الفرع العلمي

الوحدة (5)

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيا

شرح مفصل للمادة
اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
اوراق عمل
رافت صافي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً

أولاً :- تمثيل الاقتران $y = \cos x$ و $y = \sin x$ بيانياً

مثال :- مثل كلاً من الاقترانات التالية بيانياً في الفترة $[0 , 2\pi]$

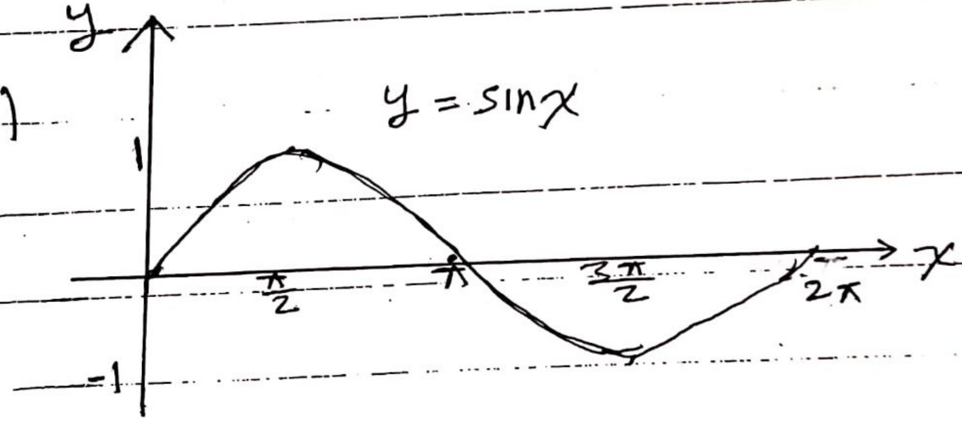
1) $y = \sin x$ 2) $y = \cos x$

الحل :

ننشئ جدول ونختار زوايا مشهورة (الربعية والخاصة) ونحصرها بكل الأفضل الربعية

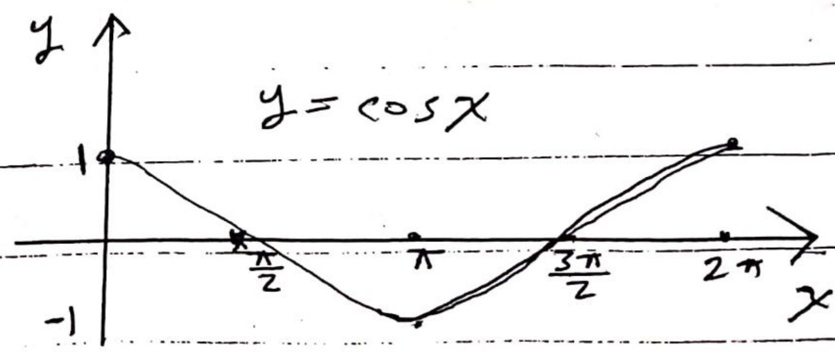
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
(x , y)	$(0 , 0)$	$(\frac{\pi}{6} , \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2} , 1)$	$(\pi , 0)$	$(\frac{3\pi}{2} , -1)$	$(2\pi , 0)$

1)



2)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1
(x , y)	$(0 , 1)$	$(\frac{\pi}{2} , 0)$	$(\pi , -1)$	$(\frac{3\pi}{2} , 0)$	$(2\pi , 1)$



رافت صافي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التحقق من فهمك ص 35

① مثل الاقتران $y = \sin x$ بيانياً في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

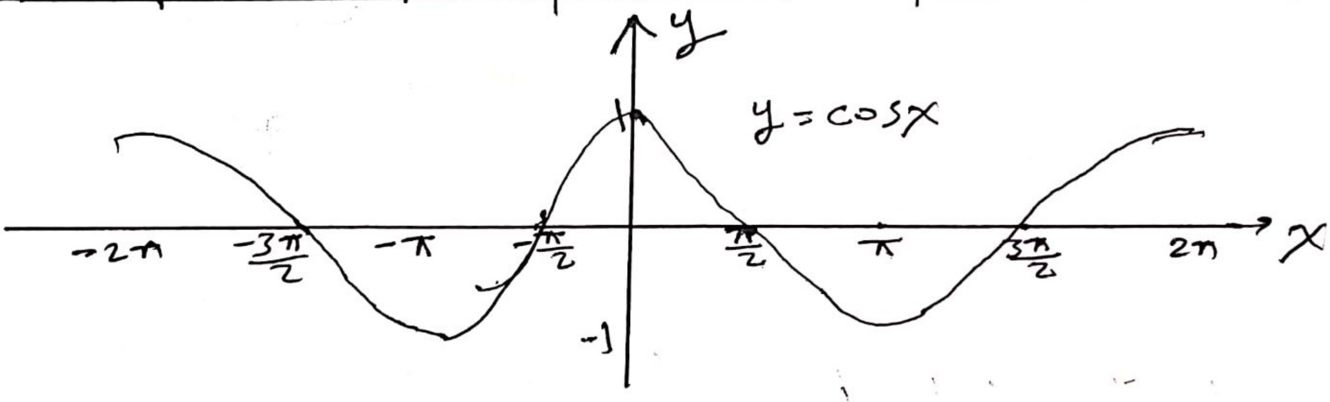
② مثل الاقتران $y = \cos x$ بيانياً في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

الحل:-

هنا نختار قيم سالبه وموجبه

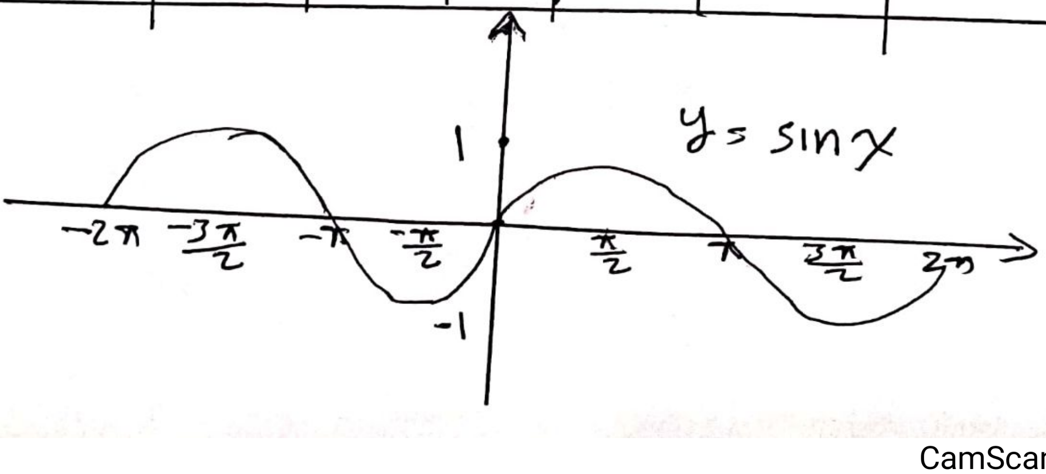
②

-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$(-2\pi, 1)$	$(\frac{-3\pi}{2}, 0)$	$(-\pi, -1)$	$(\frac{-\pi}{2}, 0)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\pi, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(2\pi, 1)$



①

-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$(-2\pi, 0)$	$(-\frac{3\pi}{2}, 1)$	$(-\pi, 0)$	$(-\frac{\pi}{2}, -1)$	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\pi, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(2\pi, 0)$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من رسمة $y = \sin x$ / $y = \cos x$ نتوصل للخصائص الآتية

1) مجال كل من الاقترانات هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ما لم يحدد غير ذلك
2) المدى هو الفترة $[-1, 1]$ وعليه القيمة الصغرى -1 والعظمى 1
3) السعة (1)
4) هي اقترانات دورية حيث نرى نمط متكرر واقصر جزء متكرر يسمى الدورة
5) طول الدورة 2π

الاقترانات الجيبية

هي اقترانات الجيب وجيب التمام الناتجة عن تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسين $y = \cos x$ ، $y = \sin x$.

بوجه عام، فإن الصورة العامة للاقترانات الجيبية هي :-

$$y = a\sin(bx - c) + d \quad , \quad y = a\cos(bx - c) + d$$

ثانياً التمدد الرأسي :-

$|a| > 1$ فإن المعامل a في الاقترانين $y = a\sin x$ ، $y = a\cos x$ يؤدي الى توسيع رأسي لمنحنى $y = \sin x$ ومنحنى $y = \cos x$

أما اذا كان $|a| < 1$ فإن المعامل a يؤدي الى تضييق رأسي للمنحنيين

وعليه سعة كل من

$$y = a\sin(bx - c) + d$$
$$y = a\cos(bx - c) + d$$

هو $|a|$

* سعة منحنى الاقتران هو نصف المسافة بين قيمتي أعلى العظمى والصغرى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كيف نمثل منحنى $y = a\sin x$ أو $y = a\cos x$

1) ارسم نقاط تقاطع الجيب والجيب تمام مع محور x حيث

عند $\sin x = 0$ $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ ((المضاعفات π))

عند $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ((المضاعفات الفردية لـ $\frac{\pi}{2}$))

2) نضرب الاحداثي y لكل نقطة عظمى او صغرى على منحنى $f(x)$ في سعة الاقتران

تحقق من فهمك 39 ص

مثل منحنى كل اقتران مما يأتي بيانياً

a) $g(x) = 2\sin x$ b) $g(x) = \frac{1}{4}\cos x$

الحل:

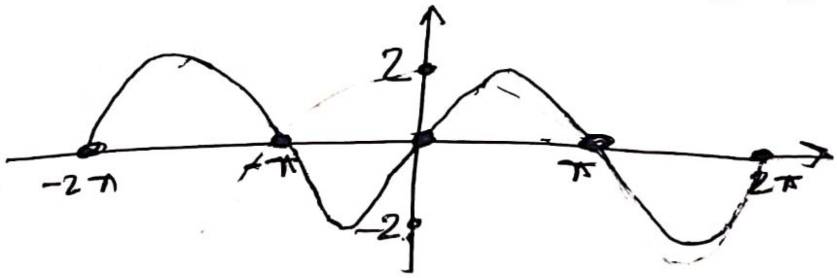
a) هنا $|a| > 1$ وعليه هنا تمدد رأسي، نضرب العظمى والصغرى بالعدد (2)

$(1)(2) = 2$

$(-1)(2) = -2$

نحدد التقاطع مع محور x وهي $0, \pi, 2\pi$ وكذلك بالسالب

وعظمى 2 و -2 على محور y

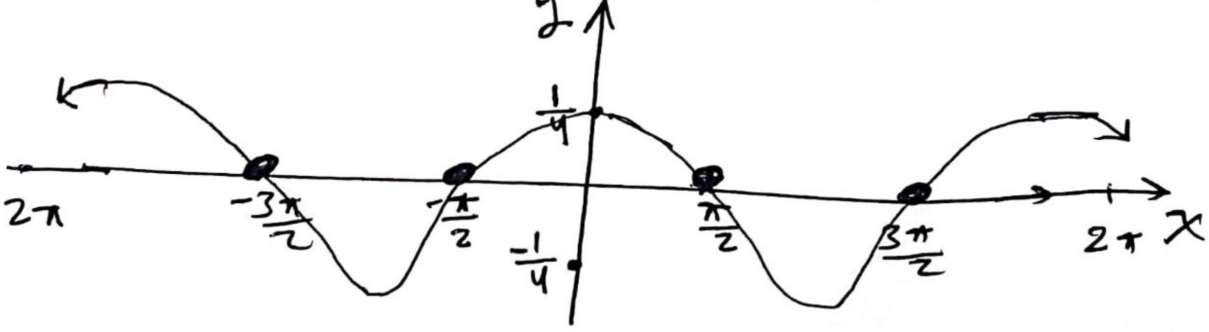


b) $|a| < 1$ هنا تضييق، نضرب العظمى والصغرى بالعدد $\frac{1}{4}$

وعليه $(1)(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

$(-1)(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$

نحدد نقاط التقاطع مع محور x هي $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ وبالسالب



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثالثاً :- التمدد الافقي للاقترانات الجيبية

$$y = \sin bx$$
$$y = \cos bx$$

اذا كان $|b|<1$ ⟵ توسيع أفقي

$|b|>1$ ⟵ تضييق افقي

طول الدورة للاقترانات الجيبية

$$y = a\sin(bx-c)+d$$
$$y = a\cos(bx-c)+d$$

هو $\frac{2\pi}{|b|}$ حيث $b \neq 0$

لتمثيل كل من $y = \sin bx$ أو $y = \cos bx$
نجد طول الدورة ، ثم نجد نقاط المفتاحية لاقتران الجيب الرئيسي او اقتران جيب تمام ثم اضرب الاحداثي x لكل نقطة مفتاحية في $\frac{1}{b}$ الافضل نقاط تقاطع مع محور x

---

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تحقق من فهمي :- صـ 41 مثل منحنى كل اقتران مما يأتي بيانياً

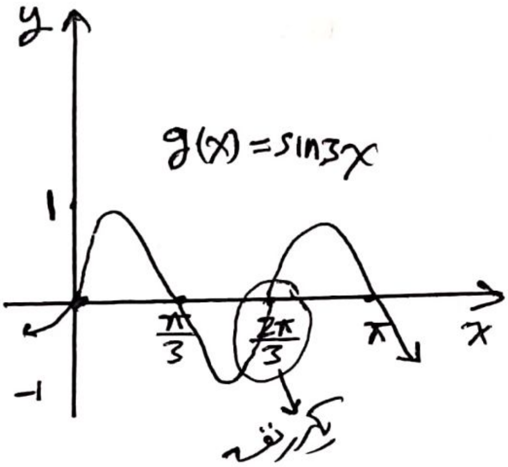
a) $g(x) = \sin 3x$ b) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$

الحل :-

a) طول الدورة = $\frac{2\pi}{3}$

نحدد نقاط تقاطع $\sin x$ مع محور x ونضربها بـ $\frac{1}{b}$

حيث $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}$



عند $x = 0 \leftarrow (0)(\frac{1}{3}) = 0$

$x = \pi \leftarrow (\pi)(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{3}$

$x = 2\pi \leftarrow (2\pi)(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}$

$x = 3\pi \leftarrow (3\pi)(\frac{1}{3}) = \pi$

$\vdots$

b) طول الدورة $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

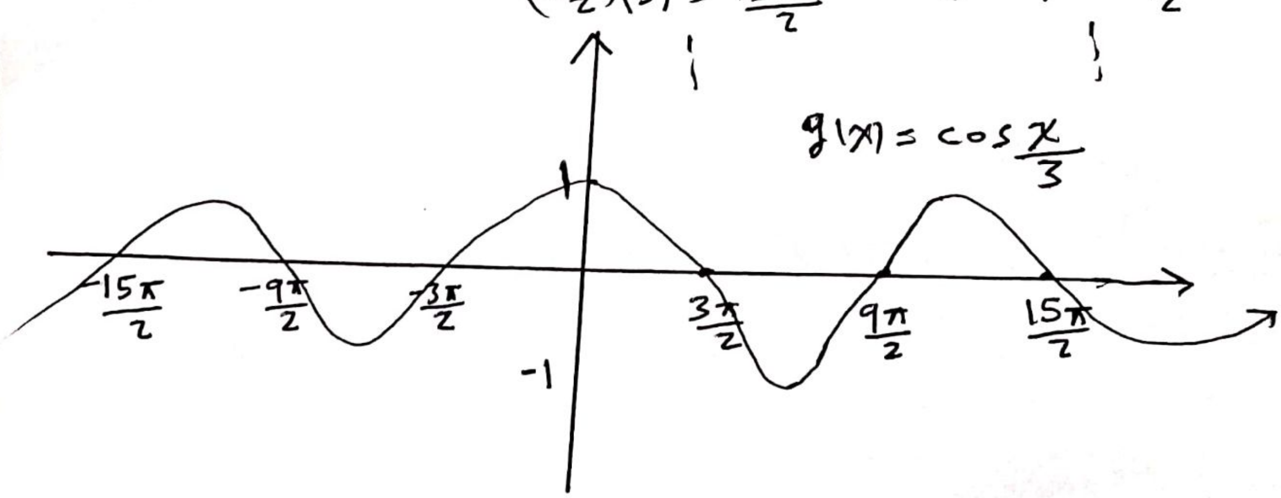
نحدد نقاط تقاطع $\cos x$ مع محور x ونضربها بـ 3 ؛ $\frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

عند $x = \frac{\pi}{2} \leftarrow (\frac{\pi}{2})(3) = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} \leftarrow (\frac{3\pi}{2})(3) = \frac{9\pi}{2}$

$x = \frac{5\pi}{2} \leftarrow (\frac{5\pi}{2})(3) = \frac{15\pi}{2}$

$\vdots$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الانسحاب الرأسي للاقترانات الجيبية

تعلمنا سابقاً أن $g(x)=f(x)+c$ هو انسحاب $f(x)$ للأعلى
أما $g(x)=f(x)-c$ هو انسحاب $f(x)$ للأسفل وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

لكن عند انسحاب رأسي لمنحنى الاقترانات الجيبية فإن منحناها تتذبذب حول محور جديد يسمى **خط الوسط**

بوجه عام، فإن خط الوسط لمنحنى الاقتران الجيبي

$$y=a\sin(bx-c)+d$$

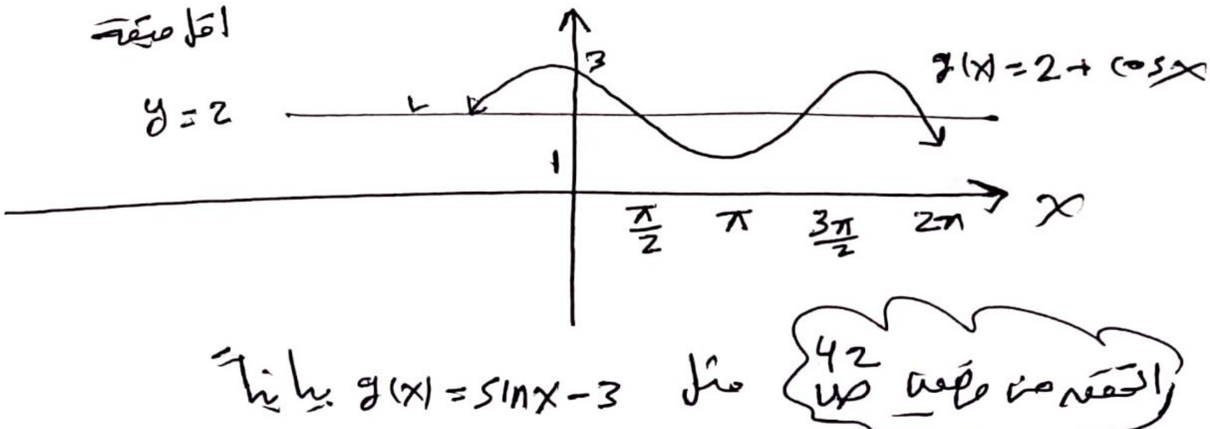
$$y=a\cos(bx-c)+d$$

هو $y=d$

مثال مثل $g(x)=2+\cos x$ بيانياً

هنا من رسمة $f(x)=\cos x$ نقوم بعمل انسحاب وحدتين للأعلى
ومحور خط الوسط هو $y=2$

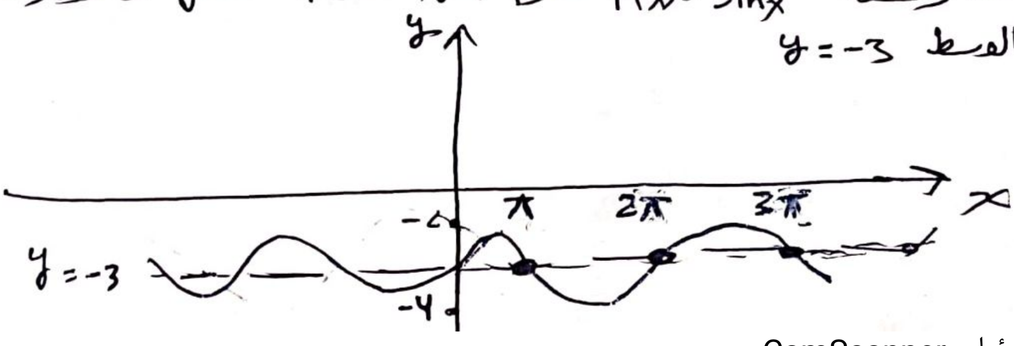
أعلى قمة $1+2=3$
أقل قمة $-1+2=1$



مثال مثل $g(x)=\sin x-3$ بيانياً (تحقق من فهمك ص 42)

من رسمة $f(x)=\sin x$ نقوم بعمل انسحاب للأسفل 3 وحدات
خط الوسط $y=-3$

أعلى قمة $1-3=-2$
أقل قمة $-1-3=-4$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الانسحاب الافقي للاقترانات الجيبية

تعلمنا سابقاً أن منحنى $g(x)=f(x+c)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحاً c الى اليسار وكذلك $g(x)=f(x-c)$ مزاحاً لليمين وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية

مثال مثل $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ بيانياً.

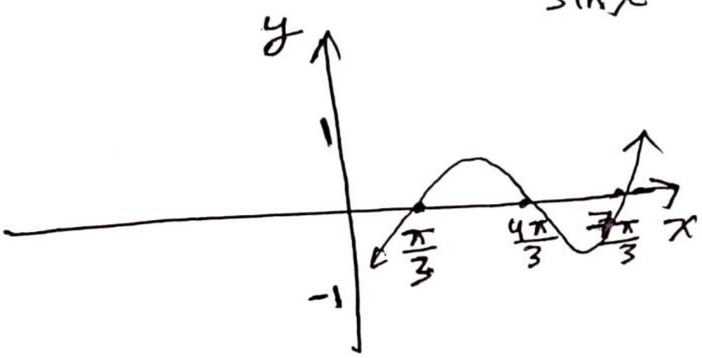
الحل: هنا انسحاب لليمين لمنحنى $f(x)=\sin x$ وهنا نفعل زيادة $\frac{\pi}{3}$ لنقاط التقاطع مع محور x لمنحنى $\sin x$

عند

$x=0 \longrightarrow 0+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

$x=\pi \longrightarrow \pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

$x=2\pi \longrightarrow 2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$



التحقق من فهمك ص 42 مثل منحنى $g(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

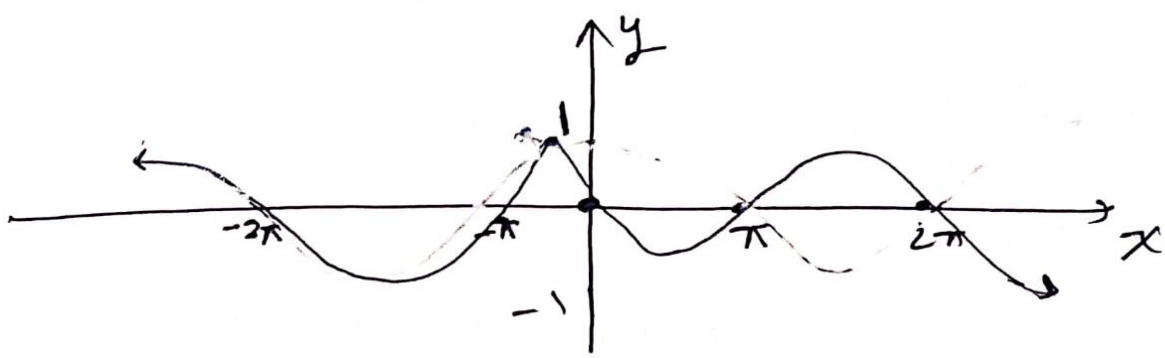
هنا انسحاب لليسار لمنحنى $f(x)=\cos x$ هنا نفعل طرح $\frac{\pi}{2}$ لنقاط التقاطع مع محور x لمنحنى $\cos x$

عند

$x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$

$x=\frac{3\pi}{2} \longrightarrow \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$

$x=\frac{5\pi}{2} \longrightarrow \frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

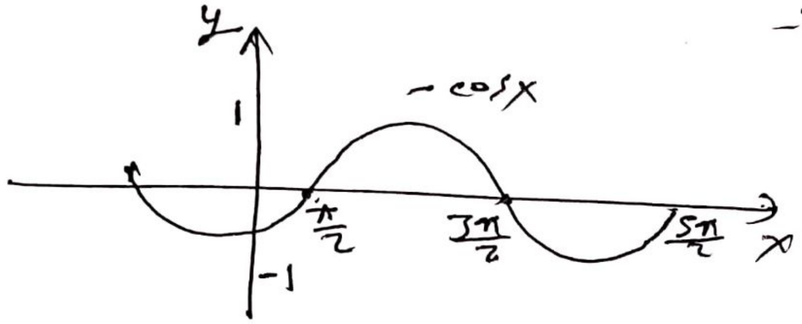
انعكاس الاقترانات الجيبية

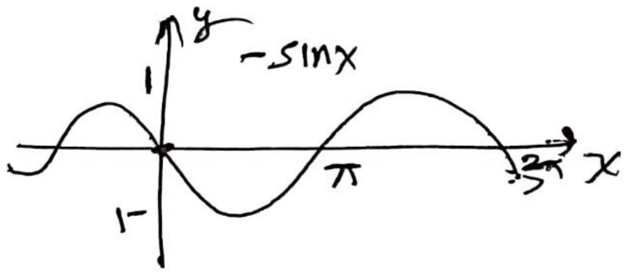
$y = a\sin(bx - c) + d$

$y = a\cos(bx - c) + d$

هنا a سالب تكون الانعكاس حول محور x

بالمختصر هنا عند ايجاد صور الزوايا الربعية (او الرئيسية) نضربها بـ -1 وتكون الرسمة كما يلي :-





مثال :- جد السعة وطول الدورة ومعادلة خط الوسط للاقتران $f(x) = \frac{-1}{2}\cos(x - \frac{3\pi}{2}) + 1$ ومثله بيانياً

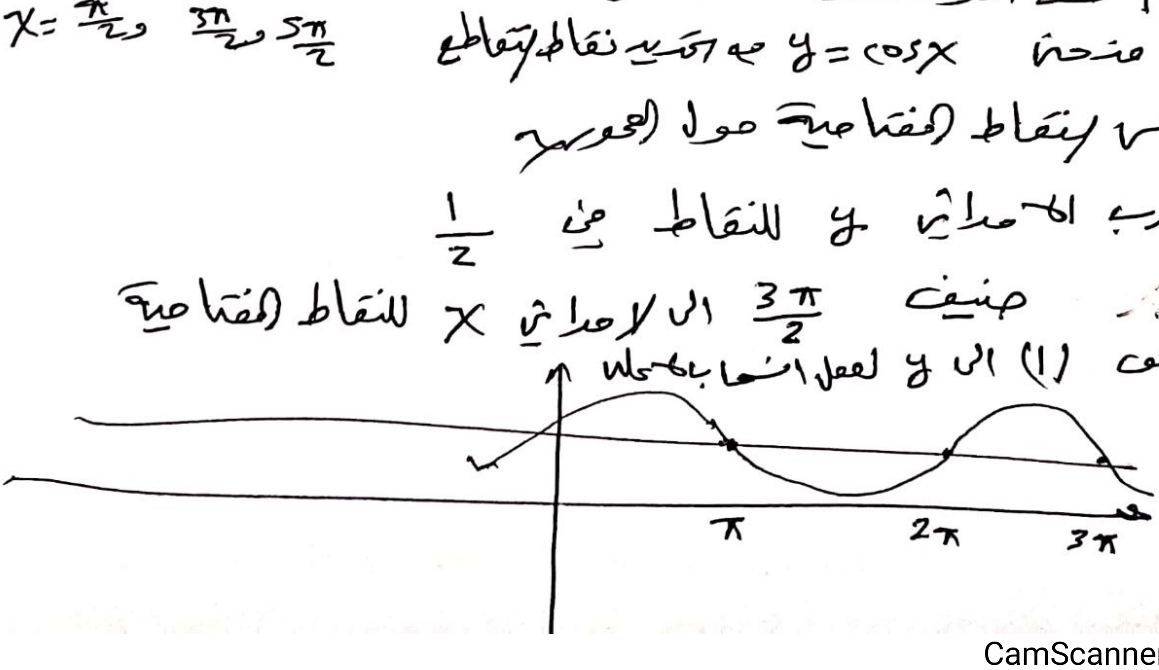
الحل :- السعة هي $|a| = \frac{1}{2}$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

معادلة خط الوسط $y = 1$

كيف نتعامل مع هذه التحويلات

1) ارسم خط الوسط $y = 1$
2) مثل منحنى $y = \cos x$ مع تحديد نقاط التقاطع $x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{2}$
3) اعكس النقاط المفتاحية حول المحور
4) اضرب الاحداثي y للنقاط في $\frac{1}{2}$
5) ضيف $\frac{3\pi}{2}$ الى الاحداثي x للنقاط المفتاحية
6) ضيف (1) الى y لعمل انسحاب لاعلى



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التحقق من فهمي ص 44

جد السعة وطول الدورة ومعادلة خط الوسط للاقتران

$f(x) = -2\sin(x-\pi) - 3$

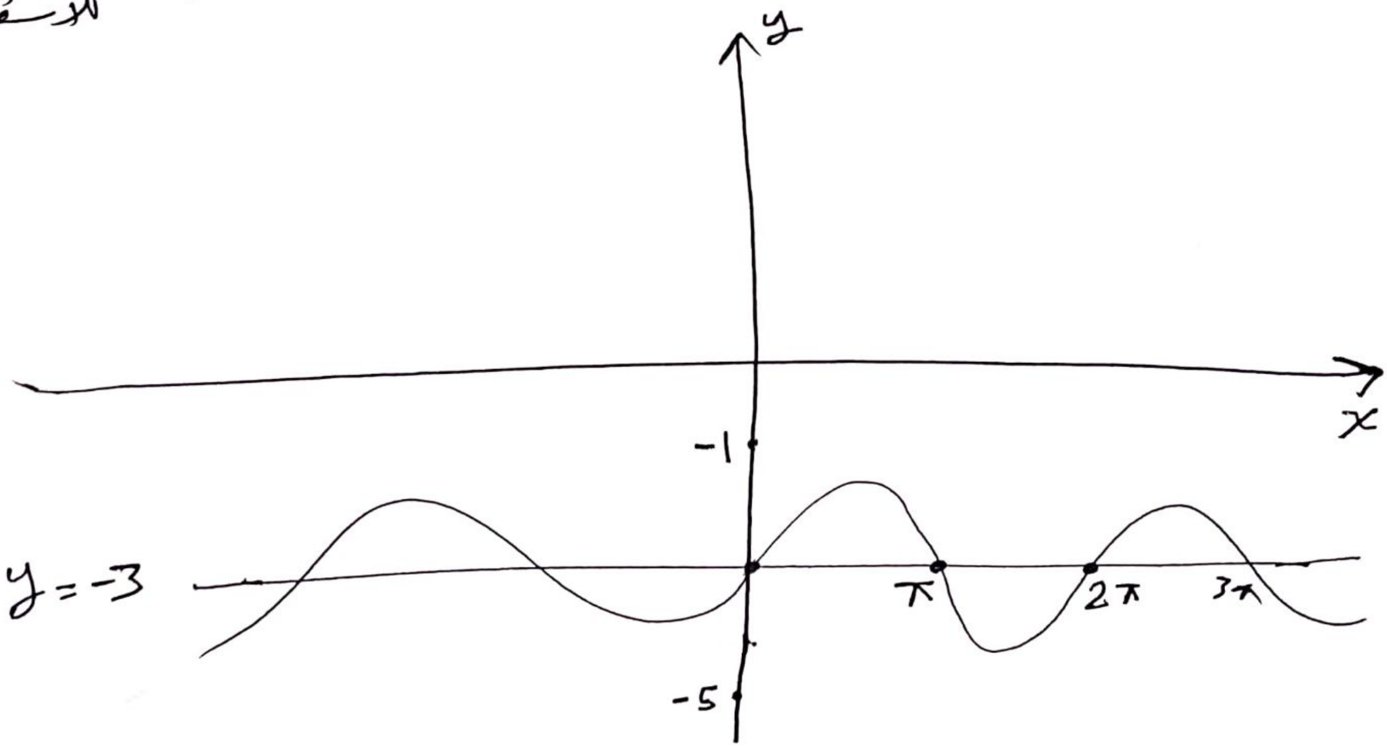
الحل: السعة هي $|a| = 2$

الدورة $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

معادلة خط الوسط $y = -3$

---

* مثل خط الوسط $y = -3$ في المستوى الاحداثي
* مثل منحنى $y = \sin x$ باستعمال النقاط المفتاحية
* اعكس النقاط المفتاحية من الخطوة السابقة حول المحور x
* اضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية في 2
* اضيف π الى الاحداثي x (انسحاب افقي لليمين)
* اطرح 3 الى الاحداثي y ازاحة منحنى الى الاسفل (انسحاب 3 للاسفل)



الحركة التوافقية البسيطة

اذا كانت المعادلة التي تصف الازاحة y لجسم من موقع الاتزان مع الزمن t هي

$$y = a\sin wt \quad \text{و} \quad y = a\cos wt$$

فان الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة عندئذٍ يمكن ايجاد ما يلي :-

* اقصى ازاحة للجسم هي $|a|$
* الجسم يكمل فيه دورة كاملة عند $\frac{2\pi}{w}$
* التردد وهو عدد الدورات في وحدة الزمن وهو $\frac{w}{2\pi}$

(تحقق من فهمك) ص 45 يمثل الاقتران $y = 3\cos\frac{1}{2}\pi t$ ازاحة كتلة معلقة في زنبرك بالسنتيمترات ح 6 ص

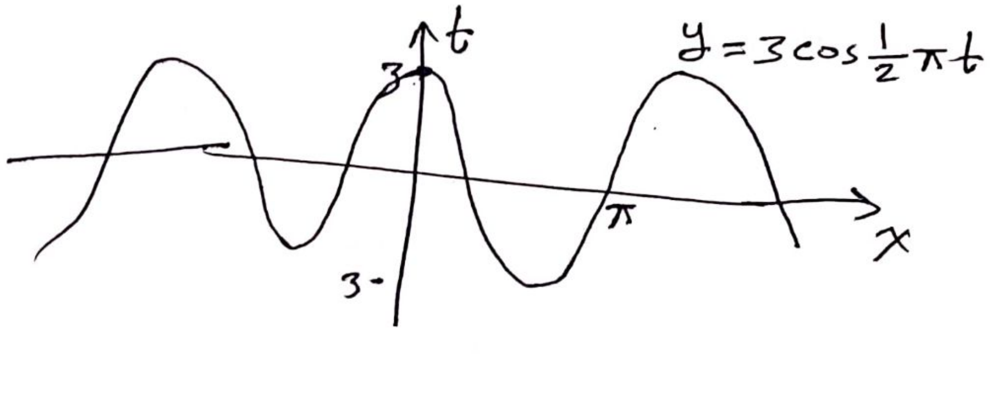
a) اقصى ازاحة وطول الدورة والتردد

b) مثل بيانياً

الحل :- اقصى ازاحة $|3| = 3$

طول الدورة $\frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$

التردد $\frac{w}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$



تمثيل اقتران الظل

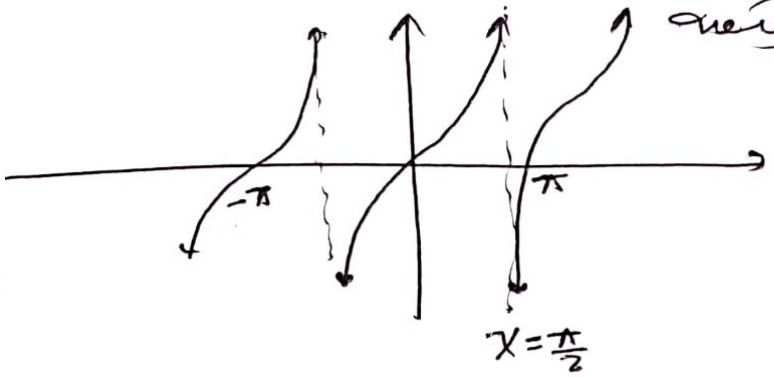
بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ فان اقتران الظل يكون غير معرف

عند $\cos x = 0$ مما يعني ان طنحناه خطوط تقارب اسية

عندما $\cos x = 0$

يمتاز $y = \tan x$ بالخصائص الآتية

* طول الدورة π واسعة غير معرفة
* المجال هو جميع الاعداد الحقيقية ماعدا $\frac{\pi}{2} n$ حيث n فردي
* المدى هو جميع الاعداد الحقيقية



بشكل عام تمثيل $\tan x$

غير مهم في مرحلة التوجيهي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التدريب وحل المسائل

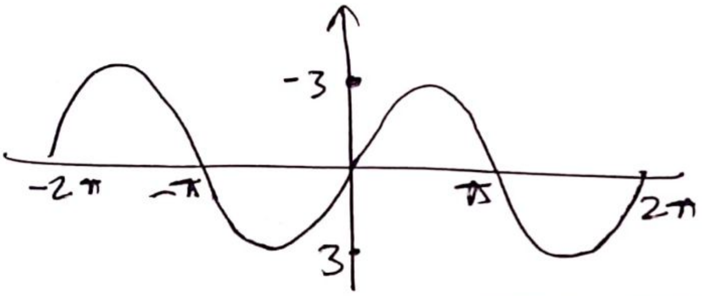
حدد طول الدورة وسعة كل اقتران مما يأتي ثم ارسم

1) $g(x) = 3\sin x$

السعة $|a| = 3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

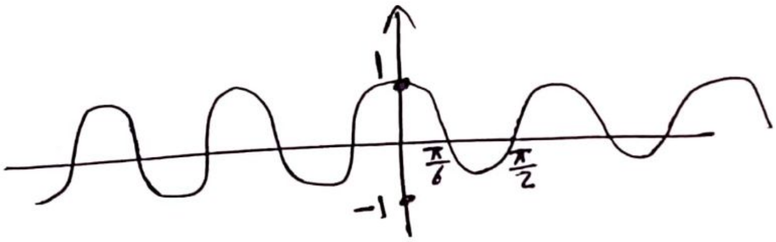
توسيع



2) $g(x) = \cos 3x$

السعة $|a| = 1$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

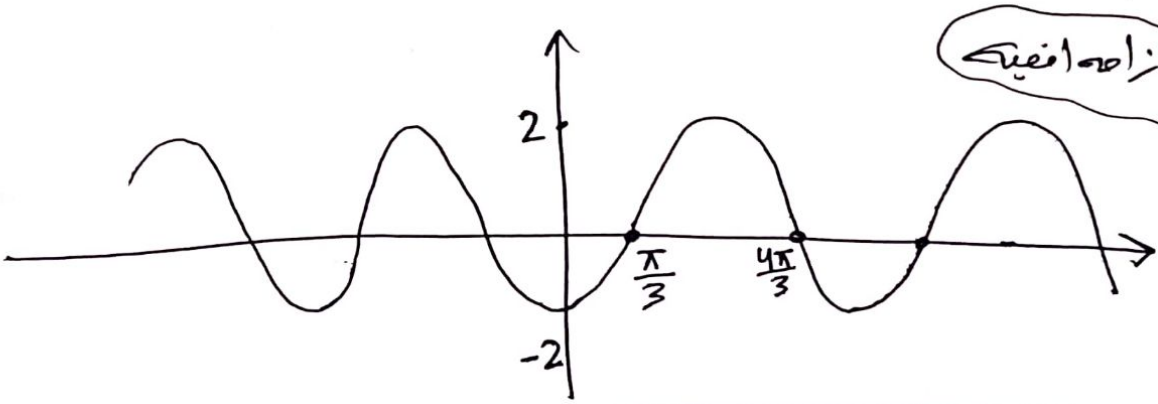


3) $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

السعة $|a| = 2$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1}$

توسيع مع ازاحة افقية لليمين



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

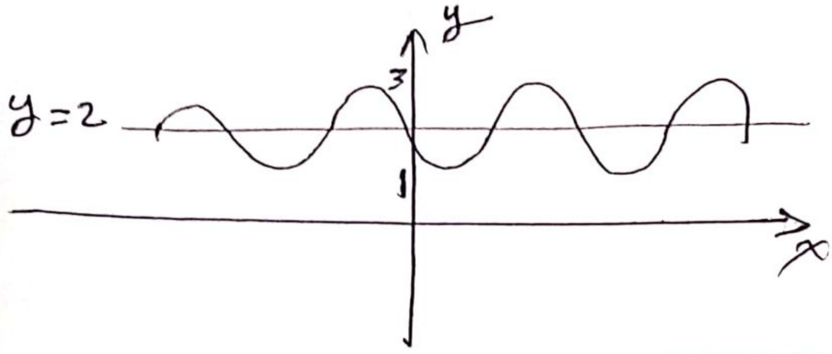
④ $g(x) = 2 - \cos x$

$|-1| = 1$ السعة

$\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ الدورة

انعكاس مع انسحاب اعلى (2)

خط الوسط $y = 2$

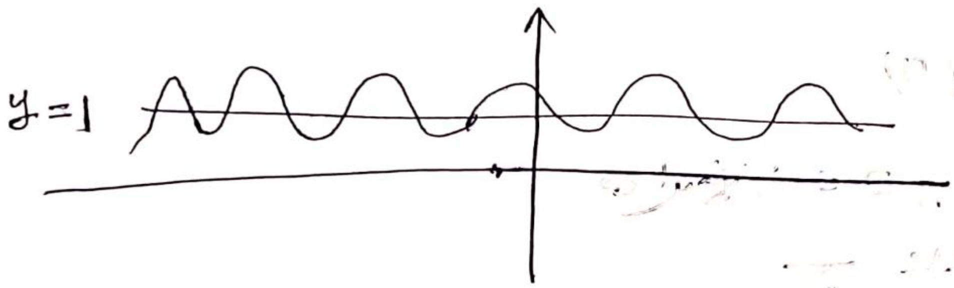


⑤ $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$

$\frac{2\pi}{\pi} = 2$ الدورة

$|a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ السعة

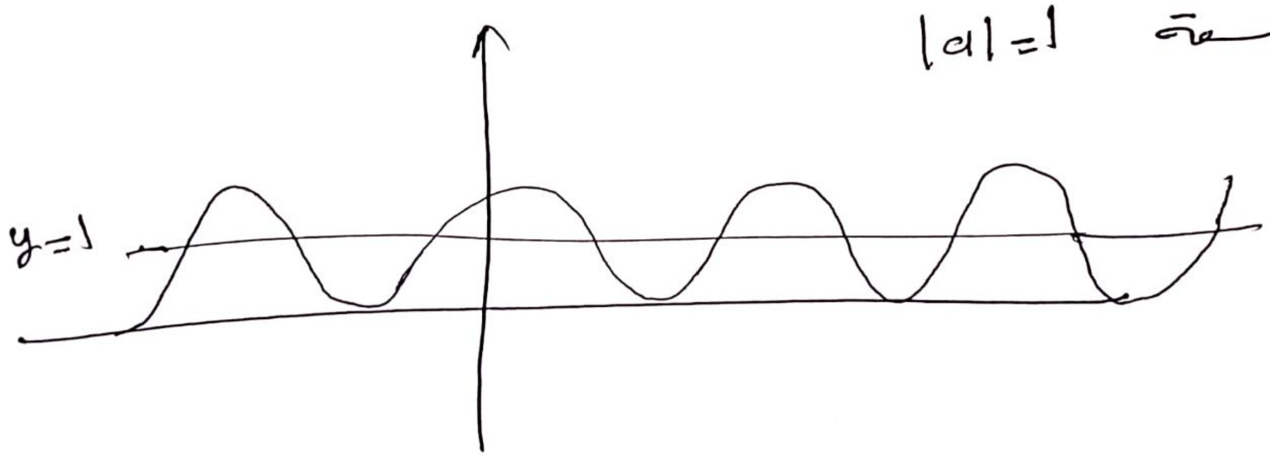
خط الوسط $y = 1$



⑥ $g(x) = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

$\frac{2\pi}{2} = \pi$ الدورة

$|a| = 1$ السعة

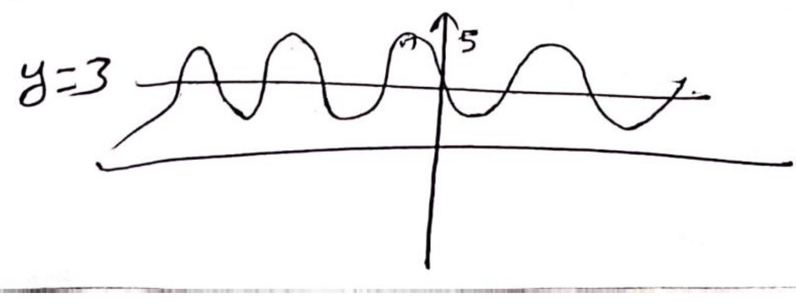


⑦ $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$

$\frac{2\pi}{3}$ الدورة

$|a| = 2$ السعة

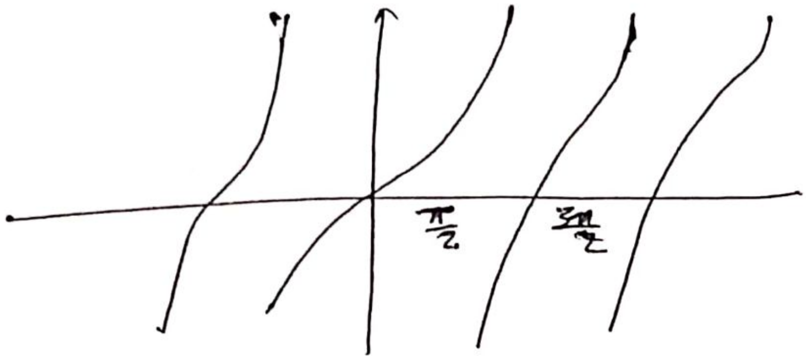
خط الوسط $y = 3$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

8) $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$

الدورة π
السعة غير معرفة



9) $g(x) = -1 + \tan 2x$

الدورة هنا $\frac{\pi}{2}$ لأن معامل x هو 2
السعة غير معرفة

اكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيل البياني المناسب

10) $y = -2 + \sin(2x + \pi)$

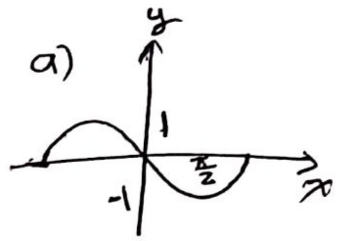
11) $y = -\sin(x + \pi)$

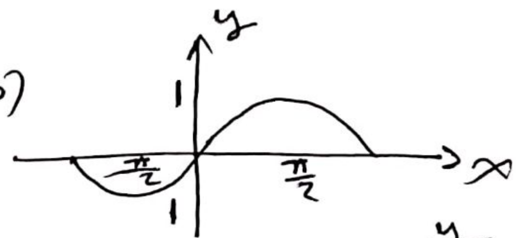
12) $y = -3 + \cos x$

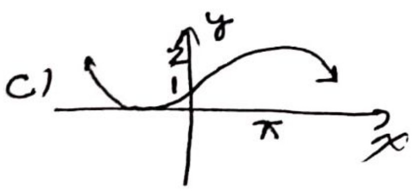
13) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

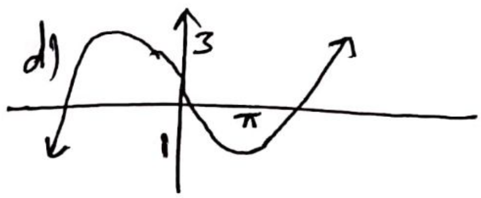
14) $y = 1 + \sin \frac{1}{2}x$

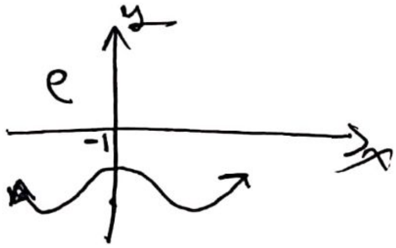
15) $y = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$

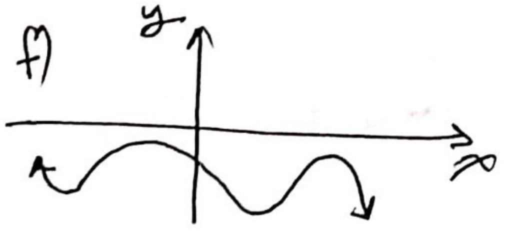












الحل:

$13 \rightarrow a$ $\quad$ $14 \rightarrow c$

$11 \rightarrow b$ $\quad$ $15 \rightarrow d$

$12 \rightarrow e$ $\quad$ $10 \rightarrow f$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

صف التحويلات الهندسية التي طبقت على منحنى الاقتران f لينتج منحنى الاقتران g

(16) $f(x) = 2\cos x$ و $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

ازاحة افقية نحو اليمين مقداره $\frac{\pi}{2}$ وازاحة راسية للاعلى مقدارها (1)

---

(17) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ و $g(x) = 3\sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2$

توسيع راسي بمعامل مقداره 3 وانسحاب
وانسحاب راسي للاسفل مقداره 2

---

(18) $f(x) = \sin 3x$ و $g(x) = \sin 3(x + 3\pi) - 5$

ازاحة افقية نحو اليسار 3π وازاحة راسية للاسفل مقدارها 5

---

(19) $f(x) = \cos x + 9$ و $g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

ازاحة افقية نحو اليمين مقدارها π
ازاحة راسية للاعلى مقدارها 9
تضييق افقي بمعامل مقداره $\frac{1}{6}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner