التكامل

الفرع العلمي

المساحات والحجوم

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي 0785824464

المساحات والحجوم

تحقق من فهمي

صفحة 77

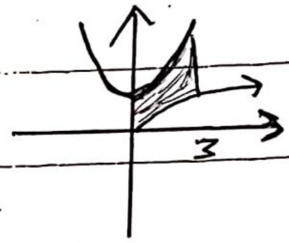
1) a) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+1$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=3$

b) جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=\sin x$ و $g(x)=2-\sin x$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=\pi$

الحل:

a) $f=g$

$\sqrt{x}=x^2+1$ ((هذه المعادلة لا تحل))



$g>f$ on $[0, 3]$

اختبر (1)

$$A=\int_0^3 (g(x)-f(x))dx$$

$$A=\int_0^3 (x^2+1-\sqrt{x})dx$$

$$A=\int_0^3 (x^2+1-x^{\frac{1}{2}})dx=\left(\frac{x^3}{3}+x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3$$

$$A=\left(\frac{27}{3}+3-\frac{2}{3}\sqrt{27}\right)=\left(9+3-\frac{2}{3}3\sqrt{3}\right)=12-2\sqrt{3}$$

b) $f=g$

$\sin x=2-\sin x$

$2\sin x=2$

$\sin x=1$

$x=\frac{\pi}{2}$

$g>f$ on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g>f$ on $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

كون دائماً $g>f$ لذا جميع الفترة ندمج تكامل

$$A=\int_0^{\pi} (g-f)dx$$

$$A=\int_0^{\pi} (2-\sin x-\sin x)dx=\int_0^{\pi} (2-2\sin x)dx$$

$$A=(2x+2\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$A=(2\pi+2\cos\pi)-(0+2\cos 0)$$

$$A=(2\pi-2)-2=2\pi-4$$

رأفت ضافي

ص 79

2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$$f(x) = x^2 \quad ، \quad g(x) = x + 2$$

الحل:

$f = g$

$x^2 = x + 2$

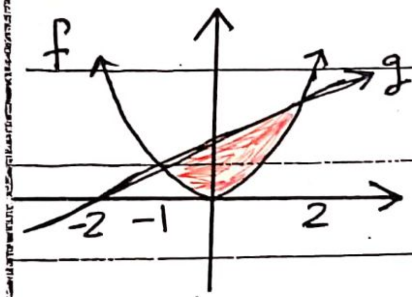
$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \qquad x = -1$

$g > f$ على الفترة من -1 إلى 2

$$A = \int_{-1}^{2} (g - f)\,dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx$$

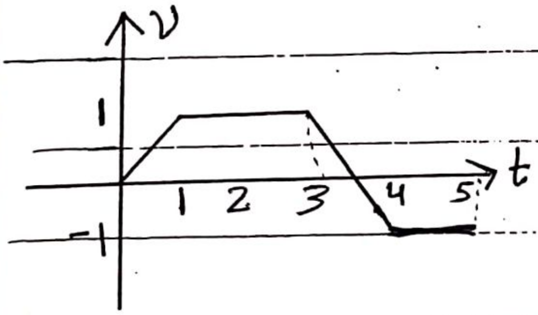


$$A = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$A = \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

ص 81

3) يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$ اذا بدأ الجسم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$ جد:

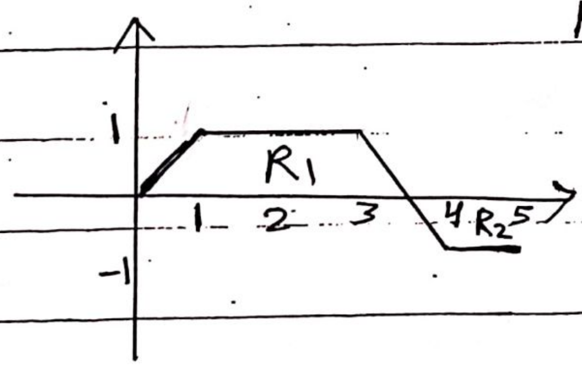


a) ازاحة الجسم في الفترة المعطاة

b) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

c) الموقع النهائي للجسم

الحل:



R_1 شبه المنحرف $\quad R_1 = \frac{1}{2}(3.5 + 2)(1) = \frac{11}{4}$

R_2 شبه المنحرف $\quad A = \frac{1}{2}(1.5 + 1)(1)$

$A = \frac{5}{4}$

راقت ضاحي

a)
$$S(5)-S(0)=\int_0^5 v(t)\,dt$$
$$=\int_0^{3.5} v(t)\,dt+\int_{3.5}^5 v(t)\,dt$$
$$=\frac{11}{4}-\frac{5}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\ m$$

b)
$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=R_1+R_2$$
$$=\frac{11}{4}+\frac{5}{4}=\frac{16}{4}=4\ m$$

c) قانون الازاحة
$$S(5)-S(0)=\int_0^5 v(t)\,dt$$
$$S(5)-3=\frac{3}{2}\longrightarrow S(5)=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\ m$$

ص 82

---

4) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=\frac{1}{x}$ والمحور x والمستقيمين $x=1$ و $x=4$ حول المحور x

الحل :-
$$V=\int_1^4 \pi(f(x))^2\,dx=\int_1^4 \pi\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$V=\int_1^4 \pi x^{-2}\,dx=\left(\frac{\pi x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4=\left(\frac{-\pi}{x}\right)\Big|_1^4$$
$$=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{1}=\frac{3\pi}{4}$$

رافت صباغي

٠٧٨٥٠٨٢٤٤٦٤

15) جد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ حول المحور x

الحل :-

$f = g$

$\sqrt{x} = x^2$ نربع

$x = x^4$

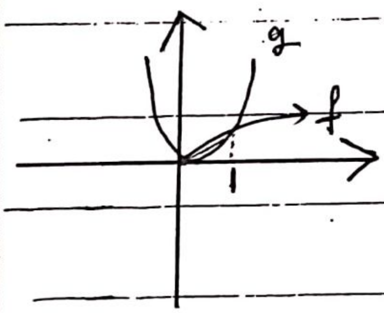
$x^4 - x = 0$

$x(x^3-1) = 0$

$x=0 \quad x=1$

$f > g$: 0 ——— 1

$$A = \int_0^1 \pi\left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx$$



$$A = \int_0^1 \pi(x - x^4)\, dx$$

$$A = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

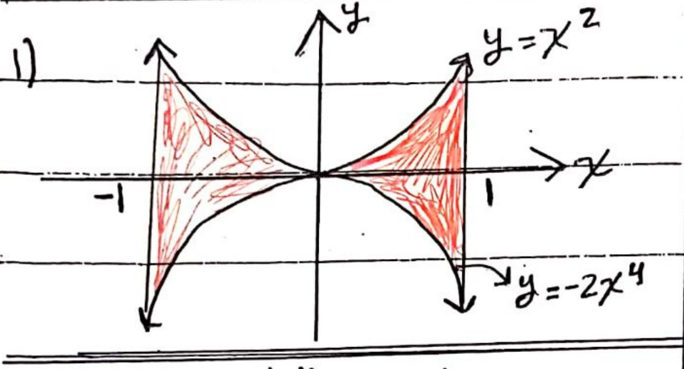
$$A = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

راقي ضابي

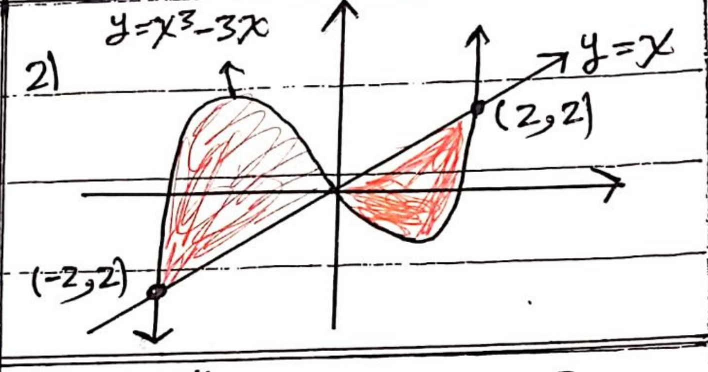
التدرب وأحل المسائل

جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية :

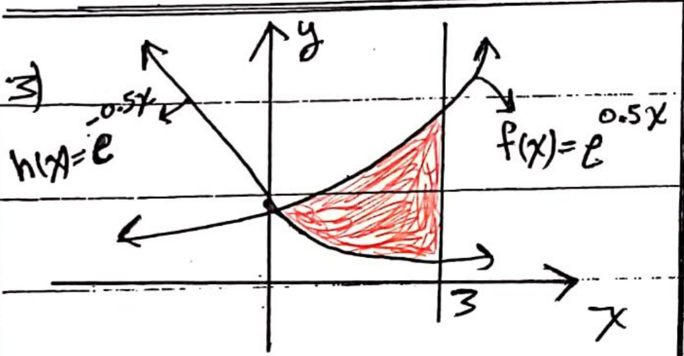
1)



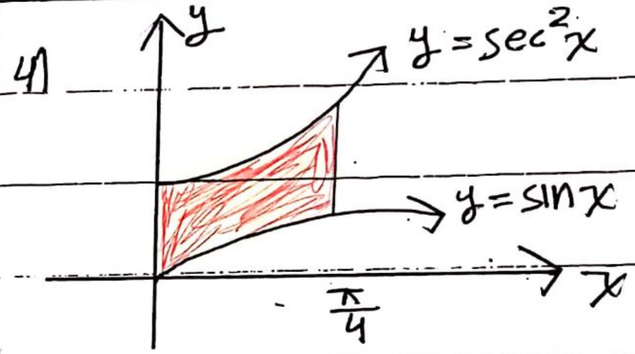
2)



3)



4)



الحل :-

1) $A=\int_{-1}^{1}(x^2-(-2x^4))dx=\int_{-1}^{1}(x^2+2x^4)dx$

اخترنا الفترة كاملة من -1 الى 1 لأن x^2 اعلى من $-2x^4$ على جميع الفترة

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{-1}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{22}{15}$$

2) $A=\int_{-2}^{0}((x^3-3x)-(x))dx+\int_{0}^{2}((x)-(x^3-3x))dx$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=0-\left(\frac{16}{4}-8\right)+(8-4)$$

$$=4+4=8$$

رافت ضاحي

$$3)\ A=\int_0^3 \left(e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$$

$$=\left(2e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big|_0^3=\left(2e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{-3}{2}}\right)-\left(2e^0+2e^0\right)$$

$$=2e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{-3}{2}}-4$$

$$4)\ A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2 x-\sin x\right)dx$$

$$=\left(\tan x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(\tan 0+\cos 0\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(0+1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

5) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$g(x)=2x^2$ ، $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6$

الحل :

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{1}{2}x^2+6=2x^2$$

$$\frac{3}{2}x^2=6$$

$$x^2=(6)\left(\frac{2}{3}\right)=4 \longrightarrow x=2 ,-2$$

$$f>g$$

-2 ——— 2

$$A=\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+6-2x^2\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(6-\frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left(6x-\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}=\left(12-\frac{8}{2}\right)-\left(-12+\frac{8}{2}\right)$$

$$=8+8=16$$

رأفت صافي

6) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين $f(x)=4^x$ و $g(x)=3^x$ والمستقيم $x=1$ في الربع الأول

الحل:

$f>g$ على الفترة من 0 إلى 1

$$f(x)=g(x)$$

$$4^x=3^x \longrightarrow x=0$$

$$A=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1 (4^x-3^x)\,dx=\left(\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big|_0^1$$

$$A=\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{3}{\ln 3}\right)-\left(\frac{4^0}{\ln 4}-\frac{3^0}{\ln 3}\right)=\frac{4}{\ln 4}-\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 3}$$

$$A=\frac{3}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 3}$$

---

7) جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=e^x$ ، $g(x)=\cos x$ والمستقيم $x=\frac{\pi}{2}$ في الربع الأول

الحل:

$$f(x)=g(x)$$

$$e^x=\cos x \longrightarrow x=0$$

$f>g$ على الفترة من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x-\cos x)\,dx$$

$$A=(e^x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(e^0-\sin 0\right)$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-1-(1-0)$$

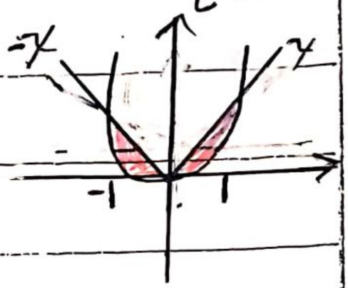
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-2$$

رأفت ضاحي

18) جد المساحة المحصورة بين منحني $f(x)=|x|$ ، $g(x)=x^4$

الحل:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$



$g(x)=f(x)$

توجد حالتان $x^4=|x|$

$x^4=x$ or $x^4=-x$

$x^4-x=0$, $x^4+x=0$

$x(x^3-1)=0$, $x(x^3+1)=0$

0 , 1 , $x=0, x=-1$

وعليه تتقاطع المنحنيين في 3 نقاط

$-x>x^4$ on $(-1,0)$, $x>x^4$ on $(0,1)$

$$A=\int_{-1}^{0}(-x-x^4)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^4)\,dx$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1}=0-\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

19) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)=3x^3-x^2-10x$ ، $g(x)=-x^2+2x$

الحل:

$f(x)=g(x)$

$3x^3-\cancel{x^2}-10x=-\cancel{x^2}+2x$

$3x^3-12x=0$

$3x(x^2-4)=0$

0 , $2, -2$

$f>g$ on $(-2,0)$, $g>f$ on $(0,2)$

$$A=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))\,dx$$

$$A=\int_{-2}^{0}(3x^3-x^2-10x+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x-3x^3+x^2+10x)\,dx$$

$$A=\int_{-2}^{0}(3x^3-12x)\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+12x)\,dx$$

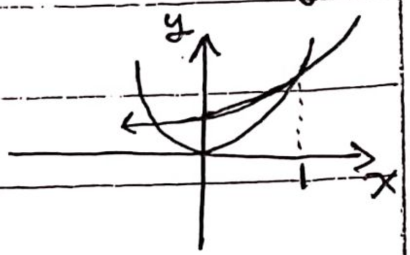
$$=\left(\frac{3x^4}{4}-6x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(-\frac{3x^4}{4}+6x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(0)-(12-24)+(-12+24)=24$$

رأفت ضاحي

١٠) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x)=e^{x}$ ، $g(x)=x^{2}$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=1$

الحل :



$$f > g$$

0 ——— 1

تأكد بالآلة الحاسبة

$$A=\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1 (e^{x}-x^{2})\,dx$$

$$=\left(e^{x}-\frac{x^{3}}{3}\right)\Big|_0^1=\left(e-\frac{1}{3}\right)-(1-0)=e-\frac{4}{3}$$

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}$ ، $h(x)=4\sqrt{x}$

الحل :

$$h(x)=f(x)$$

نربع

$$4\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^{2}$$

$$16x=\frac{1}{4}x^{4}$$

$$64x=x^{4}$$

$$x^{4}-64x=0$$

$$x(x^{3}-64)=0$$

$$0 \quad 4$$

$$h > f$$

0 ——— 4

$$A=\int_0^4 (h(x)-g(x))\,dx=\int_0^4 \left(4\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{2}\right)dx$$

$$A=\int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{2}\right)dx=$$

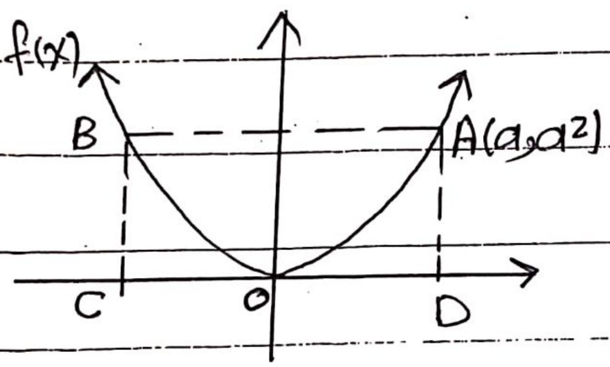
$$A=\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^{3}\right)\Big|_0^4$$

$$A=\frac{8(8)}{3}\ \frac{64}{6}=\frac{17}{6}$$

$$=\frac{64}{3}-\frac{32}{3}=\frac{32}{3}$$

رافت ضابي

12) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)=x^2$ اذا كان احداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$ فأثبت ان مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة AB تساوي ثلثي مساحة المستطيل ABCD



الحل:

محور التماثل $x = \frac{-b}{2a}$

$x = 0$

وعليه احداثي B هو $(-a, a^2)$

مساحة المستطيل هي $(2a)a^2 = 2a^3$

معادلة القطعة المستقيمة AB هي $y = a^2$

مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والقطعة المستقيمة:

$$R = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$= \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

وعليه:

$$\frac{4a^3}{3} = \frac{2}{3}(2a^3)$$

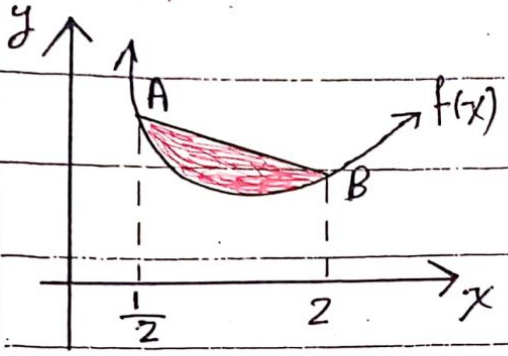
المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والقطعة المستقيمة

المستطيل

رافت ضباعين

13) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=\frac{2}{x^2}+x$ اذا كان

الاحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب



جد مساحة المنطقة المحصورة بين

المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$

الحل :-

نجد معادلة المستقيم AB :-

عند $x=\frac{1}{2}$ فان $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$

عند $x=2$ فان $f(2)=\frac{2}{4}+2=\frac{5}{2}$

$A(\frac{1}{2},\frac{17}{2})$ ، $B(2,\frac{5}{2})$ نجد الميل $m=\dfrac{\frac{17}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}-2}$

$$m=\frac{6}{\frac{-3}{2}}=-4$$

المعادلة $y-\frac{5}{2}=-4(x-2)$

$$y=\frac{21}{2}-4x$$

المساحة :- $R=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\left(\frac{21}{2}-4x\right)-\left(\frac{2}{x^2}+x\right)\right)dx$

$$R=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\left(\frac{21}{2}-4x\right)-\left(2x^{-2}+x\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{2}-5x-2x^{-2}\right)dx$$

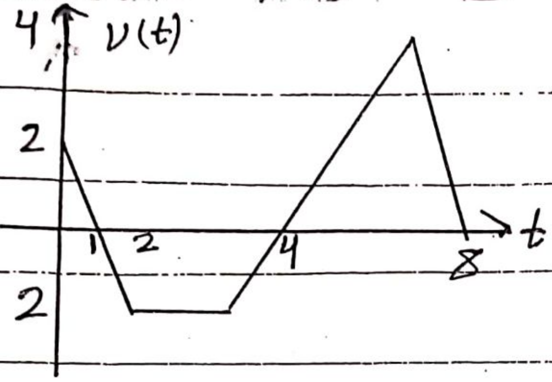
$$R=\left(\frac{21}{2}x-\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$R=(21-10+1)-\left(\frac{21}{4}-\frac{5}{8}+4\right)=12-\frac{69}{8}=\frac{27}{8}$$

رأفت ضاحي

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسم تتحرك على المحور x

في الفترة الزمنية $[0,8]$ اذا بدأ الجسم الحركة من $x=5$ عندما $t=0$



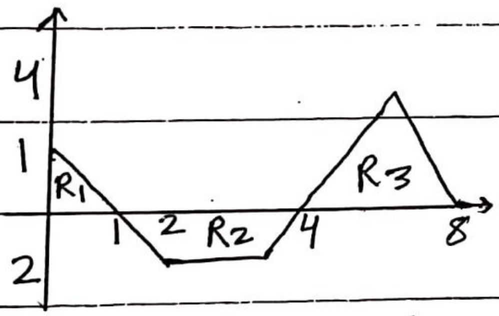
جد كلاً مما يأتي :-

14) ازاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة

15) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية

16) الموقع النهائي للجسيم

الحل :-



$R_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ المثلث

$R_2 = \frac{1}{2}(3+1)(2) = 4$

$R_3 = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$

14) $s(8) - s(0) = \int_0^8 v(t)\,dt = \int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^4 v(t)\,dt + \int_4^8 v(t)\,dt$

$= 1 - 4 + 8 = 5\ m$

15) $\int_0^5 |v(t)|\,dt = R_1 + R_2 + R_3$

$= 1 + 4 + 8 = 13\ m$

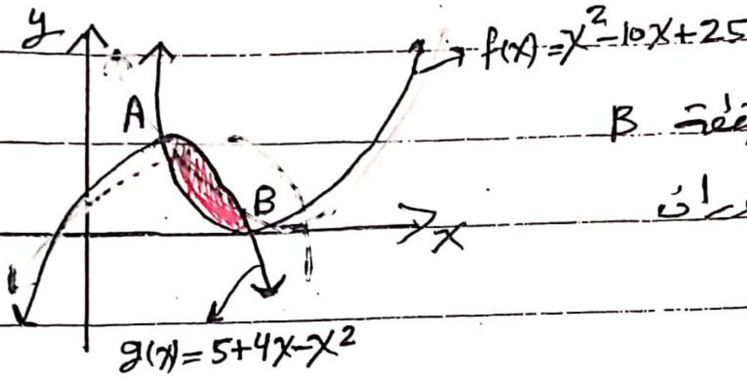
16) $s(8) - s(0) = \int_0^8 v(t)\,dt$ قانون الازاحة

$s(8) - 5 = 5$

$s(8) = 10\ m$

رافت ضاحي

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)=x^2-10x+25$ و $g(x)=5+4x-x^2$ معتمداً هذا الشكل ، اجب عن السؤالين الآتيين تباعاً



(17) جد احداثيي كل من النقطة A والنقطة B

(18) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x

الحل :

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2-10x+25 = 5+4x-x^2$$

$$2x^2-14x+20=0$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-5)(x-2)=0$$

$$5 \qquad 2$$

(17) عندما $x=2$ فان $g(2)=f(2)=9$

وعليه احداثي A هو $(2,9)$ واحداثي B هو $(5,0)$

(18)

$$v = \int_2^5 \pi(g^2(x) - f^2(x))\,dx$$

$$v = \pi\int_2^5 ((5+4x-x^2)^2 - (x^2-10x+25)^2)\,dx$$

$$v = \pi\int_2^5 \left((x^4-8x^3+6x^2+40x+25) - (x^4-20x^3+150x^2-500x+625)\right)dx$$

$$v = \pi\int_2^5 (12x^3-144x^2+540x-600)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{12x^4}{4} - \frac{144x^3}{3} + \frac{540x^2}{2} - 600x\right)\Big|_2^5 = 81\pi$$

راقات صباحي

١٩) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0,\pi]$ والمحور x حول المحور x

الحل:

$$V=\int_0^{\pi}\pi\,(f(x))^2\,dx=\int_0^{\pi}\pi\sin x\,dx$$

$$=(-\pi\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\pi\cos\pi+\pi\cos 0$$

$$=\pi+\pi=2\pi$$

---

٢٠) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=x^3$ حول المحور x

الحل:

$$g(x)=f(x)$$

نربع $\quad x^3=\sqrt{x}$

$$x^6=x$$

$$x^6-x=0$$

$$x(x^5-1)=0$$

$$0 \qquad x=1$$

$f>g$ على الفترة من 0 إلى 1

$$V=\int_0^1\pi\,(f^2(x)-g^2(x))\,dx=\int_0^1\pi\,(x-x^6)\,dx$$

$$V=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\frac{5\pi}{14}$$

راقت صافي

21) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=1+\sec x$ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والمستقيم $y=3$ حول المحور x

الحل :

$$f(x)=y$$

$$1+\sec x=3$$

$$\sec x=2 \rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$$

$y>f$

$\frac{-\pi}{3}$ ——— $\frac{\pi}{3}$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(y^2-f^2\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(9-(1+\sec x)^2\right)dx$$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(9-1-2\sec x-\sec^2 x\right)dx$$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(8-2\sec x-\sec^2 x\right)dx$$

$$=\pi\left(8x-2\ln|\sec x+\tan x|-\tan x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\pi\left(\left(\frac{8\pi}{3}-2\ln|2+\sqrt{3}|-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{-8\pi}{3}-2\ln|2-\sqrt{3}|+\sqrt{3}\right)\right)$$

$$=\pi\left(\frac{16\pi}{3}+2\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)-2\sqrt{3}\right)$$

رأفت صافي

مهارات التفكير العليا

اجب عن الاسئلة الاتية بياناً :-

(22) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$y = x^{\frac{1}{2}}$ و $y = x^2$ ،

(23) جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $y = x^{\frac{1}{3}}$ و $y = x^3$

(24) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$y = x^{\frac{1}{n}}$ ، $y = x^n$ حيث n عدد صحيح اكبر من او يساوي (2)

الحل :-

22) نجعل $x^{\frac{1}{2}} = x^2$

$x = x^4$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1$

$x^{\frac{1}{2}} > x^2$

$0 \qquad 1$

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

---

23) نجعل $x^{\frac{1}{3}} = x^3$

$x = x^9$

$x^9 - x = 0$

$x(x^8 - 1) = 0$

$0 \qquad \pm 1$

$x^3 > x^{\frac{1}{3}} \qquad x^{\frac{1}{3}} > x^3$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^{\frac{1}{3}})\,dx + \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

رافت ضاحي ٠٧٨٥٥٠٥٢٠

(24 $x^n = x^{\frac{1}{n}}$ لاحظ من (22) ، (23) ما يلي

اذا كان n زوجي فان تتقاطع ١ و ٠

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n)\,dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

اذا كان n فردي فان تتقاطع ١ و ٠ و ١-

$$A = \int_{-1}^0 (x^n - x^{\frac{1}{n}})\,dx + \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) + \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{-1+n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}$$

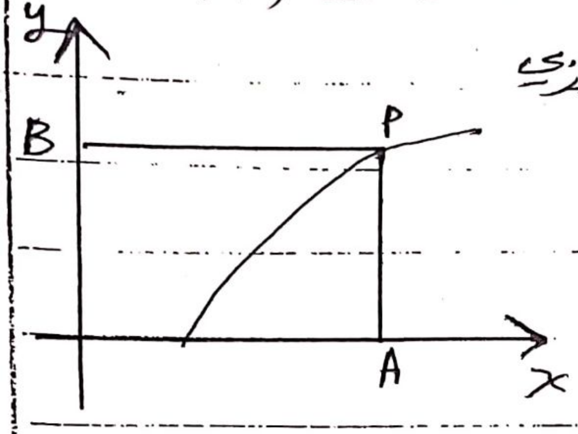
$$= \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n+1}$$

سرافت صالح ٢٠٠٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{2x-1}$ حيث $x\geq 1$

اذا كانت النقطة $P(9,4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ حيث

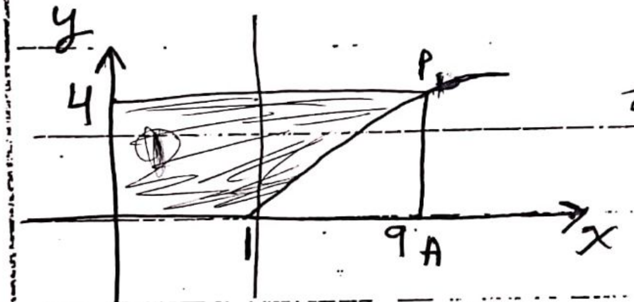


$\overline{PA}$ يوازي المحور y و $\overline{PB}$ يوازي المحور x جد كلاً مما يأتي:

25) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم $y=4$ والمحورين الاحداثيين

26) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم $x=9$ والمحور x

الحل:

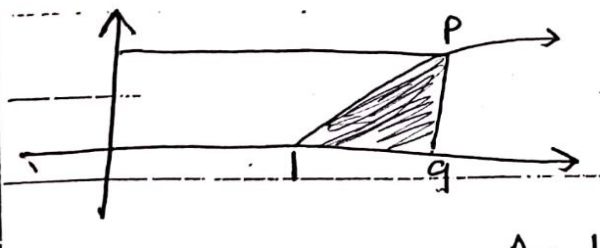


25) هذه المنطقة محصورة بين 3 اقترانات
حيث محور x ← اقتران وعليه تجزئ
من عند $x=1$

$$A=\int_0^1 4\,dx+\int_1^9 (4-\sqrt{2x-2})\,dx$$

$$=4+\int_1^9 \left(4-(2x-2)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=4+\left(4x-\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^9=4+\left(36-\frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}\right)-(4-0)=\frac{44}{3}$$



26)

$$A=\int_1^9 \sqrt{2x-2}\,dx$$

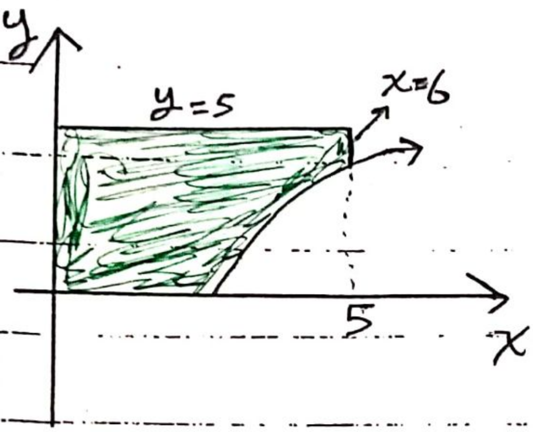
$$A=\int_1^9 (2x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$A=\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=\frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(0)$$

$$=\frac{64}{3}$$

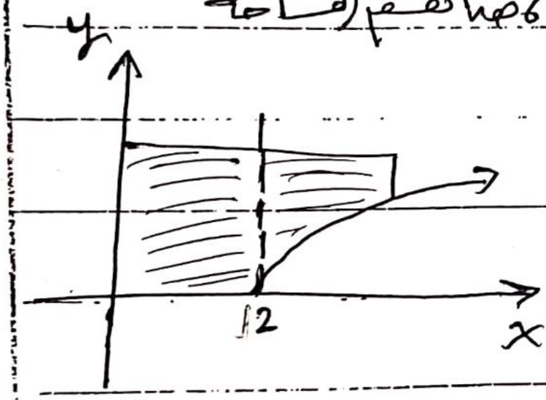
مرافقت ضاحي ٠٧٧٥٥٠٠٥٠٤

بين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الاحداثيين في الربع الاول، ومنحنى الاقتران $f(x) = 2\sqrt{x-2}$ والمستقيمين $x=6$ و $y=5$ جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور x



الحل:

المنطقة المظللة محصورة بين 3 منحنيات لهذا نقسم المساحة حسب تقسيم من عند $x=2$



$$V = \int_0^2 \pi (5)^2 dx + \int_2^6 \pi \left(5^2 - (2\sqrt{x-2})^2\right) dx$$

$$V = \int_0^2 25\pi \, dx + \int_2^6 \pi (25 - 4(x-2)) dx$$

$$V = \int_0^2 25\pi \, dx + \int_2^6 \pi (33 - 4x) dx$$

$$V = (25\pi x)\Big|_0^2 + \pi(33x - 2x^2)\Big|_2^6$$

$$= 50\pi + \pi\left(\left((33)(6) - 2(36)\right) - (66 - 8)\right)$$

$$= 50\pi + \pi(198 - 72 - 58)$$

$$= 50\pi + 68\pi$$

$$= 118\pi$$

رأفت ضايق

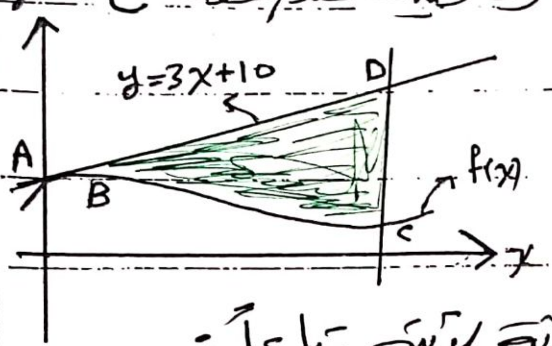
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$

والمستقيم $y=3x+10$ اذا مر المستقيم ومنحنى الاقتران

بالنقطة A الواقعة على المحور y ، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة

عظمى محلية عند النقطة B وقيمة صغرى محلية عند النقطة C



وقيمة صغرى محلية عند النقطة C

قطع الخط الموازي للمحور y والمار

بالنقطة C المستقيم $y=3x+10$

في النقطة D ، فاجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً :

(28) جد احداثيات كل من النقطة B والنقطة C

(29) أثبت ان $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A

(30) جد مساحة المنطقة المظللة

الحل :-

28) اجد العظمى والصغرى للاقتران $f(x)$

$f'(x)=3x^2-10x+3$

$3x^2-10x+3=0$

$(3x-1)(x-3)$

$x=\frac{1}{3}$ $\quad$ $x=3$

f': $+++$ $\frac{1}{3}$ $---$ 3 $+++$

عند $x=\frac{1}{3}$ عظمى محلية وهي $f(\frac{1}{3})$ حيث :-

$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}-\frac{5}{9}+11=\frac{283}{27}$

عند $x=3$ صغرى محلية وهي $f(3)$ حيث

$f(3)=27-45+9+10=1$

وعليه $B(\frac{1}{3},\frac{283}{27})$ ، $C(3,1)$

مرافقت ضياء

29) نجد معادلة المماس لـ $f(x)$ عند النقطة A

A تقع على محور y حيث $x=0$ وعليه $f(0)=0-0+0+10$
$=10$

احداثيات A هو $(0,10)$

نجد الميل: $f'(x)=3x^2-10x+3$

$f'(0)=3$

معادلة المماس $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-10=3(x-0)$

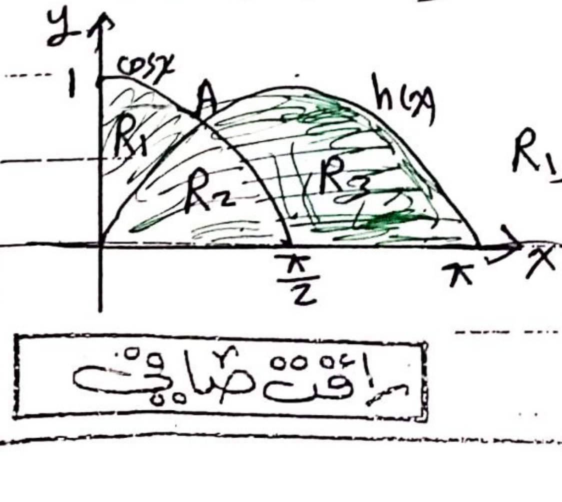
$y=3x+10$ وهذه معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$

وعليه $\overleftrightarrow{AD}$ مماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة A

30) $$A=\int_0^3 (y-f(x))\,dx=\int_0^3 (3x+10-x^3+5x^2-3x-10)\,dx$$
$$=\int_0^3 (5x^2-x^3)\,dx$$
$$=\left(\frac{5x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3=45-\frac{81}{4}=\frac{99}{4}$$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)=\cos x$ ، $h(x)=\sin x$

معتمداً على الشكل أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



31) جد احداثيي النقطة A

32) جد مساحة كل من المناطق R_1, R_2, R_3

33) اثبت أن مساحة المنطقة R_1 الى مساحة المنطقة R_2 تساوي $\sqrt{2}:2$

رأفت ضاحي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:

(31) $f(x) = h(x)$

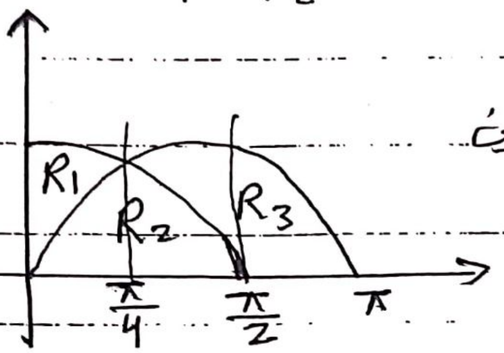
$\cos x = \sin x$ نقسم على $\cos x$

$1 = \tan x$

$x = \frac{\pi}{4}$

عند $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

احداثي A هي $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



(32) المساحة R_1 محصورة بين منحنيين

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0 + 1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

المساحة R_2 محصورة بين ثلاثة منحنيات تقسم عند $x = \frac{\pi}{4}$

$$R_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

المساحة R_3 تقسم عند $x = \frac{\pi}{2}$

$$R_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

مرافقت صباحي

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) + -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= -1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 + 0$$

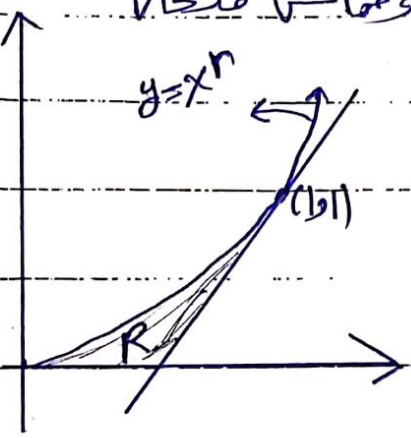
$$= -1 + \sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{A(R_1)}{A(R_2)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ (33)

يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران $y = x^r$ ، حيث $r > 1$ والمحور x ، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1,1)$:



(34) أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $\left(\frac{r-1}{r}, 0\right)$

(35) استعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي $\frac{r-1}{2r(r+1)}$

(36) جد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يمكن

الحل :

(34) نجد معادلة المماس عند $(1,1)$

$$y' = r x^{r-1}$$

$$y' = r(1)^{r-1} = r$$ ← الميل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = r(x-1)$$
$$y = rx - r + 1$$

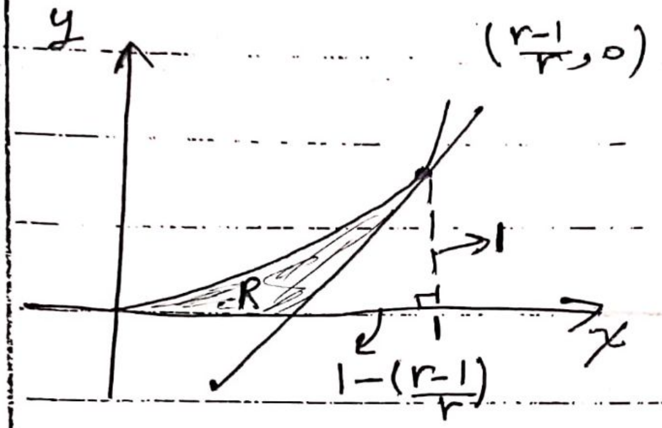
يقطع محور x عند $y = 0$

$$0 = rx - r + 1$$
$$rx = r - 1$$
$$x = \frac{r-1}{r}$$

وعليه المماس يقطع محور x عند $\left(\frac{r-1}{r}, 0\right)$

أ. رافت ضباعين

(35) هنا المساحة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x
والمستقيمان $x=0$ و $x=1$ مطروحاً منها مساحة المثلث
الذي رؤوسه $(1,1)$ و $(1,0)$ و $(\frac{r-1}{r},0)$



$$A=\int_0^1 x^r\,dx-\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{r-1}{r}\right)}_{\text{القاعدة}}\underbrace{(1)}_{\text{الارتفاع}}$$

$$A=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2r}=\frac{(1)^{r+1}}{r+1}-0-\frac{1}{2r}=\frac{1}{r+1}-\frac{1}{2r}$$

$$=\frac{2r-r-1}{(r+1)(2r)}=\frac{r-1}{2r(r+1)}$$

(36) اشتق

$$A(r)=\frac{r-1}{2r^2+2r}$$

$$A'=\frac{(2r^2+2r)-(r-1)(4r+2)}{(2r^2+2r)^2}=\frac{2r^2+2r-(4r^2-2r-2)}{(2r^2+2r)^2}=\frac{-2r^2+4r+2}{(2r^2+2r)^2}$$

نضع $A'=0$ حيث نأخذ البسط ونساويه بالصفر

$$-2r^2+4r+2=0$$

$r^2-2r-1=0$ القانون العام

$r=1\pm\sqrt{2}\rightarrow r=1+\sqrt{2}$

لأن $r\geq 1$

A' + + $\underset{1+\sqrt{2}}{\bullet}$ − −

$\boxed{\text{إشراف ضاحي}}$

قيمة r التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي $r=1+\sqrt{2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2-4x+6$
عند نقطة (3و1) يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند نقطة P
جد كلاً مما يأتي :-

37) احداثيات نقطة P

38) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مقرباً اجابتي الى أقرب 3 منازل عشرية

الحل :-

37) نجد معادلة العمودي :-

$$f'(x)=2x-4$$
$$m=f'(1)=2-4=-2$$

معادلة العمودي :-

$$y-3=\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

نجد نقاط تقاطع المنحنى مع العمودي :-

$$y=f$$
$$x^2-4x+6=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

اضرب بـ (2)
نرتب

$$2x^2-8x+12=x+5$$
$$2x^2-9x+7=0$$
$$(2x-7)(x-1)=0 \longrightarrow x=1 \text{ و } \frac{7}{2}$$

عند $x=\frac{7}{2}$ فان $f(\frac{7}{2})=\frac{49}{4}-14+6=$

وعليه احداثي P هو $(\frac{7}{2}, \frac{17}{4})$

38)

$$y>f$$

1 ——— $\frac{7}{2}$

$$A=\int_1^{\frac{7}{2}}(y-f)\,dx=\int_1^{\frac{7}{2}}(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}-x^2+4x-6)\,dx=\int_1^{\frac{7}{2}}(\frac{9}{2}x-x^2-\frac{7}{2})\,dx$$

$$=\left(\frac{9}{4}x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x\right)\Big|_1^{\frac{7}{2}}$$

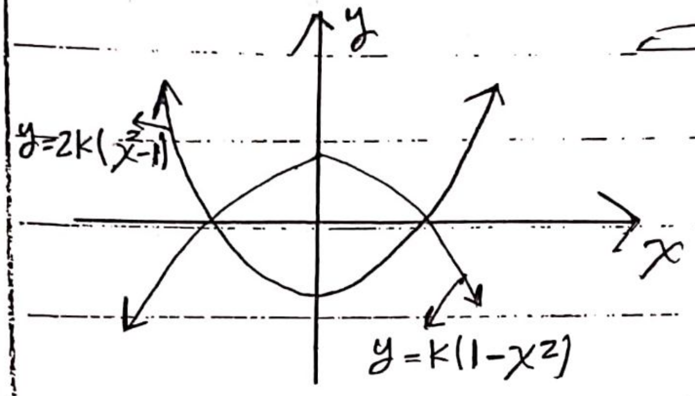
$$=\left(\frac{9}{4}\left(\frac{49}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3-\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{3}-\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{125}{48}\simeq 2.604$$

اسراء فتحي ٠٥٩٥٨٢٠٠٩٦٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين تقطع كل منهما المحور x عندما $x=-1$ و $x=1$ اذا كانت معادلتا القطعين هما $y=2k(x^2-1)$ و $y=k(1-x^2)$ وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات جد قيمة الثابت K



الحل:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(k(1-x^2)-2k(x^2-1)\right)dx$$

$$A=\int_{-1}^{1}(k-kx^2-2kx^2+2k)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{1}(3k-3kx^2)\,dx=3k\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$$

$$A=3k\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=3k\left(1-\frac{1}{3}\right)-3k\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$A=2k+2k=4k$$

لكن المساحة تساوي 8

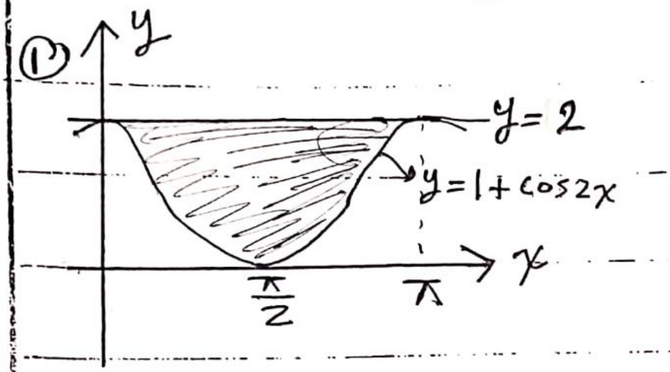
$$4k=8$$

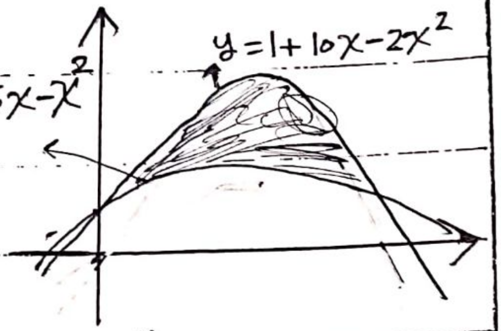
$$\boxed{k=2}$$

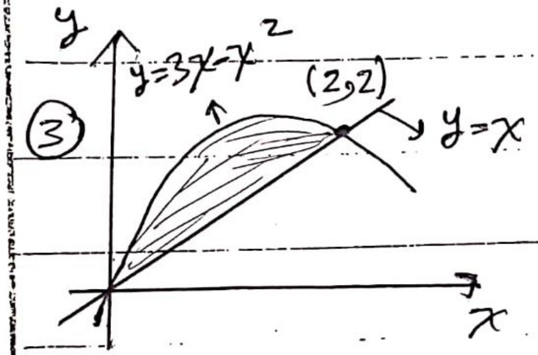
م/ أ. ضياء جي

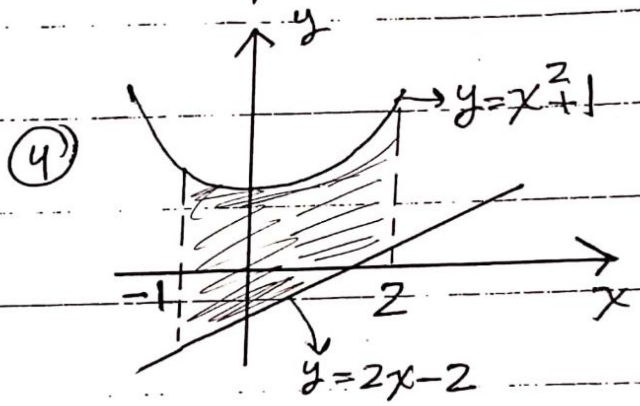
كتاب التمارين

جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية :-









الحل :

① $A = \int_0^{\pi} (2-(1+\cos 2x))\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\,dx$

$= (x - \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\pi} = (\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi) - (0 - \frac{1}{2}\sin 0)$

$= (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi$

② نجد نقاط التقاطع :

$1+5x-x^2 = 1+10x-2x^2$

$x^2 - 5x = 0 \longrightarrow x(x-5)=0 \longrightarrow x = 0, 5$

$A = \int_0^{5} ((1+10x-2x^2)-(1+5x-x^2))\,dx = \int_0^{5} (5x-x^2)\,dx$

$= (\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^{5} = (\frac{125}{2} - \frac{125}{3}) = \frac{125}{6}$

رافت ضايف

③ $A = \int_0^2 (3x - x^2 - x)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$

---

④ $\int_{-1}^2 (x^2 + 1 - (2x - 2))\,dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^2$

$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 - 3\right) = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$

---

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$

الحل:

$f(x) = g(x)$

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2 \qquad x = 1$

$g > f$

$-2 \qquad\qquad 1$

$A = \int_{-2}^1 (g - f)\,dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)\,dx$

$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$

$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

رأفت ضافي

6) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ والمستقيم $x = 2$

الحل :

$f > g$

$1 \qquad\qquad 2$

$g(x) = f(x)$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 1$

0 (مستحيل لأن عندها الاقتران غير معرف)

$$A = \int_1^2 (f-g)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 +$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

---

7) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = \cos x$

$g(x) = 1 - \cos x$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = \pi$

الحل :

$f > g \qquad f < g$

$0 \qquad \frac{\pi}{3} \qquad \pi$

$f(x) = g(x)$

$\cos x = 1 - \cos x$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (f-g)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (g-f)\,dx$$

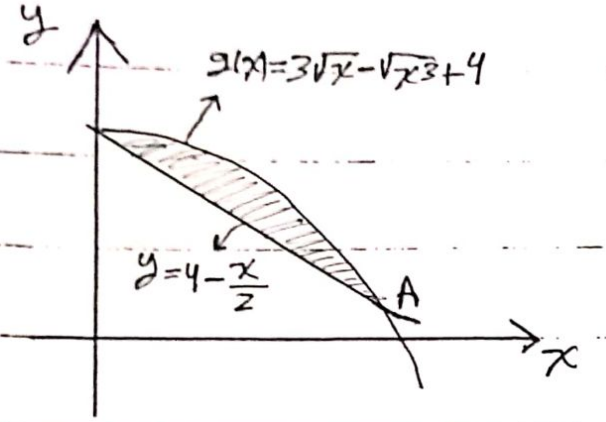
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2\cos x)\,dx = (2\sin x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + (x - 2\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 0 + (\pi - 0) - \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

رأفت ضاحي

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $g(x)=3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4$ والمستقيم $y=4-\frac{x}{2}$ معتمداً الشكل ، اجب عن السؤالين الآتيين تباعاً



8) جد احداثيي النقطة A

9) جد مساحة المنطقة المظللة

الحل :-

8)
$$g=y$$

$$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\cancel{4}=\cancel{4}-\frac{x}{2}$$ نضرب بـ (2)

$$6\sqrt{x}-2\sqrt{x}^3+x=0$$

افرض $u=\sqrt{x}$
حيث $u>0$

$$6u-2u^3+u^2=0$$
$$2u^3-u^2-6u=0$$
$$u(2u^2-u-6)=0$$
$$u(2u+3)(u-2)=0$$
$$u=0 \quad u=\frac{-3}{2} \quad u=2$$

عند $u=2$ فان $2=\sqrt{x}$
$4=x$ $\longrightarrow$ $y=4-\frac{x}{2}=4-\frac{4}{2}=2$

وعليه احداثي A هي $(4,2)$

9)
$$A=\int_0^4 (g(x)-y)\,dx=\int_0^4 (3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4-4+\frac{x}{2})\,dx$$
$$=\int_0^4 (3x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x)\,dx$$
$$=\left(2\sqrt{x}^3-\frac{2}{5}\sqrt{x}^5+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^4$$
$$=16-\frac{64}{5}+4=20-\frac{64}{5}$$
$$=\frac{36}{5}$$

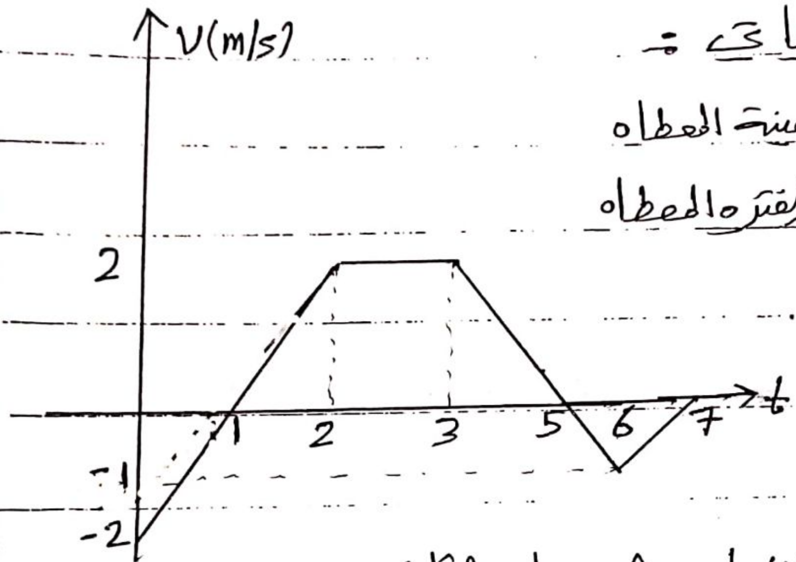
رأفت صباح

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة $[0, 7]$ ، اذا بدأ الجسم الحركة من $x=2$ عندما $t=0$ جد كلاً مما يأتي :

10) ازاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاه

11) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة المعطاه

12) الموقع النهائي للجسم .



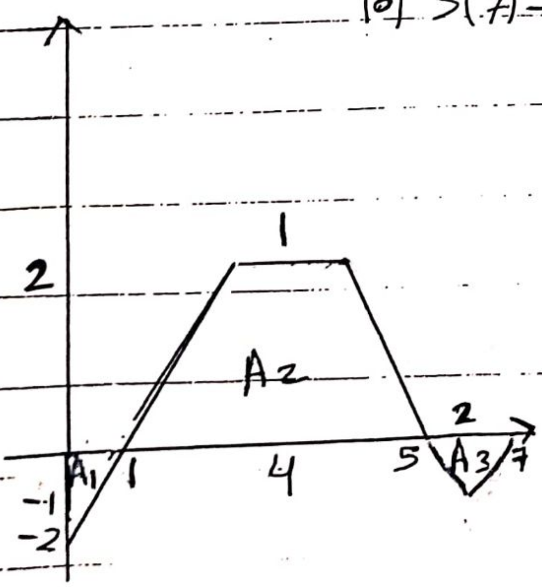
الحل :

نجد المساحات

مساحة المثلث $A_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$

مساحة شبه المنحرف $A_2 = \frac{1}{2}(4+1)(2) = 5$

مساحة المثلث $A_3 = \frac{1}{2}(2)(1) = 1$



10) $S(7) - S(0) = \int_0^7 v(t)\,dt$

$= \int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^5 v(t)\,dt + \int_5^7 v(t)\,dt$

$= -1 + 5 - 1 = 3 \text{ m}$

11) $\int_0^7 |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

$= 1 + 5 + 1 = 7 \text{ m}$

12) $S(7) - S(0) = \int_0^7 v(t)\,dt$

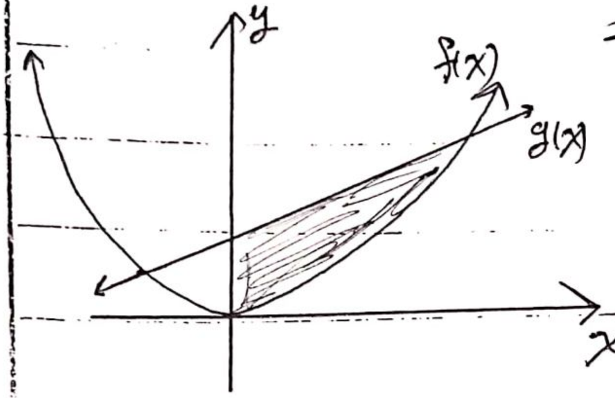
$S(7) - 2 = 3$

$S(7) = 5 \text{ m}$

رافت صابح

13) يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x+3$

جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x



الحل:

نجد تقاطع المنحنيين

$g = f$

$\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x^2$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3 \qquad x=-2$

$$V=\int_0^3 \pi\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$$

$$V=\int_0^3 \pi\left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_0^3 \left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\frac{1}{4}x^4\right)dx=\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Big|_0^3$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^3-\frac{1}{20}(3)^5\right)=\frac{153}{5}\pi$$

14) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\sqrt{\ln x}$ والمحور x والمستقيمين $x=e$ و $x=e^3$ حول محور x

الحل:

$$V=\pi\int_e^{e^3} f^2(x)\,dx=\pi\int_e^{e^3}\ln x\,dx$$

اجزاء

$u=\ln x \qquad dv=dx$

$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=x$

$$=\pi\left(x\ln x\Big|_e^{e^3}-\int_e^{e^3}dx\right)$$

$$=\pi\left(e^3\ln e^3-e\ln e-e^3+e\right)$$

$$=\pi\left(3e^3-e-e^3+e\right)$$

$$=2\pi e^3$$

راقت ضاهي

15) جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحني

$f(x)=\sqrt{2x}$ ، $g(x)=x^2$ حول المحور x

الحل :

$$g(x)=f(x)$$
$$x^2=\sqrt{2x}$$
$$x^4=2x$$
$$x^4-2x=0 \rightarrow x(x^3-2)=0 \rightarrow x=0 , x=\sqrt[3]{2}$$

$f>g$

$0 \qquad \sqrt[3]{2}$

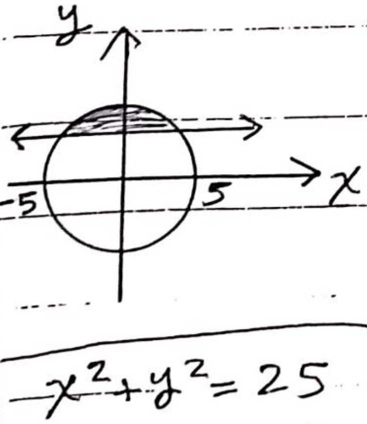
$$V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}(f^2(x)-g^2(x))dx$$
$$V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}(2x-x^4)dx$$
$$V=\pi\left(x^2-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{2}}=\pi\left(\sqrt[3]{4}-\frac{\sqrt[3]{2}^5}{5}\right)=\frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$$

---

16) يبين الشكل المجاور دائرة معادلتها $x^2+y^2=25$ اذا دار الجزء المظلل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y=4$ حول المحور x لتشكيل مجسم، فما حجم الجسم الناتج، مبرراً اجابتك

الحل :- نجد نقاط التقاطع

نعوض $y=4$ في العلاقة



$$x^2+16=25$$
$$x^2=9 \rightarrow x=-3,3$$

$$V=\int_{-3}^{3}\pi(y^2-(4)^2)dx=\int_{-3}^{3}\pi(25-x^2-16)dx$$

$x^2+y^2=25$

$y^2=25-x^2$

$$V=\pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\pi\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}$$
$$=\pi((27-9)-(-27+9))$$
$$=36\pi$$

رافت صابحي