) 49 d) 5040

رقَّمت جمانـــة 9 بطاقات مُتماثِلة بالأرقام من 1 إلى 9، بحيث حملت كل بطاقة رقمًا واحدًا:

18 بكـــم طريقة يُمكِـــن لجمانة تكوين عـــدد من 5 منازل باستعمال هذه البطاقات؟

19 بكم طريقـــة يُمكِن لجمانة تكوين عـــدد من 3 منازل، ويقبل القسمة على 5، باستعمال هذه البطاقات؟

الوحدةُ 3

الاحتمالات
Probability

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

صحيح أنَّ الحوادث التي تقع مستقبلًا هي من علم الغيب، ولكنَّ علماء الإحصاء والاحتمال وضعوا نظريات يُمكِن تطبيقها لتقدير احتمالية وقوع بعض الحوادث ضمن مواقف حياتية. فمثلًا، شركات التأمين تعتمد الاحتمالات المحسوبة من طلبات التعويض عن الأضرار السابقة أساسًا للتنبُّؤ باستحقاقات التعويض المستقبلية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ المبدأ الأساسي للعَدِّ لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية من مراحل عِدَّة.
- ✓ التباديل لإيجاد عدد الطرائق عندما يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ التوافيق لإيجاد عدد الطرائق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لنمذجة مواقف حياتية، وحل مسائل عملية.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات.
- تعرُّف المتغير العشوائي لنواتج تجربة عشوائية، وتحديد قيم هذا المتغير.
- حساب الاحتمال لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

الدرس 1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فكرةُ الدرسِ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

المصطلحاتُ

مسألةُ اليومِ أراد خالد التقاط صـــورة لعائلته، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام الكاميرا. ما احتمال وقوف الابن والابنة بين الأبوين؟

تعلَّمْتُ في الوحدة السابقة كيفية إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ، ويُمكِنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث معين ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

رُتِّبت البطاقات ادناه عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الرقمان 3 و 4 متجاورين؟

3	1	5	4	2

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث A يعني ظهور الرقمين 3 و 4 متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω؛ أي عدد طرائق ترتيب 5 عناصر (بطاقات) في صف واحد.

$n(\Omega) = 5!$ مبدأ العد الأساسي

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف مضروب العدد

$= 120$ بالتبسيط

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A. أُظهِر الرقمين 3 و 4 متجاورين في إحدى صورتين: 43، أو 34، وأُعامِل كلًّا منهما كأنَّها عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 4 عناصر.

$n(A) = 2 \times 4!$ مبدأ العد الأساسي

$= 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف مضروب العدد

$= 48$ بالتبسيط

أتذكَّر

الرمـــز Ω يُقـــرأ أوميغا ويدل علـــى فضاء العينة للتجربة العشوائية.

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال
$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120}$$

بالتبسيط
$$= \frac{2}{5}$$

إذن، احتمال ظهور الرقمين 3 و4 متجاورين هو $\frac{2}{5}$

أتعلَّم

يُمكِن تسهيل الاختصار على النحو الآتي:

$$p(A) = \frac{2 \times \cancel{4!}}{5 \times \cancel{4!}} = \frac{2}{5}$$

أتحقق من فهمي

كُتِبت أحرف كلمة (تباديـل) على 6 بطاقات مُتماثِلة، ثم رُتِّبت البطاقات عشـوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الحرفان (ت) و(ي) متجاورين؟

عندما **يكون الترتيب مهمًّا** في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشـوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال **التباديل** لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 2

يتكـوَّن مجلس الإدارة فـي إحدى الشـركات من 7 أعضاء، بينهم سـارة وحمزة. ما احتمال اختيار سـارة رئيسًـا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لذا فإنَّ:

عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيبهما مهم) من بين 7 عناصر
$$n(\Omega) = {}_7P_2$$

بالتعويض في قانون التباديل
$$= \frac{7!}{(7-2)!}$$

مضروب العدد
$$= \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}$$

بالتبسيط
$$= 42$$

أتذكَّر

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان، $0 \le r \le n$.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة تكون فيها سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{42}$$

إذن، احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس هو $\frac{1}{42}$

أتحقق من فهمي

فؤاد ومصطفى اثنان من 10 طلبة مشاركين في مسابقة الحساب الذهني. إذا كانت لجنة التحكيم تستدعي عشوائيًّا الطلبة المشاركين الواحد تلو الآخر لخوض المسابقة، فما احتمال استدعاء فؤاد أولًا ومصطفى ثانيًا؟

عندما لا يكون الترتيب مهمًّا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال التوافيق لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

أتعلَّم

أُلاحِظ الفرق بين الموقف الذي يكون فيه الترتيب مهمًّا والموقف الذي لا يكون فيه الترتيب مهمًّا، بمقارنة المثال 2 بالمثال 3

مثال 3

يوجد في قسم التطوير بإحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم سعاد وحامد. ما احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور ندوة عن المنتجات المعالجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب بين سعاد وحامد غير مهم في هذه الحالة؛ لذا أستعمل التوافيق:

أتذكَّر

$$_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان، $0 \le r \le n$.

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 7 عناصر

$$n(\Omega) = {}_7C_2$$

بالتعويض في قانون التوافيق

$$= \frac{7!}{2! \times (7-2)!}$$

مضروب العدد

$$= \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{2 \times \cancel{5!}}$$

بالتبسيط

$$= 21$$

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة لاختيار سعاد وحامد لحضور الندوة؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

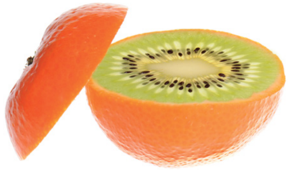
بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{21}$$

إذن، احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة هو $\frac{1}{21}$

أتحقق من فهمي

صندوق فيه 16 كرة مُتماثِلة، كلٌّ منها يحمل رقمًا من بين الأعداد 0 إلى 15، إذا اختيرت ثلاث كرات عشوائيًّا دفعة واحدة، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المختارة أعدادًا زوجية؟



النباتات المعالجة وراثيًّا هي نباتات غُيِّرت خصائصها الوراثية عن طريق نقل الجينات من صنف إلى آخر؛ بُغْيَةَ زيادة الإنتاج، أو إنتاج محاصيل غريبة، وقد أثبتت كثير من الأبحاث خطورة ذلك على صحة الإنسان.

تتطلّب بعض المواقف اختيار r_1 من بين n_1 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة أولى، و r_2 من بين n_2 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة ثانية، وتُمثِّل $n_1 + n_2$ عدد العناصر الكلية، ويُمكِن أن يتم اختيار r_1 أو r_2 مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة الترتيب (توافيق).

مثال 4

شارك 14 طالبًا و16 طالبةً من إحدى المديريات في مسابقة شعرية، اختير منهم 5 طلبة عشوائيًّا لتمثيل لجنة تنظيمية. أجد كلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمال اختيار 3 طلاب وطالبتين.**

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار لجنة من 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب في هذه الحالة غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق لحساب عدد طرائق اختيار 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبةً:

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 30 عنصرًا

$$n(\Omega) = {}_{30}C_5$$

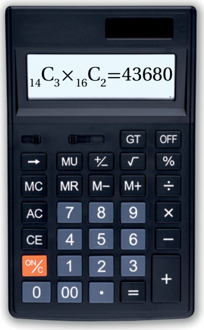
باستعمال الآلة الحاسبة

$$= 142506$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

أجد عــدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًا مضروبًا في عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً.

الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العَدِّ، فإنَّ:



$$n(A) = {}_{14}C_3 \times {}_{16}C_2$$ مبدأ العد الأساسي

$$= 43680$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(\text{A}) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)} = \frac{43680}{142506}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.31$$ بالتبسيط

2 **احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الطلاب.**

الخطوة 1: أفترض أنَّ B يعني اختيــار رئيس اللجنة ونائبه من الطالبــات، واختيار الأعضاء الثلاثة الآخرين من الطلاب.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 من بين 30؛ لذا فإنَّ:

$$n(\Omega) = {}_{30}C_5$$ عدد طرائق اختيار 5 من بين 30

$$= 142506$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث B.

أجد عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً (الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لأنَّ إحدى الطالبتين رئيس، والأُخرى نائب للرئيس) مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًــا (الترتيــب غير مهم في هذه الحالــة؛ لأنَّ جميع الطلاب أعضــاء في اللجنة):

$$n(B) = {}_{16}P_2 \times {}_{14}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

رموز الرياضيات

الرمزان الآتيان متكافئان:

$P(n,r) \cong {}_nP_r$

$\binom{n}{r} \cong {}_nC_r$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 87360$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $p(\text{A}) = \dfrac{n(\text{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{87360}{142506}$

بالتبسيط ≈ 0.61

أتحقق من فهمي

عائلة تضم 6 أولاد و3 بنات، أرادت الأم اختيار 4 منهم لتحضير وجبة العشاء. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

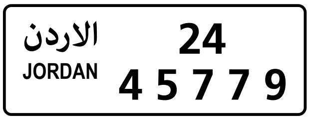
1 اختيار 2 من الأولاد و2 من البنات.

2 اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة.

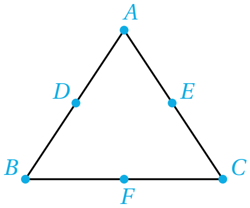
أتدرب وأحل المسائل

1 مسرح: أرادت منار وحليمة حضور مسرحية، فاختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف الأمامي الذي يحوي 12 مقعدًا. ما احتمال أنْ تجلسا على مقعدين متجاورين؟

2 لوحة مركبة: تتألَّف لوحة المركبة في الأردن من رمز خاص بإدارة ترخيص المركبات، مُكوَّن من رقمين يُكتَبان أعلى اللوحة، ويُمثِّلان رمزًا مشتركًا لمركبات عِدَّة، ومن 5 أرقام من بين الأرقام 0 إلى 9 خاصة بكل مركبة. إذا اختيرت مركبة عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون رقمها 45779؟ (ارشاد: لا يجوز ان تكون خانات اللوحه كلها اصفار).



3 هندسة: في الشكل المجاور، إذا اختيرت ثلاث نقاط عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟



4. علبة أقلام فيها 6 أقلام حبر أزرق، و4 أقلام حبر أحمر. إذا اختيرت من العلبة 4 أقلام الواحد تلو الآخر عشوائيًّا، فما احتمال اختيار قلمي حبر أزرق وقلمي حبر أحمر؟

5 **ألعاب رياضية:** وُزِّعت عشـوائيًّا 6 جوائز على المشـاركين في مسابقة رياضية. إذا شـارك في المسابقة 10 ذكور و10 إناث، فما احتمال اختيار المشـارك طلال ليحصل على الجائزة الأولى، والمشارك مهند ليحصل على الجائزة الثانية، وأنْ تكون بقية الجوائز من نصيب الإناث؟

6 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

ورد: أرادت وفاء تزيين حديقة بيتها، فاختارت عشوائيًّا 4 شتلات ورد الواحدة تلو الأخرى من بين 10 شتلات ورد جوري، و7 شـتلات ورد قرنفل، و13 شتلة ورد فُلٍّ. ما احتمال أنْ تكون وفاء قد اختارت:

7 شتلات ورد جوري فقط؟

8 شـتلات ليس من بينها ورد جوري؟

9 شتلة واحدة على الأقل من كل نوع؟

قُبَّعات ملونة: في محل 6 قُبَّعات مُتماثِلة، منها 4 سـوداء، وواحدة خضراء، وواحدة زرقاء، رتَّبها صاحب المحل عشوائيًّا في صف واحد على أحد الرفوف. ما احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

10 أنْ تكون القُبَّعات السود بجانب بعضها؟

11 ألّا تكون القُبَّعة الخضراء والقُبَّعة الزرقاء متجاورتين؟

12 أنْ تكون القُبَّعتان على طرفي الصف سوداوين؟

13 أنْ تتوزَّع القُبَّعات السود بالتساوي على طرفي الصف؟

مهارات التفكير العليا

14 **مسألة مفتوحةٌ:** أكتب سؤالًا لتجربة عشوائية يكون فيه الاحتمال $\frac{1}{{}_5C_2}$

15 **أكتشف الخطأ:** بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الأول الثانوي الذي يضم 14 لاعبًا. أراد مُعلِّم التربية الرياضية أنْ يُوزِّع عشـوائيًّا على كل لاعب قميصًا رياضيًّا من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14، وقد حسـب كل من بلال وصالح احتمال حصول بلال على القميص رقم 9 ، وحصول صالح على القميص رقم 10 كما يلي:

بلال

$$P(A) = \frac{{}_{12}C_2}{{}_{14}C_2} = \frac{66}{91}$$

صالح

$$P(A) = \frac{{}_{12}P_2}{{}_{14}P_2} = \frac{132}{182} = \frac{66}{91}$$

أيُّهما حلُّه صحيح؟ أُبرِّر إجابتي.

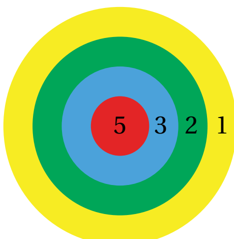
الدرسُ 2

المتغيرات العشوائية
Random Variables

فكرةُ الدرسِ إيجاد قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحاتُ المتغير العشوائي.

مسألةُ اليوم في لعبة رمي السهام، رمى كلٌّ من إبراهيم ويوسف سهمين على لوحة السهام المجاورة. كم مجموعًا مختلفًا يُمكِن أنْ يُسجِّله إبراهيم أو يوسف؟



يُطلَق على المتغير الذي ترتبط قيمه بنواتج تجربة عشوائية اسم **المتغير العشوائي** (random variable). ففي تجربة سحب كرة عشوائيًّا من كيس يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، إذا كان المتغير X يُمثِّل عدد الكرات الحمراء في السحبة، فإنَّ قيم المتغير X قد تكون 0 في حالة سحب كرة صفراء، أو 1 في حالة سحب كرة حمراء.

أتعلَّم

إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي معدودة ومنتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا. أمّا إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي غير معدودة ومنتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا متصلًا.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قيم X.

أفترض أنَّ H تعني صورة، وأنَّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر فضاء العيِّنة للتجربة

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر

$$X = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

إذن، مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0,1,2\}$.

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد مجموعة قيم X.

رموز الرياضيات

يُرمَز إلى قيم المتغير العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X.

عنـد تحديد القيـم العددية للمتغير العشـوائي، يُمكِن أحيانًا تحديد أكبـر قيمة وأصغر قيمة للمتغير العشوائي، ثم كتابة بقية قيمه بين هاتين القيمتين.

مثال 2

إذا دلَّ المتغير العشـوائي X على عدد الكرات الزرقاء في تجربة سُحِبت فيها 4 كرات عشوائيًّا معًا من كيس فيه 10 كرات زرقاء، و8 كرات خضراء، فأجد مجموعة قيم X.

أفترض أنَّ B تعني كرة زرقاء، وأنَّ G تعني كرة خضراء.

أُلاحِظ أنَّ عدد عناصر Ω:

$$2^4 = 16$$

وهو عدد كبير نسبيًّا. ونظرًا إلى عدم الحاجة إلى رصد جميع العناصر؛ سأكتفي بتحديد بعضها لمعرفة قيم X:

العنصر (4 خضراء)، والعنصر (4 زرقاء)

$$\Omega = \{(G, G, G, G), \quad \dots \quad, (B, B, B, B)\}$$

عدد الكرات الزرقاء المرتبط بالعنصر

$$X = \quad 0 \quad \dots \quad 4$$

أُلاحِظ أنَّ قيم المتغير العشوائي X تتراوح بين 0 و4

نماذج من باقي العناصر

$$(B, G, G, G) \rightarrow 1,$$

$$(B, B, G, G) \rightarrow 2,$$

$$(B, B, B, G) \rightarrow 3$$

إذن، مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد عشـوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشـوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قيم X.

أتعلَّم

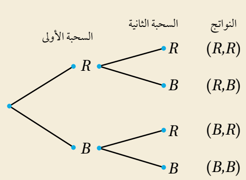
عـدد عناصـر فضـاء العيِّنـة عنـد اختيـار n من العناصـر من نوعين مختلفيـن باللـون من الكرات هو 2^n

أتعلَّم

العناصـر (G, G, G, B)، (G, B, G, G) (G, B, G, G)، (B, G, G, G) جميعهـا متشـابهة، وكلٌّ منهـا يرتبط بالعدد 1

أتذكَّر

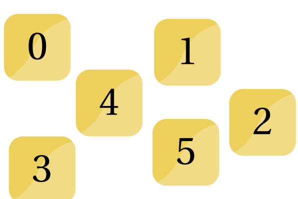
يسـاعدني تمثيـل المخطـط الشـجري على كتابة عناصر فضاء العيِّنـة (النواتج) لتجربة عشوائية ما.



تتطلَّب بعض المواقف تحديد عناصر حادث مُعيَّن في فضاء العيِّنة، مرتبط بقيمة مُحدَّدة من قيم المتغير العشوائي في التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعتي نقد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فإنَّ عنصر الحادث $C = \{(H, T)\}$ يرتبط بالقيمة 1، وعنصر الحادث $D = \{(T, T)\}$ يرتبط بالقيمة 0، وعنصر الحادث $E = \{(H, H)\}$ يرتبط بالقيمة 2

مثال 3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5 من دون تكرار، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 8$.



أفترض أنَّ الحادث المطلوب هو A، فتكون عناصره هي الأزواج المُرتَّبة التي مجموع إحداثييها 8:

المجاميع الممكنة للعدد 8 باستعمال البطاقات $3 + 5 = 8 \, , 5 + 3 = 8 \, , 4 + 4 = 8$

عناصر الحادث A $A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$

أُلاحِظ أنَّ المجموع $4 + 4$ ممكن؛ لأنَّ السحب مع الإرجاع.

أتحقق من فهمي

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5 من دون تكرار، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

أتذكَّر

السحب من دون إرجاع يعني عدم إمكانية ظهور المسحوب أولًا في السحبة التالية.

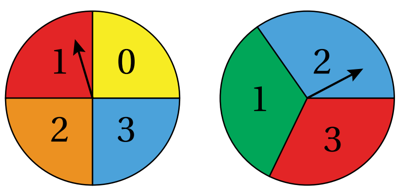
أتدرب وأحل المسائل

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا من البطاقات الظاهرة في الشكل المجاور، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد مجموعة قيم X في الحالات الآتية:

1 السحب على التوالي مع الإرجاع.

2 السحب على التوالي من دون إرجاع.

3 سحب البطاقتين معًا.



إذا دُوِّر مُؤشِّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قيم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:

4 مجموع العددين.

5 القيمة المطلقة للفرق بين العددين.

6 حاصل ضرب العددين.

7 في تجربة سحب ثلاث كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$.

8 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

9 **مسألة مفتوحةٌ:** أَصِف موقفًا تكون فيه قيم المتغير العشوائي X: 0، 1، 2

10 **تبرير:** في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 3 بطاقات مُتماثِلة، كُلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقام: 1 ,3 ,5 ، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قيمه: 2 ,4 ,6 ,8 ,10، فأُحدِّد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرِّرًا إجابتي.

11 **تحدٍّ:** أَصِف موقفًا حياتيًّا تكون فيه بعض قيم المتغير العشوائي موجبة، وبعض قيمه الأُخرى سالبة.

الدرسُ 3

احتمال المتغير العشوائي
Probability of a Random Variable

فكرةُ الدرسِ إيجاد احتمالات قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحاتُ التوزيع الاحتمالي.

مسألةُ اليومِ عند إلقاء حجري نرد متمايزين مرَّة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين، ما المجموع الذي احتماله أكبر؟

أتعلَّم

مجال التوزيع الاحتمالي هو مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه مجموعة قيم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) للتجربة العشوائية هو اقتران يربط قيم المتغير العشوائي باحتمالات وقوعها في التجربة، ويُرمَز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X=x)$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه عند إلقاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قيم المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

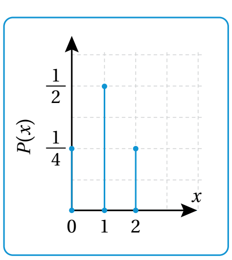
وبذلك تكون قيم اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \;, P(X=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \;, P(X=2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني.

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي



أُلاحِظ أنَّ مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي (الجدول، أو التمثيل البياني) هو 1، حيث:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X)$ هو 1

بالرموز : إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ .

$$\sum P(X)=1$$

أتعلَّم

يُطلَق على التوزيع الاحتمالي الذي تكون فيه جميع الاحتمالات متساوية اسم التوزيع المنتظم

uniform dstribution

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 **التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.**

الخطوة 1 : أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$

الخطوة 2 : أجد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

$$P(1)=\frac{1}{6}\ ,P(2)=\frac{1}{6}\ ,P(3)=\frac{1}{6}$$

$$P(4)=\frac{1}{6}\ ,P(5)=\frac{1}{6}\ ,P(6)=\frac{1}{6}$$

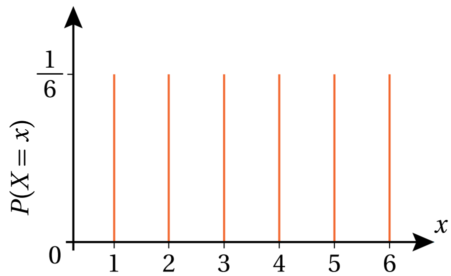
الخطوة 3 : أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قيم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

أُلاحِظ أنَّ مجموع الاحتمالات هو 1:

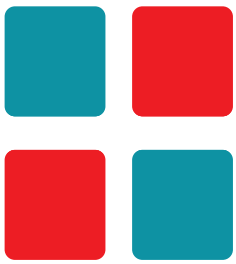
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

2 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.



أضع قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي، وقيم الاحتمال المقابلة لها على المحور الرأسي، ثم أرسم الأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي



في تجربة سحب بطاقتين معًا عشوائيًّا من صندوق يحوي بطاقتين حمراوين وبطاقتين زرقاوين، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد البطاقات الزرقاء في السحبة، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

2 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

إنَّ معرفة مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية تساعد على إيجاد احتمالات مجهولة، واحتمالات ضمن شروط محددة على قيم المتغير العشوائي.

مثال 2

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

1 أجد قيمة a.

$0.1 + a + 0.3 + a + 0.1 = 1$ لأنَّ $\sum P(x) = 1$

$2a + 0.5 = 1$ بتجميع الحدود المتشابهة

$2a = 0.5$ بطرح 0.5 من طرفي المعادلة

$a = 0.25$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

2 أجد $P(1 \leq x < 3)$.

$P(1 \leq x < 3) = P(x = 1) + P(x = 2)$ بتحديد قيم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد

$= 0.25 + 0.3$ بتعويض قيم الاحتمالات

$= 0.55$ بالجمع

أتذكَّر

لأيِّ حــادث A في فضاء العيِّنة لتجربة عشــوائية، فإنَّ:

$P(A)+P(\overline{A})=1$

أتحقق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	b	0.2	$2b$

1 أجد قيمة b.

2 أجد $P(2 \leq x \leq 4)$.

يُمكِن أيضًا تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشــوائي X فــي صورة مجموعة من الأزواج المُرتَّبــة التي إحداثيات x لها مجموعة قيم المتغير العشــوائي، وإحداثيــات y لها مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بقيم المتغير العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k) , (2, k) , (3, k) , (4, k)\}$$

1 **أجد قيمة k.**

$2k + k + k + k = 1$ لأنَّ $\sum P(x) = 1$

$5k = 1$ بتجميع الحدود المتشابهة

$k = 0.2$ بقسمة طرفي المعادلة على 5

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2

3 أجد $P(x \leq 3)$.

بتحديد قيم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد
$$P(x \leq 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$$

بتعويض قيم الاحتمالات
$$= 0.4 + 0.2 + 0.2$$

بالجمع
$$= 0.8$$

أتعلَّم

$P(x \leq 3) = 1 - P(x=4)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

أتحقق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, 2k), (3, 3k), (4, 3k)\}$$

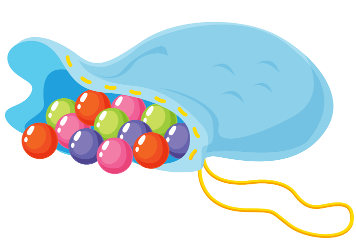
1 أجد قيمة k.

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

3 أجد $P(x \geq 3)$.

يُمكِن حساب احتمالات قيم المتغير العشوائي باستعمال مبدأ العَدِّ، والتباديل، والتوافيق.

مثال 4



في تجربة سحب ثلاث كرات عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من كيس فيه 3 كرات حمراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الخطوة 1: أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

الخطوة 2 : أجد احتمالات قيم المتغير العشوائي.

0 كرة حمراء، و 3 كرات خضراء $P(x=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$

كرة حمراء واحدة، وكرتان خضراوان $P(x=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$

كرتان حمراوان، وكرة خضراء واحدة $P(x=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$

3 كرات حمراء، و 0 كرة خضراء $P(x=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$

الخطوة 3 : أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المثال 4 إذا كان السحب مع الإرجاع.

أتدرب وأحل المسائل

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة:

1 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

2 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	a	0.2	a

3 أجد قيمة a.

4 أجد $P(1 < x \leq 3)$.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, 2k), (1, 0.5k), (2, 2k), (3, 0.5k)\}$$

5 أجد قيمة k.

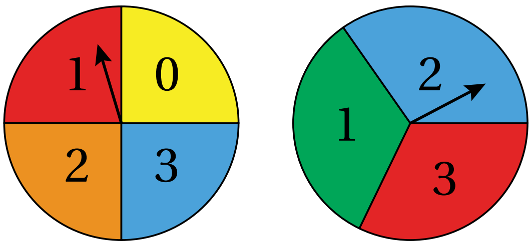
6 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

7 أجد $P(x \geq 2)$.

8 في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 3، و3 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 3، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

9 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

دُوِّر مُؤشِّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، ودلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين:



10 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

11 أُمثِّل بيانيًّا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

12 أجد $P(1 \leq x \leq 4)$.

13 أجد $P(x > 5)$.

14 **مواعيد:** يُنظِّم محاضر جامعي مواعيد لأربعةٍ من طلبته المُتوقَّع تخرُّجهم في الساعة المُخصَّصة لعمله المكتبي كل يوم خميس. وبحسب خبرته، فإنَّ عدد مَنْ يتأخَّرون عن موعد الساعة المكتبية من هؤلاء الطلبة يُمكِن تمثيله بمتغير عشوائي X، وإنَّ التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.25	$4k$	$2k$	k

أجد احتمال تأخُّر اثنين من هؤلاء الطلبة – على الأقل – عن موعد الساعة المكتبية يوم الخميس.

مهارات التفكير العليا

15 **تحدٍّ:** أجد قيمة k إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 0.1x), (2, 0.1x), (3, 0.1x), (4, k)\}$$

16 **تحدٍّ:** أجد المنوال للتوزيع الاحتمالي إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

17 **أكتب:** أيُّ طرائق التعبير عن التوزيع الاحتمالي أفضل؟ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 4

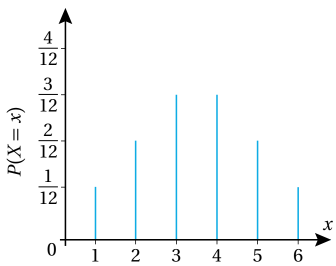
توقُّع المتغير العشوائي

Expectation of a Random Variable

فكرةُ الدرسِ إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحاتُ توقُّع المتغير العشوائي، تباين المتغير العشوائي.

مسألةُ اليومِ مثَّلت تغريد التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية كما في الشكل المجاور، ثم أرادت إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، كيف يُمكِنها ذلك؟



تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي ($\overline{x}$) لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القيم في تكراراتها ($\sum x.f$)على مجموع التكرارات($\sum f$) باستعمال الصيغة الآتية:

$$\overline{x}=\frac{\sum x.f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قيم المتغير العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القيم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$ ، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation)للمتغير العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز$E(x)$.

لغة الرياضيات

يُطلَق على التوقُّع للمتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي اسم الوسط الموزون.

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: التوقُّع للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز :

$$E(x)=\sum x.P(x)$$

مثال 1 : من الحياة

في مسح عشوائي شمل **100** سيدة من ربّات البيوت لمعرفة عدد اللواتي لديهن أجهزة حاسوب، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد الأجهزة (x)	0	1	2	3
عدد ربّات البيوت (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب

1 **أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.**

أقسم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أُنشِئ جدولًا للتوزيع الاحتمالي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.17	0.42	0.31	0.1

أتذكَّر

ينتج الاحتمال النسبي عن قسمة كل تكرار على المجموع الكلي للتكرارات.

2 **أجد التوقُّع للمتغير العشوائي X.**

$E(x) = \sum x.P(x)$ صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X

$= 0\times0.17 + 1\times0.42 + 2\times0.31 + 3\times0.1$ مجاميع حاصل الضرب

$= 1.34$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 200 أسرة لمعرفة عدد حيواناتهم الأليفة:

عدد الحيوانات (x)	0	1	2	3
عدد الأسر (f)	44	96	52	8

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الحيوانات الأليفة، أجد $E(x)$.

عدد القطط التي تعيش في منازل بعض الأردنيين يتراوح بين 4 آلاف قطة و5 آلاف قطة من مختلف الأنواع.

إذا عُلِمت قيمة التوقُّع $E(x)$ للمتغير العشوائي X، فإنَّه يُمكن تحديد قيم احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حلِّه بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	a	0.3	b	0.2	0.15

وكان $E(x)=3$، فأجد قيمة كلٍّ من:

$$P(x=1), P(x=3).$$

$$E(x) = \sum x.P(x)$$ صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X

$$1\times a + 2\times 0.3 + 3\times b + 4\times 0.2 + 5\times 0.15 = 3$$ لأنَّ التوقُّع هو 3

$$a+3b = 0.85 \,.........[1]$$ بالتبسيط

$$a + 0.3 + b + 0.2 + 0.15 = 1$$ مجموع الاحتمالات هو 1

$$a+b = 0.35 \,.........[2]$$ بالتبسيط

$$2b = 0.50$$ بطرح المعادلة [2] من المعادلة [1]

$$b = 0.25$$ بالقسمة على 2

$$a + 0.25 = 0.35$$ بالتعويض في المعادلة [2]

$$a = 0.10$$ بطرح 0.25 من طرفي المعادلة

أي إنَّ:

$$P(x=1) = 0.10, P(x=3) = 0.25$$

أتحقق من فهمي

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	b	0.2	0.3

وكان التوقع $E(x) = 2.5$ أجد قيمة كل من **$P(x = 1), P(x = 2)$.**

التباين (Variance) للمتغير العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قيم المتغير عن وسطها الحسابي $E(x)$، ويُمكِن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \left(\sum x^2 . P(x)\right) - (E(x))^2$$

أتذكَّر

الانحــراف المعيــاري σ هو الجــذر التربيعي للتباين.

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: التباين للمتغير العشـــوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشـــوائية يســـاوي مجموع حواصل ضرب مربعات قيم المتغيـــر X في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقُّع للمتغير X.

بالرموز:

$$\sigma^2 = \left(\sum x^2 . P(x)\right) - (E(x))^2$$

مثال 3

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.35	0.3	0.15

1 أجد التوقُّع $E(x)$.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $E(x) = \sum x.P(x)$

بكتابة مجاميع حاصل الضرب $= 1\times 0.2 + 2\times 0.35 + 3\times 0.3 + 4\times 0.15$

بالتبسيط $= 2.4$

2 أجد التباين σ^2.

صيغة التباين للمتغير العشوائي X $\sigma^2=(\sum x^2.P(x))-(E(x))^2$

بالتعويض $= 1^2\times 0.2 + 2^2\times 0.35 + 3^2\times 0.3 + 4^2\times 0.15 -(2.4)^2$

بالتبسيط $= 0.94$

أتحقق من فهمي

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.4	0.35	0.15

فأجد التوقُّع $E(x)$، والتباين σ^2.

أتدرب وأحل المسائل

1 يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 50 طالبًا من إحدى المدارس لمعرفة عدد ساعات الدراسة في يوم الإجازة:

عدد الساعات (x)	1	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	4	12	20	8	6

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الساعات، أجد $E(x)$.

2 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0.13	0.27	a	b	0.22	a

وكان التوقُّع $E(x) = 0.39$، فأجد قيمة كلٍّ من:

$$P(x=0), P(x=1).$$

3 إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	2	3	4	5
$P(x)$	0.25	0.4	0.25	0.1

فأجد التوقُّع $E(x)$، والتباين σ^2.

4 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي الآتي:

x	2	4	6	8
$P(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

يتكوَّن مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 8 طلاب و12 طالبة، وقد اختاروا عشوائيًّا لجنة تضم اثنين منهم للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

5 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

6 أجد التوقُّع لعدد الطالبات في اللجنة المختارة.

7 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي.

أراد متعامــل في ســوق البورصة الاســتثمار في أســهم الشــركتين A، B، وقد علم أنَّ اســتثماره في أســهم الشركة A ســيكون عائده المالي 10%، أو 25%، أو 5%– مــن قيمة الســهم، واحتمالاتها: 0.6 , 0.25 ، 0.15 علــى الترتيب. أما استثماره في أســهم الشركة B، فســيكون عائده المالي 10%، أو 50%، أو 30%– من قيمة السهم، واحتمالاتها: 0.55، 0.25، 0.2 على الترتيب.

بنمذجة العائد المالي بوصفه متغيرًا عشوائيًّا:

8 أجد قيمة كلٍّ من: $E(A), E(B)$.

9 أجد قيمة التباين في العائد المالي للشركتين: A, B .

10 أُبيِّن كيف ستُؤثِّر قيم التوقُّع والتباين في قرار المتعامل لتحديد أي الأسهم سيستثمر فيها.

11 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

12 **تحدٍّ**: ما قيمة σ^2 للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي إذا كان $E(x) = 5.95$ ؟

x	2	5	a	8
$P(x)$	0.1	b	0.2	0.35

13 **تحدٍّ**: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, kx), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{8}), (4, kx), (5, \frac{1}{8}), (6, \frac{1}{8})\}$$

فما قيمة التوقُّع للمتغير X؟

14 **أكتب**: كيف تُؤثِّر قيمة التوقُّع للمتغير العشوائي في اتخاذ القرارات في حياتنا اليومية؟

أَضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 رُتِّبــت الأحرف: ر، ط، م عشــوائيًّا فــي صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (مطر) هو:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$

2 رُتِّبت الأحرف: R, E, D, E عشوائيًّا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة ($DEER$) هو:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

3 احتمال اختيار 2 من الرجال و3 من النســاء عشــوائيًّا من بين 5 موظفين و5 موظفات في إحدى الشــركات لحضور مؤتمر علمي هو:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{50}{63}$ d) $\frac{25}{63}$

4 سحب علي 4 كرات معًا عشوائيًّا من صندوق يحوي 3 كرات حمــراء، و3 كرات زرقاء، و3 كرات صفراء، و3 كرات خضراء، وكانت جميع الكرات التي في الصندوق مُتماثِلة. احتمال أنْ تكون 2 من الكرات المسحوبة من لون واحد، وبقية الكرات من لون آخر هو:

a) $\frac{12}{55}$ b) $\frac{9}{55}$

c) $\frac{4}{55}$ d) $\frac{8}{55}$

إذا كان التوزيــع الاحتمالــي للمتغير العشــوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	5
$P(x)$	$2k$	k	k	k

5 قيمة k هي:

a) 0.1 b) 0.2

c) 0.3 d) 0.4

6 قيمة $E(x)$ هي:

a) 1.2 b) 1.4

c) 2.4 d) 1

7 قيمة σ^2 هي:

a) 2.24 b) 2.4

c) 8 d) 5.76

8 قيمة $P(x < 3)$ هي:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

9 يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 60 يومًا متتاليًا، وقد دَوَّن قيس في كلٍّ منها عدد رسائل البريد الإلكتروني التي وصلته:

عدد الرسائل (x)	0	1	2	3	4
عدد الأيام (f)	8	12	10	18	12

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الرسائل، أجد $E(x)$.

صندوق فيه 3 كرات زرقاء، و6 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، سُحِبت منه 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، وقد دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة:

10 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

11 أجد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة على الأقل.

12 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، حيث $E(x) = \frac{5}{12}$. أجد قيمة كلٍّ من a,b .

x	-1	0	1	2
$P(x)$	a	$4b$	$2b$	a

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يحتوي كيس على 8 كرات زجاجية حمراء، و4 كرات زجاجية خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا سُحِبت من الكيس 6 كرات عشوائيًّا الواحدة تلو الأُخرى من دون إرجاع، فما احتمال:

13 أنْ تكون 4 من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

14 أنْ تكون 4 على الأقل من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

X متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	3
$P(x)$	a	$1-a$

15 أُثبِت أنَّ $\sigma^2 = 25\,a(1-a)$.

16 إذا كان $E(x) = 2$ ، فما قيمة σ؟