الفرع العلمي

التكامل

التكامل بالتعويض

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رأفت صافي 0785824464

الدرس (2)

التكامل بالتعويض

تحقق من فهمي

1) جد كلاً من التكاملات الآتية   صفحة 32

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3-5}\, dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x\, dx$

f) $\int x\, 2^{x^2}\, dx$

محتوى الجذر مشتقته موجودة

a) $u = x^3-5$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 \longrightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int 4x^2 \sqrt{u}\, \frac{du}{3x^2} = \int \frac{4}{3} u^{\frac{1}{2}} du$

$= (\frac{4}{3})(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}) + c$

$= \frac{8}{9}(x^3-5)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{8}{9}\sqrt{(x^3-5)^3} + c$

الأس غير خطي

b) $u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du$

$dx = 2u\, du$

$\int \frac{1}{2u} e^u\, 2u\, du$

$\int e^u du = e^u + c$

$= e^{\sqrt{x}} + c$

اللوغاريتم في البسط ومشتقته موجودة

الحل :-

c) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\, du$

$\int \frac{u^3}{x} x\, du = \int u^3 du$

$= \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$

الزاوية غير خطية

d) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\, du$

$\int \frac{\cos u}{x} x\, du$

$= \int \cos u\, du$

$= \sin u + c$

$= \sin(\ln x) + c$

رأفت صافي

هنا نفرض الاقتران الذي قوته ليست (1)

e) $u = \cos 5x$

$\frac{du}{dx} = -5\sin 5x \rightarrow dx = \frac{du}{-5\sin 5x}$

$\int u^4 \sin 5x \frac{du}{-5\sin 5x}$

$\int \frac{-1}{5} u^4 du$

$= \frac{-1}{5} \frac{u^5}{5} + c = \frac{-1}{25} \cos^5 5x + c$

الأس غير خطي

f) $u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int x\, 2^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int 2^u du$

$= (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\frac{(2^u)}{\ln 2} + c$

$= \frac{2^u}{2\ln 2} + c = \frac{2^{x^2}}{2\ln 2} + c$

2) جد كلاً من التكاملات الآتية (صفحة 34)

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$ b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx$ c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx$

وجود جذر خطي

a) $u = \sqrt{1+2x}$

$u^2 = 1 + 2x$ أشتق

$2u\,du = 2dx$

$dx = u\,du$

$\int \frac{x}{u}(u\,du) = \int x\,du$

نكتب x بدلالة u

نعود للفرضية

$u^2 = 1 + 2x$

$x = \frac{u^2 - 1}{2}$

$= \int \frac{u^2 - 1}{2} du$

$\frac{1}{2}(\frac{u^3}{3} - u) + c = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u + c$

$= \frac{(\sqrt{1+2x})^3}{6} - \frac{\sqrt{1+2x}}{2} + c$

محتوى القوس مشتقته جزء منها موجود

الحل:

b) $u = x^4 - 8$

$\frac{du}{dx} = 4x^3 \rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\int x^7 u^3 \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int x^4 u^3 du$

نكتب x^4 بدلالة u

$u = x^4 - 8$

$x^4 = u + 8$

$\frac{1}{4}\int (u+8) u^3 du$

$\frac{1}{4}\int (u^4 + 8u^3) du$

$\frac{1}{4}(\frac{u^5}{5} + 2u^4) + c$

$\frac{1}{20}(x^4 - 8)^5 + \frac{1}{2}(x^4 - 8)^4 + c$

رأفت ضابجي

c) $u = 1 - e^{x}$ محتوى القوس جزء من مشتقته موجودة

$\frac{du}{dx} = -e^{x} \rightarrow dx = \frac{-du}{e^{x}}$

نكتب e^{2x} بدلالة u

$u = 1 - e^{x}$

نربع $e^{x} = 1 - u$

$e^{2x} = 1 - 2u + u^2$

$= \int \frac{-e^{3x}}{u^2} \frac{du}{e^{x}} = -\int \frac{e^{2x}}{u^2} du$

نوزع البسط على المقام

$= -\int \left(\frac{1 - 2u + u^2}{u^2}\right) du$

$= -\int \left(u^{-2} - \frac{2}{u} + 1\right) du = -\left(\frac{u^{-1}}{-1} - 2\ln|u| + u\right) + c$

$= \frac{1}{u} + 2\ln|u| - u = \frac{1}{1-e^{x}} + 2\ln|1-e^{x}| - 1 + e^{x} + c$

3) جد كلاً من التكاملات الآتية (صفحة 35)

a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$ b) $\int x \sqrt[3]{(1-x)^2}\, dx$

الحل :-

a) $u = \sqrt[3]{x}$ وجود جذر ضمن

$u^3 = x$ اشتق ضمني

$3u^2 du = dx$

$\int \frac{3u^2 du}{x + u}$

نكتب x بدلالة u من الفرضية

$x = u^3$

$\int \frac{3u^2 du}{u^3 + u} = \int \frac{3u^2 du}{u(u^2+1)}$

$= \int \frac{3u}{u^2+1} du$

$= \frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1} du$

$= \frac{3}{2}\ln|u^2+1| = \frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{x^2}+1| + c$

نهمل المطلق لانه داخله موجب

راقت صافي ٠٧٨٠٥٥٠٤

b) $u = \sqrt[3]{1-x}$ وجود جذر ضمن

$u^3 = 1 - x$

$3u^2 du = -dx$

$dx = -3u^2 du$

$\int x\, u^2 (-3u^2 du)$

$\int -3u^4 x\, du$

نكتب x بدلالة u من الفرضية

$u^3 = 1 - x$

$x = 1 - u^3$

$= \int -3u^4(1 - u^3)\, du$

$= \int (-3u^4 + 3u^7)\, du$

$= -\frac{3}{5}u^5 + \frac{3}{8}u^8 + c$

$= \frac{-3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^8} + c$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4) يمثل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تستعمل في اجهزة الحاسوب ، حيث x عدد القطع المبيعة منها بالمئات اذا كان $p'(x)=\frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة . جد $p(x)$ علماً بان سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما تكون عدد القطع المبيعة منها 400 قطعة .

صفحة 37

الحل :-

$$p(x)=\int p'(x)\,dx=\int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$$

$u=9+x^2$

$\frac{du}{dx}=2x$

$dx=\frac{du}{2x}$

$$=\int \frac{-135x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2x}$$

$$=\int -\frac{135}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\left(\frac{-135}{2}\right)\left(2u^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=-135\sqrt{u}+c$$

$$p(x)=-135\sqrt{9+x^2}+c$$

$x=4$

$P=30$

هنا $x=4$ لانه x بالمئات

$$30=-135\sqrt{9+16}+c$$

$$30=-135(5)+c$$

$$c=30+675$$

$$c=705$$

$$p(x)=-135\sqrt{9+x^2}+705$$

راقت ضابي ٠٧٨٠٠٥٦

5) جد كلاً من تكاملي الآتيين (صفحة 39)

a) $\int \sin^3 x\, dx$ b) $\int \cos^5 x \sin^2 x\, dx$

الحل :

a) $\int \sin^2 x \sin x\, dx$ متطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int (1-u^2)\sin x \frac{du}{\sin x}$

$\int (u^2-1)\, du = \frac{u^3}{3} - u + c$

$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

b) $u = \sin x$ فردي مع زوجي نختار الزوجي

$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \cos^5 x\, u^2 \frac{du}{\cos x} = \int \cos^4 x\, u^2\, du$

نكتب $\cos^4 x$ بدلالة u

من المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

نربع $\cos^2 x = 1 - u^2$

$\cos^4 x = 1 - 2u^2 + u^4$

$\int u^2(1-2u^2+u^4)\, du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du$

$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{u^7}{7} = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c$

6) جد كلاً من التكاملات الآتية (صفحة 41)

a) $\int \tan^4 x\, dx$ b) $\int \cot^5 x\, dx$ c) $\int \sec^4 x \tan^6 x\, dx$

الحل :

a) $\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx$

متطابقة $\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

فك اقواس

$= \int (\tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x)\, dx$ توزيع التكامل

$= \int (\tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$ تكامل كل حد لوحده

$\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ $\sec x$ قوة زوجية $u = \tan x$ $\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int u^2 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} = \frac{1}{3}\tan^3 x$	$\int \tan^2 x\, dx$ متطابقة $\int (\sec^2 x - 1)\, dx$ $\tan x - x$

التكامل الاصلي

رأفت صباحي

$\int \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

b) $\int \cot^4 x \cot x \, dx$

في حالة القوة فردي
١ سحب واحدة فقط دون
الحالة الى توزيع بتكامل

$\int (\cot^2 x)^2 \cot x \, dx = \int (\csc^2 x - 1)^2 \cot x \, dx$

$u = \csc x$

$\frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$

$\int (u^2-1)^2 \cot x \frac{du}{\csc x \cot x} = \int \frac{-(u^2-1)^2}{\csc x} du$

نكتب $\csc x$
بدلالة u

$= \int \frac{-(u^4-2u^2+1)}{u} du = \int (-u^3+2u-\frac{1}{u}) du$

نوزع البسط
على المقام

$= \frac{-u^4}{4} + u^2 - \ln|u| = -\frac{1}{4}\csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

هنا قوة $\sec x$ زوجي

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

نكتب $\sec^2 x$ بدلالة u
$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$= 1 + u^2$

$\int \sec^4 x \, u^6 \frac{du}{\sec^2 x} = \int \sec^2 x \, u^6 \, du$

$= \int (1+u^2) u^6 \, du = \int (u^6 + u^8) du$

$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$

$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$

رافت صابي

7) جد قيمة التكاملات الآتية ((صفحة 43))

a) $\int_0^2 x(x+1)^3\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\,dx$

الحل:

a) $u = x+1$

$\frac{du}{dx} = 1 \to dx = du$

حدود التكامل

عند $x=0$ فان $u = 0+1 = 1$

عند $x=2$ فان $u = 2+1 = 3$

نكتب x بدلالة u من الفرضية:

$x = u-1$

$\int_1^3 x u^3\,du = \int_1^3 u^3(u-1)\,du$

$= \int_1^3 (u^4 - u^3)\,du = \left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4\right)\Big|_1^3$

$= \left(\frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{243}{5} - \frac{81}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{242}{5} - \frac{80}{4} = \frac{242}{5} - 20 = \frac{142}{5}$

b) $u = \sec x + 2$

حدود التكامل

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

عند $x=0$ فان $u = 1+2 = 3$

عند $x=\frac{\pi}{3}$ فان $u = 2+2 = 4$

$dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$

$\int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u}\,\frac{du}{\sec x \tan x} = \int_3^4 \sqrt{u}\,du$

$= \int_3^4 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}\sqrt{27}$

$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3}(3\sqrt{3})$

$= \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

رافت صافي

التدريب وحل المسائل

جد كلاً من التكاملات الآتية :-

1) $\int x^2(2x^3+5)^4\,dx$	2) $\int x^2\sqrt{x+3}\,dx$	3) $\int x(x+2)^3\,dx$
4) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$	5) $\int \sin x \cos 2x\,dx$	6) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$
7) $\int \sec^4 x\,dx$	8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$	9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$
10) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$	11) $\int \frac{2e^x-2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$	12) $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$
13) $\int x\sqrt[3]{x+10}\,dx$	14) $\int (\sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2})\,dx$	15) $\int \frac{\sec^3 x+e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$
16) $\int (1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3 x\,dx$	17) $\int \sin x \sec^5 x\,dx$	18) $\int \frac{\sin x+\tan x}{\cos^3 x}\,dx$

الحل :-

1) $u = 2x^3+5$ — محتوى القوس مشتقته موجودة

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \longrightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int x^2 u^4 \frac{du}{6x^2} = \frac{1}{6}\int u^4\,du = \frac{1}{6}\frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + c$$

رافت صافي

2) $u=\sqrt{x+3}$ جذر خطي

$u^2=x+3$ اشتق

$2u\,du=dx$

$\int x^2 u\,(2u\,du)$

$\int 2u^2x^2\,dx$

$\int 2u^2(u^4-6u^2+9)\,du$

نكتب x^2 بدلالة u من الفرضية
نربع $x=u^2-3$
$x^2=u^4-6u^2+9$

$\int(2u^6-12u^4+18u^2)\,du$

$=\frac{2}{7}u^7-\frac{12}{5}u^5+6u^3+C$

$=\frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7}-\frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5}+6\sqrt{(x+3)^3}+C$

3) $u=x+2$ خطي مرفوع لقوة

$\frac{du}{dx}=1 \rightarrow dx=du$

$\int x\,u^3\,du$

نكتب x بدلالة u من الفرضية
$x=u-2$

$\int u^3(u-2)\,du$

$\int(u^4-2u^3)\,du=\frac{u^5}{5}-\frac{1}{2}u^4+C$

$=\frac{1}{5}(x+2)^5-\frac{1}{2}(x+2)^4+C$

4) $u=\sqrt{x+4}$ جذر خطي

$u^2=x+4$

$2u\,du=dx$

$\int \frac{x}{u}\,2u\,du$

نكتب x بدلالة u من الفرضية
$x=u^2-4$

$\int 2x\,du=\int 2(u^2-4)\,du$

$=\int(2u^2-8)\,du=\frac{2}{3}u^3-8u+C$

$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-8\sqrt{x+4}+C$

رأفت صباحي

5) $\int \sin x\,(2\cos^2x-1)\,dx$ نستطيع حله حسب متطابقة الضرب

$u=\cos x$ هنا نوجد الزوايا

$\frac{du}{dx}=-\sin x \rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$

$\int \sin x(2u^2-1)\frac{du}{\sin x}=\int(1-2u^2)\,du$

$=u-\frac{2u^3}{3}+C$

$=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3x+C$

6) $u=e^x+1$ جزء من مشتقة المقام في البسط

$\frac{du}{dx}=e^x \rightarrow dx=\frac{du}{e^x}$

$\int \frac{e^{3x}}{u}\,\frac{du}{e^x}$

$\int \frac{e^{2x}}{u}\,du$

نكتب e^{2x} بدلالة u من الفرضية
نربع $e^x=u-1$
$e^{2x}=u^2-2u+1$

$\int \frac{u^2-2u+1}{u}\,du$ نوزع البسط على المقام

$\int\left(u-2+\frac{1}{u}\right)du$

$\frac{u^2}{2}-2u+\ln|u|+C$

$\frac{1}{2}(e^x+1)^2-2(e^x+1)+\ln(e^x+1)+C$

7) $\int \sec^2x\,\sec^2x\,dx$ تفكيك الأس

$\int \sec^2x(1+\tan^2x)\,dx$

$u=\tan x$

$\frac{du}{dx}=\sec^2x \rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2x}$

$\int \sec^2x(1+u^2)\frac{du}{\sec^2x}$

$\int(1+u^2)\,du$

$=u+\frac{u^3}{3}+C$

$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+C$

8) $\int \tan x \sec^2 x \, dx$

مقلوب النسب

مقدمة $\sec x$ زوجي

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} = \int u \, du$

$= \frac{1}{2} u^2 + c$

$= \frac{1}{2} \tan^2 x + c$

الزاوية غير خطية

9) $u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x \, du$

$\int \frac{\sin u}{x} x \, du = \int \sin u \, du$

$= -\cos u + c$

$= -\cos(\ln x) + c$

10)

مشتقة المقام تفصل البسط

$u = 1 + \sin^2 x$

$\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x$

$dx = \frac{du}{2 \sin x \cos x}$

$= \int \frac{\sin x \cos x}{u} \frac{du}{2 \sin x \cos x}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c$

$= \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + c$

رأفت صافي

11) $u = e^x + e^{-x}$

مشتقة محتوى القوس موجودة

$\frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{u^2} \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$\int 2u^{-2} du = -2u^{-1} = \frac{-2}{u} + c$

$= \frac{-2}{e^x + e^{-x}} + c$

12) $u = \sqrt{x+1}$

$u^2 = x + 1$

$2u \, du = dx$

جذر خطي

نكتب x بدلالة u

$x + 1 = u^2$

$-x = 1 - u^2$

$\int \frac{-x}{(x+1)u} 2u \, du$

$\int \frac{1 - u^2}{u^3} 2u \, du = \int 2\left(\frac{1 - u^2}{u^2}\right) du$

$= 2 \int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du = 2 \int (u^{-2} - 1) du$

$= 2\left(\frac{u^{-1}}{-1} - u\right) = 2\left(\frac{-1}{u} - u\right) + c$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}\right) + c$

13) $u = \sqrt[3]{x + 10}$

جذر خطي

$u^3 = x + 10$

$3u^2 du = dx$

نكتب x بدلالة u من الفرضية

$x = u^3 - 10$

$\int x u (3u^2 du)$

$\int 3u^3 x \, du$

$\int 3u^3 (u^3 - 10) du = \int (3u^6 - 30u^3) du$

$= \frac{3}{7} u^7 - \frac{15}{2} u^4 + c$

$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2} \sqrt[3]{(x+10)^4} + c$

قوة secx زوجية

14) $u=\tan\frac{x}{2}$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} \rightarrow dx=\frac{du}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}$

$\int \sec^2\frac{x}{2}\, u^7 \frac{du}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}$

$\int 2u^7 du=\frac{1}{4}u^8+c$

$=\frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2}+c$

---

15) وزع البسط على المقام

$=\int\left(\frac{\sec^3x}{\sec x}+\frac{e^{\sin x}}{\sec x}\right)dx$

$=\int(\sec^2x+\cos x\, e^{\sin x})\,dx$

$\int \sec^2x\,dx+\int\cos x\, e^{\sin x}dx$ نوزع التكامل

$u=\sin x$

$\frac{du}{dx}=\cos x$

$dx=\frac{du}{\cos x}$

$=\tan x+\int \cos x\, e^u \frac{du}{\cos x}$

$=\tan x+\int e^u du$

$=\tan x+e^u+c$

$=\tan x+e^{\sin x}+c$

---

16) $u=\sin x$

مشتقة محتوى الجذر جزء منها موجود

$\frac{du}{dx}=\cos x\rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$

$\int(1+\sqrt[3]{u})\cos^3x\frac{du}{\cos x}$

$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})\cos^2x\,du$

نكتب $\cos^2x$ بدلالة u

$\cos^2x=1-\sin^2x$

$=1-u^2$

$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})(1-u^2)\,du$

$=\int(1-u^2+u^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{7}{3}})\,du$

$=u-\frac{u^3}{3}+\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}+c$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}}x-\frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}}x+c$

رافت صافي

---

17) $\int\frac{\sin x}{\cos^5x}dx$

نختار المقدار الذي قوته ليس (1)

$u=\cos x$

$\frac{du}{dx}=-\sin x\rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$

$\int\frac{\sin x}{u^5}\frac{du}{-\sin x}$

$\int -u^{-5}dx=\frac{-u^{-4}}{-4}$

$=\frac{1}{4u^4}=\frac{1}{4\cos^4x}+c$

$=\frac{1}{4}\sec^4x+c$

---

18) نوزع البسط على المقام

حل آخر عن خطوة (3) اسحب عامل مشترك secxtanx ثم افرض u=secx

$\int\left(\frac{\sin x}{\cos^3x}+\frac{\tan x}{\cos^3x}\right)dx$

$\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos^2x}+\tan x\sec^3x\right)dx$

$\int(\tan x\sec^2x+\tan x\sec^3x)\,dx$

$u=\tan x$

$\frac{du}{dx}=\sec^2x$

$dx=\frac{du}{\sec^2x}$

$\int u\sec^2x\frac{du}{\sec^2x}$

$\int u\,du$

$\frac{u^2}{2}$

$\frac{\tan^2x}{2}$

$u=\sec x$

$\frac{du}{dx}=\sec x\tan x$

$dx=\frac{du}{\sec x\tan x}$

$\int\tan x\, u^3\frac{du}{\sec x\tan x}$

$\int\frac{u^3}{\sec x}du$

$\int u^2du$

$\frac{u^3}{3}=\frac{\sec^3x}{3}$

وعليه:

$\int\frac{\sin x+\tan x}{\cos^3x}dx=\frac{\tan^2x}{2}+\frac{\sec^3x}{3}+c$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx$	20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2\, dx$	21) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$
22) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x\, dx$	23) $\int_0^2 (x-1)\, e^{(x-1)^2}\, dx$	24) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
25) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\, dx$	26) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x} \sin x\, dx$	27) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x\, dx$

19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{\sin^2 2x}\, dx$ تحت الجذر متطابقة

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, \underbrace{|\sin 2x|}_{\text{موجب}}\, dx$

$\sin 2x = 0$
$2x = 0, \pi, 2\pi$
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$
$+ + + +$
$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x\, dx$

نوحد الزوايا أو متطابقات الضرب

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x \sin x \cos x\, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 x \cos x\, dx$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

حدود التكامل

عند $x=0$ فان $u = \sin 0 = 0$

عند $x = \frac{\pi}{4}$ فان $u = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2\, du$

$= \frac{2}{3} u^3 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 0 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

20)

الحل :- الزاوية غير خطية

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

حدود التكامل

عند $x=0$ فان $u=0$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ فان $u = \frac{\pi^2}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin u \frac{du}{2x}$

$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u\, du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cos 0$

$= -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$ بالحاسبة

$\simeq 0.891$

أفنان ابراهيم صافي

21) محتوى الجذر مشتقة موجودة جزئيا

حدود التكامل

$u = 1 + x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

عند $x = 1$ فان $u = 2$
عند $x = 0$ فان $u = 1$

$\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x}$

$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{u^{\frac{1}{2}}} du$

نكتب x^2 بدلالة u من الفرضية $x^2 = u - 1$

$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}} du$

$\frac{1}{2}\int_1^2 (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 2\right)$

$\frac{1}{3}\sqrt{8} - \sqrt{2} + \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

22) قوة $\sec x$ زوجية

حدود التكامل
عند $x = 0$ فان $u = \tan 0 = 0$
عند $x = \frac{\pi}{3}$ فان $u = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x \, u^5 \frac{du}{\sec^2 x} = \int_0^{\sqrt{3}} u^5 du$

$\frac{1}{6}u^6\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(\sqrt{3})^6 - 0$

$= \frac{1}{6}(27) = \frac{9}{2}$

رأفت صابح

23) الأس غير خطي

$u = (x-1)^2$

$\frac{du}{dx} = 2(x-1) \rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$

حدود التكامل

عند $x = 0$ فان $u = 1$
فان $x = 2$ $u = 1$

$\int_1^1 (x-1)e^u \frac{du}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\int_1^1 e^u du$

مباشرة صفراً لأنه حدود التكامل متساوية

24) مشتقة محتوى الجذر موجودة

$u = 2 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$

عند $x = 1$ فان $u = 2 + 1 = 3$
فان $x = 4$ $u = 2 + 2 = 4$

$\int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\,du = \int_3^4 2u^{\frac{1}{2}} du$

$\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4 = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} - \frac{4}{3}\sqrt{3^3}$

$= \frac{4}{3}(8) - 4\sqrt{3} = \frac{32 - 12\sqrt{3}}{3}$

25) $u = 1 + x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$dx = \frac{du}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}$

$dx = \frac{2}{3\sqrt{x}}du$

حدود التكامل
عند $x = 0$ فان $u = 1$
$x = 1$ فان $u = 2$

$\int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2} \frac{2}{3\sqrt{x}} du$

$= \int_1^2 \frac{20}{3}u^{-2} du = \frac{-20}{3u}\Big|_1^2$

$\frac{-20}{6} + \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$

الأس غير متصل

26) $u=\cos x$

$\frac{du}{dx}=-\sin x \rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$

حدود التكامل

عند $x=0$ فان $u=\cos 0=1$

عند $x=\frac{\pi}{6}$ فان $u=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -2^u \sin x \frac{du}{\sin x} = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -2^u\, du$$

$$\frac{-2^u}{\ln 2}\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}=\frac{2-2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\ln 2}$$

قوة $\csc x$ زوجي

27) $u=\cot x$

$\frac{du}{dx}=-\csc^2 x$

$dx=\frac{du}{-\csc^2 x}$

حدود التكامل

عند $x=\frac{\pi}{2}$ فان $u=\cot\frac{\pi}{2}$

$u=0$

عند $x=\frac{\pi}{4}$ فان $u=\cot\frac{\pi}{4}$

$u=1$

$$\int_1^0 -\csc^2 x\, u^5 \frac{du}{\csc^2 x}$$

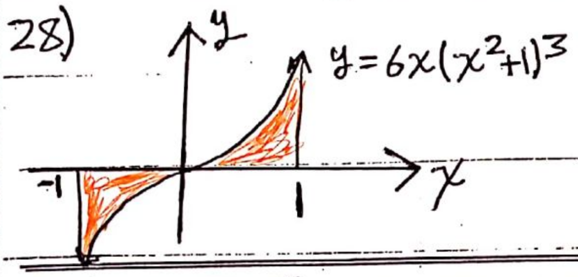
$$\int_1^0 -u^5\, du = \frac{-u^6}{6}\Big|_1^0$$

$$= 0+\frac{1}{6}$$

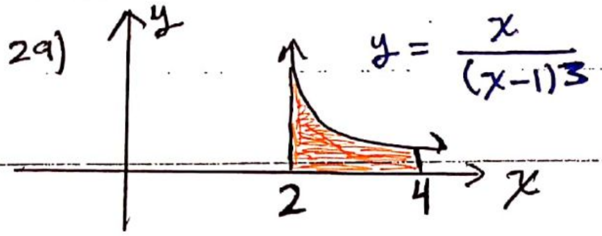
$$= \frac{1}{6}$$

اجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية

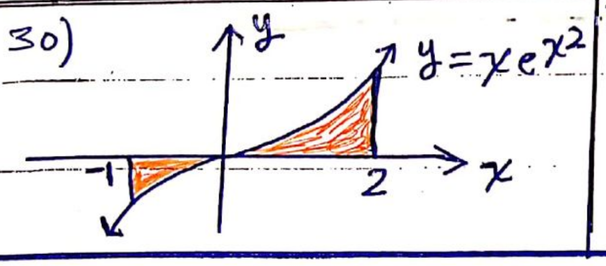
28)



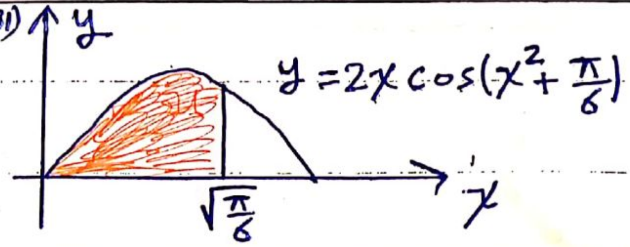
29)



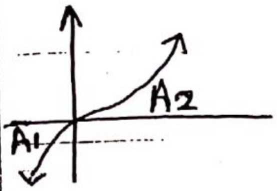
30)



31)



28) الحل: توجد منطقتان تحت وفوق محور x



$A=A_1+A_2$

$A=-\int_{-1}^0 6x(x^2+1)^3dx+\int_0^1 6x(x^2+1)^3dx$

$A=-\int_2^1 6xu^3\frac{du}{2x}+\int_1^2 6xu^3\frac{du}{2x}$

$A=\int_2^1 -3u^3du+\int_1^2 3u^3du$

$=\frac{-3u^4}{4}\Big|_2^1+\frac{3u^4}{4}\Big|_1^2$

$=(\frac{-3}{4}+\frac{48}{4})+(\frac{48}{4}-\frac{3}{4})=\frac{45}{2}$

$u=x^2+1$

$\frac{du}{dx}=2x$

$dx=\frac{du}{2x}$

عند $x=0$ فان $u=1$

عند $x=-1$ فان $u=2$

عند $x=1$ $u=2$

رأفت صبحي

29) توجد منطقة واحدة فوق محور x

$$A=\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$$

$u=x-1$

$\frac{du}{dx}=1 \to dx=du$

عند $x=2$ فان $u=1$

عند $x=4$ فان $u=3$

$$=\int_1^3 \frac{x}{u^3}\,du=\int_1^3 \frac{u+1}{u^3}\,du=\int_1^3 (u^{-2}+u^{-3})\,du$$

$$=\left(\frac{u^{-1}}{-1}+\frac{u^{-2}}{-2}\right)\Big|_1^3=\left(\frac{-1}{u}-\frac{1}{2u^2}\right)\Big|_1^3=\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{18}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{-7}{18}+\frac{3}{2}=\frac{10}{9}$$

---

30) توجد مساحات احداهما تحت محور x والثانية فوق محور x

$$A=\int_{-1}^{0} -xe^{x^2}\,dx+\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$$

$u=x^2$

$\frac{du}{dx}=2x$

$dx=\frac{du}{2x}$

عند $x=0$ فان $u=0$

عند $x=2$ فان $u=4$

عند $x=-1$ فان $u=1$

$$A=-\int_1^0 xe^u\frac{du}{2x}+\int_0^4 xe^u\frac{du}{2x}$$

$$A=-\frac{1}{2}\int_1^0 e^u\,du+\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}(e^u)\Big|_1^0+\left(\frac{1}{2}e^u\right)\Big|_0^4=-\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}}$$

$$=-1+\frac{1}{2}(e+e^4)\simeq 27.658$$ وحدة مساحة

---

31) منطقة واحدة فوق محور x

$$A=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x\cos\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$u=x^2+\frac{\pi}{6}$

$\frac{du}{dx}=2x$

$dx=\frac{du}{2x}$

عند $x=0$

$u=0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

عند $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

$u=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$$A=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x\cos u\,\frac{du}{2x}$$

$$A=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos u\,du=\sin u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\simeq 0.366$$ وحدة مساحة

رأفت ابراهيم صافي

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لايجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

(32) $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2$ ، $(2, 10)$

(33) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}$ ، $(0, \frac{3}{2})$

الحل:-

(32) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x(4x^2-10)^2\,dx$

$u = 4x^2-10$

$\frac{du}{dx} = 8x$

$dx = \frac{du}{8x}$

$f(x) = \int 2x\,u^2 \frac{du}{8x} = \frac{1}{4}\int u^2\,du$

$f(x) = \frac{1}{12}u^3 + c = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 + c$

نجد c من الشرط

$f(2) = 10$

$f(2) = \frac{1}{12}(16-10)^3 + c$

$10 = \frac{1}{12}(216) + c$

$10 = 18 + c$

$c = -8$

$f(x) = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 - 8$

(33) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x^2 e^{-0.2x^3}\,dx$

$u = -0.2x^3$

$\frac{du}{dx} = -0.6x^2$

$dx = \frac{du}{-0.6x^2}$

$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2}$

$f(x) = \frac{-1}{0.6}\int e^u\,du$

$f(x) = \frac{-5}{3}e^u + c = \frac{-5}{3}e^{-0.2x^3} + c$

نجد الآن C

$f(0) = \frac{3}{2}$

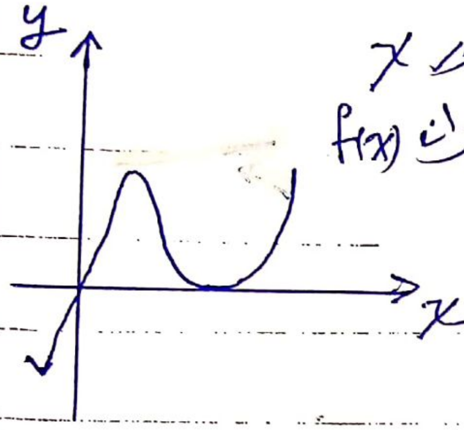
$f(0) = \frac{-5}{3}e^0 + c$

$\frac{3}{2} = \frac{-5}{3} + c \rightarrow c = \frac{19}{6}$

$f(x) = \frac{-5}{3}e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$

رافت صافي

يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران $f(x)=x(x-2)^4$



(34) جد احداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x

(35) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x

---

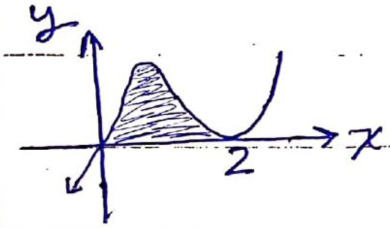
الحل :-

نضع $f(x)=0$ ((اصفار الاقتران))

(34)
$$x(x-2)^4=0$$
$x=0$ $\quad$ $x=2$

وهنا الرسم نقطة التماس $(2,0)$ في حين $(0,0)$ نقطة تقاطع

(35)



$$A=\int_0^2 x(x-2)^4\,dx$$

$u=x-2$
$du=dx$
عند $x=0$
$u=-2$
عند $x=2$
$u=0$

$$=\int_{-2}^{0} x u^4\,du$$

$$=\int_{-2}^{0}(u+2)u^4\,du$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(u^5+2u^4\right)du$$

$$=\left(\frac{u^6}{6}+\frac{2u^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{64}{6}-\frac{64}{5}\right)=\frac{32}{15}$$

رافت صايغ

(36) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران حيث w ثابت $v(t) = \sin wt \cos^2 wt$ اذا انطلق الجسم من نقطة الاصل ، جد موقعه بعد t ثانية.

الحل :-

$$u = \cos wt$$
$$\frac{du}{dt} = -w \sin wt$$
$$dt = \frac{du}{-w \sin wt}$$

$$S(t) = \int v(t)\, dt$$
$$= \int \sin wt \cos^2 wt\, dt$$
$$= \int \sin wt\, u^2 \frac{du}{-w \sin wt}$$
$$= \frac{-1}{w} \int u^2 du = \frac{-1}{w} \frac{u^3}{3} = \frac{-1}{3w} \cos^3 wt + c$$

نجد c حيث $S(0) = 0$

$$S(0) = \frac{-1}{3w} \cos^3 0 + c$$
$$0 = \frac{-1}{3w} + c \rightarrow c = \frac{1}{3w}$$
$$S(t) = \frac{-1}{3w} \cos^3 wt + \frac{1}{3w}$$

---

(37) يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض ، حيث C مقيسه بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3) اذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ mg/cm^3$ واخذ يتغير بمعدل $C'(t) = \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2}$ جد $C(t)$

الحل :-

$$u = 1 + e^{-0.01t}$$
$$\frac{du}{dt} = -0.01 e^{-0.01t}$$
$$dt = \frac{du}{-0.01 e^{-0.01t}}$$

$$C(t) = \int C'(t)\, dt = \int \frac{-0.01 e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2} dt$$
$$= \int \frac{\cancel{-0.01 e^{-0.01t}}}{u^2} \frac{du}{\cancel{-0.01 e^{-0.01t}}}$$
$$= \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{1 + e^{-0.01t}} + K$$

نجد K حيث $C(0) = 0.5$

$$C(0) = \frac{-1}{1+1} + K \rightarrow \frac{5}{10} = \frac{-1}{2} + K \rightarrow K = 1$$

رافت ضاحي ٠٧٧٢٨٥٠٠٤٠

$$C(t) = \frac{-1}{1 + e^{-0.01t}} + 1$$

38) جد متكامل $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^{x}-2}\,dx$ ثم اكتب الاجابة بالصيغة $\frac{a}{b} + c\ln d$ حيث a و b و c و d ثوابت صحيحة.

الحل:

هنا مشتقة المقام جزء منها موجود في البسط

$$u = e^{x} - 2$$
$$\frac{du}{dx} = e^{x}$$
$$dx = \frac{du}{e^{x}}$$

حدود التكامل

عند $x = \ln 3$ فان $u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1$

عند $x = \ln 4$ فان $u = e^{\ln 4} - 2 = 2$

$$\int \frac{e^{4x}}{u} \cdot \frac{du}{e^{x}}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{u}\,du$$

نكتب e^{3x} بدلالة u

$$e^{x} = u + 2$$
$$e^{3x} = (u+2)^3$$

$$\int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u}\,du = \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u}\,du$$
$$= \int_1^2 \left(u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}\right) du$$
$$= \left(\frac{u^3}{3} + 3u^2 + 12u + 8\ln u\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3} + 12 + 24 + 8\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} + 3 + 12 + 8\ln 1\right)$$
$$= \frac{70}{3} + 8\ln 2$$

39) اذا كان $f'(x) = \tan x$ وكان $f(3) = 5$ أثبت ان $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right|$

الحل:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

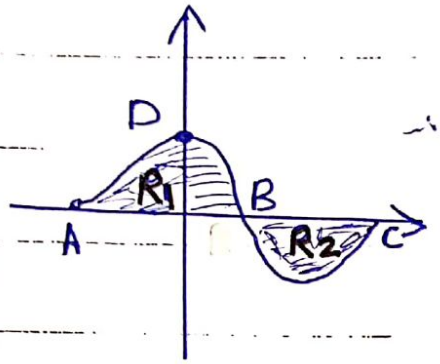
$$f(x) = -\ln|\cos x| + c$$

نجد c حيث $f(3) = 5$

$$f(3) = -\ln|\cos 3| + c$$
$$5 = -\ln|\cos 3| + c$$
$$c = 5 + \ln|\cos 3|$$

$$f(x) = -\ln|\cos x| + 5 + \ln|\cos 3|$$
$$f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$$

مهارات التفكير العليا



1) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$ فاجب عن الاسئلة الآتية تباعاً:

(40) جد احداثيي كل من النقاط A، و B، و C، و D

(41) جد مساحة المنطقة المظللة

(42) بيّن ان للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها

الحل:

(40) نجد نقاط التقاطع مع محور x لمعرفة A و B و C

$f(x) = 0$

$3\cos x\sqrt{\sin x + 1} = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

$\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

لمعرفة B و C نختار اصغر قيمتين موجبة وهما عند $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

اما A نختار الكبر قيمة سالبه وهي عند $x = \frac{-\pi}{2}$

$A(\frac{-\pi}{2}, 0)$, $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ و $C(\frac{3\pi}{2}, 0)$

لمعرفة D هنا نضع $x = 0$

$f(0) = 3\cos 0\sqrt{\sin 0 + 1}$

$= 3(1)(1) = 3$

وعليه احداثي D هو $(0, 3)$

ملاحظة عند $\cos x = 0$ هنا تأخذ القيم الموجبه والسالبه

(41) $A = R_1 + R_2$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}\, dx + -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}\, dx$$

$$= \int_0^2 3\cancel{\cos x}\sqrt{u}\,\frac{du}{\cancel{\cos x}} + -\int_2^0 3\cancel{\cos x}\sqrt{u}\,\frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int_0^2 3u^{\frac{1}{2}}du + -\int_2^0 3u^{\frac{1}{2}}du$$

$u = \sin x + 1$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= (3)(\tfrac{2}{3})u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + -\left((3)(\tfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_2^0$$

صور/تكامل

عند $x = -\frac{\pi}{2}$ فإن $u = 0$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $u = 2$

عند $x = \frac{3\pi}{2}$ فإن $u = 0$

$$= 2\sqrt{u^3}\Big|_0^2 - 2\sqrt{u^3}\Big|_2^0$$

$$= 2\sqrt{8} - (0 - 2\sqrt{8}) = 4\sqrt{8} = 4\sqrt{2\times4} = 8\sqrt{2}$$

(42) $R_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}\, dx = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

$$R_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}\, dx = 4\sqrt{2}$$

(43) جد قيمة $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

الحل:

$$\int_2^9 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{u}\,\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}\, du$$

$$\frac{4}{3}\int_2^9 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{u}\, du$$

من الفرض $x^{\frac{3}{4}} = u - 1$

$$\frac{4}{3}\int_2^9 \frac{u-1}{u}\, du = \frac{4}{3}\int_2^9 \left(1 - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{4}{3}(u - \ln u)\Big|_2^9 = \frac{4}{3}\left[9 - \ln 9 - 2 + \ln 2\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left(7 + \ln\frac{2}{9}\right)$$

$u = 1 + \sqrt[4]{x^3}$

$u = 1 + x^{\frac{3}{4}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

$dx = \frac{du}{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du$

عند $x = 1$ فإن $u = 1 + 1 = 2$

عند $x = 16$ فإن $u = 1 + 8 = 9$

رافت صباح

(44) اذا كان f اقتراناً متصلاً فأثبت ان :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))\,dx$$

$u = \frac{\pi}{2} - x$

$du = -dx$

عند $x = 0$ فان $u = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ فان $u = 0$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\sin u)\,du$$

$\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\,du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

تغيير رموز التكامل كاملاً لا تؤثر على قيمة التكامل

(45) اذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين فأثبت ان :

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

الحل :

$u = 1 - x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$dx = -du$

عند $x = 0$ فان $u = 1$

$x = 1$ فان $u = 0$

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_1^0 -x^a u^b\,du$$

$$= \int_0^1 x^a u^b\,du$$

من الفرضية $x = 1 - u$

$$= \int_0^1 (1-u)^a u^b\,du$$

$$= \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

تغيير رموز التكامل كاملاً

رأفت صافي

جد كلاً من التكاملات الآتية

(46) $\int \frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))}$ (47) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ (48) $\int \sin 2x(1+\sin x)^3 dx$

الحل:

(46) $u=\ln(\ln x)$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x} \longrightarrow dx=x\ln x\,du$$

$$\int \frac{x\ln x\,du}{x\ln x\;u}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|\ln(\ln x)|+c$$

(47) $u=\sin x+\cos x$

$$\frac{du}{dx}=\cos x-\sin x \longrightarrow dx=\frac{du}{\cos x-\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{u}\,\frac{du}{\cos x-\sin x}=\int\frac{-1}{u}du=-\ln|u|+c$$

$$=-\ln|\sin x+\cos x|+c$$

(48)
$$\boxed{\begin{aligned} u&=1+\sin x\\ \frac{du}{dx}&=\cos x\\ dx&=\frac{du}{\cos x}\end{aligned}}$$

نعوض نوليا

$$\int 2\sin x\cancel{\cos x}\,u^3\,\frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$\int 2\sin x\,u^3\,du$$

من الفرض $\sin x=u-1$

$$=\int 2(u-1)u^3\,du=\int(2u^4-2u^3)\,du$$

$$=\frac{2u^5}{5}-\frac{2u^4}{4}=\frac{2u^5}{5}-\frac{u^4}{2}+c$$

$$=\frac{2(1+\sin x)^5}{5}-\frac{(1+\sin x)^4}{2}+c$$

راقي صباحي

كتاب التمارين

جد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$	2) $\int (1-\cos\frac{x}{2})^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$	3) $\int \csc^5 x \cos^3 x\,dx$
4) $\int x \sin x^2\,dx$	5) $\int x^3 (x+2)^7\,dx$	6) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$
7) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$	8) $\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}\,dx$	9) $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\,dx$

الحل:

محتوى الجذر مشتقة موجودة

1) $u = x^2+4$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = (\tfrac{1}{2})(2)u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2+4} + c$$

مشتقة محتوى القوس موجودة

2) $u = 1-\cos\frac{x}{2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$\int u^2 \sin(\tfrac{x}{2}) \frac{du}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}} = \int 2u^2\,du = \frac{2u^3}{3} = \frac{2}{3}(1-\cos\tfrac{x}{2})^3 + c$$

رافت صافي

$$3)\quad \int \frac{1}{\sin^5 x}\cos^3 x\,dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$$

مقلوب النسب المثلثية

$$= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\,\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \cot^3 x \csc^2 x\,dx$$

قوة $\csc x$ زوجي

$$u = \cot x$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int u^3 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C$$

$$= -\frac{\cot^4 x}{4} + C$$

$$4)\quad u = x^2$$

الزاوية غير خطية

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \sin u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = \frac{-1}{2}\cos u + c$$

$$= \frac{-1}{2}\cos x^2 + c$$

$$5)\quad u = x + 2$$

وجود قوس خطي

$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

$$\int x^3 u^7\,du$$

اكتب x بدلالة u

$$x = u - 2$$

$$\int (u-2)^3 u^7\,dx$$

$$\int (u^3 - 6u^2 + 12u - 8)\,u^7\,du$$

$$\int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7)\,du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - \frac{6u^{10}}{10} + \frac{12u^9}{9} - \frac{8u^8}{8} + c$$

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + c$$

رأفت ضافي

6) $\int \dfrac{\frac{1}{2}\ln x}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$dx = x\,du$

$\int \dfrac{\frac{1}{2}u}{x}\,x\,du = \frac{1}{2}\int u\,du$

$= \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2} + c$

$= \frac{1}{4}(\ln x)^2 + c$

---

7) $u = \sqrt{x}$ الأسّ غير مغطى

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$

$\int \dfrac{e^u}{\sqrt{x}}\,2\sqrt{x}\,du = \int 2e^u\,du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + c$

---

8) $u = \ln 4x^2$ الزاوية غير مغطية

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{8x}{4x^2} = \dfrac{2}{x} \rightarrow dx = \dfrac{du}{\frac{2}{x}} = \dfrac{x}{2}\,du$

$\int \dfrac{\sin u}{x}\,\dfrac{x}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sin u\,du$

$= \frac{-1}{2}\cos u = \frac{-1}{2}\cos(\ln 4x^2) + c$

---

9) $u = \tan x$ زاوية غير مغطية

$\dfrac{du}{dx} = \sec^2 x \rightarrow dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x \cos^3 u \,\dfrac{du}{\sec^2 x} = \int \cos^3 u\,du$

$= \int \cos^2 u \cos u\,du = \int (1-\sin^2 u)\cos u\,du$

$v = \sin u$

$\dfrac{dv}{du} = \cos u \rightarrow du = \dfrac{dv}{\cos u}$

$\int (1-v^2)\cos u\,\dfrac{dv}{\cos u} = \int (1-v^2)\,dv$

$= v - \frac{1}{3}v^3 = \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u = \sin(\tan x) - \frac{1}{3}\sin^3 \tan x + c$

رافقت صباحي

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

10) $\int_0^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$	11) $\int_2^{5} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$	12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$
13) $\int_1^{4} \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$	14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$	15) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

الحل :-

وجود جذر خطي

10) $u=\sqrt{4x+1}$

$u^2=4x+1$

$2u\,du=4\,dx \rightarrow dx=\frac{1}{2}u\,du$

عند $x=6$ فان $u=5$

عند $x=20$ فان $u=9$

$$\int_5^9 \frac{8x}{u}\,\frac{1}{2}u\,du=\int_5^9 4x\,du=\int_5^9 (u^2-1)\,du$$

$\boxed{\text{نكتب } 4x \text{ بدلالة } u \quad 4x=u^2-1}$

$$=\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Big|_5^9=\left(\frac{729}{3}-9\right)-\left(\frac{125}{3}-5\right)=\frac{592}{3}$$

وجود جذر خطي

11) $u=\sqrt{x-1}$

$u^2=x-1$

$2u\,du=dx$

عند $x=2$ فان $u=1$

$u=2$ فان $x=5$

$$\begin{array}{r} 2 \\ u+1\enclose{longdiv}{2u} \\ -\underline{2u+2} \\ -2 \end{array}$$

$$\int_1^2 \frac{2u\,du}{1+u}=\int_1^2 \left(2+\frac{-2}{u+1}\right)du$$

$$=\left(2u-2\ln|u+1|\right)\Big|_1^2$$

$$=(4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)=2+2\ln\frac{2}{3}$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات •٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

12) $u = 1 + \cos x$

جزء من مشتقة المقام موجودة.

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

نوحد الزوايا

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$u = 1 + 1 = 2$ فان $x = 0$ عند

$u = 1 + 0 = 1$ فان $x = \frac{\pi}{2}$ عند

$$\int_2^1 \frac{2\sin x \cos x}{u} \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 \frac{-2\cos x}{u} du = \int_2^1 \frac{-2(u-1)}{u} du$$

$$= \int_2^1 \left(\frac{2-2u}{u}\right) du = \int_2^1 \left(\frac{2}{u} - 2\right) du$$

$$= (2\ln u - 2u)\Big|_2^1 = (2\ln 1 - 2) - (2\ln 2 - 4)$$

$$= -2 - 2\ln 2 + 4 = 2 - 2\ln 2$$

---

13) محتوى القوس مشتقته موجودة

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}\, du$

$u = 2$ فان $x = 1$ عند

$u = 3$ فان $x = 4$

$\int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\, du$

$2\int_2^3 u^3 du = \left(\frac{u^4}{2}\right)\Big|_2^3$

$= \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$

14) الأس عنصر خطي

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$u = \tan 0 = 0$ فان $x = 0$ عند

$u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ فان $x = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int_0^1 e^u du = (e^u)\Big|_0^1$

$= e - e^0 = e - 1$

15) زوجي وفردي نفرض الفردي

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$u = 1$ فان $x = 0$ عند

$u = \frac{1}{2}$ فان $x = \frac{\pi}{3}$

$\int_1^{\frac{1}{2}} -u^2 \sin^3 x \frac{du}{\sin x}$

$\int_1^{\frac{1}{2}} -u^2 \sin^2 x\, du$

$-\int_1^{\frac{1}{2}} u^2(1-\cos^2 x)\, du$

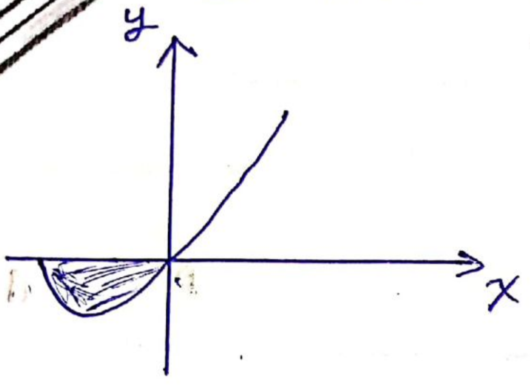
$\int_1^{\frac{1}{2}} -u^2(1-u^2)\, du$

$\int_1^{\frac{1}{2}} (u^4 - u^2)\, du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{160} - \frac{1}{24}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{47}{480}$

رأفت ضناوي

(16) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران $f(x) = x\sqrt{x+1}$. جد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.



الحل:-

نجد نقاط التقاطع مع محور x

$$f(x) = 0$$

$$x\sqrt{x+1} = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -1$$

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$$

$$u = \sqrt{x+1}$$

$$u^2 = x+1$$

$$2u\,du = dx$$

عند $x=-1$ فإن $u = 0$

$x=0$ فإن $u = 1$

$$A = -\int_{0}^{1} xu\,(2u\,du) = -\int_{0}^{1} 2u^2 x\,du$$

$\boxed{\text{نكتب } x \text{ بدلالة } u \text{ من الفرضية } x = u^2 - 1}$

$$= -\int_{0}^{1} 2u^2(u^2-1)\,du$$

$$= \int_{0}^{1} (2u^2 - 2u^4)\,du = \left(\frac{2u^3}{3} - \frac{2u^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(17) $f'(x) = 16\sin x\cos^3 x$ ، $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

(18) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ ، $(2, 1)$

رافت صافي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

17) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 16\sin x\cos^3 x\,dx$

$u=\cos x$

$\frac{du}{dx}=-\sin x \longrightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$

$f(x)=\int 16\sin x\, u^3 \frac{du}{-\sin x}=\int -16u^3\,du$

$f(x)=\frac{-16u^4}{4}=-4u^4=-4\cos^4 x+c$

جد c حيث $f(\frac{\pi}{4})=0$

$f(\frac{\pi}{4})=-4\cos^4\frac{\pi}{4}+c$

$0=-1+c \longrightarrow \boxed{c=1}$

$f(x)=-4\cos^4 x+1$

الحل :-

18) $f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

$u=x^2+5$

$\frac{du}{dx}=2x \longrightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$

$f(x)=(\frac{1}{2})(2)u^{\frac{1}{2}}+c$

$f(x)=\sqrt{x^2+5}+c$

جد c حيث $f(2)=1$

$f(2)=\sqrt{4+5}+c$

$1=3+c \longrightarrow c=-2$

$f(x)=\sqrt{x^2+5}-2$

19) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t)=\frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ اذا كان الموقع الابتدائي للجسم هو 4 m

جد موقع الجسم بعد t ثانية

الحل :-

$s(t)=\int v(t)\,dt=\int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$

$u=1+t^2$

$\frac{du}{dt}=2t$

$dt=\frac{du}{2t}$

$s(t)=\int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2t}$

$s(t)=\int -u^{-\frac{3}{2}}du=-(-2)u^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{u}}+c$

$s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+c$

جد c حيث $s(0)=4$

$s(0)=\frac{2}{\sqrt{1+0}}+c$

$4=2+c \longrightarrow c=2$

$s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+2$

رافت صابح