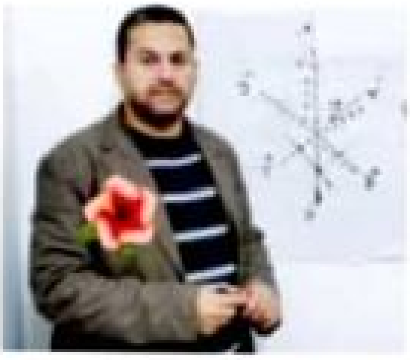
الفرع العلمي

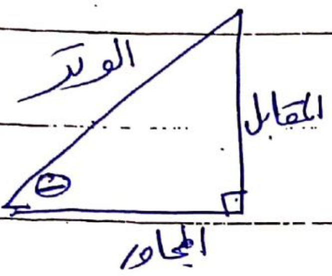
الوحدة (5)

الاقترانات المثلية

شرح مفصل للمادة
اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
اوراق عمل
رافت صافي



مفهوم اساسي



اذا مثلث θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فان الاقترانات المثلثية الستة تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يلي :

1) $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ تقرأ جيب الزاوية

2) $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ تقرأ جيب تمام الزاوية

3) $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ تقرأ ظل الزاوية

4) $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ تقرأ القاطع

5) $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ تقرأ قاطع التمام

6) $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ تقرأ ظل تمام

اقترانات المقلوب

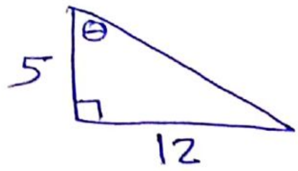
1) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

2) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

3) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

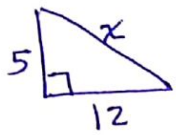
رافت ضافي

مثال :- جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور



الحل :- قبل البدء بالحل، يجب ايجاد جميع اطوال اضلاع المثلث

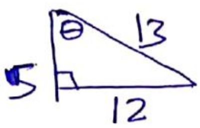
نطبق نظرية فيثاغورس :-



$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25$

$x = \pm\sqrt{169}$

$x = 13$



① $\sin\theta = \frac{12}{13} \rightarrow \csc\theta = \frac{13}{12}$

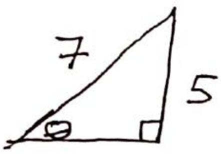
② $\cos\theta = \frac{5}{13} \rightarrow \sec\theta = \frac{13}{5}$

③ $\tan\theta = \frac{12}{5} \rightarrow \cot\theta = \frac{5}{12}$

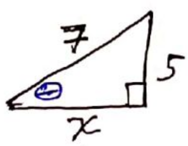
نفضل ايجاد الاقترانات المثلثية ثم مقلوبه

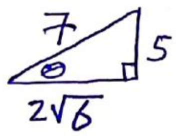
التحقق من فهمي ص 20

جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور



الحل :- نطبق فيثاغورس





$49 = 25 + x^2$

$-25 \quad -25$

$24 = x^2$

$x = \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 4} = 2\sqrt{6}$

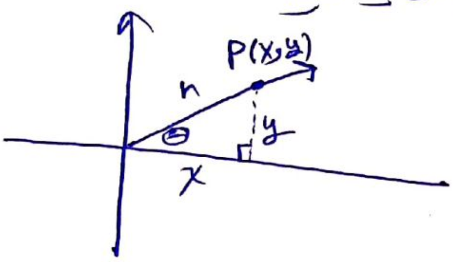
① $\sin\theta = \frac{5}{7} \rightarrow \csc\theta = \frac{7}{5}$

② $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7} \rightarrow \sec\theta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$

③ $\tan\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}} \rightarrow \cot\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

قيم الاقترانات المثلثية لأي زاوية باستعمال نقطة معلومة عليها

اذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي والنقطة $P(x,y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ ، r يمثل البعد بين النقطة P ونقطة الاصل حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$ فان الاقترانات المثلثية للزاوية θ تعرف كما يأتي

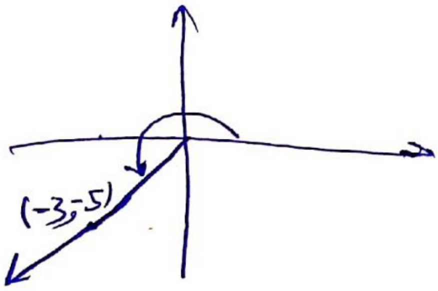


$$\sin\theta=\frac{y}{r} \longrightarrow \csc\theta=\frac{r}{y}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \longrightarrow \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \longrightarrow \cot\theta=\frac{x}{y}$$

مثال: تقع النقطة $(-3,-5)$ على ضلع انتهاء زاوية θ المرسومة في الوضع القياسي ، جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ



الحل: نجد x و y ونجد r

$x=-3 , y=-5$

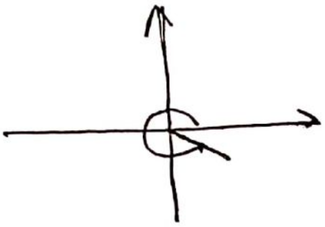
$r=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

$$\sin\theta=\frac{-5}{\sqrt{34}} \longrightarrow \csc\theta=\frac{-\sqrt{34}}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{34}} \longrightarrow \sec\theta=\frac{-\sqrt{34}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3} \longrightarrow \cot\theta=\frac{3}{5}$$

تقع النقطة (1، -3) على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ



الحل :- $x = 1$ ، $y = -3$ ، $r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$$\sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} \longrightarrow \csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \longrightarrow \sec\theta = \sqrt{10}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{1} \longrightarrow \cot\theta = -\frac{1}{3}$$

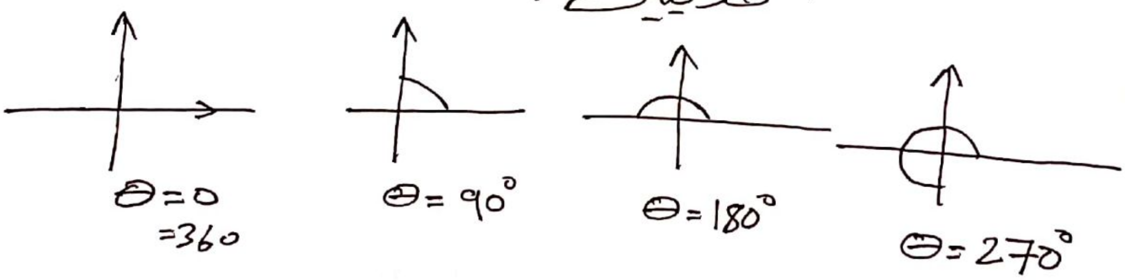
ايجاد قيم الاقترانات المثلثية اذا علمت الزاوية θ

اولاً

* الزاوية الربعية :- الزاوية التي ينطبق ضلع انتهائها على احد المحورين الاحداثيين.

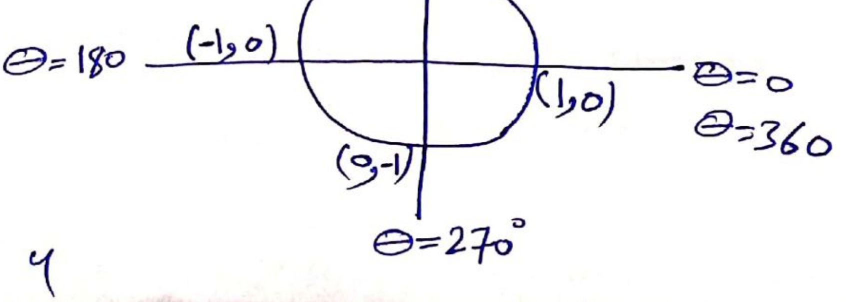
تذكير

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



لمعرفة جميع النسب المثلثية لزاوية معلومة تقع على المحورين الاحداثيين ، نرسم دائرة الوحدة وهي التي طول نصف قطرها (1) ومركزها (0،0) حيث x تمثل $\cos\theta$ و y تمثل $\sin\theta$

ثم نجد $\tan\theta$. حيث $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ حيث نجد باقي الاقترانات المثلثية من خلال المقلوب.



انتبه مقلوب $\frac{0}{1}$ غير معرف

مثال : اوجد :

① $\cot 270^\circ$

هنا على محور y السالب $(0 \text{ و } -1)$
cos sin

نجد $\tan\theta$ ثم نقلب

$\tan 270^\circ = \frac{-1}{0} \rightarrow \cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$

---

② $\sec 90^\circ$

هنا على محور y الموجب $(0 \text{ و } 1)$
cos sin

هنا نجد cos ثم نقلب

$\cos 90 = 0 \longrightarrow \sec\theta = \frac{1}{0}$ غير معرف

---

③ $\csc \pi$

هنا على محور x السالب $(-1 \text{ و } 0)$
cos sin

نجد sin ثم نقلب

$\sin \pi = 0 \longrightarrow \csc \pi = \frac{1}{0}$ غير معرف

ملاحظة : اذا كانت الزاوية سالبة نطبق القواعد التالية

① $\sin -\theta = -\sin\theta$ السالب يخرج وكذلك $\csc -\theta$

$\cos -\theta = \cos\theta$ السالب يهمل وكذلك $\sec -\theta$

$\tan -\theta = -\tan\theta$ السالب يخرج وكذلك $\cot -\theta$

② اذا كانت الزاوية اكبر من 360 اطرح دورة 360

" " " اكبر من 360 بالسالب نزيد دورة

23
التحقق من فهمك ص

أجد قيمة :-

a) $\sin 3\pi$ b) $\tan 90$ c) $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

الحل:- 3π أكبر منا 360 نطرح دورة

$3\pi - 2\pi = \pi$

وعليه π على محور x السالب (−1 و 0)
cos sin

وعليه $\sin 3\pi = 0$

---

b) الحل:- 90° على محور y الموجب ← (0 و 1)
cos sin

$\tan 90 = \frac{\sin 90}{\cos 90} = \frac{1}{0}$ غير معرف

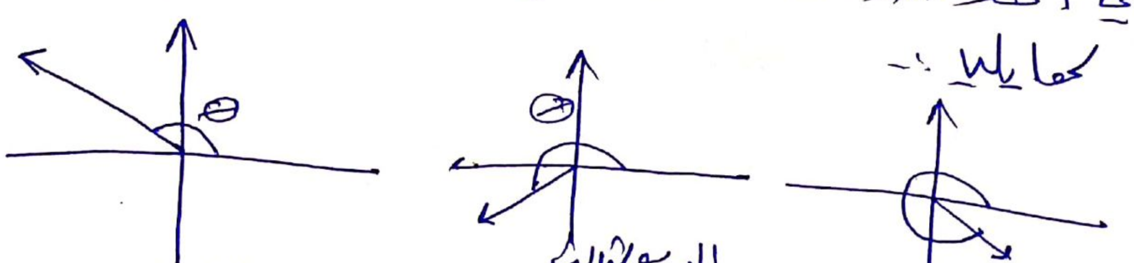
---

c) هنا الزاوية سالبة
نهمل السالب

$\frac{3\pi}{2}$ على محور y السالب ← (0 و −1)
cos sin

$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \rightarrow \sec\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ غير معرف

ثانياً :- زاوية مرجعية
زاوية ربعية بحيث تكون الزاوية تقع
هنا لما تكون الزاوية
في احد الارباع حيث نعيدها الى احدى الزوايا 30,45,60
كما يلي :-



الربع الثاني
$180-\theta$

الربع الثالث
$\theta-180$

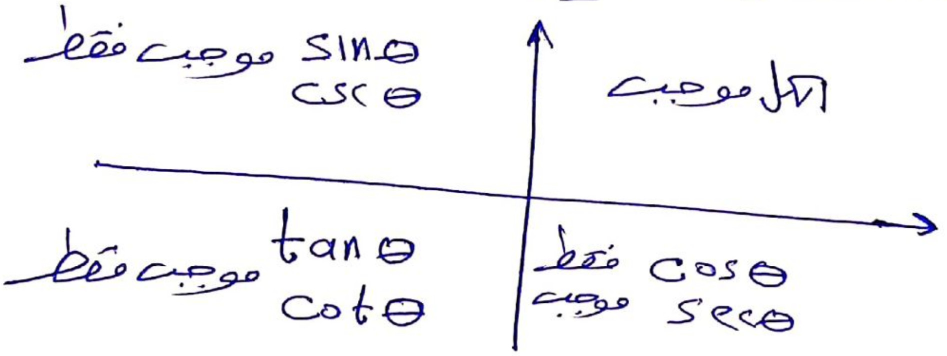
الربع الرابع
$360-\theta$

(6)

ملاحظة: عند ايجاد قيمة الزوايا يجب حفظ الجدول الآتي

θ	30	45	60
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ومعرفة الاشارة كما يلي



مثال: جد:-

(1) $\sin 135°$

خطوة (1):- الزاوية تقع في الربع الثاني ← موجب

خطوة (2):- الزاوية المرجعية $180-135=45°$

وعليه:- $\sin 135° = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos 600$

هنا الزاوية اكبر من 360 وعليه نطرح دورة

$600-360=240°$

خطوة (1):- الزاوية تقع في الربع الثالث ← سالب

خطوة (2):- الزاوية المرجعية $240-180=60$

وعليه:- $\cos 240 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

التحقق من فهمك ص 26

جد قيمة كل مما يأتي :-

a) $\sin 210$ b) $\cos 510°$

c) $\sec 5\pi$ d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

الحل :-

a)

210 الربع الثالث ← سالب

الزاوية المرجعية $210-180=30$

$\sin 210 = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

---

b)

510 أكبر من 360 نطرح دورة

$510-360=150$

150 الربع الثاني ← سالب

زاوية المرجع $180-150$

30

$\cos 510 = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

c)

5π أكبر من 2π اطرح دورات

كامل $5\pi - 2\pi = 3\pi$

$3\pi - 2\pi = \pi$

π زاوية ربعية ← $(-1, 0)$

cos sin

$\cos\pi = -1 \rightarrow \sec\pi = -1$

---

d) $\tan -\frac{2\pi}{3} = -\tan\frac{2\pi}{3}$ السالب الخارج

$\frac{2\pi}{3}$ الربع الثاني ← سالب

الزاوية المرجعية

$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$-\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ايجاد قيم الاقترانات المثلثية اذا علم احداها

نستفيد من المتطابقات الآتية :-

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

مثال :- اذا كان $\tan\theta = -4$ حيث $\sin\theta < 0$ جد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة

الحل :- هنا كل من الظل وجيب الزاوية سالب ⟵ الربع الرابع

$$\tan\theta = -4 \longrightarrow \cot\theta = \frac{-1}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ضرب تبادلي $\quad -4 = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\sin\theta = -4\cos\theta \quad \text{——— (1)}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{——— (2)}$$

نحل المعادلتين بالتعويض

نعوض بدل $\sin\theta$ بـ $-4\cos\theta$ في معادلة (2) :-

$$16\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$17\cos^2\theta = 1 \longrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{17}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{و} \quad \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

مرفوض لأن جيب التمام في الربع الرابع موجب

نعوض $\quad \sin\theta = -4\cos\theta = -4\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \dfrac{-4}{\sqrt{17}}$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{17}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{-\sqrt{17}}{4}$$

27
4p
تحقق من فهمك

اذا كان $\sec\theta = 2$ حيث $\sin\theta < 0$ جد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية.

الحل:- القاطع موجب والجيب سالب ← الربع الرابع

$$\sec\theta = 2 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \frac{1}{4} = 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مرفوضة لان $\sin\theta < 0$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \csc\theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3} \rightarrow \cot\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

معكوس اقتران الجيب وجيب التمام والظل

مثال :- جد قيمة كل مما يلي :-

① $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$

هنا بنحث في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ عن الزاوية التي جيبها $\frac{1}{2}$ وعليه

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

② $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

هنا بنحث في الفترة $[0, \pi]$ عن الزاوية التي جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وعليه

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$\tan^{-1} 1$

هنا بنحث عن الزاوية في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ والتي ظلها (1) ومنها

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

التحقق من فهمك ص 30

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :-

a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos^{-1}0$ c) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

الحل :-

a) يبحث في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ عن الزاوية التي جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

b) يبحث في الفترة $[0, \pi]$ عن الزاوية التي جيب تمامها 0

$$\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$$

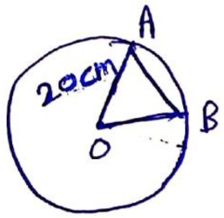
c) يبحث عن الزاوية التي ظلها $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ وهي :-

$$\tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}$$

ملاحظة : في حاله لم تكن الزاوية من الزوايا الخاصة هنا فنلجأ للآلة الحاسبة

التحقق من فهمك ص 31

اذا كانت مساحة القطاع الدائري OAB هي $164\ cm^2$ في الشكل المجاور
جد مساحة $\triangle OAB$



الحل :-

مساحة القطاع $A=\frac{1}{2}r^2\theta$

$$A=\frac{1}{2}(20)^2\theta$$

$$164=200\theta^2 \to \theta=\frac{164}{200}=\frac{41}{50}$$

ملاحظة : نستطيع حساب مساحة مثلث علم طولا ضلعين وزاوية محصورة كما يلي

$$A=\frac{1}{2}(\text{ضلع})(\text{ضلع})(\sin\theta)$$

$$A=\frac{1}{2}(20)(20)\sin\frac{41}{50}$$ هنا نلجأ الى الآلة الحاسبة

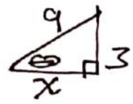
$$\simeq 146.3\ cm^2$$

التدرب وحل المسائل

جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كل مما يأتي

(1)

نطبق فيثاغورس



$81 = 9 + x^2$

$x^2 = 72$

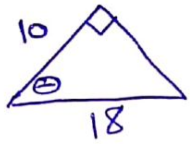
$x = \sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = 6\sqrt{2}$

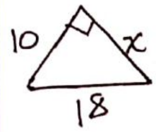
$\sin\theta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow \csc\theta = 3$

$\cos\theta = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \cot\theta = 2\sqrt{2}$

(2)





نطبق فيثاغورس

$324 = 100 + x^2$

$x^2 = 224$

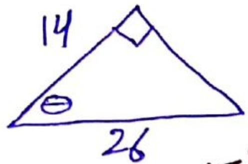
$x = \sqrt{224} = \sqrt{16\times 14} = 4\sqrt{14}$

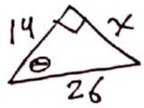
$\sin\theta = \frac{4\sqrt{14}}{18} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \rightarrow \csc\theta = \frac{9}{2\sqrt{14}}$

$\cos\theta = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \rightarrow \sec\theta = \frac{9}{5}$

$\tan\theta = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5} \rightarrow \cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{14}}$

(3)





نطبق فيثاغورس

$676 = 196 + x^2$

$x = \sqrt{480} = \sqrt{16\times 30} = 4\sqrt{30}$

$\sin\theta = \frac{4\sqrt{30}}{26} = \frac{2\sqrt{30}}{13} \rightarrow \csc\theta = \frac{13}{2\sqrt{30}}$

$\cos\theta = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \rightarrow \sec\theta = \frac{13}{7}$

$\tan\theta = \frac{4\sqrt{30}}{14} = \frac{2\sqrt{30}}{7} \rightarrow \cot\theta = \frac{7}{2\sqrt{30}}$

تقع النقطة المعطاة في كل مما يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. جد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

(4) $(-12, 5)$

$x = -12,\ y = 5$

$r = \sqrt{144 + 25} = 13$

$\sin\theta = \frac{5}{13} \rightarrow \csc\theta = \frac{13}{5}$

$\cos\theta = \frac{-12}{13} \rightarrow \sec\theta = \frac{-13}{12}$

$\tan\theta = \frac{-5}{12} \rightarrow \cot\theta = \frac{-12}{5}$

(5) $(3, -3)$

$x = 3,\ y = -3$

$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \rightarrow \csc\theta = -\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \sec\theta = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \rightarrow \cot\theta = -1$

(6) $(-2, -5)$

$x = -2,\ y = -5$

$r = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\sin\theta = \frac{-5}{\sqrt{29}} \rightarrow \csc\theta = \frac{-\sqrt{29}}{5}$

$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{29}} \rightarrow \sec\theta = \frac{-\sqrt{29}}{2}$

$\tan\theta = \frac{5}{2} \rightarrow \cot\theta = \frac{2}{5}$

(7) $(3, 7)$

$x = 3,\ y = 7$

$r = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\sin\theta = \frac{7}{\sqrt{58}} \rightarrow \csc\theta = \frac{\sqrt{58}}{7}$

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{58}} \rightarrow \sec\theta = \frac{\sqrt{58}}{3}$

$\tan\theta = \frac{7}{3} \rightarrow \cot\theta = \frac{3}{7}$

جد قيمة ما يأتي:

(8) $\sec 135$

الحل

الربع الثاني ← سالب

$180 - 135 = 45$ المرجع

$\sec 135 = -\sec 45$

$= -\sqrt{2}$

(9) $\tan -\frac{3\pi}{4}$

نخرج السالب

$-\tan\frac{3\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}$ الربع الثاني ← سالب

$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ المرجع

$-\tan\frac{3\pi}{4} = -\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= 1$

(10) $\cot\frac{8\pi}{3}$

$\frac{8\pi}{3}$ اكبر من 2π اطرح دورة

$\frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}$ الربع الثاني ← سالب

$\frac{\pi}{1} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ المرجع

$\cot\frac{8\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

(11)

(11) $\cos\frac{7\pi}{4}$

الربع الرابع ← موجب

المرجع $2\pi-\frac{7\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(12) $\sec\frac{15\pi}{4}$

الجبر من 2π اطرح دوره

$\frac{15\pi}{4}-2\pi=\frac{7\pi}{4}$

$\frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع ← موجب

المرجع $2\pi-\frac{7\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$\sec\frac{15\pi}{4}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

(13) $\csc(-630)$

الزاويه سالبه فوق -360 بالتالي نزيد دورات

$-630+360=-270$

$\csc -270=-\csc 270$

$=-(-1)=1$

(14) $\tan 7\pi$

الجبر من 2π نطرح دورات

$7\pi-2\pi=5\pi-2\pi=3\pi-2\pi=\pi$

$\tan\pi=0$

(15) $\sin(-\frac{2\pi}{3})$

$-\sin\frac{2\pi}{3}$

السالب الخارج

الربع الثاني ← موجب

المرجع $\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

$-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

جد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كل مما يلي

(16) $\cos\theta=\frac{-7}{12}$, $\tan\theta>0$

الظل موجب وجيب التمام سالب ← الربع الثالث

$\cos\theta=\frac{-7}{12} \longrightarrow \sec\theta=\frac{-12}{7}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta+\frac{49}{144}=1-\frac{49}{144}=\frac{95}{144}$

$\sin^2\theta=\frac{95}{144} \longrightarrow \sin\theta=\frac{-\sqrt{95}}{12}$

$\csc\theta=\frac{-12}{\sqrt{95}}$

$\tan\theta=\frac{\frac{-\sqrt{95}}{12}}{\frac{-7}{12}}=\frac{\sqrt{95}}{7}$

$\cot\theta=\frac{7}{\sqrt{95}}$

(17) $\sec\theta=5$, $\sin\theta<0$

القاطع موجب والجيب سالب ← الربع الرابع

$\sec\theta=5 \longrightarrow \cos\theta=\frac{1}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta+\frac{1}{25}=1$

$\sin^2\theta=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$

$\sin\theta=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{-\sqrt{24}}{5}$

$\csc\theta=\frac{-5}{\sqrt{24}}$

$\tan\theta=\frac{\frac{-\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}}=-\sqrt{24}$

$\cot\theta=\frac{-1}{\sqrt{24}}$

(18) $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $\sin\theta < 0$

الحل: ظل التمام موجب والجيب سالب ← الربع الثالث

$\cot\theta = \frac{1}{4} \rightarrow \tan\theta = 4$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$4 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ تبادلي

$\sin\theta = 4\cos\theta$

لكن

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$16\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$17\cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin\theta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\csc\theta = \frac{-\sqrt{17}}{4}$ ، $\sec\theta = -\sqrt{17}$

(19) $\csc\theta = 2$ ، $\cos\theta > 0$

جيب التمام موجب وقاطع التمام موجب ← الأول

$\csc\theta = 2 \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{1}{4} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot\theta = \sqrt{3}$

---

(20) يمثل الاقتران $y = 20 + \sin 10t$ الارتفاع الرأسي عن سطح الأرض بالسنتيمترات لسن بكرة دراجة هوائية بعد t ثانية من بدء حركة الدراجة. جد الارتفاع الرأسي لسن البكرة بعد 2.5 ثانية من بدء حركة الدراجة

الحل:

عوض

$y = 20 + \sin 10(2.5)$

$y = 20 + \sin 25$ آلة حاسبة

$\simeq 20 + {}^{-}0.13 \simeq 19.87$ cm

شرط الآلة حاسبة + Rad

اذا كان $\cos\frac{\pi}{12} = 0.966$ استعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كل مما يأتي

(21) $\cos\frac{13\pi}{12}$

الربع الثالث ← سالب

المرجع $\frac{13\pi}{12} - \pi = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{13\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -0.966$$

(22) $\cos\frac{11\pi}{12}$

الربع الثاني ← سالب

المرجع $\pi - \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -0.966$$

(23) $\cos\frac{-\pi}{12}$

سالب مهمل

$$\cos\frac{-\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = 0.966$$

(24) $\cos\frac{23\pi}{12}$

الربع الرابع ← موجب

المرجع $2\pi - \frac{23\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{23\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = 0.966$$

جد قيمة كل مما يأتي :

(25) $\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2$

نجد قيمة كل مقدار لوحده

$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin 60 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos 45 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

نعوض :-

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$

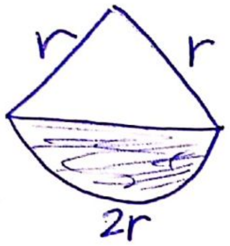
---

(26) $\sin\frac{\pi}{3}-\sin 2\frac{\pi}{3}+\sin\pi-\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}-\sin 2\pi$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 0$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 0$

الناتج صفراً

يبين الشكل المجاور قطاعاً دائرياً طول نصف قطره r وطول قوسه $2r$
اذا كانت مساحة الجزء المظلل من القطاع $24\ cm^2$ جد كلاً مما يأتي :-



(27) طول نصف قطر القطاع

(28) محيط الجزء المظلل

الحل :- طول القوس $2r$ (من الرسم)

(27) نعلم أن

$s = r\theta$

$2r = r\theta$

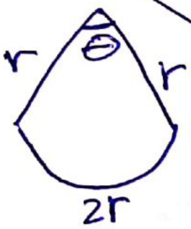
$\boxed{\theta = 2}$

نجد مساحة المظلله بطرح مساحة القطاع من المثلث

A (المظلل) $= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

القطاع كاملاً

المثلث بدلالة ضلعين وزاوية



$24 = \frac{1}{2}r^2(2) - \frac{1}{2}r^2\sin 2$

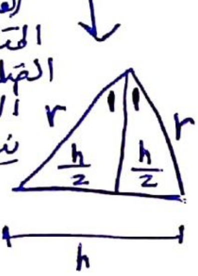
$24 = r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin 2$

$24 = r^2(1 - \frac{1}{2}\sin 2)$

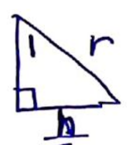
$r = \sqrt{\frac{24}{1-\frac{1}{2}\sin 2}} \simeq 6.6\ cm$

$\sin 2 = 0.9$ آلة حاسبة

المثلث المتطابق الضلعين
العمود ينصف الزاوية



نأخذ المثلث

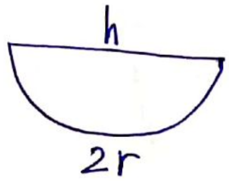


$\sin 1 = \frac{\frac{h}{2}}{r} = \frac{h}{2r}$

$h = 2r\sin 1$

$= (2)(6.6)(0.84) \simeq 11.12\ cm$

(28) محيط المظلل :-



طول القوس + طول قاعدة المثلث

مساحة طول القوس $2r = 2(6.6)$

$= 13.2\ cm$

انظر هنا

طول القاعدة المثلث 11.12

مساحة محيط الشكل

$13.2 + 11.12 = 24.32$

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

(29) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

نبحث عن الزاوية التي جيبها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وعليه

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

---

(30) $\tan^{-1}(-1)$

هنا نبحث عن الزاوية التي ظلها -1

في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ وعليه

$$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

---

(31) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

هنا نبحث عن الزاوية التي

ظلها $\sqrt{3}$ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

وعليه $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

---

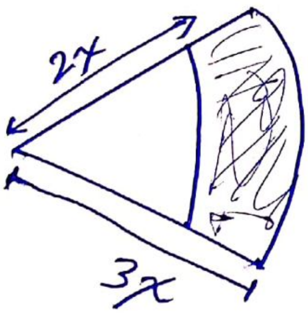
(32) $\cos^{-1}(2)$

مستحيل لأن

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

---

(33) يبين الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز. إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75 ومساحة الجزء المظلل $30\ cm^2$ جد قيمة x



$$A_{\text{مظلل}} = A_{\text{الأكبر}} - A_{\text{الأصغر}}$$

$$30 = \frac{1}{2} 9x^2 (0.75) - \frac{1}{2} 4x^2 (0.75)$$

$$30 = \frac{27}{8}x^2 - \frac{3}{2}x^2$$

$$30 = \frac{15}{8}x^2 \longrightarrow$$ اضرب بـ $\frac{8}{15}$

$$x^2 = 16 \rightarrow x = 4$$

اثبت كلاً مما يأتي مبرراً اجابتك

(34) $\tan 210° + \tan 240 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

الحل :-

210 ربع ثالث ← موجب

المرجع $210-180=30$

240 ربع ثالث ← موجب

$240-180=60$

$\tan 210 = \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 240 = \tan 60 = \sqrt{3}$

نعوض في الطرف الأيمن

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ نعمل انطاق المقام

$\frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

---

(35) $\frac{\sin 30 + \sin 60}{\sin 45} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

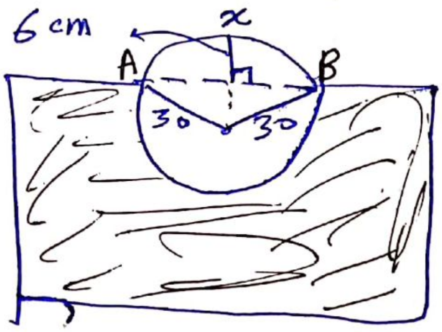
نعوض :-

$\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$

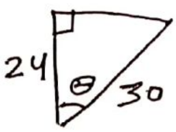
$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

يبين الشكل المجاور المقطع العرضي لقطعة خشب اسطوانية الشكل عائمة على الماء. اذا كان نصف قطر المقطع العرضي لقطعة الخشب 30 cm وكانت النقطتان A و B على سطح الماء وكان ارتفاع أعلى نقطة من هذه القطعة 6 cm فوق سطح الماء. جد النسبة المئوية للجزء من هذه القطعة تحت سطح الماء.



الحل:



المثلث متطابق الضلعين
ننزل عمود من المركز الى الوتر

الة الحاسبة

$$\cos\theta = \frac{24}{30}$$

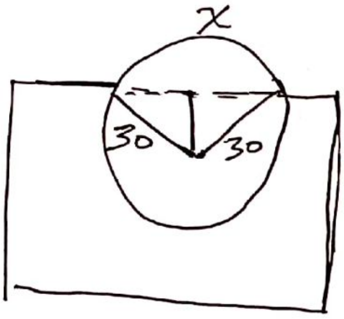
$$\theta \simeq 37$$

ومنه زاوية القطاع

$$2\theta = 74^\circ$$

نحول الى الدائري

$$74 \times \frac{\pi}{180} = \frac{37\pi}{90}$$



مساحة القطعة العائمة = مساحة القطاع الدائري AOB − مساحة المثلث AOB

$$A = \frac{1}{2}(30)^2\left(\frac{37\pi}{90}\right) - \frac{1}{2}(30)(30)\sin\frac{37\pi}{90}$$

$$\simeq 149 \text{ cm}^2$$

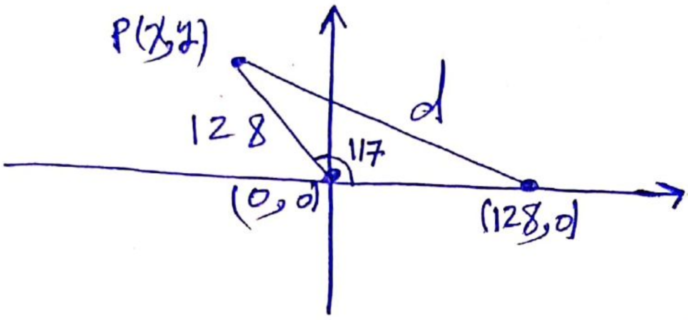
مساحة الجزء الواقع تحت سطح الماء = مساحة المقطع العرضي − مساحة القطعة العائمة

$$A = \pi(30)^2 - 149 \simeq 2678 \text{ cm}^2$$

النسبة المئوية للجزء الواقع تحت سطح الماء

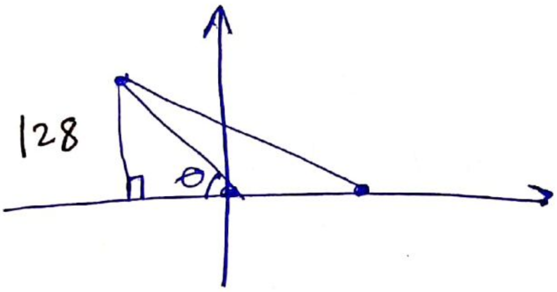
$$\frac{2678}{900\pi} \times 100 \simeq 94.7\%$$

يتكون جزيء الأوزون من ثلاث ذرات أكسجين مرتبطة كما في الشكل المجاور



37) جد احداثيي مركز ذرة الأكسجين P(x,y) الواقع في الربع الثاني علماً بأن الأبعاد على الشكل هي بوحدة البيكومتر ($1\ pm = 10^{-12}\ m$) ثم ابرر اجابتي

38) جد المسافة d بالبيكومتر بين ذرتي الأكسجين غير المرتبطتين



الحل :-

$$\theta = 180 - 117 = 63$$

$$\sin 63 = \frac{y}{128}$$

$$y = 128 \sin 63 \simeq 114$$

$$\cos 63 = \frac{x}{128}$$

$$x = (\cos 63)(128) \simeq 58$$

$P(-58, 114)$ لأن النقطة في الربع الثاني

نطبق قانون المسافة بين نقطتين $(128,0), (-58,114)$

$$d = \sqrt{(128+58)^2 + (0-114)^2} \simeq 218.16$$