التكامل

الفرع العلمي

التكامل بالاجزاء

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي 0785824464

الدرس (4) التكامل بالأجزاء

التحقق من فهمي

1) جد كلاً من التكاملات الآتية صفحة 63

a) $\int x \sin x \, dx$

b) $\int x^2 \ln x \, dx$

*c) $\int 2x\sqrt{7-3x} \, dx$

d) $\int 3x e^{4x} \, dx$

الحل:

a) $u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x\cos x + \sin x + c$

b) $u = \ln x \qquad dv = x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \, dx$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

c)

$u = 2x \qquad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = 2\,dx \qquad v = \frac{-2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{-4x}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}} + \int \frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}} dx$

$\frac{-4x}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(7-3x)^{\frac{5}{2}} + c$

$\frac{-4x}{9}\sqrt{(7-3x)^3} - \frac{4}{135}\sqrt{(7-3x)^5} + c$

d) $u = 3x \qquad dv = e^{4x} dx$

$du = 3\,dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$

$\int 3x e^{4x} dx = \frac{3}{4} x e^{4x} - \int \frac{3}{4} e^{4x} dx$

$= \frac{3}{4} x e^{4x} - \frac{3}{16} e^{4x} + c$

رافت ضياء

2) جد كلاً من التكاملات الآتية صفحة 64

a) $\int x^2 \sin x \, dx$

b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

الحل:

a) $u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$

اجزاء مره اخرى

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 2x & dv = \cos x\,dx \\ du = 2\,dx & v = \sin x \end{array}}$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + \left[2x\sin x - \int 2\sin x\,dx\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

b) $u = x^3 \qquad dv = e^{4x}\,dx$

$du = 3x^2\,dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$

اجزاء مره اخرى

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{3}{4}x^2 & dv = e^{4x}\,dx \\ du = \frac{3}{2}x\,dx & v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array}}$$

$$\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4}x^2 e^{4x}\,dx$$

$$\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} - \int \frac{3}{8}x e^{4x}\,dx$$

اجزاء مره اخرى

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \frac{3}{8}x & dv = e^{4x}\,dx \\ du = \frac{3}{8}\,dx & v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array}}$$

$$\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} - \int \frac{3}{8}x e^{4x}\,dx$$

$$\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \int \frac{3}{32} e^{4x}\,dx$$

$$\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \frac{3}{128} e^{4x} + c$$

الافضل حل هذه الاسئلة بطريقة الجدول

رافت صابحي

2

3) جد كلاً من التكاملات الآتية ص 66

*a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$	b) $\int \sec^3 x\, dx$

الحل :-

a) $\int e^{-x} \sin x\, dx$

$u = \sin x \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = -e^{-x}$

اجزاء مره اخرى

$u = \cos x \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = -e^{-x}$

$\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x\, dx$

$\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x\, dx$

$2\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$ نقسم على (2)

$\int e^{-x} \sin x\, dx = \frac{1}{2}(-e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x) + c$

b) $\int \sec x \sec^2 x\, dx$

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$

$du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$

$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$ فك الاقواس وتوزيع

$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$

$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$

$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$ من الدرس الاول نضرب بـ $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$ نقسم على (2)

$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c$

رافت صباحي

٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤

4) جد كلاً من التكاملين الآتيين :- ص 67

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

b) $\int x^5 e^x \, dx$

الحل :- نستخدم الجدول

a)

اشتقاق		تكامل
x^4		$\cos 4x$
$4x^3$	$+$	$\frac{1}{4}\sin 4x$
$12x^2$	$-$	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
$24x$	$+$	$-\frac{1}{64}\sin 4x$
24	$-$	$\frac{1}{256}\cos 4x$
0	$+$	$\frac{1}{1024}\sin 4x$

$$\int x^4 \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \sin 4x + \frac{1}{4}x^3 \cos 4x - \frac{3}{16}x^2 \sin 4x - \frac{3}{32}x \cos 4x + \frac{3}{128}\sin 4x + c$$

b)

اشتقاق		تكامل
x^5		e^x
$5x^4$	$+$	e^x
$20x^3$	$-$	e^x
$60x^2$	$+$	e^x
$120x$	$-$	e^x
120	$+$	e^x
0	$-$	e^x

$$\int x^5 e^x \, dx = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120x e^x - 120 e^x + c$$

رافت صباحي

٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5) يمثل الاقتران $C'(x) = (0.1x+1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدية

لكل قطعة تنتج في احدى الشركات ، حيث x عدد القطع المنتجة

و $C(x)$ تكلفة انتاج x قطعة بالدينار. جد اقتران التكلفة $C(x)$

علماً بان $C(10) = 200$

الحل : $$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (0.1x+1)e^{0.03x}\,dx$$

$$u = 0.1x+1 \qquad dv = e^{0.03x}$$

$$du = 0.1\,dx \qquad v = \frac{1}{0.03}e^{0.03x}$$

$$\int (0.1x+1)e^{0.03x}\,dx = (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \int \frac{0.1}{0.03}e^{0.03x}\,dx$$

$$= (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \frac{0.1}{(0.03)(0.03)}e^{0.03x} + K$$

$$C(x) = (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \frac{0.1}{0.0009}e^{0.03x} + K$$

نجد K حيث $K(10) = 200$

$$C(10) = \frac{2}{0.03}e^{0.3} - \frac{0.1}{0.0009}e^{0.3} + K$$

$$200 = \frac{200}{3}e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + K \longrightarrow K \simeq 260$$ آلة حاسبة

$$C(x) = (0.1x+1)\left(\frac{100}{3}e^{0.03x}\right) - \frac{1000}{9}e^{0.03x} + 260$$

رأفت صبابحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6) جد كلاً من التكاملين الآتيين صفحة 70

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ b) $\int_0^1 x e^{-2x}\,dx$

الحل:-

$u=\ln x \qquad dv = x^{-2}\,dx$

$du=\frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{-1}{x}$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(\frac{-1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx$

$= \left(\frac{-1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e + \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^e$

$= \left(\frac{-1}{e}\ln e\right) + \frac{1}{1}\ln 1 + \frac{-1}{e} + \frac{1}{1}$

$= \frac{-1}{e} + 0 + \frac{-1}{e} + 1 = \frac{-2}{e} + 1$

$u = x \qquad dv = e^{-2x}\,dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\int_0^1 x e^{-2x}dx = \left(\frac{-x}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$= \left(\frac{-x}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{-1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^1$

$= -\frac{1}{2}e^{-2} + 0 + -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{-1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4e^2} + \frac{1}{4}$

7) جد قيمة كل من التكاملين الآتيين ص 71

a) $\int (x^3+x^5)\sin x^2\,dx$	b) $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

a) $u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int (x^3+x^5)\sin u\,\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}(x^2+x^4)\sin u\,du$

نكتب x^2 و x^4 بدلالة u

$\int \frac{1}{2}(u+u^2)\sin u\,du$

نستعمل الجدول

اشتقاق	تكامل
$\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2$	$\sin u$
$\frac{1}{2}+u$	$-\cos u$
1	$-\sin u$
0	$\cos u$

(الإشارات: $+$، $-$، $+$)

$= -\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}u^2\right)\cos u + \left(\frac{1}{2}+u\right)\sin u + \cos u + c$

$= -\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\cos x^2 + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sin x^2 + \cos x^2 + c$

b) $u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int x^5 e^u \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}x^4 e^u\,du$

نكتب x^4 بدلالة u

$\int \frac{1}{2}u^2 e^u\,du$

نستخدم الجدول

اشتقاق	تكامل
$\frac{1}{2}u^2$	e^u
u	e^u
1	e^u
0	e^u

(الإشارات: $+$، $-$، $+$)

$\int \frac{1}{2}u^2 e^u\,du = \frac{1}{2}u^2e^u - ue^u + e^u + c$

$= \frac{1}{2}x^4e^{x^2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + c$

راقت ضياء

التدريب وحل المسائل

جد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int (x+1)\cos x\,dx$	2) $\int x e^{\frac{x}{2}}\,dx$	3) $\int (2x^2-1)e^{-x}\,dx$
4) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$	5) $\int x\sin x\cos x\,dx$	6) $\int x\sec x\tan x\,dx$
7) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$	8) $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$	9) $\int 2x^2\sec^2 x\tan x\,dx$
10) $\int (x-2)\sqrt{8-x}\,dx$	11) $\int x^3\cos 2x\,dx$	12) $\int \frac{x}{6^x}\,dx$
13) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$	14) $\int \cos x\ln\sin x\,dx$	15) $\int e^x\ln(1+e^x)\,dx$

الحل :- الجدول السريع

1) $u = x+1 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x+1)\cos x\,dx = (x+1)\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= (x+1)\sin x + \cos x + c$$

2) $u = x \qquad dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

$$\int x e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + c$$

3)

الاشتقاق		التكامل
$2x^2-1$	$+$	e^{-x}
$4x$	$-$	$-e^{-x}$
4	$+$	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$$= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x} + c$$

عامل مشترك $-e^{-x}$

$$= -e^{-x}(2x^2-1+4x+4) + c$$
$$= -e^{-x}(2x^2+4x+3) + c$$

رافت صابحي

4) $\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int \frac{1}{2}\ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{2}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x$

$\int \ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}x\ln x - \int \frac{1}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$

5) $\int x\sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx$

$u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = \frac{1}{2}\,dx \qquad v = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{-1}{4}x\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x\,dx$

$= \frac{-1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$

6) $u = x \qquad dv = \sec x\tan x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sec x$

$\int x\sin x\tan x\,dx = x\sec x - \int \sec x\,dx$

$= x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$

7) $\int x\csc^2 x\,dx$

$u = x \qquad dv = \csc^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$\int x\csc^2 x\,dx = -x\cot x + \int \cot x\,dx$

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$

8) $u = \ln x \qquad dv = x^{-3}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{-1}{2x^2}$

$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \frac{-\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}\,dx$

$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2}x^{-3}\,dx$

$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{x^{-2}}{-2}$

$= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

رأفت ضناوي

8

9) $u = 2x^2$ $\qquad dv = \sec^2 x \tan x \, dx$

$du = 4x\,dx$ $\qquad v = \frac{1}{2}\tan^2 x$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x \, u \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u\,du = \frac{u^2}{2}$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = x^2 \tan^2 x - \int 2x \tan^2 x \, dx$$

أجزاء

$u = 2x$ $\qquad dv = \tan^2 x \, dx$

$du = 2dx$ $\qquad v = \tan x - x$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = x^2 \tan^2 x - \left[2x(\tan x - x) - \int 2(\tan x - x)\,dx\right]$$

$$= x^2 \tan^2 x - \left[2x(\tan x - x) - 2\left(-\ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}\right)\right]$$

$$= x^2 \tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 - 2\ln|\cos x| - x^2 + c$$

$$= x^2 \tan^2 x - 2x\tan x + x^2 - 2\ln|\cos x| + c$$

10) $u = x - 2$ $\qquad dv = (8-x)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx$ $\qquad v = -\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int (x-2)\sqrt{8-x}\,dx = -\frac{2}{3}(x-2)(8-x)^{\frac{3}{2}} + \int \frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= -\frac{2}{3}(x-2)(8-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(8-x)^{\frac{5}{2}} + c$$

11)

الجدول افضل

اشتقاق		تكامل
x^3	+	$\cos 2x$
$3x^2$	−	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
6	−	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
0		$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$\int x^3 \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + c$$

12) $\int x\,6^{-x}\,dx$

$u = x \qquad dv = 6^{-x}\,dx$

$du = dx \qquad v = \dfrac{-6^{-x}}{\ln 6}$

$$\int x\,6^{-x}\,dx = \frac{-x\,6^{-x}}{\ln 6} + \int \frac{6^{-x}}{\ln 6}\,dx$$

$$= \frac{-x\,6^{-x}}{\ln 6} + \frac{-6^{-x}}{(\ln 6)^2} + C$$

---

13) $u = e^{-x} \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = -e^{-x}\,dx \qquad v = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \int \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x\,dx$$

اجزاء مرة آخرى

$u = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad dv = \cos 2x\,dx$

$du = \frac{-1}{2}e^{-x} \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \left[\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x + \int \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x\,dx\right.$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

نضرب ب $\frac{4}{5}$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-2}{5}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x + C$$

$$= \frac{-1}{5}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

رأفت ضاحي

14) $u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \qquad v = \sin x$

$$\int \cos x \ln \sin x\, dx = \sin x \ln \sin x - \int \cos x\, dx$$
$$= \sin x \ln \sin x - \sin x + c$$

---

15) $a = 1 + e^x$

$\frac{da}{dx} = e^x \longrightarrow dx = \frac{da}{e^x}$

$$\int e^x \ln a \frac{da}{e^x} = \int \ln a\, da$$ اجزاء

$u = \ln a \qquad dv = da$

$du = \frac{1}{a} da \qquad v = a$

$$\int \ln a\, da = a \ln a - \int da$$
$$= a \ln a - a + c$$
$$= (1+e^x)\ln(1+e^x) - (1+e^x) + c$$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$	17) $\int_1^e \ln x^2\, dx$	18) $\int_1^2 \ln(xe^x)\, dx$
19) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x \sec^2 3x\, dx$	20) $\int_1^e x^4 \ln x\, dx$	21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$
22) $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})\, dx$	23) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$	24) $\int_0^1 x 3^x\, dx$

رافت صباحي

٠٧٨٥٠٨٢٤٤٦٤

16) مثال (3) موجود صفحه 6 بكتاب غير محدود

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = \left(\frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}e^0 \sin 0 + \frac{1}{2}e^0 \cos 0\right)$

$= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + 0\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$

17) $\int_1^e 2\ln x\, dx$

$u = 2\ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{2}{x} \qquad v = x$

$\int_1^e 2\ln x\, dx = (2x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e 2\, dx$

$= 2e\ln e - 2\ln 1 - 2(e-1) = 2e - 2e + 2 = 2$

18) $\int_1^2 (\ln x + \ln e^x)\, dx = \int_1^2 (\ln x + x)\, dx$

اجزاء $\quad = \int_1^2 \ln x\, dx + \int_1^2 x\, dx$

$= (x\ln x - x)\Big|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$

$= (2\ln 2 - 2) - (\ln 1 - 1) + \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$

$= 2\ln 2 - 2 + 1 + 2 - \frac{1}{2}$

$= 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

رأفت ضاحي

19) $u = x$ $\quad dv = \sec^2 3x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{3}\tan 3x$ $\quad \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x\sec^2 3x\,dx = \left(\frac{1}{3}x\tan 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\tan 3x\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x\tan 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \left(\frac{1}{9}\ln\cos 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

20) $u = \ln x$ $\quad dv = x^4\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{1}{5}x^5$

$$\int_1^e x^4\ln x\,dx = \left(\frac{1}{5}x^5\ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5\ln x\right)\Big|_1^e - \left(\frac{1}{25}x^5\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{5}e^5\ln e\right) - \left(\frac{1}{5}\ln 1\right) - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25}$$

$$= \frac{1}{5}e^5 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5+1}{25}$$

21) الجدول

المشتقة		تكامل
x^2	+	$\sin x$
$2x$	−	$-\cos x$
2	+	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx = \left(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} + \pi\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(0\cos 0 + \pi\sin 0 + 2\cos 0\right)$$

$$= \pi - 2$$

راقت ضناوي

22) $u = x$ $\qquad dv = (e^{-2x} + e^{-x})\,dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{-1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})\,dx = \left(\frac{-1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\right)\Big|_0^1 \pm \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{-1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{-1}{4}e^{-2x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{-1}{2}e^{-2} - e^{-1}\right) - (0-0) + \left(\frac{-1}{4}e^{-2} - e^{-1}\right) - \left(\frac{-1}{4}e^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{-3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

23) $u = xe^{x}$ $\qquad dv = (1+x)^{-2}\,dx$

$(xe^{x} + e^{x})\,dx$ $\qquad v = \frac{-1}{1+x}$

$$\int_0^1 \frac{xe^{x}}{(1+x)^2}\,dx = \left(\frac{-xe^{x}}{1+x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{xe^{x} + e^{x}}{1+x}\,dx \qquad \frac{e^{x}(x+1)}{1+x}$$

$$= \left(\frac{-e}{1+1}\right) - 0 + e - e^{0} = \frac{-e}{2} + e - 1 = \frac{e}{2} - 1$$

24) $u = x$ $\qquad dv = 3^{x}\,dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{3^{x}}{\ln 3}$

$$\int_0^1 x\cdot 3^{x}\,dx = \left(\frac{x3^{x}}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^{x}}{\ln 3}\,dx$$

$$= \left(\frac{x3^{x}}{\ln 3}\right)\Big|_0^1 - \frac{3^{x}}{(\ln 3)^2}\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{\ln 3} - 0\right) - \left(\frac{3}{(\ln 3)^2} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\right) = \frac{3\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

راقت ضاحي

جد كلاً من التكاملات الآتية

25) $\int x^3 e^{x^2} dx$	26) $\int \cos(\ln x)\, dx$	27) $\int x^3 \sin x^2 \, dx$
28) $\int e^{\cos x} \sin 2x \, dx$	29) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$	30) $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$

الحل:

نبدأ بالتعويض لأن الأس غير خطي

25) $a = x^2$

$\frac{da}{dx} = 2x \longrightarrow dx = \frac{da}{2x}$

$\int x^3 e^a \frac{da}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 e^a da$ لكن $x^2 = a$

$= \int \frac{1}{2} a e^a da$ اجزاء

$u = \frac{1}{2} a$ $dv = e^a da$

$du = \frac{1}{2} da$ $v = e^a$

$\int \frac{1}{2} a e^a da = \frac{1}{2} a e^a - \int \frac{1}{2} e^a da$

$= \frac{1}{2} a e^a - \frac{1}{2} e^a + c$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

لأن الأس للزاوية غير خطية

26) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x\, du$ مثال (3) صفحة 56

$\int (\cos u)\, x\, du = \int e^u \cos u\, du$ من الفرض لازم نأخذ e للطرفين $e^u = x$

$= \frac{1}{2} e^u \sin u + \frac{1}{2} e^u \cos u + c$

$= \frac{1}{2} e^{\ln x} \sin \ln x + \frac{1}{2} e^{\ln x} \cos \ln x + c$

$= \frac{1}{2} x \sin \ln x + \frac{1}{2} x \cos \ln x + c$

رأفت ضناوي

27) $a = x^2$ ١٥ س فضل

$\frac{da}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$

$\int x^3 \sin a \frac{da}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 \sin a \, da = \int \frac{1}{2} a \sin a \, da$ $a = x^2$ ن√

$u = \frac{1}{2} a$ $dv = \sin a \, da$

$du = \frac{1}{2} da$ $v = -\cos a$

$\int \frac{1}{2} a \sin a \, da = \frac{-1}{2} a \cos a + \int \frac{1}{2} \cos a \, da$

$= \frac{-1}{2} a \cos a + \frac{1}{2} \sin a + c$

$= \frac{-1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + c$

28) $a = \cos x$

$\frac{da}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{da}{-\sin x}$

$\int e^a \sin 2x \frac{da}{-\sin x}$ متطابقة

$\int 2e^a \sin x \cos x \frac{da}{-\sin x} = \int -2e^a \cos x \, da$

من المفروض $a = \cos x$

$\int -2ae^a \, da$ اجزاء

$u = -2a$ $dv = e^a \, da$

$du = -2 \, da$ $v = e^a$

$\int -2ae^a \, da = -2ae^a + \int 2e^a \, da$

$= -2ae^a + 2e^a + c$

$= -2\cos x \, e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + c$

29) $a = \sqrt{x}$

$a^2 = x$

$2a \, da = dx$

$\int 2a \sin a \, da$ اجزاء

$u = 2a$ $dv = \sin a \, da$

$du = 2 \, da$ $v = -\cos a$

$\int 2a \sin a \, da = -2a \cos a + \int 2 \cos a \, da$

$= -2a \cos a + 2 \sin a + c$

$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$

رأفت ضاحي

30) $a = x^2$

$$\frac{da}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$$

$$\int \frac{x^3 e^a}{(a+1)^2} \frac{da}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 e^a}{(a+1)^2} da$$ لكن $a = x^2$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{a e^a}{(a+1)^2} da$$ محلول فرع 23

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-a e^a}{1+a} + e^a \right) + c$$

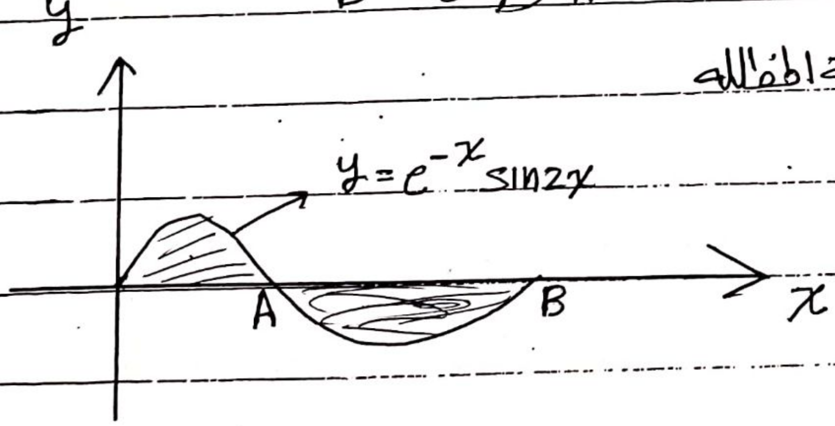
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2 e^{x^2}}{1+x^2} + e^{x^2} \right) + C$$

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x} \sin 2x$

حيث $x \geq 0$ فاجب عن الاسئلة الآتية تباعاً:

31) جد احداثيي كل من النقطة A والنقطة B

32) جد مساحة المنطقة المظللة



الحل:

31) نضع $y = 0$

$$e^{-x} \sin 2x = 0$$

$e^{-x} \neq 0$ $\quad$ $\sin 2x = 0$

$$2x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$$

نختار الموجب منها وعليه احداثي A هو $(\frac{\pi}{2}, 0)$ واحداثي B هو $(\pi, 0)$

رافت صافي

32) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x\,dx + -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x}\sin 2x\,dx$

في هذه الحالة نجد $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ دون حدود

$u = e^{-x}$ $\quad dv = \sin 2x\,dx$

$du = -e^{-x}dx$ $\quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \int \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x\,dx$

اجزاء مرة اخرى

$u = \frac{1}{2}e^{-x}$ $\quad dv = \cos 2x\,dx$

$du = -\frac{1}{2}e^{-x}dx$ $\quad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \left[\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x + \int \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x\,dx\right]$

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \int \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x\,dx$

$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{-2}{5}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x$

$A = \left(\frac{-2}{5}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{-2}{5}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{5}e^{-x}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$A = \left(\frac{-2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}(-1) - \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}(0)\right) - \left(\frac{-2}{5}e^{0}(1) - 0\right) - \left(\frac{-2}{5}e^{-\pi}(1) - \frac{1}{5}e^{-\pi}(0) + \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}(-1) + \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}(0)\right)$

$A = \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{-\pi} + \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{-\pi}$

راقت ضاحي

133) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = te^{-\frac{t}{2}}$ اذا بدأ الجسم الحركة من نقطة الأصل، جد موقعه بعد t ثانية

الحل:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int te^{-\frac{t}{2}}\,dt$$

$u = t \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}\,dt$

$du = dt \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$

$$s(t) = \int te^{-\frac{t}{2}}\,dt = -2te^{-\frac{t}{2}} + \int 2e^{-\frac{t}{2}}\,dt$$

$$s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + c$$

نجد c حيث $s(0) = 0$

$s(0) = 0 - 4e^{0} + c$

$0 = -4 + c \rightarrow c = 4$

$$s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

34) $f'(x) = (x+2)\sin x$ ؛ $(0,2)$

الحل:

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x+2)\sin x\,dx$

$u = x+2 \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x\,dx$

$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + c$

نجد c حيث $f(0) = 2$

$f(0) = -2\cos 0 + 0 + c$

$2 = -2 + c \rightarrow c = 4$

$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$

35) $f'(x) = 2xe^{-x}$ ؛ $(0,3)$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2xe^{-x}\,dx$

$u = 2x \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = -e^{-x}$

$f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx$

$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

نجد c حيث $f(0) = 3$

$f(0) = 0 - 2 + c$

$3 = -2 + c \rightarrow c = 5$

$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$

رافت ضافي

36) تقدمت دعاء لدورة تدريبية متقدمة في الطباعة. اذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمعدل $N'(t)=(t+6)e^{-0.25t}$

حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعاً من التحاقها بالدورة، جد $N(t)$ علماً بأن دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

الحل:

$N(t)=\int N'(t)\,dt=\int (t+6)e^{-0.25t}\,dt$

توضيح

$u=t+6 \qquad dv=e^{-0.25t}\,dt$ $\qquad \frac{-1}{0.25}=\frac{-100}{25}=-4$

$du=dt \qquad v=-4e^{-0.25t}$

$N(t)=-4e^{-0.25t}(t+6)+\int 4e^{-0.25t}\,dt$ $\qquad \frac{4}{0.25}=\frac{400}{25}=$

$N(t)=-4e^{-0.25t}(t+6)-16e^{-0.25t}+C$ $\qquad$ نجد C حيث $N(0)=40$

$N(0)=-4e^{0}(6)-16e^{0}+C$

$40=-24-16+C \rightarrow C=80$

$N(t)=-4e^{-0.25t}(t+6)-16e^{-0.25t}+80$

رافت صابح

مهارات التفكير العليا

37) أثبت ان $\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2 \ln 2x\,dx = 9\ln 6 - \frac{215}{72}$

الحل:-

$u = \ln 2x \qquad dv = x^2\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3 \longrightarrow \frac{1}{9}x^3$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2 \ln 2x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln 2x\Big]_{\frac{1}{2}}^{3} - \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{3}x^2\,dx$$

$$= \left(9\ln 6 - \frac{1}{24}\ln 1\right) - \left(3 - \frac{1}{72}\right) = 9\ln 6$$

$$= 9\ln 6 - 0 - \frac{215}{72} = 9\ln 6 - \frac{215}{72}$$

38) أثبت أن $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{\pi - 2}{16}$

الحل:-

$u = x \qquad dv = \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x\,dx = x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)dx$$

$$= x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{-1}{8}\cos 2x + \frac{1}{128}\cos 8x\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{16}\sin 2\pi\right) - 0 - \left(\left(\frac{-1}{8}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{128}\cos 2\pi\right) - \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{128}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) - \left(0 + \frac{1}{128}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{128}$$

$$= \frac{\pi}{16} - \cancel{\frac{1}{128}} - \frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{128}} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$ نوحد مقامات

$$= \frac{\pi - 2}{16}$$

رأفت ضاحي

39) اذا كان $\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx = 6$ أثبت ان a تحقق المعادلة $x = 2+e^{-\frac{x}{2}}$

الحل :-

$u = x \qquad dv = e^{\frac{x}{2}}dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

$\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx = (2xe^{\frac{x}{2}})\Big|_0^a - \int_0^a 2e^{\frac{x}{2}}dx$

$6 = (2xe^{\frac{x}{2}})\Big|_0^a - 4e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^a$

$6 = 2ae^{\frac{a}{2}} - (4e^{\frac{a}{2}} - 4e^0)$

$6 = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{a}{2}} + 4$

$2 = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{a}{2}}$ نقسم على (2)

$1 = ae^{\frac{a}{2}} - 2e^{\frac{a}{2}}$

$1 = e^{\frac{a}{2}}(a-2) \rightarrow e^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{a-2} \rightarrow a-2 = \frac{1}{e^{\frac{a}{2}}}$

$a-2 = e^{-\frac{a}{2}} \rightarrow a = 2+e^{-\frac{a}{2}}$

---

40) جد $\int (\ln x)^2 dx$ بطريقتين مختلفتين

الحل :-

طريقة (1) بالاجزاء

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$

$du = (2\ln x)\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

اجزاء

$u = 2\ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{2}{x}dx \quad v = x$

$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx$

$= x(\ln x)^2 - [2x\ln x - \int 2dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

طريقة (2) : بالتعويض

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x\,du$

$\int u^2 x\, du$

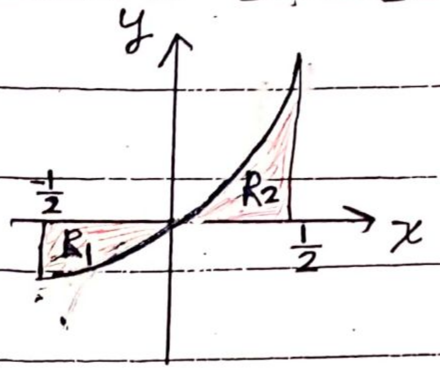
من التعويض نأخذ e للطرفين

اجزاء مرتان $\int u^2 e^u du$

راقت صافي

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $y = xe^{2x}$

حيث $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ أجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :-



(41) جد مساحة كل من المنطقة R_1

والمنطقة R_2

(42) اثبت ان مساحة المنطقة R_1 الى مساحة المنطقة R_2 تساوي $(e-2) : e$

الحل :- $u = x \quad dv = e^{2x}dx$

$du = dx \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$R_1 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x}\,dx$$

(41)

$$R_1 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x}dx = -\left[\left(\tfrac{1}{2}xe^{2x}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \tfrac{1}{2}e^{2x}dx\right]$$

$$= -\left[\left(\tfrac{1}{2}xe^{2x}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \left(\tfrac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}\right]$$

$$= -\left[0 + \tfrac{1}{4}e^{-1} - \left(\tfrac{1}{4}e^{0} - \tfrac{1}{4}e^{-1}\right)\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = \frac{e-2}{4e}$$

$$R_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = \left(\tfrac{1}{2}xe^{2x}\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} - \left(\tfrac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}e - 0\right) - \left(\tfrac{1}{4}e - \tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(42)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{e-2}{4e}}{\frac{1}{4}} = \frac{e-2}{4e} \times 4 = \frac{e-2}{e}$$

$$R_1 : R_2 = (e-2) : e$$

راقت ضابي

استعمل التكامل بالاجزاء لاثبات كل مما يأتي ، حيث n عدد صحيح موجب و $a \neq 0$

43) $\int x^n \ln x \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left(-1+(n+1)\ln x\right)+C$

44) $\int x^n e^{ax} dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$

الحل :-

43) $u = \ln x \qquad dv = x^n dx$

$du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left(-1+(n+1)\ln x\right) + c$$

44) $u = x^n \qquad dv = e^{ax} dx$

$du = n x^{n-1} dx \qquad v = \dfrac{1}{a} e^{ax}$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \int \frac{n}{a} x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$$

رأفت ضافي

كتاب التمارين

جد كلاً من التكاملات الآتية :

1) $\int x\cos 4x\,dx$	2) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$	3) $\int x e^{-x}\,dx$
4) $\int (x^2+1)\ln x\,dx$	5) $\int \ln x^3\,dx$	6) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

الحل :-

1) $u = x \qquad dv = \cos 4x\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 4x$

$$\int x\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}x\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + c$$

2) $u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + c$$

رأفت صافي

3) $u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

4) $u = \ln x \qquad dv = (x^2+1)\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3 + x$

$$\int (x^2+1)\ln x\,dx = (\tfrac{1}{3}x^3 + x)\ln x - \int (\tfrac{1}{3}x^2 + 1)\,dx$$

$$= (\tfrac{1}{3}x^3 + x)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + c$$

5) $\int 3\ln x\,dx$

$u = 3\ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{3}{x}\,dx \qquad v = x$

$$\int \ln x^3\,dx = 3x\ln x - \int 3\,dx$$

$$= 3x\ln x - 3x + c$$

راقت صافي

6) $u = e^{2x}$ $\quad dv = \sin x\,dx$

$du = 2e^{2x}dx$ $\quad v = -\cos x$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x\,dx$$

$u = 2e^{2x}$ $\quad dv = \cos x\,dx$

$du = 4e^{2x}dx$ $\quad v = \sin x$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - \int 4e^{2x}\sin x\,dx$$

$$5\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + c$$ اضرب ب $\frac{1}{5}$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}(-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x) + c$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x}(-\cos x + 2\sin x) + c$$

جد متعة كل من التكاملات الآتية :

7) $\int_1^e \ln x\,dx$	8) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$	9) $\int_0^\pi x\cos\frac{1}{4}x\,dx$
10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx$	11) $\int_1^e \ln(x+1)\,dx$	12) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

الحل :-

7) $u = \ln x$ $\quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = x$

$$\int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx$$

$$= (x\ln x)\Big|_1^e - (e-1) = e\ln e - \ln 1 - e + 1$$

$$= e - e + 1$$

$$= 1$$

راقت ضاحي

8) $u = \ln x \qquad dv = x^{-2}$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{-1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \left(\frac{-1}{x}\ln x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\ln 2 + 0\right) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$$

9) $u = x \qquad dv = \cos\frac{1}{4}x\,dx$

$du = dx \qquad v = 4\sin\frac{1}{4}x$

$$\int_0^\pi x\cos\frac{1}{4}x\,dx = \left(4x\sin\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 4\sin\frac{1}{4}x\,dx$$

$$= \left(4x\sin\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^\pi + \left(16\cos\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \left(4\pi\sin\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(16\cos\frac{\pi}{4} - 16\cos 0\right)$$

$$= (4\pi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (16)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 16$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16$$

$$= \frac{4\pi + 16}{\sqrt{2}} - 16$$

راقت صابحي

10) $u = e^{3x}$ $\quad dv = \cos 2x\,dx$

$du = 3e^{3x}dx$ $\quad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \int \frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x\,dx$$

$u = \frac{3}{2}e^{3x}$ $\quad dv = \sin 2x\,dx$

$du = \frac{9}{2}e^{3x}$ $\quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \int \frac{9}{4}e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

اضرب بـ $\frac{4}{13}$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{2}{13}e^{\frac{3\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{3}{13}e^{\frac{3\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{3}{13}e^{0}\cos 0\right)$$

$$= \frac{2}{13}e^{\frac{3\pi}{4}} + 0 - \frac{3}{13} = \frac{1}{13}\left(2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3\right)$$

11) $u = \ln(x+1)$ $\quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}$ $\quad v = x$

$$\int_1^e \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x\,dx}{x+1}$$

قسمة مطولة

$$\int_1^e \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)\Big|_1^e - \int_1^e\left(1 + \frac{-1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^e - \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_1^e$$

$$= e\ln(e+1) - \ln 2 - \left(e - \ln(e+1) - (1 - \ln 2)\right)$$

$$= e\ln(e+1) - \ln 2 - e + \ln(e+1) + 1 - \ln 2$$

$$= (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$$

رافت ضاحي

12)

الاشتقاق		التكامل
x^2		e^x
$2x$	$+$	e^x
2	$-$	e^x
0	$+$	e^x

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx = \left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right)\Big|_0^1$$

$$= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2)$$

$$= e - 2$$

13) أثبت أن $\int_2^4 \ln x\,dx = 6\ln 2 - 2$

الحل :

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

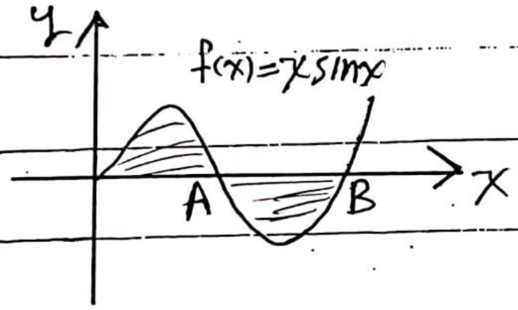
$\int_2^4 \ln x\,dx = (x\ln x)\Big|_2^4 - \int_2^4 dx$

$= (x\ln x)\Big|_2^4 - (x)\Big|_2^4$

$= 4\ln 4 - 2\ln 2 - 2$

$= 4\ln 2^2 - 2\ln 2 - 2 = 8\ln 2 - 2\ln 2 - 2 = 6\ln 2 - 2$

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x) = x\sin x$ حيث $x \geq 0$ أجب عن السؤالين الآتيين بناءاً :-



14) جد احداثيي كل من النقطة A والنقطة B

15) جد مساحة المنطقة المظللة

الحل :

14) نضع $f = 0 \longleftarrow x\sin x = 0$

$x = 0 \qquad \sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

وعليه احداثيي A هو $(\pi, 0)$

احداثيي B هو $(2\pi, 0)$

15) $A = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx + -\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$

$A = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} - (-x\cos x + \sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$

$A = (-\pi\cos\pi + \sin\pi) - (0 + \sin 0) - (-2\pi\cos 2\pi + \sin 2\pi) + \pi\cos\pi + \sin\pi)$

$A = (\pi + 0) - (0 + 0) - (-2\pi + 0) + -\pi + 0)$

$A = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$

$\int x\sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

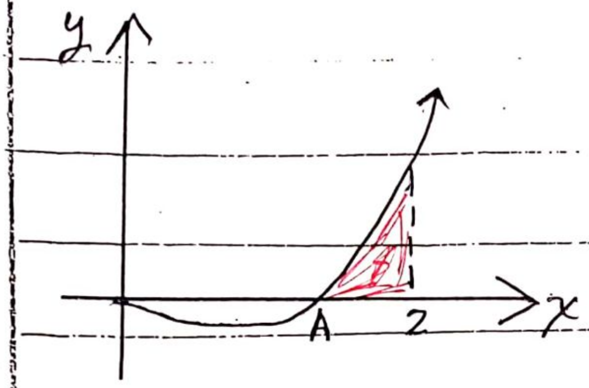
$-x\cos x + \int \cos x\,dx$

$-x\cos x + \sin x$

راقت ضاحي

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x)=x^2\ln x$ حيث $x>0$

اجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :-



(16) جد احداثيي النقطة A

(17) جد مساحة المنطقة المظللة

الحل :-

(16) نضع $f=0$

$$x^2\ln x=0$$

$x=0$ ، $\ln x=0$

$x=1$

ومنه احداثيي A هو $(1,0)$

(17)

$$\text{Area}=\int_1^2 x^2\ln x\,dx$$

$u=\ln x \qquad dv=x^2\,dx$

$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{x^3}{3}$

$$\int_1^2 x^2\ln x\,dx=\left(\tfrac{1}{3}x^3\ln x\right)\Big|_1^2-\int_1^2\tfrac{1}{3}x^2\,dx$$

$$=\left(\tfrac{1}{3}x^3\ln x\right)\Big|_1^2-\left(\tfrac{1}{9}x^3\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\tfrac{8}{3}\ln 2-\tfrac{1}{3}\ln 1\right)-\left(\tfrac{8}{9}-\tfrac{1}{9}\right)$$

$$\tfrac{8}{3}\ln 2-0-\tfrac{7}{9}=\tfrac{8}{3}\ln 2-\tfrac{7}{9}$$

رأفت ضاحي