الوحدة(٦)

الاول ثانوي العلمي

المتطابقات المثلثية

(١)

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي 0785824464

الوحدة 7

المتطابقات المثلثية (1)

المتطابقات المثلثية الاساسية :

1) متطابقات المقلوب :-

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

2) المتطابقات النسبية

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3) متطابقات فيثاغورس

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

4) متطابقات الزوايا السالبة

$\sin-\theta = -\sin\theta$ و $\cos-\theta = \cos\theta$

$\tan-\theta = -\tan\theta$

5) متطابقات الزاويتين المتتامتين

1) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

2) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

3) $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

4) $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$

5) $\sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta$

6) $\csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta$

رافت ضاحي

مثال: جد متبقة $\sec\theta$ اذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ربع ثاني

الحل:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} , -\frac{4}{5}$$

$\cos\theta = \frac{-4}{5}$ الربع الثاني

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{-4}{5}} = \frac{-5}{4}$$

التدريب واحل المسائل ص 56

جد متبقة $\tan\theta$ اذا كان $\sec\theta = \frac{-3}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ربع ثالث

الحل:-

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{-2}{3}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \frac{4}{9} = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} , -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ الربع الثالث

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

حل آخر

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\frac{9}{4} = 1 + \tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \frac{5}{4} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تبسيط المقادير الجبرية

هو كتابة المقادير بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط (إن أمكن)

مثال: بسط :-

① $\sin x \cos^2 x - \sin x$

الحل :-

عامل مشترك

$= \sin x(\cos^2 x - 1)$

متطابقة فيثاغورس

$= (\sin x)(-\sin^2 x) = -\sin^3 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

---

② $\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

هنا نوحد المقامات

$$\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

---

③ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x$

$= \sin x \cot x$

$= (\sin x)\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \cos x$

بسط كلاً مما يلي (التحقق من فهمك)

ص 57

a) $\sin x(\csc x-\sin x)$

b) $1+\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec x$

---

a) $\sin x\csc x-\sin^2 x$ — حل أقواس

$=(\sin x)\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)-\sin^2 x$ — المقلوب

$=1-\sin^2 x$ — متطابقة فيثاغورس

$=\cos^2 x$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$1-\sin^2 x=\cos^2 x$

---

b) $1+\dfrac{\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ — توحيد مقامات

$=1+\dfrac{\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}$

$=1+\dfrac{1}{\cos x}$

$=1+\sec x$

---

c) $(\cos x)(\sec x)$ — المتممة

$=(\cos x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ — المقلوب

$=1$

تذكير

$$\frac{a \pm b \pm c}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} \pm \frac{c}{d}$$

كتابة المقدار المثلثي دون كسر

هنا نلجأ الى الضرب بالمرافق

$$a \pm b \xrightarrow{\text{مرافقه}} a \mp b \xrightarrow{\text{الضرب}} a^2 - b^2$$

مثال :- اعيد كتابة $\frac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسراً

الحل :-

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

المقام هو واحد هنا

نوزع البسط على المقام

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

مطلوب

$$= \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x \cos x}$$

$$= \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec^2 x - \tan x \sec x$$

ص 57 التحقق من فهمك

اعيد كتابة $\dfrac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسراً

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \csc^2 x - \frac{\cos x}{\sin x}\,\frac{1}{\sin x}$$

$$= \csc^2 x - \cot x \csc x$$

اثبات صحة متطابقة مثلثية

يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لاثبات صحة متطابقات مثلثية وعن طريق تحويل احد طرفي المتطابقة المثلثية المراد اثبات صحتها الى الطرف الاخر باتباع سلسلة من الخطوات.

مثال: اثبت صحة كل متطابقة مما يلي:

1) $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

الحل: ابدأ الطرف الايسر

$$(\sin x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

متطابقة فيثاغورس

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \sec x - \cos x$$

---

2) $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x + \cos x \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

عامل مشترك في البسط مع فرق مربعين للمقام

$$= \frac{\cos x \cancel{(1 + \sin x)}}{(1 - \sin x)\cancel{(1 + \sin x)}}$$

$$= \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

حل آخر

↓

ابدأ من الطرف الايمن

---

3) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = 2\csc x$

الحل :-

الطرف الأيسر

نوحد مقامات

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 + \cos x + \cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x)\sin x}$$

$$= \frac{2 + 2\cos x}{(1 + \cos x)\sin x}$$

$$= \frac{2\cancel{(1 + \cos x)}}{\cancel{(1 + \cos x)}\sin x}$$

$$= \frac{2}{\sin x}$$

$$= 2\csc x$$

(اتحقق من فهمك ص 60)

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية

a) $\cot x \cos x = \csc x - \sin x$

b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

c) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

الحل : الطرف الأيسر

متطابقات المقلوب

a) $\cot x \cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \cos x$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \csc x - \sin x$$

---

b)

الطرف الايسر وضرب بالمرافق

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

توحيد مقامات

c) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1+\cancel{\cos x}+1-\cancel{\cos x}}{1-\cos^2 x}$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2\csc^2 x$$

في بعض أسئلة الإثبات تكون هناك صعوبة في البدء بأحد الطرفين للوصول للطرف الآخر هنا في هذه الحالة نبسط كل طرف الى أن يتساوا.

مثال: أثبت صحة المتطابقة

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$$

الحل:-

الطرف الايمن:-

متطابقة

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$$

$$= \frac{\cancel{(\sec x - 1)}(\sec x + 1)}{\cancel{\sec x - 1}} = \sec x + 1$$

الطرف الأيسر:

المقام موحد هنا وزع البسط على المقام

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \sec x + 1$$

بما أن الطرفين متساويين اذن المتطابقة صحيحة

حل آخر: لو بدأنا من الطرف الايمن :-

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \frac{\cancel{(\sec x - 1)}(\sec x + 1)}{\cancel{\sec x - 1}}$$

$$= \sec x + 1$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 1 \qquad \text{نوحد مقامات}$$

$$= \frac{1+\cos x}{\cos x}$$

التحقق من فهمك ص 60

٢ـ اثبت صحة التطابقة

$$(\tan x+\cot x)^2=\sec^2 x+\csc^2 x$$

الحل:

الطرف الايسر

$$(\tan x+\cot x)^2 = \tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x$$
$$= \sec^2 x-1+2(\tan x)\left(\frac{1}{\tan x}\right)+\csc^2 x-1$$
$$= \sec^2 x\cancel{-1}+\cancel{2}+\csc^2 x\cancel{-1}$$
$$= \sec^2 x+\csc^2 x$$

متطابقات المجموع والفرق

1) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

2) $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

3) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

4) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

5) $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

6) $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

<u>مثال</u> : جد قيمة كل مما يلي دون آلة حاسبة

① $\sin 15^\circ$

② $\tan \frac{5\pi}{12}$

③ $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$

④

الحل :-

نكتب 15 بصورة زاويتين مشهورتين

① $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$

$= \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 75$

② $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

---

③ $\underbrace{\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ}_{\text{متطابقة}} \sin 40^\circ = \cos(20^\circ + 40^\circ)$

$= \cos 60^\circ$

$= \frac{1}{2}$

التحقق من فهمك

صـ 62

جد قيمة ما يلي دون استعمال الآلة الحاسبة

a) $\cos 75^\circ$ b) $\tan\frac{\pi}{12}$ c) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

الحل:-

اكتب 75 على صورة زاويتين مشهورتين

a) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

---

b) $\tan\frac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ)$ $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$

$= \frac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \tan 30} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

أو

$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$

---

c) $\underbrace{\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ}_{\text{متطابقة}}$

$\sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

يمكن ايضاً استعمال متطابقات المجموع والفرق لاثبات صحة متطابقات مثلثية اخرى .

مثال :- اثبت صحة كل متطابقة مما يأتي :-

① $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$

② $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan(\frac{\pi}{4}+x)$

الحل :-

① الطرف الايسر

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

$$= (0)\cos x + (1)\sin x$$

$$= \sin x$$

---

② الطرف الايمن

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

(تحقق من فهمك ص63) اثبت صحة كل متطابقة مما يأتي

a) $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x$

الحل :-

$$\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot x$$

b) $\frac{\tan x-1}{\tan x+1} = \tan(x-\frac{\pi}{4})$

الحل :- الطرف الايمن

$$\tan(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan x-1}{1+\tan x}$$

التدرب وحل المسائل

جد قيمة كل من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة

① $\cot\theta$ ، $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الحل :-

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{1}{9} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

الربع الأول

$\cos\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times 3 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

② $\sec\theta$ ، $\tan\theta = \frac{-3}{7}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

الحل :-

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$= \frac{9}{49} + 1 = \frac{58}{49}$

$\sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$ ، $\frac{\sqrt{58}}{7}$

الربع الثاني سالب

$\sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$

③ $\tan\theta$ ، $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

الحل :-

$\csc\theta = \frac{-5}{3} \rightarrow \sin\theta = \frac{-3}{5}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ ، $-\frac{4}{5}$ الربع الثالث سالبا

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{-4}{5}} = (\frac{3}{5})(\frac{5}{4}) = \frac{3}{4}$

(4) $\sin\theta$, $\sec\theta = \frac{9}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

الحل :-

الربع الرابع

$\cos\theta = \frac{4}{9}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{16}{81} = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{65}}{9} , \frac{-\sqrt{65}}{9}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{65}}{9}$

ابسط كلاً من العبارات المثلثية الآتية

(5) $\cos x \tan x$

(6) $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x}$

(7) $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x} + \cos^2\theta$

(8) $\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

(9) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x}$

(10) $\frac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

الحل :-

المطلوب

(5) $\cos x \tan x = (\cancel{\cos x}) \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = \sin x$

(6) $\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\sin x}$

$= \left(\frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\sin x}}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

---

(7) $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x} + \cos^2\theta = \frac{\sin x}{\csc x} + \cos^2\theta$

$= \sin^2 x + \cos^2\theta$

$= 1$

ونوزع البسط على المقام

(8) $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}$

$= \tan x - 1 + \cot x - 1$

$= \tan x + \cot x - 2$

---

(9) $\frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{\cancel{1} + 2\sin x\cos x - \cancel{1}}{\sin x\cos x}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{\sin x \cos x} = 2$

---

(10) $\frac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$

$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \sin x$

اثبت كلاً من العبارات المثلثية الآتية

(11) $\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

الحل :-

الطرف الأيسر :

$-\cot x\cos x - \sin x = \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos x) - \sin x$

$= \frac{-\cos^2 x}{\sin x} - \sin x$

$= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x}$

$= \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin x} = \frac{-1}{\sin x}$

$= -\csc x$

(12) $(\sin x+\cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

الحل :- الطرف الايمن

$$(\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$= 1+2\sin x\cos x$$

(13) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$

الحل :-

الطرف الايسر

المرافقه

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$
$$= \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} \times \frac{\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

(14) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\sec x-\tan x)^2$

الطرف الايسر

المرافقه

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$
$$= \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}$$
$$= \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$
$$= (\sec x-\tan x)^2$$

(18)

(15) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

الطرف الايمن :-

فرق مربعين

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1}$$
$$= \sin^2 x - \cos^2 x$$

---

(16) $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x \tan x$

الطرف الايسر

توحيد مقامات :-

$$\frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{2\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$= 2\tan x \sec x$$

---

(17) $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$

الحل :-

خصائص

اللوغارتمات

$$\ln\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$$

---

(18) $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

خصائص

اللوغارتمات

$$\ln|(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)|$$
$$\ln|\sec^2\theta - \tan^2\theta| = \ln 1 = 0$$

(19)

جد قيمة كل من النسب المثلثية الآتية من دون آلة الحاسبة

(19) $\sin 165^\circ$

$$\sin(180-165) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \longrightarrow$$ الحل مكرر

---

(20) $\tan 195^\circ$

$$\tan(195-180) = \tan 15^\circ = \tan(45-30)$$

$$= \frac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \tan 30}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

---

(21) $\sec\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)$

نجد $\cos\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$

$$\cos 15^\circ = \cos(60-45)$$

$$= \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

---

(22) $\sin \frac{17\pi}{12}$ $\qquad \left(\frac{17\cancel{\pi}}{12}\right)\left(\frac{180}{\cancel{\pi}}\right) = 255$

$\sin(255) = -\sin(255-180) = -\sin 75$

$= -\sin(45+30) = -(\sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30)$

$= -\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$

---

(23) $\underbrace{\sin \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18}}_{\text{متطابقة}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{18}\right) = \sin \frac{6\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

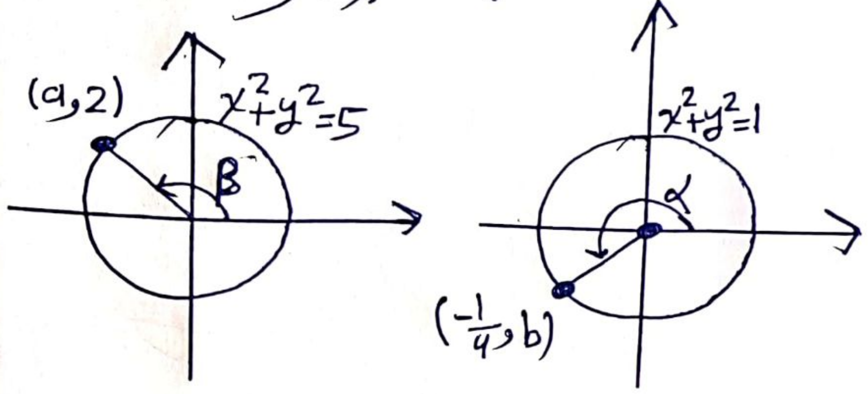
---

(24) $\frac{\tan 40 - \tan 10}{1 + \tan 40 \tan 10}$

الحل: متطابقة

$\tan(40-10) = \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

استعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كل من الاقترانات الآتية، علماً بأن:



$f(x) = \sin x$

$g(x) = \cos x$

$h(x) = \tan x$

(25) $f(\alpha+\beta)$ (26) $g(\alpha-\beta)$ (27) $h(\alpha+\beta)$

الحل:

(25) $f(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

لنعود الى الدائرتان ← هنا $(-\frac{1}{4}, b)$ تقع على الدائرة $x^2+y^2=1$

$\frac{1}{16} + b^2 = 1 \rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$b = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ حسب الربع الثالث

وكذلك $(a, 2)$ تقع على الدائرة $x^2+y^2=5$

$a^2+4=5$

$a^2=1$

$a = 1, -1$

$a = -1$ حسب الربع الثاني

بالنسبة الى الزاوية α ضلع انتهائها $(-\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{15}}{4})$ $\cos\alpha$ $\sin\alpha$

$r = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{15}{16}} = 1$

بالنسبة الى الزاوية β ضلع انتهائها $(-1, 2)$

$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ، $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

تفوق لفرع (25)

$$\sin(\alpha+\beta) = \left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{15}}{4\sqrt{5}} - \frac{2}{4\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{15}-2}{4\sqrt{5}}$$

---

(26) $$g(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1-2\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}$$

---

(27) $$h(\alpha+\beta) = \tan(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{-\sqrt{15}}{4}}{\frac{-1}{4}} = \sqrt{15}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{-1}{\sqrt{5}}} = -2$$

---

(28) منشور : يمكن قياس معامل انكسار الضوء الابيض في المنشور باستعمال المعادلة $n = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ اذا كانت $\alpha = 60^\circ$ فاثبت ان معادلة معامل الانكسار تكتب في صورة

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

الحل :
عوضها $\alpha = 60$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+30\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos 30 + \cos\frac{\theta}{2}\sin 30}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

نوزع بعطاء المقام

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

(23)

(29) اذا كان $g(x)=\cos x$ اثبت ان

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$$

عامل مشترك $\cos x$

$$= \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h}$$

وزع

$$= \frac{-\cos x(1-\cos h)}{h} - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

اثبت صحة كل من المتطابقات الآتية

(31) $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\sin(A+B)+\sin(A-B) = \underbrace{\sin A\cos B + \cancel{\cos A\sin B} + \sin A\cos B}_{} - \cancel{\cos A\sin B}$$

$$= 2\sin A\cos B$$

---

(32) $\sin A + \cos A = \sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

الحل :-

الطرف الايمن

$$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4} + \cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$$

مله اقواس

$$= \sin A + \cos A$$

---

(33) $$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$$

الحل :-

الطرف الايسر

$$\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$$

توزيع بسط على مقام

$$\frac{\sin A\cancel{\cos B}}{\cos A\cancel{\cos B}}-\frac{\cancel{\cos A}\sin B}{\cancel{\cos A}\cos B}+\frac{\sin B\cancel{\cos C}}{\cos B\cancel{\cos C}}-\frac{\cancel{\cos B}\sin C}{\cancel{\cos B}\cos C}+\frac{\sin C\cancel{\cos A}}{\cos C\cancel{\cos A}}-\frac{\cancel{\cos C}\sin A}{\cancel{\cos C}\cos A}=$$

$$\cancel{\tan A}-\cancel{\tan B}+\cancel{\tan B}-\cancel{\tan C}+\cancel{\tan C}-\cancel{\tan A}=0$$

---

(34) $$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$$

الطرف الايسر

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$$

$$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$$

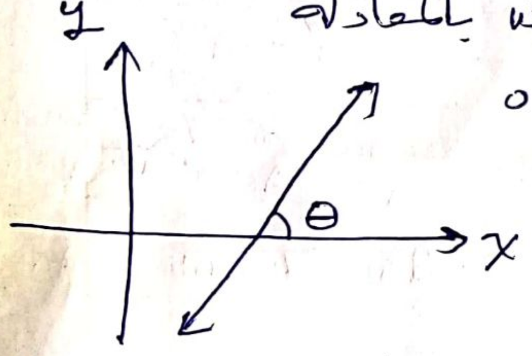
$$=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$$

متطابقة فيثاغورس

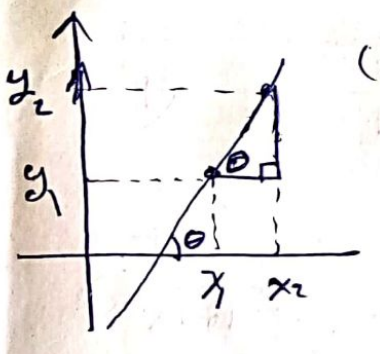
$$=\cos^2 x-\cancel{\cos^2 x\sin^2 y}-\sin^2 y+\cancel{\sin^2 y\cos^2 x}$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 y$$

(35) اذا كان L مستقيماً في المستوى الاحداثي
θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب
فان الزاوية θ تسمى زاوية ميل المستقيم L
أثبت ان ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة
$m = \tan\theta$ حيث $0 < \theta < \pi$



الحل :-



افرض نقطتين على المستقيم $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

قانون الميل

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

نأخذ ظل الزاوية θ

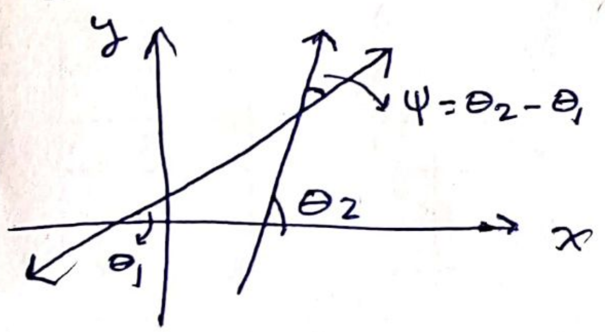
$$\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

وعليه ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية الميل θ

---

(36) اذا كان L_1 و L_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الاحداثي وميل كل منهما m_1 و m_2 على الترتيب وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فاستعمل النتيجة من السؤال السابق لاثبات ان

$$\tan\psi = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

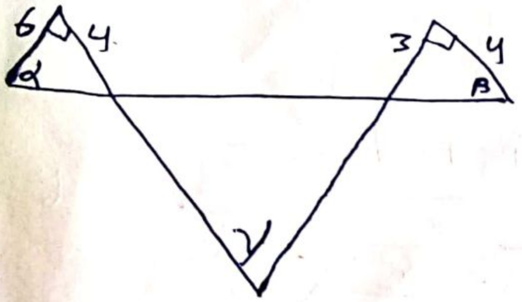


الحل:

$$\tan\psi = \tan(\theta_2-\theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$
$$= \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

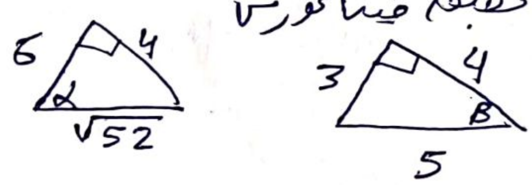
مهارات تفكير عليا :-

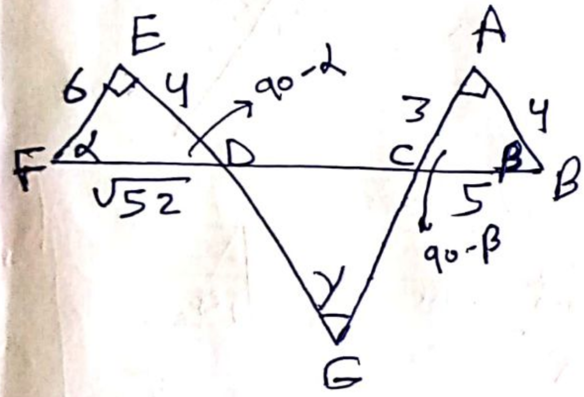
(37) اعتماداً على الشكل الآتي ، أثبت ان



$\tan\gamma$ $\alpha+\beta=\gamma$

الحل :- نطبق فيثاغورس





الزاوية ACB والزاوية DCG متقابلتان بالرأس وكذلك الزاويتان EDF و CDG اذن :-

قياس الزاوية DCG يساوي $90-\beta$

وقياس الزاوية CDG يساوي $90-\alpha$

(مجموع زوايا المثلث 180) $\gamma+\cancel{90}-\beta+\cancel{90}-\alpha=\cancel{180}$

$\gamma-\beta-\alpha=0$

$\alpha+\beta=\gamma$

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{4}{6}+\frac{3}{4}}{1-\frac{4}{6}\times\frac{3}{4}}=\frac{17}{6}$$

(38) اذا كان $\tan\alpha = x+1$ و $\tan\beta = x-1$ فاثبت ان
$2\cot(\alpha-\beta) = x^2$ مبرراً اجابتي

الحل:

$$2\cot(\alpha-\beta) = \frac{2}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{2}{\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

$$= \frac{2}{\frac{x+1-x+1}{1+(x+1)(x-1)}} = \frac{2}{\frac{2}{1+x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x^2}} = \left(\frac{x^2}{2}\right)(2) = x^2$$

---

(39) جد مقية $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل: $\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ / $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

---

(40) اكتشف الخطأ

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \quad \times$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

الحل: الخطأ في المطابقة

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ نفسها

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$$

ورقة عمل

أثبت ما يلي :-

(1) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

(2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

(3) $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \tan x + \tan y$

(4) $\tan(\frac{\pi}{4} - x)\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 1$

(5) $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\csc x} = 1$

(6) $\dfrac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$

بسّط :-

(1) $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$

(2) $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

جد قيمة

(1) $\dfrac{\sin 75 + \sin 15}{\cos 15 - \cos 75}$

(2) $\dfrac{\tan 78 - \tan 48}{1 + \tan 78 \tan 48}$
