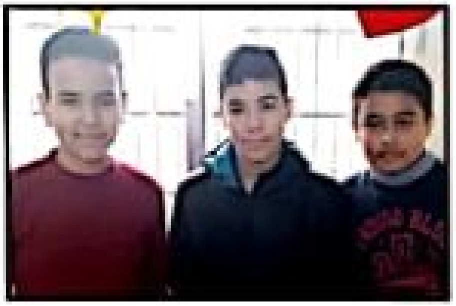
التكامل

الفرع العلمي

تكامل اقترانات خاصة

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي 0785824464



تكامل اقترانات خاصة

أولاً: التحقق من فهمي

1) جد كلاً من التكاملات الآتية :- (صفحة 10)

a) $\int(5x^2-3e^{7x})dx$	b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}dx$	c) $\int\sqrt{e^{1-x}}\,dx$	d) $\int(3^x+2\sqrt{x})dx$

الحل :- نوزع التكامل

a) $\frac{5x^3}{3}-\frac{3e^{7x}}{7}=\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{7}e^{7x}+c$

تكامل مباشر

b) $\frac{8}{4}e^{4x}\Big|_0^{\ln 3}=2e^{4x}\Big|_0^{\ln 3}$

نعوض

$=2e^{4\ln 3}-2e^{4(0)}$

خصائص اللوغاريتم

$=2e^{\ln 3^4}-2e^0$

$=(2)(3^4)-2(1)=162-2=160$

نعالج الجذر

c) $\int(e^{1-x})^{\frac{1}{2}}dx$

ضرب قوتان

$=\int e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)}dx$

تكامل

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}=-2e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)}+c$

نعالج الجذر

d) $\int(3^x+2x^{\frac{1}{2}})dx$

نوزع التكامل

$=\frac{3^x}{\ln 3}+(2)\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+c$

نعالج الناتج

رافت صابح ٠٧٩٥٥٠٥٠٦٠

2) جد كلاً من التكاملات الآتية :- (صفحة 12)

a) $\int \cos(3x-\pi)\,dx$	b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\,dx$	c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x)\,dx$

الحل :- تكامل مباشر

1) $\frac{1}{3}\sin(3x-\pi) + c$

توزيع التكامل

2) $-\frac{1}{5}\cot(5x) + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

توزيع التكامل

3) $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$

$\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{4}(0)\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{6+\sqrt{3}}{8}$

3) جد كلاً من التكاملات الآتية ((صفحة 14))

a) $\int \cos^4 x\,dx$	b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x\,dx$	c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

الحل :-

a)

سيتم تطبيق المتطابقة $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

حيث يتم كتابة القوة (4) على صورة قوة القوة

a) $\int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx$ — نربع $\frac{1}{2}$ ثم نربع المقدار داخل القوس

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$ — نكتب متطابقة $\cos^2 2x$ مواخره

$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx$

$= \frac{1}{4}\left(x + (2)\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right) + C$ — نوزع بتكامل

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$ — نبسط

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

---

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(\cos(3x-x) - \cos(3x+x)\right) dx$ — متطابقة الضرب

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x)\,dx$ — نوزع بتكامل

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$ — نعوض حدود التكامل

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - 0$ — نضرب بـ $\frac{1}{2}$ للقوس الداخلي

$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{2\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$ — نوحد المقامات

---

c) $\int \frac{dx}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$ — الضرب بالمرافق او نستخدم المتطابقة

$1 + \cos(\text{زاوية}) \longrightarrow 2\cos^2(\text{نصف الزاوية})$

$\int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$ — متطابقة المقام

$\int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$ — وزع بسط على المقام

$= \int \left(\csc^2 x - \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}\right) dx$ — نفكك $\sin^2 x$ مع مقلوب النسب المثلثية

$= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x)\,dx$ — نوزع بتكامل

راقت صافي ٠٠٠٠٢

$= -\cot x + \csc x + C$

4) جد كلاً من التكاملات الآتية ((صفحة 16))

a) $\int (\sin x - \frac{5}{x})\,dx$	b) $\int \frac{5}{3x+2}\,dx$	c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\,dx$	d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$
e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$	f) $\int \cot x\,dx$	g) $\int \frac{e^x}{e^x+7}\,dx$	h) $\int \csc x\,dx$

الحل: نوزع التكامل مباشرة

a) $-\cos x - 5\ln|x| + c$

مباشرة على القاعدة $\int \frac{a}{bx+k}\,dx = \frac{a}{b}\ln|bx+k|$

b) $\frac{5}{3}\ln|3x+2| + c$

نوزع البسط على المقام ثم نبسط

c) $\int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int (1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2})\,dx$

نوزع التكامل

$= x - 7\ln|x| + (2)\frac{x^{-1}}{-1} + c$

نعالج الأس السالب

$= x - 7\ln|x| - \frac{2}{x} + c$

مشتقة المقام تعطي مشتقة البسط مباشرة

d) $\ln|x^2+3x| + c$

نعالج البسط ليصبح مشتقة للمقام، هنا نشيل المطلق لأنه ما داخله ليس سالب

e) $\frac{-1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx = \frac{-1}{2}\ln|1+\cos 2x| + c$

متطابقة

f) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$

مشتقة المقام تعطي البسط مباشرة

راقت ضياء

4

g) $\ln|e^x+7|+c$ مشتقة المقام تعطي البسط مباشرة

h) $\int \csc x \times \dfrac{\csc x+\cot x}{\csc x+\cot x}\,dx$

$= \int \dfrac{\csc^2 x+\csc x\cot x}{\csc x+\cot x}\,dx$ اجعل مشتقة المقام تعطي البسط

$= -\int \dfrac{-(\csc^2 x+\csc x\cot x)}{\csc x+\cot x}\,dx = -\ln|\csc x+\cot x|+c$

نلاحظ ان مشتقة المقام لا تعطي البسط والمقام اكثر من حد ولا يوجد حل للتخلص من القسمة

5) جد $\int \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$ ((صفحة 17))

الحل: قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+1 & x^2+x+1 \\ & -(x^2+x) \\ \hline & 1 \end{array}$$

نوزع التكامل $\int \left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$\dfrac{x^2}{2}+\ln|1+x|+c$

6) a) اذا كان $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$ جد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

b) اذا كان $f(x)=|1-x|$ جد قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

c) اذا كان $f(x)=|x^2-1|$ جد قيمة $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$

a)

الحل: فترة التكامل تمر بنقطة التشعب

$1+x$ | 1 | $2x$

$\boxed{-1}$ $\boxed{3}$

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1+x)\,dx + \int_{1}^{3} 2x\,dx$

$= \left(x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + x^2\Big|_{1}^{3}$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+9-1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+8$

$= 2+8$

$= 10$

راقت ضاحي

اعادة تعريف

b) $1-x=0$

$x=1$

$$\begin{array}{c|c} 1-x & x-1 \\ +++ & --- \end{array} \quad (\text{at } 1), \quad \boxed{-2} \quad \boxed{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1-x \;, & x\le 1 \\ x-1 \;, & x>1 \end{cases} \longrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}(1-x)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-(-2-2)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+4+0+\frac{1}{2}=5$$

اعادة تعريف

$x^2-1=0$

$x=1,-1$

$$\begin{array}{c|c|c} x^2-1 & 1-x^2 & x^2-1 \\ ++ & -- & ++ \end{array} \quad (\text{at } -1,\ 1), \quad \boxed{-4} \quad \boxed{0}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \;, & x<-1 \\ 1-x^2 \;, & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 \;, & x>1 \end{cases}$$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx=\int_{-4}^{-1}(x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-4}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\left(\frac{-1}{3}+1\right)-\left(\frac{-64}{3}+4\right)+(0-0)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{52}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{56}{3}$$

رافت صابوني

7) تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ متراً بعد t دقيقة من بدء التسرب. اذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل $R'(t)=\frac{21}{0.07t+5}$ جد $R(t)$ علماً بأن $R(0)=0$

(صفحة 20)

الحل:

$$R(t)=\int R'(t)\,dt=\int \frac{21}{0.07t+5}\,dt$$

$$R(t)=\frac{21}{0.07}\ln|0.07t+5|+c$$

نجد c حيث $R(0)=0$

$$\frac{21}{0.07}=300$$

$$R(0)=300\ln|0+5|+c$$

$$0=300\ln 5+c \longrightarrow c=-300\ln 5$$

نعوض قيمة c

$$R(t)=300\ln|0.07t+5|-300\ln 5$$

نبسط حيث الطرح يصبح قسمة ونوزع البسط على المقام

$$R(t)=300\left(\ln|0.07t+5|-\ln 5\right)=300\ln\left|\frac{0.07t+5}{5}\right|$$

$$=300\ln|0.014t+1|$$

8) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $V(t)=3\cos t$

(صفحة 23)

a) اذا بدأ الجسم حركته من نقطة الاصل. جد موقع الجسم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة

b) جد ازاحة الجسم في الفترة $[0,2\pi]$

c) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة $[0,2\pi]$

الحل:

$$a)\ s(t)=\int V(t)\,dt=\int 3\cos t\,dt=3\sin t+c$$

نجد c حيث $s(0)=0$

$$s(0)=3\sin 0+c$$
$$0=0+c$$
$$c=0$$

$$s(t)=3\sin t$$

راقت ضاحي

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{\pi}{6}=3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\ m$$

b) $S(2\pi) - S(0) = \int_0^{2\pi} 3\cos t \, dt$

$= 3\sin t \Big|_0^{2\pi} = 3\sin 2\pi - 3\sin 0$

$= 3(0) - 3(0) = 0 \text{ m}$

c) $3\cos t = 0$ ندرس v ع اشارة

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$+ \ + \quad - \ - \quad + \ +$

$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -v(t) \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} v(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t \, dt$$

$$= 3\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left(3\sin \tfrac{\pi}{2} - 3\sin 0\right) - \left(3\sin \tfrac{3\pi}{2} - 3\sin \tfrac{\pi}{2}\right) + 3\sin 2\pi - 3\sin \tfrac{3\pi}{2}$$

$$= (3 - 0) - (-3 - 3) + 0 + 3$$

$$= 3 + 6 + 3 = 12 \text{ m}$$

رأفت صبحي

ثانياً : التدرب وحل المسائل

جد كلاً من التكاملات الآتية : (صفحة 24)

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$

2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

3) $\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$

4) $\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

6) $\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

7) $\int (e^x+1)^2\, dx$

8) $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))\, dx$

9) $\int \frac{x^4-6}{2x}\, dx$

10) $\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right) dx$

11) $\int \frac{e^x+1}{e^x}\, dx$

12) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\, dx$

13) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x \cos x + 4}$

14) $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

15) $\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

16) $\int \sec^2 x(1 + e^x \cos^2 x)\, dx$

17) $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

18) $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$

19) $\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\, dx$

20) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\, dx$

21) $\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x \csc x\right) dx$

22) $\int (\sec x + \tan x)^2\, dx$

23) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

24) $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$

25) $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x)\, dx$

26) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$

رافت صابحي

الحل :- نفاتج الجذر

1) $\int (e^{2x-3} - x^{\frac{1}{2}})\,dx$

توزيع التكامل ونفاتج الناتج

$\frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

نفاتج توزيع الجذر

2) $\int (e^{\frac{1}{2}x} - 3e^{-\frac{1}{2}x})\,dx$

$\frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} = 2e^{\frac{1}{2}x} + 6e^{-\frac{1}{2}x} + c$

توزيع التكامل

3) $\frac{-4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + c$

توزيع التكامل

4) $3\sec x - \frac{2}{5}\ln|x| + c$

فك التربيع

5) $\int (e^x - 2 + \frac{1}{e^x})\,dx = \int (e^x - 2 + e^{-x})\,dx$

توزيع التكامل

$e^x - 2x - e^{-x} + c = e^x - 2x - \frac{1}{e^x} + c$

توزيع التكامل

6) $\frac{1}{3}\cos(5-3x) + 2x + \frac{4x^3}{3} + c$

فك التربيع

7) $\int (e^{2x} + 2e^x + 1)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + c$

توزيع التكامل

8) $-e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + c$

رافت صباغ

9) $\int \left(\frac{x^4}{2x} - \frac{6}{2x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{x}\right) dx$ توزيع/بسط على المقام وبسّط

$= \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - 3\ln|x| = \frac{x^4}{8} - 3\ln|x| + c$ توزيع/تكامل

---

10) $\frac{-3}{3}\cot(3x+2) + 5\ln|x| = -\cot(3x+2) + 5\ln|x| + c$ توزيع/تكامل

---

11) $\int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) dx = \int (1 + e^{-x})\, dx$ توزيع/بسط على المقام وبسّط

$= x - e^{-x} + c = x - \frac{1}{e^x} + c$ توزيع/تكامل

---

12) $\ln|e^x + 4| + c$ مشتقة المقام تعطي البسط مباشرة

---

13) $\int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x + 4}\, dx = \ln\left|\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right| + c$ مطابقة المقام وعمل مشتقة المقام تعطي البسط

$= \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right) + c$ المطلق عند وضعه لأن ما داخل المطلق موجب

---

14) $\frac{1}{-\frac{1}{3}}\ln\left|5 - \frac{x}{3}\right| = -3\ln\left|5 - \frac{x}{3}\right| + c$ مباشرة حيث معامل x المقام $-\frac{1}{3}$

---

15) $\int \frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\, dx$ المرافق

$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\, dx$ توزيع/بسط على المقام

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\right) dx$

$= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x)\, dx$ توزيع/تكامل

رأفت ضاحي $= \tan x + \sec x + c$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

16) $\int (\sec^2 x + e^x)\,dx$ — فك الضرب ، حيث $(\sec^2 x)(\cos^2 x) = 1$

$\tan x + e^x + c$ — توزيع التكامل

17) $2\ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + c$ — توزيع التكامل

18) $\int \frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x)\,dx$ — متطابقة الضرب

$\frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x\right) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c$ — توزيع التكامل

19) $\int \frac{\frac{1}{3}(6x+9)}{3x^2+9x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x^2+9x-1| + c$ — اجعل مشتقة المقام تعطي البسط

20) قسمة طويلة

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+1 \,\overline{)\, x^2+x+1} \\ -x^2+1 \\ \hline x \end{array}$$

$\int \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$\int \left(1 + \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}\right)dx$ — توزيع التكامل

$x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$ — نزيل القيمة المطلقة لأن ما داخله موجب

21) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}\right)dx$ — توزيع البسط على المقام مع متطابقات المقلوب

$= \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x)\,dx$ — توزيع التكامل

$= -\cot x - \csc x - \cos x + c$

22) $\int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x)\,dx$ — فك التربيع

$\int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)\,dx$ — متطابقة

$\int (2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1)\,dx$ — توزيع التكامل

رافت صباغي

$= 2\tan x + 2\sec x - x + c$

23) $\ln|e^{x}+e^{-x}|+C$ مشتقة المقام تعطي البسط مباشرة

---

24) $\int \left(\frac{1}{3}\right)\frac{3x^{2}}{x^{3}-3}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x^{3}-3|+C$ اجعل مشتقة المقام تعطي البسط

---

25) $\int\left(9\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)-\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)-(6)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right)dx$ قطع تماماً

$=\int\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-3\sin 2x\right)dx$

نوزع التكامل

$=\int(4+5\cos 2x-3\sin 2x)\,dx$

$=4x+\frac{5}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x+C$

---

26) $\int(\cos^{2}x+\sin^{2}x)(\cos^{2}x-\sin^{2}x)\,dx$ فرق مربعين وقطع تماماً

$\int 1\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

27) $\int_{0}^{\pi}2\cos\frac{1}{2}x\,dx$

28) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\,dx$

29) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3\tan^{2}x\,dx$

30) $\int_{1}^{e}\frac{8x\,dx}{x^{2}+1}$

31) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\cos x\,dx$

32) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cot^{2}x}{1+\cot^{2}x}\,dx$

33) $\int_{0}^{3}(x-5^{x})\,dx$

34) $\int_{0}^{4}|x^{2}-4x+3|\,dx$

35) $\int_{1}^{4}(3-|x-3|)\,dx$

رأفت صباح

27) $(2)\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} = 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}$ — الحل: تكامل مباشرة

$$= 4\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin 0$$
$$= (4)(1) - 4(0) = 4$$

---

28) اعادة/تعريف

$$\sin x = 0$$
$$x = 0, \pi, 2\pi$$

sinx: + + + on $(0, \pi)$; −sinx: − − − on $(\pi, 2\pi)$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx$$
$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= (-\cos\pi + \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi)$$
$$= (1+1) + (1+1) = 4$$

---

29) مطابقة — توزيع/تكامل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3(\sec^2 x - 1)\,dx = 3(\tan x - x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= 3\left[\left(\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\tan\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 3\left[(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right]$$
$$= 3\sqrt{3} - \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{2}$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

---

30) اجعل مشتقة المقام تعطي البسط

$$\int_1^e \frac{4(2x)}{x^2+1}\,dx = 4\ln|x^2+1|\Big|_1^e$$

$= 4\ln(e^2+1) - 4\ln(2)$ — [illegible]

$= 4\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$ — خصائص اللوغاريتم

رافت ضياء [illegible]

متطابقة الضرب

31) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)\,dx$

توزيع التكامل

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(\frac{-1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(\frac{-1}{8}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{-1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0\right)$

$= \left(\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(\frac{-1}{8} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$

متطابقة المقام

32) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x \sin^2 x\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\sin^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3\sqrt{3} + \pi - 6}{24}$

---

33) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big|_0^3$

توزيع التكامل

$\left(\frac{9}{2} - \frac{5^3}{\ln 5}\right) - \left(0 - \frac{1}{\ln 5}\right) = \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 5}$

$= \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$

رافت صابحي

34) اعادة التعريف

$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-1)(x-3)=0$$
$$x=1 \quad , \quad x=3$$

x^2-4x+3 $+\ +\ +\ +$ (1) $-x^2+4x-3$ (3) $+\ +\ +$ x^2-4x+3

$\boxed{0}$ $\boxed{4}$

$$\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx + \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_3^4$$

$$= \left(\frac{1}{3}-2+3\right) + (-9+18-9) - \left(\frac{-1}{3}+2-3\right) + \left(\frac{64}{3}-32+12\right) - (9-18+9)$$

$$= \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

---

35) اعادة التعريف

$$x-3=0$$
$$x=3$$

$3-x$ (3) $+\ +\ +$ $x-3$

$\boxed{1}$ $\boxed{4}$

$$\int_1^4 (3-|x-3|)\,dx = \int_1^3 (3-(3-x))\,dx + \int_3^4 (3-(x-3))\,dx$$

$$= \int_1^3 x\,dx + \int_3^4 (6-x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + \left(6x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^4$$

$$= \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) + (24-8) - \left(18-\frac{9}{2}\right)$$

$$= 4 + 16 - \frac{27}{2} = \frac{13}{2}$$

رافت صابحي

36) اذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2+4 , & x<0 \\ 4-x , & x\geq 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

الحل :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x^2+4)\,dx + \int_{0}^{1}(4-x)\,dx$$

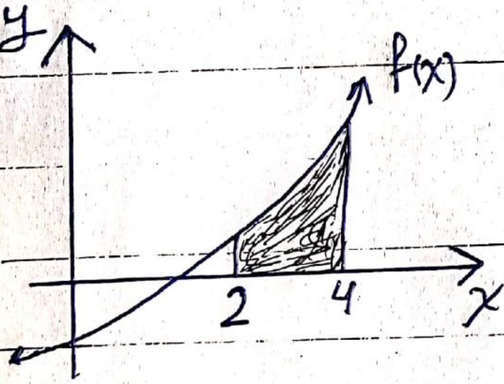
$$= \left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=(0+0)-\left(-\frac{1}{3}-4\right)+\left(4-\frac{1}{2}\right)-(0-0)$$

$$= \frac{13}{3}+\frac{7}{2} = \frac{47}{6}$$

---

37) جد مساحة المنطقة المظللة بين المحور x ومنحنى الاقتران $f(x)=e^{0.5x}-2$ الممثل في الشكل المجاور



الحل :

المنطقة فوق محور x

ومحصورة بين منحنى $f(x)$

ومحور x والمستقيمين $x=2$ و $x=4$

$$A=\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{2}^{4}\left(e^{\frac{1}{2}x}-2\right)dx = \left(2e^{\frac{1}{2}x}-2x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$=(2e^2-8)-(2e-4) = 2e^2-2e-4$$

رافت صافي

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

38) اذا كان $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx = \ln 12$ جد قيمة الثابت a

حيث $a>0$

الحل:

نوزع البسط على المقام ثم نكامل

$$\int_a^{3a} \left(\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \ln 12$$

$$\left(2x + \ln|x|\right)\Big|_a^{3a} = \ln 12$$

$$(6a + \ln 3a) - (2a + \ln a) = \ln 12$$

نطبق خصائص اللوغاريتم حيث الطرح يحول الى قسمة

$$4a + \ln 3 = \ln 12$$

$$4a = \ln 12 - \ln 3$$

$$4a = \ln 4$$

$$a = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{1}{2}\ln 2$$

---

39) أثبت ان $\int_0^{a} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \ln\sqrt{2}$ حيث $a \neq 0$

الحل:

اجعل مشتقة المقام كحد في البسط

$$\int_0^{a} \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+a^2}\,dx = \ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right|\Big|_0^{a} = \ln\sqrt{2}$$

خصائص اللوغاريتم

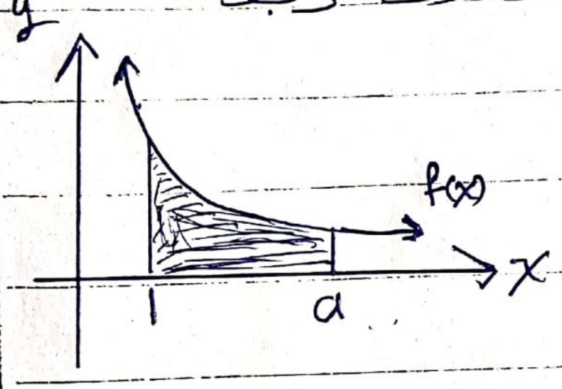
$$= \frac{1}{2}\ln 2a^2 - \frac{1}{2}\ln a^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2a^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2}$$

رافت ضاحي ٠٧٨٠٠٥٥٠٥٠٤

40) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=\frac{4}{x}$ اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x=1$ و $x=a$ هيا 10 وحدات مربعة جد قيمة الثابت a



الحل:

$$A=\int_1^a \frac{4}{x}\,dx=10$$

$$4\ln|x|\Big|_1^a=10$$

$$4\ln a-4\ln 1=10$$

$$4\ln a=10$$

$$\ln a=\frac{5}{2}$$

اخذ e للطرفين

$$\boxed{a=e^{\frac{5}{2}}}$$

---

41) اذا كان $f(x)=\int\cos(\frac{1}{2}x+\pi)dx$ وكان $f(\pi)=3$ جد $f(0)$

الحل:

تكامل:

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin(\frac{1}{2}x+\pi)+C$$

$$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\pi)+C$$

بجد ثابت التكامل من خلال الشرط $f(\pi)=3$

$$f(\pi)=2\sin(\frac{\pi}{2}+\pi)+C$$

$$3=2\sin\frac{3\pi}{2}+C$$

$$3=-2+C$$

$$C=5$$

$$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\pi)+5$$

$$f(0)=2\sin\pi+5$$

$$=0+5=5$$

رافت صافي

42) اذا كان $y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)\,dx$ وكان $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$

أثبت انه يمكن كتابة y في صورة $y = \frac{1+\sin 2x}{2}$

الحل:

نكامل:

$$y = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + c$$

نستخدم الشرط لايجاد c

$$1 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + c$$

$$1 = \frac{1}{2}(1) + c \longrightarrow c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \frac{1}{2}$$

تذكير

$$\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - ax) = \sin ax}$$

او نطبق متطابقة فرق زاويتين

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1+\sin 2x}{2}$$

---

43) يمثل الاقتران $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y

جد قاعدة الاقتران y اذا كانت ان منحناه يمر بالنقطة $(1, 0)$

الحل:

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x})\,dx$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + c$$

نجد ثابت التكامل من الشرط عند $x = 0$ فان $y = 1$

$$1 = \frac{1}{2}e^{0} + 2e^{0} + c$$

$$1 = \frac{1}{2} + 2 + c$$

$$c = \frac{-3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

رافت ضايفي

44) اذا كان $\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}(9+\sin 3x)\,dx = a\pi + b$ جد قيمة الثابتين

a و b

الحل: تكامل

$$= \left(9x + \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$= \left(9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi\right) - \left(\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 9\pi + \frac{1}{3} - \pi + \frac{1}{6}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{2}$$

وعليه $8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$

بالمقارنه $a = 8$ و $b = \frac{1}{2}$

---

45) يمثل الاقتران $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$

جد قاعدة الاقتران f اذا علمت ان منحناه يمر بنقطة

الاصل.

الحل:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int \cos^2 x\,dx$$

$$f(x) = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

نستخدم الشرط $f(0)=0$ لايجاد ثابت التكامل

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) + c$$

$$0 = \frac{1}{2}(0+0) + c$$

$$\boxed{c=0}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

راقت ضابط

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = e^{-2t}$ اذا كان الموقع الابتدائي للجسم هو 3m جد

(46) موقع الجسم بعد t ثانية (47) موقع الجسم بعد 100 ثانية

الحل :-

46) $s(t) = \int v(t)\,dt = \int e^{-2t}\,dt$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2t} + c$$

نجد ثابت التكامل من الشرط $s(0) = 3$

$$s(0) = -\frac{1}{2} e^{0} + c$$

$$3 = -\frac{1}{2} + c \longrightarrow c = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

47) $s(100) = -\frac{1}{2} e^{-200} + \frac{7}{2}$ آلة حاسبة

في دراسة تناولت احد انواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة ، تبين ان عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ تتغير بمعدل $P'(t) = -0.5\, e^{-0.03t}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة

(48) جد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t علماً بان عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان

(49) جد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة ، مقرباً اجابتي الى أقرب عدد صحيح

الحل :-

48) $P(t) = \int P'(t)\,dt = \int -0.5\, e^{-0.03t}\,dt$

$$P(t) = \frac{0.5}{0.03} e^{-0.03t} + c$$

تقريب 17

نجد c من الشرط $P(0) = 500$

$$500 = \frac{50}{3} e^{0} + c$$

$$500 = 17 + c \rightarrow c = 483$$

$$P(t) = 17 e^{-0.03t} + 483$$

(49) $P(10) = 17 e^{-0.3} + 483$

$\simeq 496$ آلة حاسبة

راقت صابوني

في تجربة لدواء جديد اعطي لمريض لديه ورم حميد حجمه $30\ cm^3$ تبين ان حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة يتغير بمعدل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مقيساً بوحدة cm^3/day

50) جد قاعدة حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة

51) جد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة

50)

الحل:

$$P(t) = \int P'(t)\, dt = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t})\, dt$$

$$P(t) = 0.15t - \frac{0.9}{0.006} e^{0.006t} + c$$

150

نجد c من الشرط $P(0) = 30$

$$P(0) = (0.15)(0) - 150e^{0} + c$$

$$30 = -150 + c \longrightarrow c = 180$$

$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

51) $P(10) = (0.15)(10) - 150e^{0.06} + 180$

$$= 1.5 - 150e^{0.06} + 180$$

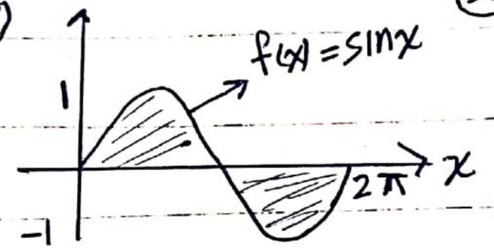
$$\simeq 22.2\ cm^3$$ الآلة الحاسبة

رافت صافي

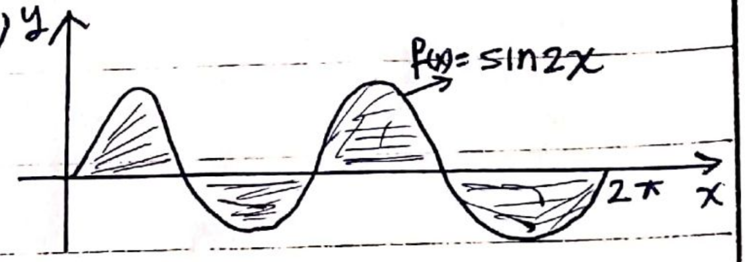
ثالثاً : مهارات التفكير العليا

جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين :

(52)



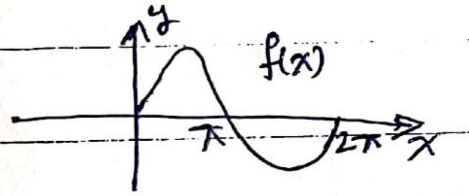
(53)



الحل :

52) نلاحظ وجود مساحتان احداهما فوق محور x واخرى تحت محور x

لكن نقطة التقاطع مع محور x غير معروفة



$\sin x = 0$

$x = 0 , \pi , 2\pi$

هذه المطلوبة

$$A = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + -\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

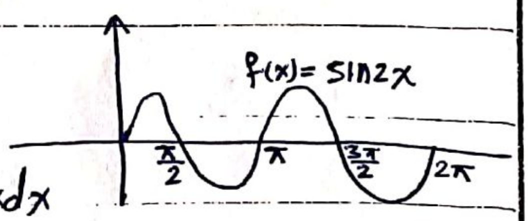
53) نجد نقاط التقاطع مع محور x

$\sin 2x = 0$

$2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

$x = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi , \frac{3\pi}{2} , 2\pi$

هذه المطلوبة



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x\,dx + -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 4$$

رأفت ضاحي

جد كلاً من التكاملات الآتية ((تحدي))

54) $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$	55) $\int \frac{\cot x}{2+\sin x} dx$	56) $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$

الحل: نحاول جعل مشتقة المقام تقطيريبط ، نقسم كل حد على $\cos x$

$$54) \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} dx$$

مشتقة المقام تقطيريبط مباشرة

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x - 1} dx$$

$$= \ln|\tan x - 1| + c$$

حل آخر: نخرج $\cos x$ عامل مشترك من المقام

نفس فكرة السؤال السابق ، نقسم كل حد على $\sin x$

$$55) \int \frac{\frac{\cot x}{\sin x}}{\frac{2}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x}} dx$$

اجعل مشتقة المقام تقطيريبط

$$\int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1} dx$$

$$\int \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1} dx = \frac{-1}{2} \ln|2\csc x + 1| + c$$

مضاد خواص اللوغاريتم وجعل مشتقة المقام تقطيريبط

$$56) \int \frac{1}{3x \ln x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|\ln x| + c$$

رافت ضاحي

57) اذا كان $\int_1^a \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x+3}\right)dx = 0.5\ln 5$ جد قيمة الثابت a حيث $a>0$

الحل: نوزع التكامل

$$\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)\Big|_1^a = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\left(\ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3)\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 5\right) = \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3) + \cancel{\frac{1}{2}\ln 5} = \cancel{\frac{1}{2}\ln 5}$$

نطبق خصائص اللوغاريتم

$$\ln a - \ln\sqrt{2a+3} = 0$$

ناخذ e للطرفين

$$\ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$$

نربع ونضرب تبادلياً

$$\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$$

نرتب

$$a^2 = 2a+3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

$a=3$ ، $a=-1$ مرفوض

قيمة a هي 3

---

58) أثبت بطريقتين مختلفتين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cos 3x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sin 3x\,dx = 0$

طريقة (1)

نجد ناتج كل تكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 4x + \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x - \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

وعليه $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

راقت ضاحي

طريقة (2)

ندمج التكاملات:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x)\,dx$$

متطابقة

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{4}\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 0$$

$$0 - 0 = 0$$

59) اذا كان $\int_{\frac{\pi}{4K}}^{\frac{\pi}{3K}} (1-\pi \sin Kx)\,dx = \pi(7-6\sqrt{2})$ جد قيمة الثابت K

الحل :

نوجد التكامل

$$\left(x + \frac{\pi}{K}\cos Kx\right)\Big|_{\frac{\pi}{4K}}^{\frac{\pi}{3K}} = \pi(7-6\sqrt{2})$$

$$\left(\frac{\pi}{3K} + \frac{\pi}{K}\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4K} + \frac{\pi}{K}\cos\frac{\pi}{4}\right) = \pi(7-6\sqrt{2})$$

$$\frac{\pi}{3K} + \frac{\pi}{2K} - \frac{\pi}{4K} - \frac{\pi}{\sqrt{2}K} = \pi(7-6\sqrt{2})$$

$$\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi(7-6\sqrt{2})$$

نفسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

وحد المقامات داخل القوس للعدد 12

$$\frac{\pi}{K}\left(\frac{\cancel{7-6\sqrt{2}}}{12}\right) = \pi(\cancel{7-6\sqrt{2}})$$

$$\frac{\pi}{12K} = \pi \longrightarrow 12\pi K = \pi \longrightarrow K = \frac{\pi}{12\pi} \longrightarrow K = \frac{1}{12}$$

تحدي

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران

$$v(t) = \begin{cases} 2t+4 & , \; 0 \le t \le 6 \\ 20-(t-8)^2 & , \; 6 < t \le 10 \end{cases}$$

اذا بدأ الجسم حركته من نقطة الاصل 6 جد :

60) موقع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة

61) موقع الجسم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة

الحل :

60) عند $t=5$ القاعدة الاولى

جد C حيث $s(0)=0$

$$s(t) = \int (2t+4)\,dt = t^2 + 4t + C$$

$$s(0) = 0 + 0 + C \rightarrow C = 0$$

$\boxed{0 = C}$

$$s(t) = t^2 + 4t + 0$$

$$s(5) = 25 + 20 = 45$$

راقت ضاحي

(61

$t = 9$ عند $6 < t \le 10$ القاعدة الثانية

هنا لايجاد c اجد الموقع الابتدائي للفترة حيث اجد $S(6)$ من قاعدة الاولى

$S(6) = 36 + 24 = 60$

$$S(t) = \int (20 - (t-8)^2)\, dt$$

$$S(t) = 20t - \frac{(t-8)^3}{3} + c$$

$$S(6) = 20(6) - \frac{(6-8)^3}{3} + c$$

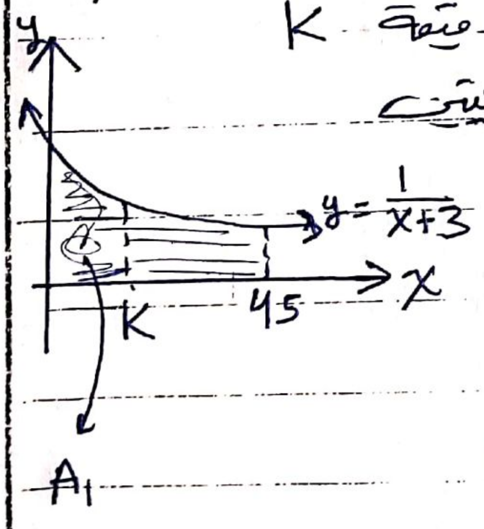
$$60 = 120 + \frac{8}{3} + c \rightarrow c = \frac{-188}{3}$$

$$S(t) = 20t - \frac{(t-8)^3}{3} - \frac{188}{3}$$

$$S(9) = 20(9) - \frac{1}{3} - \frac{188}{3} = 180 - \frac{189}{3} = 180 - 63 = 117\, m$$

---

62) يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $y = \frac{1}{x+3}$ والمحور x والمستقيمين $x = 0$ و $x = 45$ جد قيمة K التي تقسم المنطقة المظللة الى منطقتين متساويتين



الحل: اجد المساحة كاملة

$$A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|x+3| \Big|_0^{45}$$

$$= \ln 48 - \ln 3 = \ln 16$$

$$A_1 = \int_0^{K} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|K+3| \Big|_0^{K} = \ln(K+3) - \ln 3$$

$$= \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

وعليه

$$\frac{1}{2} \ln 16 = \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

ناخذ e للطرفين

$$\ln 4 = \ln\left(\frac{K+3}{3}\right)$$

$$4 = \frac{K+3}{3}$$

$$K + 3 = 12$$

$$\boxed{K = 9}$$

رافت صابحي

رابعاً :- **كتاب التمارين**

جد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int 4e^{-5x}\,dx$	2) $\int(\sin 2x - \cos 2x)\,dx$	3) $\int \cos^2 2x\,dx$
4) $\int \frac{e^x+4}{e^{2x}}\,dx$	5) $\int (\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x)\,dx$	6) $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$
7) $\int \cos x(1+\csc^2 x)\,dx$	8) $\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx$	9) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$
10) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2})\,dx$	11) $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$	12) $\int \ln e^{\cos x}\,dx$
13) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$	14) $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$	15) $\int \frac{3-2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx$

الحل :- تكامل مباشرة

1) $\frac{-4}{5}e^{-5x}+c$

توزيع التكامل

2) $\frac{-1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

متطابقة

3) $\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x)+c$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

توزيع البسط على المقام وينفذ

4) $\int (\frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{4}{e^{2x}})\,dx = \int (e^{-x}+4e^{-2x})\,dx$

$= -e^{-x} - \frac{4}{2}e^{-2x} = -e^{-x} - 2e^{-2x} + c$

رأفت ضاحي ٠٧٧٠٠٠٠

5) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} - 2e^{x} \right) dx$ نفكك القوة للمقام

$\int (\cot x \csc x - 2e^{x})\, dx = -\csc x - 2e^{x} + C$

6) $\int (3\cos 3x - (\sec^2 x - 1))\, dx = \int (3\cos 3x - \sec^2 x + 1)\, dx$ متطابقة

$= \frac{3}{3} \sin 3x - \tan x + x + c$

$= \sin 3x - \tan x + x + C$

7) $\int (\cos x + \cos x \csc^2 x)\, dx$ فك الضرب

$\int \left(\cos x + \cos x \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int (\cos x + \cot x \csc x)\, dx$

نفس فرع 5

$= \sin x - \csc x + c$

قسمة طويلة

8) $\int \left(x - 1 + \frac{-2}{x+2} \right) dx$

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ x+2 & x^2 + x - 4 \\ & -(x^2 + 2x) \\ & -x - 4 \\ & -(-x - 2) \\ & -2 \end{array}$$

$\frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x+2| + c$

9) $\int \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} + c$ نعالج الجذر

$= -2e^{-\frac{1}{2}x} + c$

10) $\int (\sec^2 x + x^{-2})\, dx$ مقلوب بسبب القسمة نوزع

$= \tan x + \frac{x^{-1}}{-1} = \tan x - \frac{1}{x} + c$

11) $\int \left(\frac{1}{3}\right) \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 3x^2| + c$ اجعل مشتقة المقام تعطي البسط

رأفت صباحي

12) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$ مضادها اللوغاريتم

13) $\int \frac{1}{2}(1-\cos x)\, dx = \frac{1}{2}(x-\sin x)+c$ متطابقة

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c$

14) $\int \cdots \frac{3}{2}\ln|2x-1|+c$ مباشرة

15) $\int \left(\frac{3}{\sin^2\frac{1}{2}x} - \frac{2\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\right) dx$ نوزع البسط على المقام

$\int (3\csc^2\frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x)\, dx$ نوزع التكامل

$= \frac{-3}{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}x + \frac{2}{\frac{1}{2}}\csc\frac{1}{2}x + c$

$= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + c$

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

16) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}\, dx$	17) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$	18) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x\, dx$
19) $\int_{-1}^{1} \lvert 3x-2\rvert\, dx$	20) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3\sin x)^2\, dx$	21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$
22) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)\, dx$	23) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\, dx$	

راقت صباحي ٠٧٨٠٥٥٠٠٥٦

24) $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}\, dx$

الحل: مشتقة المقام تعطي البسط

16) $\ln(e^x+4)\Big|_0^1 = \ln(e+4) - \ln(1+4)$

$= \ln\left(\frac{e+4}{5}\right)$

17) $\left(\frac{1}{3}\ln|3x-2|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 1 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$

متطابقة

18) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{-1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{-1}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}\cos 0$

$= \frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{4}(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

اعادة تعريف

19) $3x-2=0$

$x = \frac{2}{3}$

$2-3x$ $3x-2$

$- - - \quad \frac{2}{3} \quad + + +$

$\boxed{-1} \qquad \boxed{1}$

$\int_{-1}^{1} |3x-2|\,dx = \int_{-1}^{\frac{2}{3}} (2-3x)\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (3x-2)\,dx$

$= \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$

$= \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - 2\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{-1}{2} + \frac{2}{3}$

$= \frac{13}{3}$

رأفت ضاحي

20) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6\cos x \sin x + 9 \sin^2 x)\,dx$ فك التربيع

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + 3\sin 2x + 9(\frac{1}{2}(1-\cos 2x))\,dx$ متطابقات

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + 3\sin 2x + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cos 2x)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 + 3\sin 2x - 4\cos 2x)\,dx$ تكامل

$= (5x - \frac{3}{2}\cos 2x - 2\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= (\frac{5\pi}{4} - \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2}) - (0 - \frac{3}{2}\cos 0 - 2\sin 0)$

$= \frac{5\pi}{4} - 0 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{5\pi - 2}{4}$

---

21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\ln|\cos\frac{\pi}{4}| + \ln|\cos 0|$

$= -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$ بالتبسيط

---

22) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4(\sin x \cos x)^2)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4(\frac{1}{2}\sin 2x)^2)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\underbrace{\cos^2 2x - \sin^2 2x}_{\text{متطابقة}})\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x\,dx$

$= (\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{16}}$

$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 0$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

راقت ضايق ٠٧٩٠٠٠٢٠٥٠٠٠

23) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+2\sin x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$ فك أقواس وتوزيع البسط على المقام

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x\sec x + \tan^2 x)\,dx$ متطابقة

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x\sec x + \sec^2 x - 1)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + 2\tan x\sec x - 1)\,dx$

$(2\tan x + 2\sec x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(2\tan\frac{\pi}{4} + 2\sec\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (2\tan 0 + 2\sec 0 - 0)$

$= (2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) - (0+2)$

$= 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

24) قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 3x+2 & 6x \\ & \underline{6x+4} \\ & -4 \end{array}$$

$\int_0^1 \left(2 + \frac{-4}{3x+2}\right) dx = \left(2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_0^1$

$= (2 - \frac{4}{3}\ln 5) - (0 - \frac{4}{3}\ln 2)$

$= 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 2$

$= 2 + \frac{4}{3}(\ln 2 - \ln 5) = 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$ خصائص اللوغاريتم حيث الطرح تحول قسمة

رأفت صابحي

25) اذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ , } x \leq 3 \\ 10-x \text{ , } x > 3 \end{cases}$ جد قيمة $\int_1^5 f(x)\,dx$

الحل:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^3 (2x+1)\,dx + \int_3^5 (10-x)\,dx$$

$$= (x^2+x)\Big|_1^3 + \left(10x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^5$$

$$= (9+3) - (1+1) + \left(50 - \frac{25}{2}\right) - \left(30 - \frac{9}{2}\right) = 30 - \frac{16}{2} = 22$$

---

26) اذا كان $\int_1^K \frac{4}{2x-1}\,dx = 1$ جد قيمة الثابت K حيث $K > \frac{1}{2}$

الحل:

تكامل

$$\frac{4}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^K = 1$$

$$2\ln(2K-1) - 2\ln 1 = 1$$

$$\ln(2K-1) = \frac{1}{2}$$ ناخذ e للطرفين

$$2K-1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$2K = 1+e^{\frac{1}{2}} \rightarrow K = \frac{1+e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{e}}{2}$$

---

27) اذا كان $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$ جد قيمة الثابت a حيث $a > 0$

الحل: نوزع التكامل

$$(e^x - e^{-x})\Big|_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$$

$$e^{-\ln a} = e^{\ln a^{-1}} = \frac{1}{a}$$

$$(e^{\ln a} - e^{-\ln a}) - (e^0 - e^0) = \frac{48}{7}$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) - 0 = \frac{48}{7}$$ اضرب بـ $7a$

$$7a^2 - 7 = 48a$$ نرتب

$$7a^2 - 48a - 7 = 0$$

$$(7a+1)(a-7) = 0$$

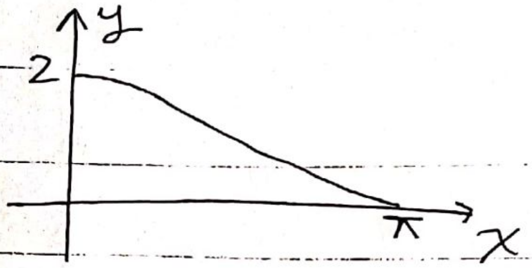
$7a+1=0 \rightarrow a = -\frac{1}{7}$ مرفوض لأن $a>0$

$a-7=0 \rightarrow a = 7$

وعليه قيمة a هي 7

رافت ضاحي ٠٧٧٠٢٥٥٠٥٠

28) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران $f(x)=2\cos^2 0.5x$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الاحداثيين الموجبين



الحل:

$$A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} 2\cos^2\tfrac{1}{2}x\,dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos x)\,dx$$ نوزع التكامل

$$=(x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)$$

$$=\pi+0-0-0=\pi$$

29) في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

(29) $f'(x)=e^{-x}+x^2$ ، $(0,4)$ (30) $f'(x)=\frac{3}{x}-4$ ، $(1,0)$

الحل:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(e^{-x}+x^2)\,dx$$

$$=-e^{-x}+\frac{x^3}{3}+c$$

لإيجاد c نستفيد من الشرط $f(0)=4$

$$f(0)=-e^0+0+c$$

$$4=-1+c$$

$$c=5$$

$$f(x)=-e^{-x}+\frac{x^3}{3}+5$$

رافت صابحي

30) $f(x)=\int f'(x)\,dx = \int (\frac{3}{x}-4)\,dx = 3\ln|x|-4x+c$

بما أن $f(1)=0$

$f(1)=3\ln|1|-4+c$

$0=-4+c$

$c=4$

$f(x)=3\ln|x|-4x+4$

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران

$v(t)=\frac{-t}{1+t^2}$

(31) جد إزاحة الجسم في الفترة $[0,3]$

(32) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة $[0,3]$

الحل:

31)

$$S(3)-S(0)=\int_0^3 \frac{-t}{1+t^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^3 \frac{2t}{1+t^2}\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right)\Big|_0^3 = -\frac{1}{2}\ln 10+\frac{1}{2}\ln 1 = -\frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

32) ندرس إشارة البسط لوحده لأن المقام دائماً موجب

$-t=0$

$t=0$

$\overline{\;0 \quad - - - - \quad 3\;}$

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt = \int_0^3 -v(t)\,dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \left(\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\ln 10-\frac{1}{2}\ln 1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 10 = \ln\sqrt{10}\text{ m}$$

رافت صافي

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران

: $v(t) = 6\sin 3t$

33) جد ازاحة الجسم في الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

34) جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

الحل :-

33)
$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\,dt$$

$$= \left(\frac{-6}{3}\cos 3t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-2\cos 3t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 0$$

$$= 0 + 2 = 2$$

34)

ندرس الإشارة

$$6\sin 3t = 0$$
$$3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$
$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$$

0 + + + $\frac{\pi}{3}$ − − $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} v(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -v(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3t\,dt + -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\,dt$$

$$= \left(-2\cos 3t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(2\cos 3t\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-2\cos\pi + 2\cos 0\right) + \left(2\cos\frac{3\pi}{2} - 2\cos\pi\right)$$

$$= (2+2) + (0+2)$$

$$= 6 \text{ m}$$

رافت صابحي

يتحرك جسم في مسار مستقيم ويعطى سرعته المتجهة بالاقتران

(35) $$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 , & 0 \le t \le 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t , & t > 6 \end{cases}$$

اذا انطلق الجسم من نقطة الاصل. جد موقعه بعد 40 ثانية من بدء حركته

الحل :-

عندما $t = 40$ الفترة $t > 6$

$s(t) = \int (15 - \frac{1}{2}t)\, dt$

$s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C$

نحتاج الى C حيث موقع الجسم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الاولى

$s(t) = \int (8t - t^2)\, dt = 4t^2 - \frac{t^3}{3} + c$

لكن $s(0) = 0$

$s(0) = 0 - 0 + c$

$0 = c$

$s(t) = 4t^2 - \frac{t^3}{3}$

$s(6) = 144 - \frac{216}{3} = 72$

نعوضها في $s(t)$ ((القاعدة الثانية))

$s(6) = 15(6) - \frac{1}{4}(36) + c$

$72 = 90 - 9 + c$

$c = -9$

$s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9$

$s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9$

$= 600 - 400 - 9$

$= 191 \text{ m}$

راقت ضاهي