ملخصات في

الرياضيات

للصف العاشر

الفصل الدراسي الأول

الدرسُ 1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ

Solving a System of Linear and Quadratic Equations

كتاب الطالب صفحة (11)

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$2x + y = 12$

$y = x^2 + 5x - 6$

الحل:

$$2x + y = 12$$
$$y = 12 - 2x$$
$$12 - 2x = x^2 + 5x - 6$$
$$x^2 + 7x - 18 = 0$$
$$(x + 9)(x - 2) = 0$$
$$x = -9\,, x = 2$$

عندما $x = -9$

$$2 \times -9 + y = 12$$
$$-18 + y = 12$$
$$y = 12 + 18 = 30$$

عندما $x = 2$

$$2 \times 2 + y = 12$$
$$4 + y = 12$$
$$y = 12 - 4 = 8$$

إذن حل النظام هو

$$(-9,30), (2,8)$$

كتاب الطالب صفحة (13)

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$y = 2x + 1$$
$$x^2 + y^2 = 10$$

الحل:

$$y = 2x + 1$$
$$x^2 + (2x + 1)^2 = 10$$
$$x^2 + (4x^2 + 4x + 1) = 10$$
$$5x^2 + 4x + 1 - 10 = 0$$
$$5x^2 + 4x - 9 = 0$$
$$(5x + 9)(x - 1) = 0$$
$$x = \frac{-9}{5}, \qquad x = 1$$

عندما $x = \frac{-9}{5}$

$$y = 2 \times \frac{-9}{5} + 1$$
$$y = \frac{-18}{5} + \frac{5}{5}$$
$$y = \frac{-13}{5}$$

عندما $x = 1$

$$y = 2 \times 1 + 1$$
$$y = 2 + 1$$
$$y = 3$$

إذن حل النظام هو

$$\left(\frac{-9}{5}, \frac{-13}{5}\right), (1,3)$$

كتاب الطالب صفحة 13

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

الحل:

$$y = x$$
$$x = x^2 + 3x + 2$$
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

لا يوجد تحليل لهذه المعادلة لأن المميز سالب

$$2^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$4 - 8$$
$$-4$$

إذن لا يوجد حل للنظام

كتاب الطالب صفحة 15

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 50 m، ومحيطُها 140 m. أَجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ.

الحل:

x: طول المستطيل

y: عرض المستطيل

$$2x + 2y = 140$$
$$x^2 + y^2 = 2500$$

$$x + y = 70$$
$$y = 70 - x$$
$$x^2 + (70 - x)^2 = 2500$$
$$x^2 + 4900 - 140x + x^2 = 2500$$
$$2x^2 - 140x + 2400 = 0$$
$$x^2 - 70x + 1200 = 0$$
$$(x - 40)(x - 30) = 0$$

$$x = 40\,,\ x = 30$$

عندما $x = 40$

$$40 + y = 70$$
$$y = 30$$

عندما $x = 30$

$$30 + y = 70$$
$$y = 40$$

بعدي المزرعة (40,30) أو (30,40)

بما أنَّ الطولَ أكبرُ منْ العرضِ، فإنَّ الطولَ هوَ 40 m والعرضَ هوَ 30 m

كتاب الطالب صفحة 15

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 4x - 2$
$y + 6 = 0$

2) $y = x^2 + 6x - 3$
$y = 2x - 3$

3) $y = x^2 + 4$
$x - y = -1$

4) $y = x^2 + 5x - 1$
$2x + 3y = 1$

5) $y = x^2 + 4x + 7$
$y - 3 = 0$

6) $y = x^2 - 2x + 4$
$y = x$

7) $x^2 + y^2 = 8$
$2x + 3y = 7$

8) $y = x^2 + 2x + 1$
$y = 0$

9) $x^2 + y^2 = 4$
$x + y = 5$

10) $x^2 + y^2 = 10$
$x - y = 2$

11) $x^2 + (y-1)^2 = 17$
$x = 1$

12) $2x + 3y = 5$
$2y^2 + xy = 12$

الحل :

1) $y = -6$

$$-6 = x^2 + 4x - 2$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)(x+2) = 0$$
$$x = -2$$

حل النظام هو

$$(-2, -6)$$

2)

$$y = 2x - 3$$
$$2x - 3 = x^2 + 6x - 3$$
$$x^2 + 4x = 0$$
$$x(x+4) = 0$$
$$x = 0 \ , \ x = -4$$

عندما $x = 0$

$$y = 2 \times 0 - 3 = -3$$

عندما $x = -4$

$$y = 2 \times -4 - 3 = -11$$

إذن حل النظام هو

$$(0, -3) \ , \quad (-4, -11)$$

3) $y = x + 1$

$$x + 1 = x^2 + 4$$
$$x^2 - x + 3 = 0$$

المميز سالب بالتالي لا يوجد حل للنظام

4) $2x + 3y = 1$

$$3y = 1 - 2x$$
$$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$$
$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x = x^2 + 5x - 1$$
$$1 - 2x = 3x^2 + 15x - 3$$
$$3x^2 + 17x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-17 + \sqrt{289 - 4 \times 3 \times -4}}{2 \times 3}$$

$x_1 = \frac{-17+\sqrt{337}}{6}$, $x_2 = \frac{-17-\sqrt{337}}{6}$

عندما $x = \frac{-17+\sqrt{337}}{6}$

$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{-17+\sqrt{337}}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{-34+2\sqrt{337}}{18}$

عندما $x = \frac{-17-\sqrt{337}}{6}$

$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{-17-\sqrt{337}}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{-34-2\sqrt{337}}{18}$

إذن حل النظام هو

$$\left(\frac{-17 + \sqrt{337}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{-34 + 2\sqrt{337}}{18}\right), \quad \left(\frac{-17 - \sqrt{337}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{-34 - 2\sqrt{337}}{18}\right)$$

5) $y = 3$

$$3 = x^2 + 4x + 7$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x + 2)(x + 2) = 0$$
$$x = -2$$

إذن حل النظام هو

$$(-2,3)$$

6) $y = x$

$$x = x^2 - 2x + 4$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

لا يوجد تحليل لأن المميز سالب

7) $2x + 3y = 7$

$$y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x$$

$$x^2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}x\right)^2 = 8$$

$$x^2 + \frac{49}{9} - \frac{28}{9}x + \frac{4}{9}x^2 = 8$$

$$9x^2 + 49 - 28x + 4x^2 = 72$$

$$13x^2 - 28x + 49 - 72 = 0$$

$$13x^2 - 28x - 23 = 0$$

المميز :

$$28^2 - 4 \times 13 \times -23$$

$$= 1980$$

$$x_1 = \frac{28 + \sqrt{1980}}{2 \times 13} = \frac{28 + \sqrt{1980}}{26}$$

$$x_2 = \frac{28 - \sqrt{1980}}{2 \times 13} = \frac{28 - \sqrt{1980}}{26}$$

عندما $x = \frac{28+\sqrt{1980}}{26}$

$$y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{28+\sqrt{1980}}{26} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{3} - \frac{56+2\sqrt{1980}}{78}$$

عندما $x = \frac{28-\sqrt{1980}}{26}$

$$y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{28-\sqrt{1980}}{26} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{3} - \frac{56-2\sqrt{1980}}{78}$$

إذن حل النظام هو

$$\left(\frac{28 + \sqrt{1980}}{26}, \quad \frac{7}{3} - \frac{56 + 2\sqrt{1980}}{78}\right), \quad \left(\frac{28 - \sqrt{1980}}{26}, \quad \frac{7}{3} - \frac{56 - 2\sqrt{1980}}{78}\right)$$

كتاب الطالب صفحة (15)

8) $y = 0$

$$0 = x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)(x + 1) = 0$$
$$x = -1$$

حل النظام هو

$$(-1,0)$$

9) $y = 5 - x$

$$x^2 + (5 - x)^2 = 4$$
$$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 4$$
$$2x^2 - 10x + 21 = 0$$

لا يوجد تحليل لأن المميز سالب إذن لا يوجد حل للنظام.

كتاب الطالب صفحة (15)

10) $y = x - 2$

$$x^2 + (x - 2)^2 = 10$$
$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 10$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$2(x^2 - 2x - 3) = 0$$
$$2(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x = 3 \ , \ x = -1$$

عندما $x = 3$

$$y = 3 - 2 = 1$$

عندما $x = -1$

$$y = -1 - 2 = -3$$

إذن حل النظام هو

$$(3,1) \ , \quad (-1,-3)$$

كتاب الطالب صفحة (15)

11) $x = 1$

$$1 + (y-1)^2 = 17$$
$$1 + y^2 - 2y + 1 = 17$$
$$y^2 - 2y + 2 - 17 = 0$$
$$y^2 - 2y - 15 = 0$$
$$(y-5)(y+3) = 0$$
$$y = 5 \ , y = -3$$

إذن حل النظام هو

$$(1,5), \qquad (1,-3)$$

كتاب الطالب صفحة (15)

12) $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$

$$2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x\right)^2 + x\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x\right) = 12$$

$$2\left(\frac{25}{9} - \frac{20}{9}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^2 = 12$$

$$\frac{50}{9} - \frac{40}{9}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^2 - 12 = 0$$

$$\frac{50}{9} - \frac{40}{9}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{15}{9}x - \frac{6}{9}x^2 - \frac{108}{9} = 0$$

$$\frac{2}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{58}{9} = 0$$

$$2x^2 - 25x - 58 = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$25^2 - 4 \times 2 \times -58$$

$$= 625 + 464$$

$$= 1089$$

$$x_1 = \frac{25 + \sqrt{1089}}{2 \times 2} = \frac{25 + 33}{4} = \frac{58}{4} = 14.5$$

$$x_2 = \frac{25 - \sqrt{1089}}{2 \times 2} = \frac{25 - 33}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

عندما $x = \frac{58}{4}$

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{58}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{3} - \frac{58}{6} = \frac{10}{6} - \frac{58}{6} = \frac{-48}{6} = -8$$

عندما $x = -2$

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times -2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

إذن حل النظام هو

$$\left(\frac{58}{4}, -8\right), \quad (-2, 3)$$

كتاب الطالب صفحة (15)

13 **بركةٌ:** بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها 16 m، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها $16\,m^2$. أَجِدُ بُعْدَيْها.

الحل: الطول = x العرض = y

$$2x + 2y = 16$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

$$x + y = 8$$
$$y = 8 - x$$
$$x^2 - (8 - x)^2 = 16$$

$$x^2 - (64 - 16x + x^2) = 16$$

$$x^2 - 64 + 16x - x^2 = 16$$

$$16x - 64 = 16$$
$$16x = 16 + 64$$

$$16x = 80$$
$$x = 5$$
$$y = 8 - 5$$
$$y = 3$$

الطول = $5\ m$ العرض = $3\ m$

كتاب الطالب صفحة (15)

14 **أعدادٌ:** أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24

الحل:

العدد الأول = x ، العدد الثاني = y

$$x + y = 12$$

$$x^2 - y^2 = 24$$

الآن

$$y = 12 - x$$

$$x^2 - (12 - x)^2 = 24$$
$$x^2 - (144 - 24x + x^2) = 24$$
$$x^2 - 144 + 24x - x^2 = 24$$
$$24x - 144 = 24$$
$$24x = 24 + 144$$
$$24x = 168$$
$$x = \frac{168}{24} = 7$$
$$y = 12 - 7$$
$$y = 5$$

كتاب الطالب صفحة (15)

15 هندسةٌ: دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما 12π cm، ومجموعُ مساحتَيْهِما 20π cm^2. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما.

الحل:

نصف قطر الدائرة الأولى= r_1 ، نصف قطر الدائرة الثانية= r_2

محيط الدائرة الأولى= l_1 ، محيط الدائرة الثانية= l_2

مساحة الدائرة الأولى= A_1 ، مساحة الدائرة الثانية= A_2

$$l_1 + l_2 = 12\pi$$
$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi$$
$$2\pi(r_1 + r_2) = 12\pi$$
$$\frac{2\pi}{2\pi}(r_1 + r_2) = \frac{12\pi}{2\pi}$$
$$r_1 + r_2 = 6$$
$$A_1 + A_2 = 20\pi$$
$$\pi(r_1)^2 + \pi(r_2)^2 = 20\pi$$
$$\pi((r_1)^2 + (r_2)^2) = 20\pi$$
$$\frac{\pi}{\pi}((r_1)^2 + (r_2)^2) = \frac{20\pi}{\pi}$$
$$(r_1)^2 + (r_2)^2 = 20$$

الآن

$$r_2 = 6 - r_1$$
$$(r_1)^2 + (6 - r_1)^2 = 20$$
$$(r_1)^2 + 36 - 12r_1 + (r_1)^2 = 20$$
$$2(r_1)^2 - 12r_1 + 36 = 20$$
$$2(r_1)^2 - 12r_1 + 36 - 20 = 0$$
$$2(r_1)^2 - 12r_1 + 16 = 0$$
$$2((r_1)^2 - 6r_1 + 8) = 0$$
$$2(r_1 - 4)(r_1 - 2) = 0$$
$$r_1 = 4 \,, \quad r_1 = 2$$

عندما $r_1 = 4$ فإن $r_2 = 2$

عندما $r_1 = 2$ فإن $r_2 = 4$

لتكن الدائرة الأولى هي الأكبر إذن $r_1 = 4$ وقطرها هو $2r_1$ ويساوي $2 \times 4 = 8$

لتكن الدائرة الثانية هي الأصغر إذن $r_2 = 2$ وقطرها هو $2r_2$ ويساوي $2 \times 2 = 4$

كتاب الطالب صفحة (16)

16 **أعمارٌ:** قالَتْ شـــيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ سنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُرَبَّعَيْ عُمْرَيْنا هوَ 346 عامًا». ما عُمْرُ شيماءَ؟

عمر شيماء = x ، عمر ريان = y

$$x - 4 = y$$
$$x^2 + y^2 = 346$$
$$x^2 + (x-4)^2 = 346$$
$$x^2 + x^2 - 8x + 16 = 346$$
$$2x^2 - 8x + 16 - 346 = 0$$
$$2x^2 - 8x - 330 = 0$$
$$2(x^2 - 4x - 165) = 0$$

المميز

$$16 - 4 \times 1 \times -165$$
$$= 16 - 4 \times 1 \times -165$$
$$= 16 + 660$$
$$= 676$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{676}}{2 \times 1} = \frac{4 + 26}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$x_2 = \frac{4-\sqrt{676}}{2\times1} = \frac{4-26}{2} = \frac{-22}{2} = -11$ مرفوضة لأن العمر موجب

إذن عمر شيماء 15، وعمر ريان $4 - 15$ ، ويساوي 11

كتاب الطالب صفحة (16)

17 لوحـةٌ: لوحةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُها يساوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m ، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ الطوليِ الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ.

الحل:

المعطيات: اللوحة مستطيلة ، الطول يساوي مثلي العرض ، طول القطر = $\sqrt{1.25}$ ، تكلفة متر الإطار 2.25

المطلوب: كلفة الإطار

الحل: الطول = x العرض= y

$$x = 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1.25$$
$$(2y)^2 + y^2 = 1.25$$
$$4y^2 + y^2 = 1.25$$
$$5y^2 = 1.25$$
$$y^2 = \frac{1.25}{5} = \frac{125}{500} = \frac{1}{4}$$

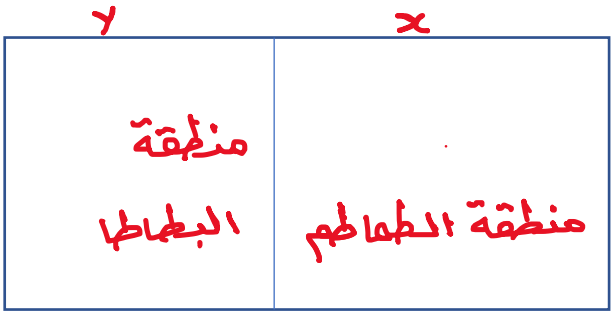
$$y = \mp\frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}$$
$$x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

محيط اللوحة × سعر المتر= تكلفة الإطار

$$= 2.25 \times (2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2})$$
$$= 2.25 \times (2 + 1)$$
$$= 2.25 \times (3)$$
$$= 6.75$$

كتاب الطالب صفحة (16)

18 **زراعةٌ:** قسَّمَ فيصلٌ 41m^2 منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعتَيِ الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَيِ الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟



الحل:

مجموع المنطقتين وكلتاهما مربع يساوي 41

نفرض أن ضلع منطقة الطماطم هو x

نفرض أن ضلع منطقة البطاطا هو y

بالتالي حسب المعطيات $x^2 + y^2 = 41$

بعد منطقة الطماطم x أكبر من بعد منطقة البطاطا y بمقدار 1 بالتالي:

$$x - 1 = y$$

وبالتالي:

$$x^2 + (x-1)^2 = 41$$
$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 41$$
$$2x^2 - 2x + 1 - 41 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 40 = 0$$
$$2(x^2 - x - 20) = 0$$
$$2(x-5)(x+4) = 0$$
$$x = 5, \quad x = -4$$

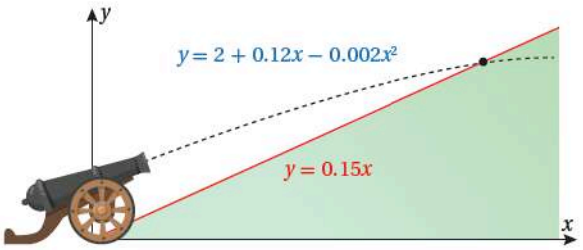
إذن $x = 5$ لأن $x = -4$ مرفوضة

بالتالي $y = 5 - 1 = 4$

مساحة منطقة الطماطم تساوي 5×5 وتساوي $25\ m^2$

مساحة منطقة البطاطا تساوي 4×4 وتساوي $16\ m^2$

كتاب الطالب صفحة (16)



19 تُمثِّلُ المعادلةُ $y=2+0.12x-0.002x^2$ مسارَ قذيفةِ مِدفعٍ تمَّ إطلاقُها نحوَ تلَّةٍ. أجدُ إحداثيّاتِ النقطةِ التي اصطدمتْ عندَها القذيفةُ بسفحِ التلَّةِ؛ إذا علمتُ أنَّهُ مستقيمٌ ومعادلتُهُ $y=0.15x$.

الحل:

$$0.15x = 2 + 0.12x - 0.002x^2$$
$$0.002x^2 + 0.15x - 0.12x - 2 = 0$$
$$\frac{2}{1000}x^2 + \frac{30}{1000}x - \frac{2000}{1000} = 0$$

$$2x^2 + 30x - 2000 = 0$$
$$2(x^2 + 15x - 1000) = 0$$
$$2(x - 40)(x + 25) = 0$$
$$x = 40$$
$$x = -25 \quad \text{مرفوضة}$$

$$y = \frac{15}{100} \times 40 = 6$$

احداثيات نقطة الاصطدام $(40,6)$

كتاب الطالب صفحة (16)

20 **تبريرٌ**: صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

الحل:

$$12 + x + x^2 = 10$$
$$x^2 + x + 12 - 10 = 0$$
$$x^2 + x + 2 = 0$$

لا يوجد حل للمعادلة لأن المميز سالب إذن لن يصل ماء النافورة إلى وحدة الإنارة

كتاب الطالب صفحة (16)

21 **تحدٍّ**: إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيَّةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

الحل:

$$3x + p = 2x^2 + 3x - 5$$

$$2x^2 - 5 - p = 0$$

$$2x^2 - (5 + p) = 0$$

بما أنه يوجد لدينا نقطة تقاطع وحيدة إذن يوجد حل وحيد بالتالي المميز يساوي صفر

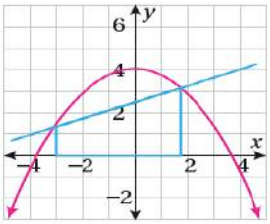
إذن

$$0 - 4 \times 2 \times -(5 + p) = 0$$
$$8(5 + p) = 0$$

$$5 + p = 0$$

$$p = -5$$

كتاب الطالب صفحة (16)



22 تحدَّ: أجدُ مساحةَ شبهَ المنحرفِ المرسوم باللونِ الأزرقِ أسفلَ مُنحنى الاقترانِ $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكلِ المجاور.

الحل: نجد صورة -3

$$y = \frac{-3}{10} \times 9 + 4 = -2.7 + 4 = 1.3$$

في البداية يجب إيجاد معادلة المستقيم الأزرق حيث أنه يمر بالنقطتين $(4,4)(-3,1.3)$

$$m = \frac{4 - 1.3}{4 - -3} = \frac{2.7}{7} \approx 0.4$$

$$y - 4 = 0.4(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = 0.4x - 1.6 + 4$$

$$y = 0.4x + 2.4$$

$$0.4x + 2.4 = \frac{-3}{10}x^2 + 4$$

$$\frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{10}x + \frac{24}{10} - \frac{40}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{10}x - \frac{16}{10} = 0$$

$$3x^2 + 4x - 16 = 0$$

المميز

$$16 - 4 \times 3 \times -16 = 16 + 192 = 208$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{193}}{2 \times 3} = \frac{-4 + 14.4}{6} = \frac{10.4}{6} = 1.7$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{208}}{2 \times 3} = \frac{-4 - 14.4}{6} = \frac{-18.4}{6} \approx -3$$

نجد صورة 1.7

$$y = \frac{-3}{10} \times 1.7^2 + 4 = -0.867 + 4 = 3.133$$

مساحة شبه المنحرف =

$$\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{((1.3 - 0) + (3.133 - 0))}{2} \times (1.7 - -3)$$

$$= \frac{1.3+3.133}{2} \times (4.7) \quad = \frac{4.433}{2} \times (4.7) \quad = 2.2165 \times (4.7) \quad = 10.42$$

كتاب الطالب صفحة 18

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$y = -x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 + 2x - 3$

الحل:

$$x^2 + 2x - 3 = -x^2 - 2x + 3$$
$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$
$$2(x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$2(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x = -3, \quad x = 1$$

عندما $x = -3$

$$y = (-3)^2 + 2(-3) - 3$$
$$= 9 - 6 - 3$$
$$= 3 - 3 = 0$$

عندما $x = 1$

$$y = (1)^2 + 2(1) - 3$$
$$= 1 + 2 - 3$$
$$= 3 - 3 = 0$$

حل النظام

$$(-3,0), \qquad (1,0)$$

كتاب الطالب صفحة 19

أتحقق من فهمي

تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليدِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أَبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ.

الحل:

$$x^2 + 2x = x^2 - x + 5$$
$$2x = -x + 5$$
$$2x + x = 5$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

الآن

$$y = (\frac{5}{3})^2 + 2 \times \frac{5}{3}$$
$$y = \frac{25}{9} + \frac{10}{3}$$
$$y = \frac{25}{9} + \frac{30}{9} = \frac{55}{9}$$

نقطة الاصطدام هي $(\frac{5}{3}, \frac{55}{9})$

كتاب الطالب صفحة 20

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

الحل:

$$x^2 + 4 = -x^2 + 2$$

$$2x^2 = -2$$

$$x^2 = \frac{-2}{2}$$

$$x^2 = -1$$

لا يوجد حل لأنه لا يوجد عدد حقيقي تربيعه عدد سالب

كتاب الطالب صفحة 21

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

الحل:

$$x^2 = 3y + 12$$
$$3y + 12 + y^2 = 16$$
$$y^2 + 3y + 12 - 16 = 0$$
$$y^2 + 3y - 4 = 0$$
$$(y + 4)(y - 1) = 0$$
$$y = -4, \quad y = 1$$

عندما $y = -4$

$$x^2 + 16 = 16$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

عندما $y = 1$

$$x^2 + 1 = 16$$
$$x^2 = 15$$
$$x = \pm\sqrt{15}$$

الحلول:

$$(0, -4), (\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1 $y = 2x^2 + x - 5$

$y = -x^2 - 2x - 5$

الحل:

$$-x^2 - 2x - 5 = 2x^2 + x - 5$$
$$0 = 3x^2 + 3x$$
$$0 = 3x(x + 1)$$
$$x = 0, x = -1$$

عندما $x = 0$

$$y = 2(0)^2 + 0 - 5$$
$$y = -5$$

عندما $x = -1$

$$y = 2(-1)^2 - 1 - 5$$
$$y = 2 - 6$$
$$y = -4$$

الحلول

$$(0, -5), (-1, -4)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

2 $y = x^2 - 4x + 1$

$y = -2x^2 - 4$

الحل:

$$x^2 - 4x + 1 = -2x^2 - 4$$

$$3x^2 - 4x + 5 = 0$$

لا يوجد حل حقيقي لأن المميز سالب وبالتالي لا يوجد حل للنظام

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

3 $y = x^2 + 1$
$y = 2x^2 - 3$

الحل:

$2x^2 - 3 = x^2 + 1$
$2x^2 - x^2 = 1 + 3$
$x^2 = 4$
$x = 2, x = -2$

عندما $x = 2$

$y = (2)^2 + 1$
$y = 4 + 1 = 5$

عندما $x = -2$

$y = (-2)^2 + 1$
$y = 4 + 1 = 5$

الحلول

$(2,5), (-2,5)$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

4 $y = x^2 + x + 1$

$y = -x^2 + x - 2$

الحل:

$$x^2 + x + 1 = -x^2 + x - 2$$
$$2x^2 = -3$$
$$x^2 = \frac{-3}{2}$$

لا يوجد حل لأنه لا يوجد عدد حقيقي تربيعه عدد سالب

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

5 $y = -x^2 + 5x$

$y = x^2 - 5x$

الحل:

$$x^2 - 5x = -x^2 + 5$$
$$2x^2 - 5x - 5 = 0$$

المميز:

$$5^2 - 4 \times 2 \times -5$$
$$= 25 - -40 = 25 + 40 = 65$$
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{65}}{2 \times 2} = \frac{5 + \sqrt{65}}{4} \approx 3.27$$
$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{65}}{2 \times 2} = \frac{5 - \sqrt{65}}{4} \approx -0.77$$

عندما $x_1 = 3.27$

$$y = (3.27)^2 - 5 \times 3.27 \approx -5.66$$

عندما $x_2 = -0.77$

$$y = (-0.77)^2 - 5 \times -0.77 \approx 4.44$$

إذن حل النظام هو

$$(3.27, -5.66)\ , \qquad (-0.77, 4.44)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

6 $y = x^2$

$y = x^2 + x + 6$

الحل:

$$x^2 = x^2 + x + 6$$
$$0 = x + 6$$
$$x = -6$$

إذن

$$y = 36$$

حل النظام

$$(-6,36)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

7 $y = -x^2 + 6x + 8$

$y = -x^2 - 6x + 8$

الحل:

$$-x^2 + 6x + 8 = -x^2 - 6x + 8$$
$$-x^2 + x^2 + 6x + 6x + 8 - 8 = 0$$
$$12x = 0$$
$$x = 0$$

إذن

$$y = 8$$

حل النظام

$$(0,8)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

8 $x^2 + y^2 = 16$
$y = x^2 - 5$

الحل:

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$x^2 = 16 - y^2$$
$$y = 16 - y^2 - 5$$
$$y^2 + y - 11 = 0$$

المميز:

$$1^2 - 4 \times 1 \times -11$$
$$= 1 - -44 = 1 + 44 = 45$$
$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{45}}{2 \times 1} = \frac{-1 + \sqrt{45}}{2} \approx 2.58$$
$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2} \approx -3.58$$

عندما $y_1 = 2.58$

$$2.58 = x^2 - 5$$
$$x^2 = 2.58 + 5 = 7.58$$
$$x = \pm\sqrt{7.58} \approx \pm 2.75$$

عندما $y_2 = -3.58$

$$-3.58 = x^2 - 5$$
$$x^2 = -3.58 + 5 = 1.42$$
$$x = \pm\sqrt{1.42} \approx \pm 1.19$$

حل النظام

$$(2.75, 2.58), (-2.75, 2.58), (1.19, -3.58), (-1.19, -3.58)$$

كتاب الطالب صفحة 21

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

9 $5x^2 - 2y^2 = 18$
$3x^2 + 5y^2 = 17$

الحل: نستخدم طريقة الحذف

$\times 3 \quad 5x^2 - 2y^2 = 18$
$\times 5 \quad 3x^2 + 5y^2 = 17$

$$15x^2 - 6y^2 = 54$$
$$15x^2 + 25y^2 = 85$$

نطرح المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & 15x^2 - 6y^2 = 54 \\ - & 15x^2 + 25y^2 = 85 \\ \hline & -31y^2 = -31 \end{array}$$

$$y^2 = 1$$
$$y = \pm 1$$

$$5x^2 - 2 = 18$$
$$5x^2 = 20$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

حل النظام

$$(2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1)$$

كتاب الطالب صفحة 21

10 أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

الحل: يمكن استخدام طريقة الحذف

$$\begin{array}{rr} & x^2 + y^2 = 9 \\ - & x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ \hline \end{array}$$

نطرح المعادلتين

$$y^2 - (y-2)^2 = 5$$
$$y^2 - (y^2 - 4y + 4) = 5$$
$$y^2 - y^2 + 4y - 4 = 5$$
$$4y = 9$$
$$y = \frac{9}{4} = 2.25$$
$$x^2 + (\frac{9}{4})^2 = 9$$
$$x^2 + \frac{81}{16} = 9$$
$$x^2 = 9 - \frac{81}{16}$$
$$x^2 = \frac{144}{16} - \frac{81}{16}$$
$$x^2 = \frac{63}{16}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{63}{16}} \approx \pm 1.97$$

نقاط التقاطع هي

$$(1.97, 2.25), (-1.97, 2.25)$$

كتاب الطالب صفحة 21

11 عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟

الحل:

العدد الأول x ، العدد الثاني y

$$x^2 + y^2 = 89$$
$$x^2 - y^2 = 39$$

بالحذف نجمع المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & x^2 - y^2 = 89 \\ + & x^2 + y^2 = 39 \\ \hline & 2x^2 = 128 \end{array}$$

$$x^2 = \frac{128}{2} = 64$$
$$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$
$$64 + y^2 = 89$$
$$y^2 = 89 - 64$$
$$y^2 = 25$$
$$y = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

الحل:

$$x = 8 \ , \ y = 5$$
$$x = 8 \ , \ y = -5$$
$$x = -8 \ , \ y = 5$$
$$x = -8 \ , \ y = -5$$

كتاب الطالب صفحة 22

12 **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسـيًّا في الوقتِ نفسِـهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+12t+10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+4t+42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَّ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ.

الحل:

$$-2t^2+12t+10=-2t^2+4t+42$$
$$8t=42-10$$
$$8t=32$$
$$t=\frac{32}{8}$$
$$t=4$$
$$y=-2\times4^2+12\times4+10$$
$$y=-2\times16+48+10$$
$$y=-32+48+10$$

$$y=26$$

كتاب الطالب صفحة 22

13 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ.

مسألةُ اليوم استعملَ خبيرُ تسويقٍ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عددَ الوحداتِ المبيعةِ. هلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

الحل:

$$x^2 + 6x = -x^2 + 24x$$
$$2x^2 - 18x = 0$$
$$2x(x - 9) = 0$$
$$x = 0,\ \ x = 9$$

$x = 0$ تهمل

بالتالي $x = 9$ وعندها $y = 135$

كتاب الطالب صفحة 22

14 أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + xy = 6$$

الحل:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$
$$(x - 2y)(x - y) = 0$$
$$x = 2y \quad , \quad x = y$$

عندما $x = y$

$$x^2 + xx = 6$$

$$2x^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

بالتالي

$$y = \pm\sqrt{3}$$

عندما $x = 2y$ فإن $y = \frac{x}{2}$

$$x^2 + x\frac{x}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{x^2}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x^2}{2} = 6$$

$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

بالتالي

$$y = \pm 1$$

الحل: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (2,1), (-2, -1)$

كتاب الطالب صفحة 22

15 **تبريرٌ:** قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:
نعم قول زينب صحيح
التبرير
لنفرض أن $z = x^2 + y^2$
بالتالي

$$z = 4$$

وبنفس الوقت

$$z = 9$$

وهذا تناقض
أي أنه لا يمكن أن يكون نفس العدد وله قيمتان مختلفتان.

كتاب الطالب صفحة 22

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ.

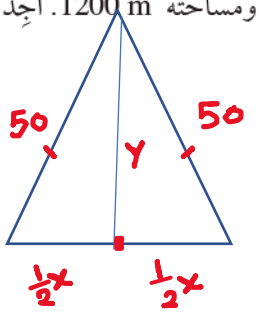
الحل:

$$x^2 + y^2 = 33$$
$$x^2 + y^2 = 7$$

كتاب الطالب صفحة 22

الحل:

17 **تحدٍّ:** قطعةُ أرضٍ على شــكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ.



القاعدة x الارتفاع y

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الأرتفاع

$$1200 = \frac{1}{2} \times x \times y$$

$$1200 = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{1200}{y} = \frac{1}{2}x$$

من فيثاغورس

$$50^2 = y^2 + (\frac{1}{2}x)^2$$

$$2500 = y^2 + (\frac{1}{2}x)^2$$

بالتالي:

$$2500 = y^2 + (\frac{1200}{y})^2$$

$$2500 = y^2 + \frac{1440000}{y^2}$$

$$2500y^2 = y^4 + 1440000$$

$$0 = y^4 - 2500y^2 + 1440000$$

$$0 = (y^2 - 900)(y^2 - 1600)$$

$$y^2 = 900 \quad , \quad y^2 = 1600$$

$$y = 30 \quad , \quad y = 40$$

القيم السالبة ل y مرفوضة لأننا نتعامل مع أبعاد مثلث

$$y = 30 \Rightarrow \frac{1200}{30} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 40 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 80$$

$$y = 40 \Rightarrow \frac{1200}{40} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 30 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 60$$

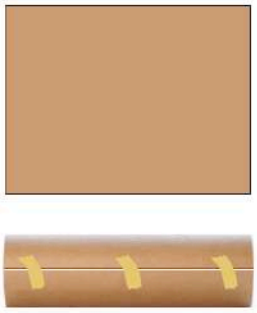
كتاب الطالب صفحة 22

18 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.

الحل:

$$x^2 + y^2 = 34$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

كتاب الطالب صفحة 22



19 تحدٍّ: قطعةٌ منْ ورقٍ مُقَوًّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ cm^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ.

الحل:

نفرض أن طول القطعة المستطيلة هو x والعرض هو y

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

ارتفاع الأسطوانة هو x

قاعدة الأسطوانة دائرة ومحيطها هو y

أيضا محيط الدائرة هو $2\pi r$

بالتالي

$$2\pi r = y$$
$$r = \frac{y}{2\pi}$$

$$xy = 216$$
$$v = \pi r^2 \times x$$
$$224 = \pi(\frac{y}{2\pi})^2 \times x$$

بالتالي لدينا

$$xy = 216$$
$$224 = \frac{y^2}{4\pi} \times x$$
$$x = \frac{216}{y}$$
$$224 = \frac{y^2}{4\pi} \times \frac{216}{y}$$
$$4\pi \times 224y = 216y^2$$
$$216y^2 - 4 \times 224\pi y = 0$$
$$8y(27y - 112\pi) = 0$$
$$y = 0$$
$$y = \frac{112\pi}{27} \Longrightarrow x = \frac{216}{\frac{112\pi}{27}} = \frac{216 \times 27}{112\pi}$$

كتاب الطالب صفحة 24

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ b) $9^{\frac{5}{2}}$ c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$

الحل:

a) $\sqrt[5]{32} = 2$ b) $\sqrt[2]{9^5} = 3^5 = 243$ c) $\frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^5}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

كتاب الطالب صفحة 26

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$

d) $\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$

e) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$

الحل:

a) $a^{\frac{2}{3}+\frac{-3}{7}} = a^{\frac{14+(-9)}{21}} = a^{\frac{5}{21}}$

b) $x^{\frac{5}{2}\times\frac{-7}{5}} = x^{\frac{-7}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{x^7}}$

c) $y^{\frac{5}{4}} \times z^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{y^5}\ \sqrt[4]{z^5}$

d) $x^{\frac{9}{2}-\frac{8}{5}} = x^{\frac{45-16}{10}} = x^{\frac{29}{10}} = \sqrt[10]{x^{29}}$

e) $\dfrac{x^{\frac{-3}{2}}}{y^{2\times\frac{-3}{2}}} = \dfrac{y^3}{x^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{y^3}{\sqrt[2]{x^3}}$

f) $\dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{7}}} = x^{\frac{2}{5}-\frac{3}{7}} = x^{\frac{14-15}{35}} = x^{\frac{-1}{35}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{35}}} = \dfrac{1}{\sqrt[35]{x}}$

كتاب الطالب صفحة 27

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$

الحل:

$$= 3x^{\frac{-3}{4}-\frac{7}{2}}y^{1-\frac{-5}{3}}$$

$$= 3x^{\frac{-6-28}{8}}y^{\frac{8}{3}}$$

$$= 3x^{\frac{-34}{8}}y^{\frac{8}{3}}$$

$$= 3x^{\frac{-17}{4}}y^{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{3y^{\frac{8}{3}}}{x^{\frac{17}{4}}} = \frac{3\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[4]{x^{17}}}$$

كتاب الطالب صفحة 27

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

b) $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$

الحل:

$$= 25 \times 10\, y^{\frac{-9}{2}+\frac{10}{3}-1-\frac{-3}{7}} x^{1-\frac{5}{2}}$$

$$= 250\, y^{\frac{-27+20}{2}-1-\frac{-3}{7}} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 250\, y^{\frac{-7}{2}-1+\frac{3}{7}} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 250\, y^{\frac{-9}{2}+\frac{3}{7}} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 250\, y^{\frac{-63+6}{14}} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 250\, y^{\frac{-57}{14}} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \frac{250}{y^{\frac{57}{14}} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{250}{\sqrt[14]{y^{57}}\ \sqrt[2]{y^{3}}}$$

كتاب الطالب صفحة 27

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$

الحل:

$$= (16 \times x^{18} \times y^{22})^{\frac{1}{4}}$$

$$= 16^{\frac{1}{4}} \times x^{18\times\frac{1}{4}} \times y^{22\times\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{16} \times x^{\frac{9}{2}} \times y^{\frac{11}{2}}$$

$$= 2 \times \sqrt[2]{x^9} \times \sqrt[2]{y^{11}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $512^{\frac{1}{9}}$ 2) $125^{\frac{2}{3}}$ 3) $36^{-\frac{1}{2}}$

4) $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 5) $(25)^{\frac{3}{2}}$ 6) $(-8)^{\frac{7}{3}}$

الحل:

1) $\sqrt[9]{512} = 2$ 2) $\sqrt[3]{125^2} = 5^2 = 25$ 3) $= \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$

4) $\sqrt[5]{-243^6} = (-3)^6 = 729$ 5) $\sqrt[2]{25^3} = 5^3 = 125$

6) $\sqrt[3]{(-8)^7} = (-2)^7 = -128$

كتاب الطالب صفحة 28

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $z^{-\frac{4}{2}} \times z$

8) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$

9) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$

10) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$

11) $\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$

12) $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$

الحل:

7) $= z^{\frac{-2}{4}+1} = z^{\frac{2}{4}} = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$

8) $x^{\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}} = x^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{x^3}$

9) $a^{3\times\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} = a^2 b^{\frac{2}{3}} = a^2\sqrt[3]{b^2}$

10) $= x^{\frac{2}{3}-\frac{7}{2}} = x^{\frac{4-21}{6}} = x^{\frac{-17}{6}} = \frac{1}{x^{\frac{17}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

11) $\frac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{9}{6}}} = y^{\frac{1}{3}-\frac{9}{6}} = y^{\frac{6-27}{18}} = y^{\frac{-21}{18}} = y^{\frac{-7}{6}} = \frac{1}{y^{\frac{7}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{y^7}}$

12) $\frac{k^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{k^2} = \frac{k^2}{k^2} = 1$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

13 $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$

الحل:

$$(8 \times x^{\frac{3}{4}-\frac{-3}{2}} \times y^{\frac{-7}{3}-\frac{-16}{3}})^{\frac{-2}{5}}$$
$$= (8 \times x^{\frac{3}{4}+\frac{6}{4}} \times y^{\frac{-7}{3}+\frac{16}{3}})^{\frac{-2}{5}}$$
$$= (8 \times x^{\frac{9}{4}} \times y^{\frac{9}{3}})^{\frac{-2}{5}}$$
$$= (8 \times x^{\frac{9}{4}} \times y^{3})^{\frac{-2}{5}}$$
$$= 8^{\frac{-2}{5}} \times x^{\frac{9}{4}\times\frac{-2}{5}} \times y^{3\times\frac{-2}{5}}$$
$$= 8^{\frac{-2}{5}} \times x^{\frac{-9}{10}} \times y^{\frac{-6}{5}}$$
$$\frac{1}{\sqrt[5]{8^2} \times \sqrt[10]{x^9} \times \sqrt[5]{y^6}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

14 $\dfrac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$

الحل:

$$\frac{27 \times x^{\frac{7}{3}+1} \times y^{-2} \times z^2}{9 \times x^{2+\frac{5}{3}} \times y^{\frac{5}{2}+-5}}$$

$$= \frac{3 \times x^{\frac{10}{3}} \times y^{-2} \times z^2}{x^{\frac{11}{3}} \times y^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= 3 \times x^{\frac{10}{3}-\frac{11}{3}} \times y^{-2-\frac{-5}{2}} \times z^2$$

$$= 3 \times x^{\frac{-1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}} \times z^2$$

$$= \frac{3z^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

15 $\dfrac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$

الحل:

$$= \frac{a^{2\times-2} \times b^{3\times-2} \times a \times b^4}{a^{-1} \times b^2}$$

$$= \frac{a^{-4} \times b^{-6} \times a \times b^4}{a^{-1} \times b^2}$$

$$= \frac{a^{-4+1} \times b^{-6+4}}{a^{-1} \times b^2}$$

$$= \frac{a^{-3} \times b^{-2}}{a^{-1} \times b^2}$$

$$= a^{-3} \times b^{-2} \times a^1 \times b^{-2}$$
$$= a^{-3+1} \times b^{-2+-2}$$
$$= a^{-2} \times b^{-4}$$
$$= \frac{1}{a^2 \times b^4}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

16 $\dfrac{(8p^{-6}q^{3})^{\frac{2}{3}}}{(27p^{3}q)^{-\frac{1}{3}}}$

الحل:

$$= \frac{8^{\frac{2}{3}} \times p^{-6\times\frac{2}{3}} \times q^{3\times\frac{2}{3}}}{27^{\frac{-1}{3}} \times p^{3\times\frac{-1}{3}} \times q^{\frac{-1}{3}}}$$

$$= \frac{8^{\frac{2}{3}} \times p^{-4} \times q^{2}}{27^{\frac{-1}{3}} \times p^{-1} \times q^{\frac{-1}{3}}}$$

$$= 8^{\frac{2}{3}} \times p^{-4--1} \times q^{2-\frac{-1}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{8^{2}} \times p^{-3} \times q^{\frac{7}{3}} \times \sqrt[3]{27}$$

$$= \frac{4 \times \sqrt[3]{q^{7}} \times 3}{p^{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt[3]{q^{7}}}{p^{3}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

17 $\dfrac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$

الحل:

$$= \frac{x^{2\times\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{2\times\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{3}}$$

$$= y\sqrt[3]{x^2}$$

كتاب الطالب صفحة 28

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

18 $\dfrac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$

الحل:

$$= \frac{4^{\frac{3}{2}}\, x^{-1\times\frac{3}{2}}\, y^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\, y^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4^{\frac{3}{2}}\, x^{\frac{-3}{2}}\, y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\, y^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 4^{\frac{3}{2}}\, x^{\frac{-3}{2}-\frac{3}{2}}\, y^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}$$

$$= 4^{\frac{3}{2}}\, x^{\frac{-6}{2}}\, y^{\frac{-2}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}\, x^{-3}\, y^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{4^3}}{x^3\, y} = \frac{8}{x^3\, y}$$

كتاب الطالب صفحة 28

19 تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ المقدارِ الأُسِّيِّ الآتي:

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

الحل:

في البداية إن $(-1)^{43}$ يساوي -1 لأن الأس فردي

إن $(-5)^{43}$ هو معكوس $(5)^{43}$ وبالتالي مجموعهما يساوي صفر

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43} = (-5)^{43} + (5)^{43} + (-1)^{43}$$

$$= 0 + (-1)$$
$$= -1$$

كتاب الطالب صفحة 28

20 تبريرٌ: تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

x : عدد الأسابيع

$$\text{عدد الخلايا} = 7300 \times (3)^x$$

$$= 7300 \times (3)^5$$

$$= 7300 \times 243$$

$$= 1773900$$

كتاب الطالب صفحة 28

تحدٍّ: أكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21 $\dfrac{r^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{5}{2}}}{r^{2}+r^{3}}$

الحل:

$$=\frac{r^{\frac{3}{2}}(1+r^{\frac{2}{2}})}{r^{2}(1+r)}$$

$$=\frac{r^{\frac{3}{2}}(1+r)}{r^{2}(1+r)}$$

$$=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{r^{2}}$$

$$=r^{\frac{3}{2}-2}$$

$$=r^{\frac{-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\quad=\frac{1}{\sqrt{r}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

تحدٍّ: أكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

22 $\dfrac{y^{-\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{1}{2}}}$

الحل:

$$=\frac{y^{\frac{-1}{2}}(1-y^{-1})}{y^{\frac{1}{2}}(1-y^{-1})}$$

$$=\frac{y^{\frac{-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$=y^{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$=y^{-1}$$

$$=\frac{1}{y}$$

كتاب الطالب صفحة 28

تحدٍّ: أكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

23 $\dfrac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

نوحد المقامات

$$= \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1} \times \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1+x}{2\sqrt{x}} + \frac{2x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1+3x}{2\sqrt{x}}$$

كتاب الطالب صفحة 28

24 تبريرٌ: أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

$$5^{75} < 2^{175}$$

كتاب الطالب صفحة 30

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ **b)** $9^x = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

الحل:

a) $(2^2)^{x-5} = (2^5)^{2x+1} \rightarrow (2)^{2x-10} = (2)^{10x+5}$

$$\rightarrow 2x - 10 = 10x + 5$$
$$\rightarrow -10 - 5 = 8x$$
$$\rightarrow -15 = 8x$$
$$\rightarrow \frac{-15}{8} = x$$

b) $(3^2)^x = 3^1 \times 3^{-x} \rightarrow 3^{2x} = 3^{1-x}$

$$\rightarrow 2x = 1 - x$$
$$\rightarrow 3x = 1$$
$$\rightarrow x = \frac{1}{3}$$

c) $(5^4)^{2x+1} = 5^1 \times 5^{\frac{-1}{2}} \rightarrow (5)^{8x+4} = (5)^{\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow 8x + 4 = \frac{1}{2}$$
$$\rightarrow 16x + 8 = 1$$
$$\rightarrow 16x = -7$$
$$\rightarrow x = \frac{-7}{16}$$

كتاب الطالب صفحة 30

أتحقق من فهمي

تعليمٌ: يزدادُ عددُ المشتركينِ في موقعٍ تعليميٍّ على الإنترنتْ عامًا بعدَ عامٍ، وتُستعملُ المعادلةُ $y= 2(3^{2x-6})$ لحسابِ عددِ المشتركينَ y بالألوفِ بعدَ مرورِ x عامًا مِنْ إطلاقِ الموقعِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ المشتركينَ في الموقعِ **162** ألفَ مشتركٍ؟

الحل:

$$162 = 2(3^{2x-6})$$

$$81 = 3^{2x-6}$$

$$3^4 = 3^{2x-6}$$

$$2x - 6 = 4$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

كتاب الطالب صفحة 31

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاورِ:

$$\frac{4^x}{256^y} = 64$$

$$3^{2x} \times 9^y = 243$$

الحل:

$$4^x \times 256^{-y} = 64$$
$$4^x \times ((4)^4)^{-y} = 4^3$$
$$4^x \times 4^{-4y} = 4^3$$
$$4^{x-4y} = 4^3 \rightarrow x - 4y = 3$$
$$3^{2x} \times (3^2)^y = 3^5 \quad \rightarrow \quad 3^{2x} \times 3^{2y} = 3^5$$
$$3^{2x+2y} = 3^5 \rightarrow 2x + 2y = 5$$

$$\begin{array}{r} x - 4y = 3 \\ \times 2 \quad 2x + 2y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 4y = 3 \\ + \quad 4x + 4y = 10 \\ \hline 5x = 13 \end{array}$$

$$\rightarrow x = \frac{13}{5}$$

$$\frac{13}{5} - 4y = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{13}{5} - 3 = 4y \quad \rightarrow \frac{13}{5} - \frac{15}{3} = 4y$$

$$\frac{-2}{3} = 4y$$

$$-2 = 12y \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{6}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلتَينِ الأُسّيتَينِ الآتيتَينِ بيانيًّا:

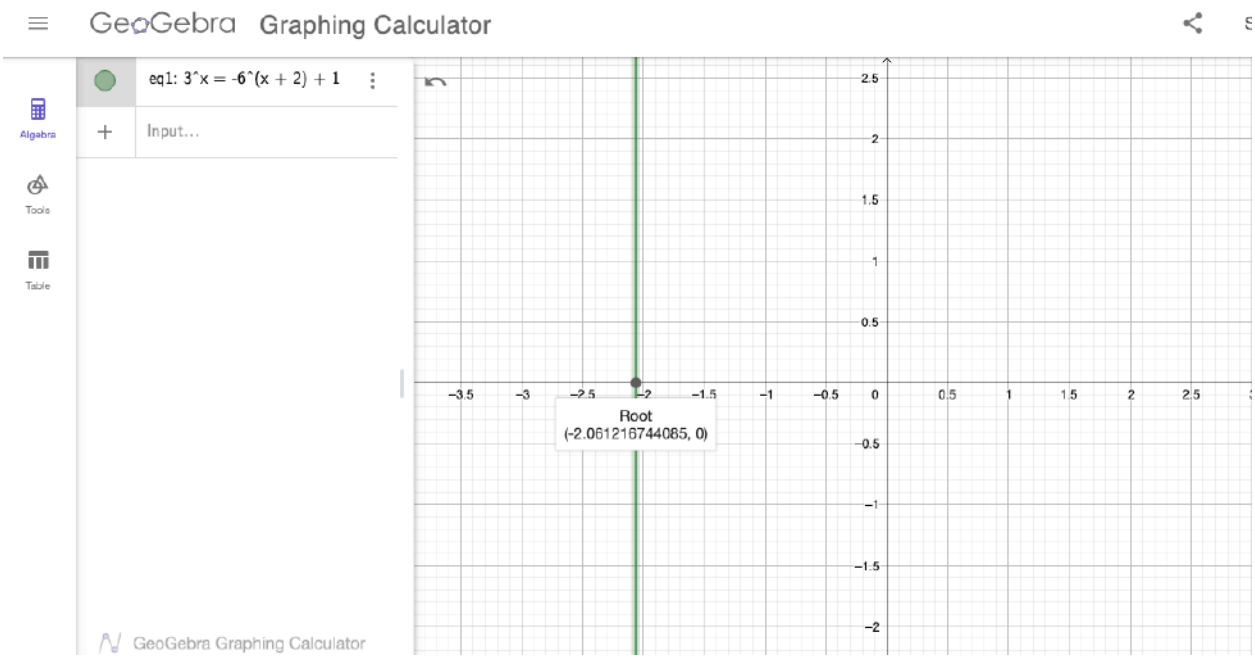
a) $3^x = -6^{x+2} + 1$

b) $5 = 4^{x+1}$

الحل:

a) $3^x = -(3 \times 2)^{x+2} + 1$

لا يمكن حل المعادلة بطريقة كتابة طرفي المعادلة بنفس الأساس
لذلك تحل بيانيا
نستخدم جيوجيبرا



$x \approx -2.06$

كتاب الطالب صفحة 32

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلتَينِ الأُسّيتَينِ الآتيتَينِ بيانيًّا:

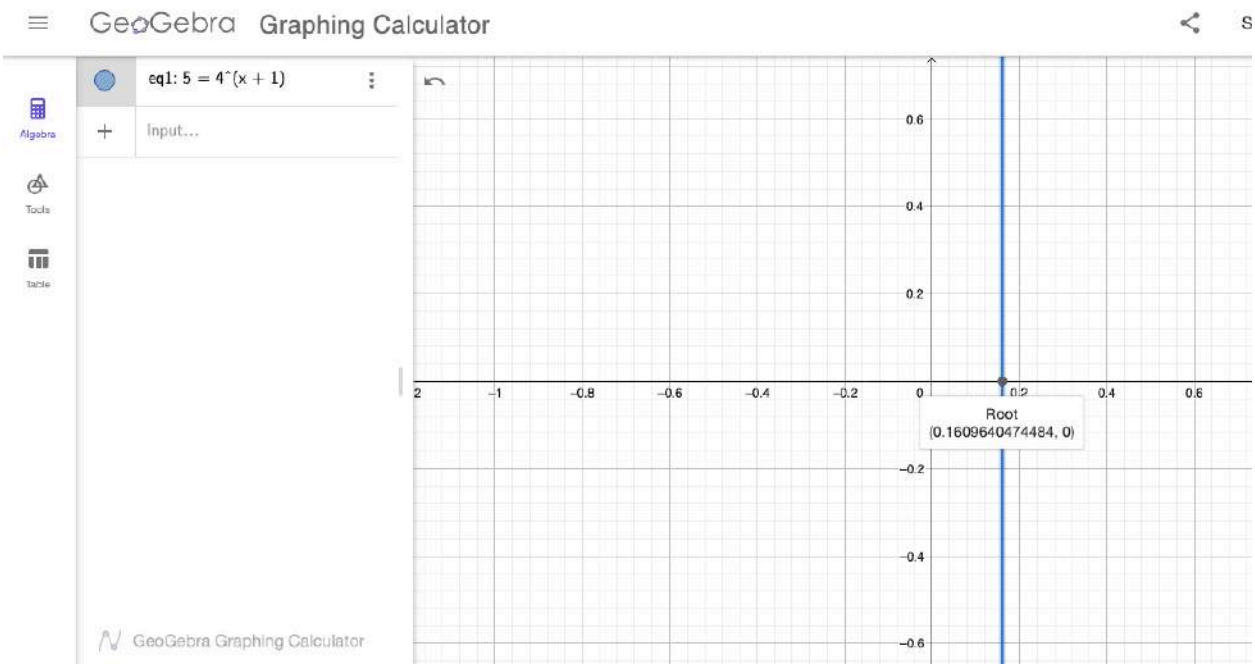
a) $3^x = -6^{x+2} + 1$

b) $5 = 4^{x+1}$

الحل:

b) $5 = 4^{x+1}$

لا يمكن حل المعادلة بطريقة كتابة طرفي المعادلة بنفس الأساس
لذلك تحل بيانيا
نستخدم جيوجيبرا



$x \approx 0.16$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $64 = (32)^{3-x}$

الحل:

$$2^6 = (2^5)^{3-x}$$

$$2^6 = 2^{15-5x}$$

$$6 = 15 - 5x$$

$$5x = 15 - 6$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

2 $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$

الحل:

$$(3^4)^{5x+1} = (3^3)^{4x-3}$$

$$3^{20x+4} = 3^{12x-9}$$

$$20x + 4 = 12x - 9$$

$$20x - 12x = -9 - 4$$

$$8x = -13$$

$$x = \frac{-13}{8}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

3 $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

الحل:

$$(2^7)^{x-5} = 2^1 \times 2^{\frac{-1}{2}}$$

$$2^{7x-35} = 2^{1+\frac{-1}{2}}$$

$$2^{7x-35} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$7x - 35 = \frac{1}{2}$$

$$14x - 70 = 1$$

$$14x = 71$$

$$x = \frac{71}{14}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

4 $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$

الحل:

$$(2^6)^{7x+1} = \frac{2^1}{(2^4)^{4x-3}}$$

$$2^{42x+7} = \frac{2^1}{2^{16x-12}}$$

$$2^{42x+7} = 2^1 \times 2^{16x-12}$$

$$2^{42x+7} = 2^{16x-11}$$

$$42x + 7 = 16x - 11$$

$$42x - 16x = -11 - 7$$

$$26x = -18$$

$$x = \frac{-18}{26} = \frac{-9}{13}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

5 $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$

الحل:

$$(\frac{11^1}{11^{\frac{1}{2}}})^{3x+1} = 11^{x+7}$$

$$(11^{1-\frac{1}{2}})^{3x+1} = 11^{x+7}$$

$$(11^{\frac{1}{2}})^{3x+1} = 11^{x+7}$$

$$11^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}} = 11^{x+7}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = x + 7$$

$$3x + 1 = 2x + 14$$
$$3x - 2x = 14 - 1$$
$$x = 13$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

6 $\left(\sqrt{7}\right)^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$

الحل:

$$(7^{\frac{1}{2}})^{4x+5} = (\frac{\sqrt{7\times 4}}{2})^{7x-2}$$

$$7^{2x+\frac{5}{2}} = (\frac{7^{\frac{1}{2}}\times 2}{2})^{7x-2}$$

$$7^{2x+\frac{5}{2}} = (7^{\frac{1}{2}})^{7x-2}$$

$$7^{2x+\frac{5}{2}} = 7^{\frac{7}{2}x-1}$$

$$2x+\frac{5}{2} = \frac{7}{2}x-1$$

$$4x+5 = 7x-2$$

$$5+2 = 7x-4x$$

$$7 = 3x$$

$$x = \frac{7}{3}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

7 $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$

الحل:

$$3^{2x^2} \times 3^{3x^2} = 3^5$$

$$3^{2x^2} \times 3^{3x^2} = 3^5$$

$$3^{2x^2+3x^2} = 3^5$$

$$3^{5x^2} = 3^5$$

$$5x^2 = 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

8 $5^{2x} \times 25^{x} = 125$

الحل:

$$5^{2x} \times 5^{2x} = 5^{3}$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

9 $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$

الحل:

$$x^2 + 6x = -5$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x + 5)(x + 1) = 0$$

$$x = -5, x = -1$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10 $5^y = 25^{x-3}$

$125^y = 25^{x-1}$

الحل:

$$5^y = (5^2)^{x-3}$$
$$5^y = 5^{2x-6}$$

$$(5^3)^y = (5^2)^{x-1}$$
$$5^{3y} = 5^{2x-2}$$

$$y = 2x - 6$$
$$3y = 2x - 2$$

$$\times 3 \qquad y = 2x - 6$$
$$3y = 2x - 2$$

$$3y = 6x - 18$$
$$3y = 2x - 2$$

$$6x - 18 = 2x - 2$$
$$6x - 2x = 18 - 2$$
$$4x = 16$$
$$x = 4$$

$$y = 2 \times 4 - 6 = 8 - 6 = 2$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

11 $3^y = 3^{2x+y}$

$27^y = 27^{x+3}$

الحل:

$3^y = 3^{2x+y}$

$(3^3)^y = (3^3)^{x+3}$

$3^{3y} = 3^{3x+9}$

$y = 2x + y \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3y = 3x + 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

من المعادلة الأولى

$y - y = 2x$

$0 = 2x$

$x = 0$

من المعادلة الثانية

$3y = 0 + 9$

$3y = 9$

$y = 3$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

12 $5^{2x} \times 25^{y} = 125$

$\frac{8^{x}}{2^{y}} = 16$

الحل:

$5^{2x} \times (5^2)^{y} = 5^3 \quad \rightarrow \quad 5^{2x} \times 5^{2y} = 5^3 \quad \rightarrow \quad 5^{2x+2y} = 5^3$

$\frac{(2^3)^{x}}{2^{y}} = 2^4 \quad \rightarrow \quad 2^{3x-y} = 2^4$

$2x + 2y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3x - y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$2x + 2y = 3$

$\times 2 \quad 3x - y = 4$

$2x + 2y = 3$

$6x - 2y = 8$

$2x + 2y = 3$

$+ \quad 6x - 2y = 8$

$8x = 11$

$x = \frac{11}{8}$

$3 \times \frac{11}{8} - y = 4$

$\frac{33}{8} - y = 4$

$\frac{33}{8} - 4 = y$

$\frac{33}{8} - \frac{16}{4} = y$

$y = \frac{17}{4}$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$

$\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$

الحل:

$$(3^2)^{2-x} = (3^4)^{6y} \rightarrow 3^{4-2x} = 3^{24y}$$

$$\frac{1^{-2x-3}}{(6^3)^{-2x-3}} = (6^2)^{3y} \rightarrow \frac{1}{6^{-6x-9}} = 6^{6y} \rightarrow 6^{6x+9} = 6^{6y}$$

$$4 - 2x = 24y$$
$$6x + 9 = 6y$$

$$-2x - 24y = -4$$
$$6x - 6y = 9$$

$$\div -1 \quad -2x - 24y = -4$$
$$\div 3 \quad 6x - 6y = 9$$

$$2x + 24y = 4 \dots\dots\dots (1)$$
$$2x - 2y = 3 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{array}{r} 2x + 24y = 4 \\ -\quad 2x - 2y = 3 \\ \hline 26y = 1 \end{array}$$

$$y = \frac{1}{26}$$

$$2x - 2y = 3 \rightarrow 2x - 2 \times \frac{1}{26} = 3 \rightarrow 2x - \frac{1}{13} = 3 \rightarrow 2x = 3 + \frac{1}{13}$$

$$2x = \frac{40}{13} \rightarrow x = \frac{20}{13}$$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$

$8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$

الحل:

$$\frac{(2^4)^{-x}}{(2^6)^{-3x}} = (2^4)^{-3y-3} \rightarrow \frac{2^{-4x}}{2^{-18x}} = 2^{-12y-12} \rightarrow 2^{-4x--18x} = 2^{-12y-12}$$

$$2^{14x} = 2^{-12y-12}$$

$$(2^3)^{x^2} = (2^{-y-1})^2 \rightarrow 2^{3x^2} = 2^{-2y-2}$$

$$14x = -12y - 12$$

$$3x^2 = -2y - 2$$

سنحذف y

$$\begin{matrix} 14x = -12y - 12 \\ \times 6 \quad 3x^2 = -2y - 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 14x = -12y - 12 \\ 18x^2 = -12y - 12 \end{matrix}$$

نطرح المعادلتين

$$\begin{matrix} 14x = -12y - 12 \\ - \quad 18x^2 = -12y - 12 \\ \hline 14x - 18x^2 = 0 \end{matrix}$$

$$2x(7 - 9x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, x = \frac{7}{9}$$

$$14x = -12y - 12$$

$$x = 0 \quad 0 = -12y - 12 \rightarrow 12 = -12y \rightarrow y = -1$$

الحل الأول $(0, -1)$

$$x = \frac{7}{9} \rightarrow 14 \times \frac{7}{9} = -12y - 12$$

$$14 \times \frac{7}{9} + 12 = -12y \rightarrow \frac{98}{9} + \frac{108}{9} = -12y$$

$$\frac{206}{9} = -12y \rightarrow \frac{206}{9} \div -12 = y \rightarrow \frac{206}{9} \times \frac{-1}{12} = y \rightarrow y = \frac{-206}{108} = \frac{-103}{54}$$

الحل الثاني $\left(\frac{7}{9}, \frac{-103}{54}\right)$

كتاب الطالب صفحة 32

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$

$2^{m^2} \times 2^n = 64$

الحل:

$\frac{1}{3^3} \times (3^2)^{2-n} = 3^{m^2-2} \rightarrow 3^{-3} \times 3^{4-2n} = 3^{m^2-2} \rightarrow 3^{1-2n} = 3^{m^2-2}$

$2^{m^2} \times 2^n = 2^6 \rightarrow 2^{m^2+n} = 2^6$

$m^2 - 2 = 1 - 2n$

$m^2 + n = 6$

$m^2 = 3 - 2n$

$- \quad m^2 = 6 - n$

$0 = -3 - n$

$-3 = n$

$m^2 = 3 - 2 \times -3$

$m^2 = 3 + 6$

$m^2 = 9$

$m = \pm 3$

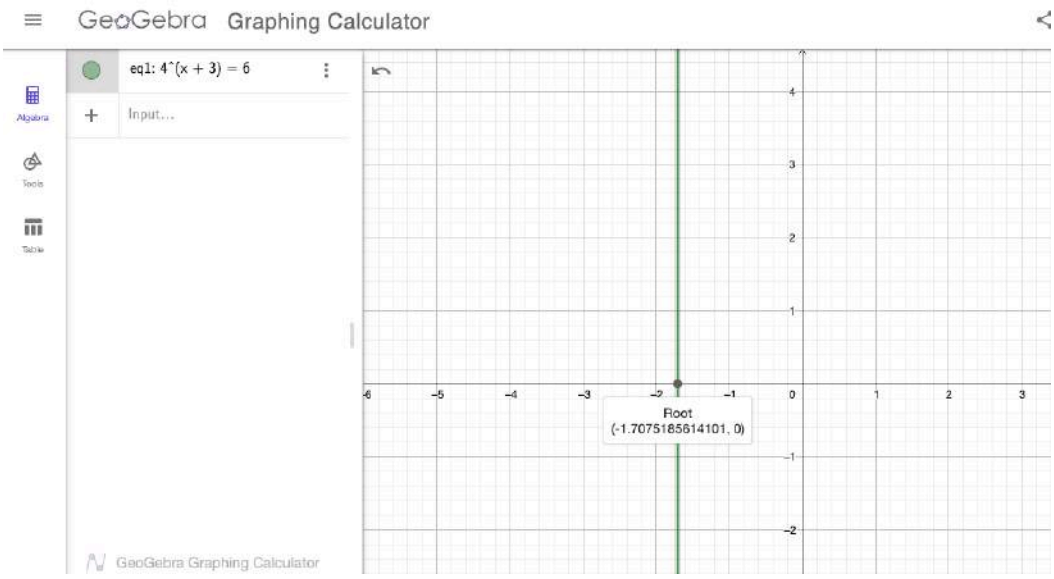
الحل: $(n, m) = (3,3), (3, -3)$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

16 $4^{x+3} = 6$

الحل:



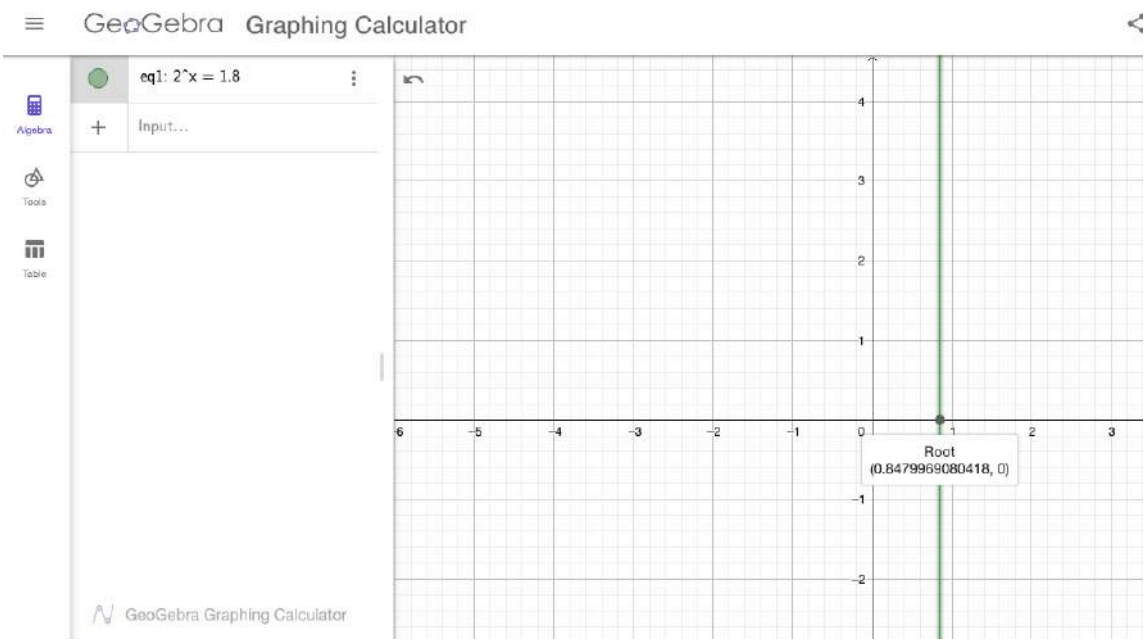
$x \approx -1.71$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

17 $2^x = 1.8$

الحل:



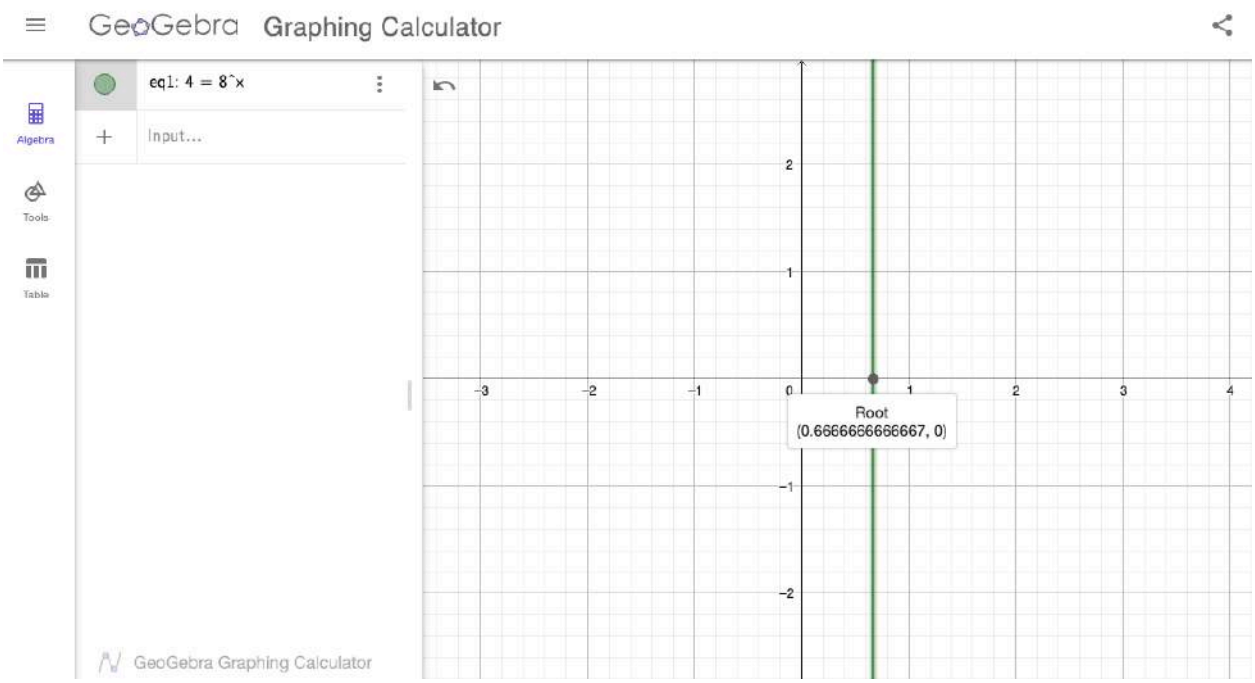
$x \approx 0.85$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

18 $4 = 8^x$

الحل:



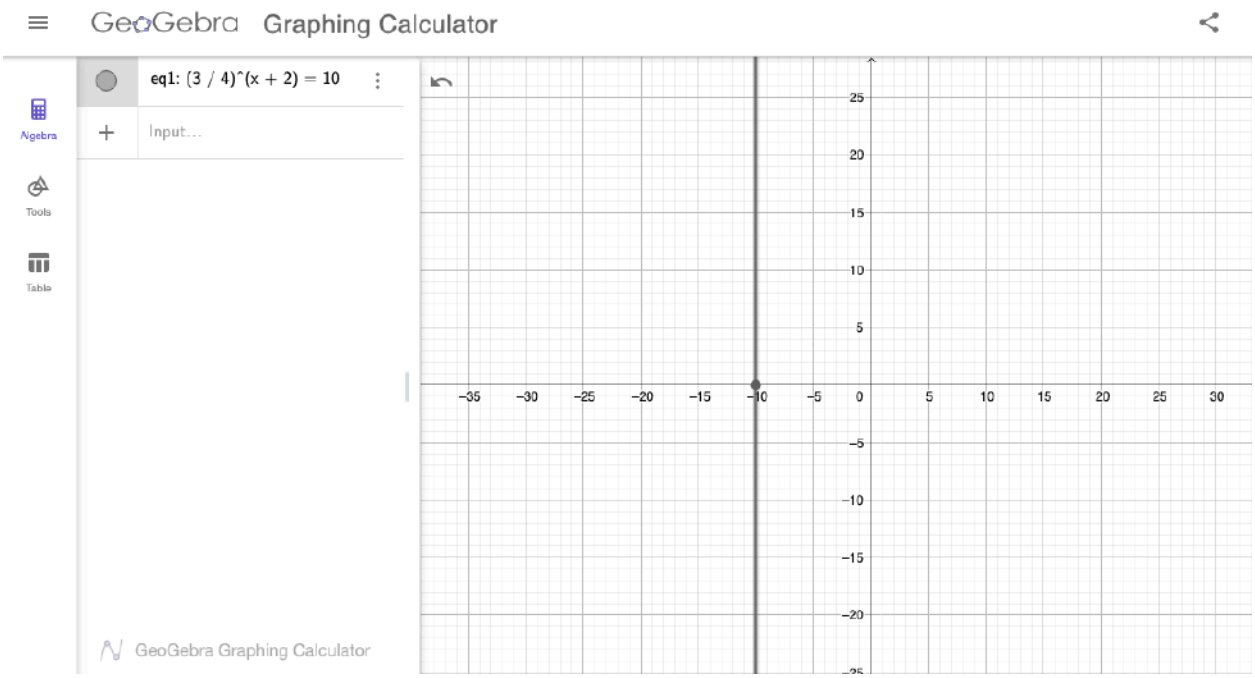
$x \approx 0.\overline{6}$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

19 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 10$

الحل:



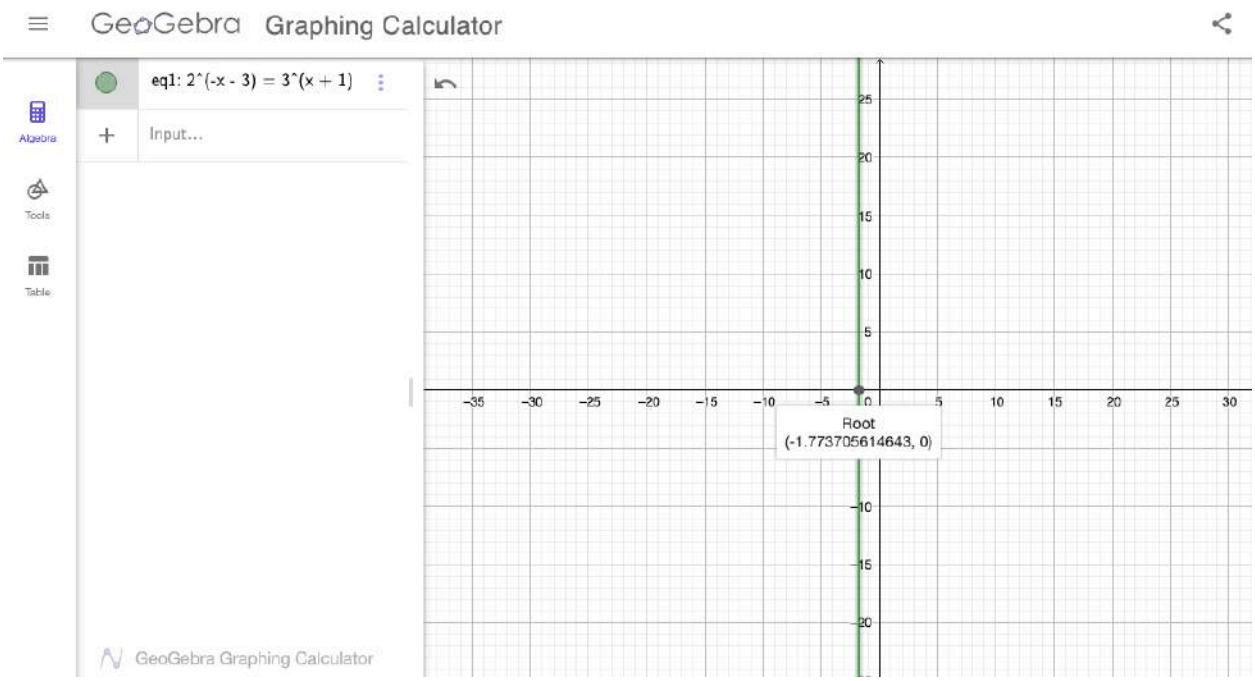
$x \approx -10$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

20 $2^{-x-3} = 3^{x+1}$

الحل:



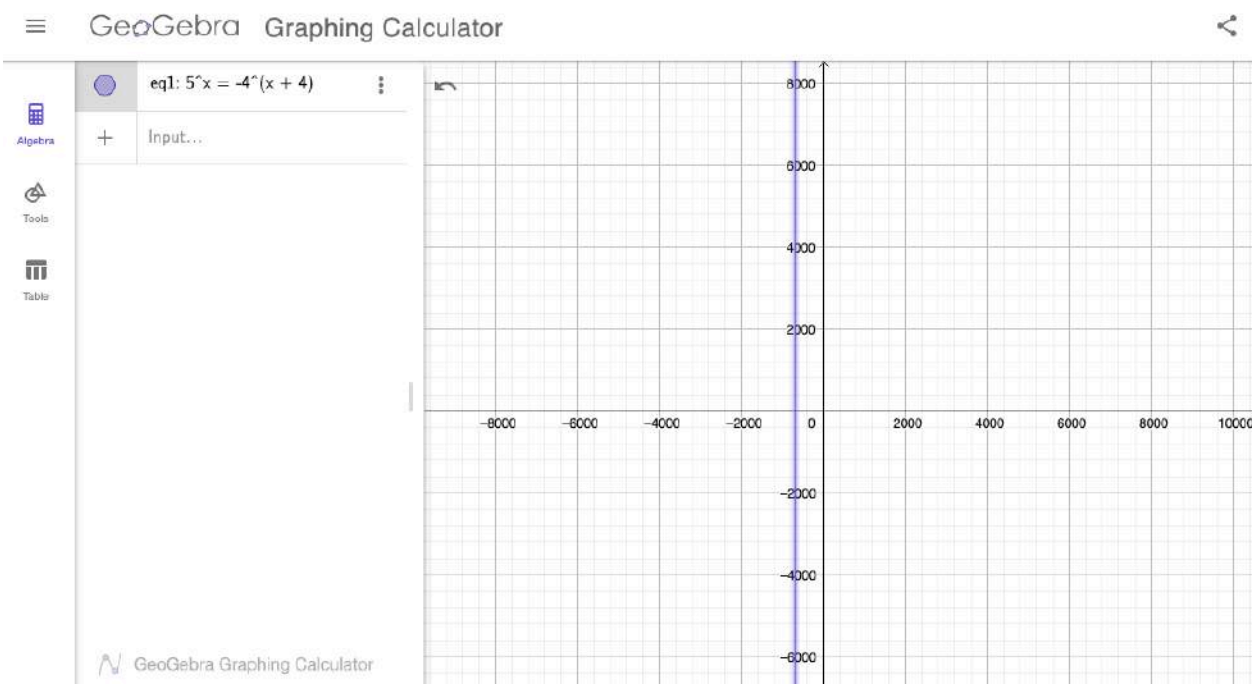
$x \approx -1.77$

كتاب الطالب صفحة 32

أحلُّ كلًّا مِنَ المعادلاتِ الأُسّيّةِ الآتيةِ بيانيًّا:

21 $5^x = -4^{x+4}$

الحل:



$x \approx -650$
$x \approx -700$
$x \approx -750$

كتاب الطالب صفحة 32

22 **تصويرٌ**: تُستعمَلُ المعادلةُ $y = 2^{x+2}$ لحسابِ مقاسِ ورقةٍ y بعدَ تكبيرِها بنسبةِ 100% عددَ x مِنَ المرّاتِ، مقارنةً بمقاسِها الأصليِّ، باستعمالِ آلةٍ ناسخةٍ. كَمْ مرّةً يجبُ تكبيرُ صورةٍ ليصبحَ مقاسُها 32 ضعفَ مقاسِها الأصليِّ؟

الحل:

$$2^{32} = 2^{x+2}$$

$$x + 2 = 32$$

$$x = 30$$

كتاب الطالب صفحة 32

23 **بكتيريا**: يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟

الحل:

$$2187 = 3^{t-2}$$

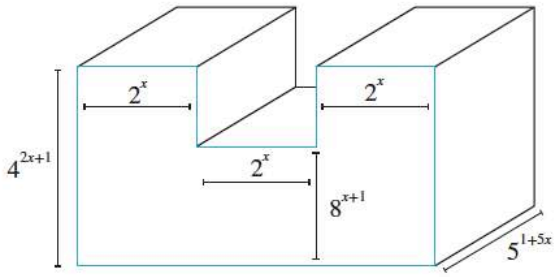
$$3^7 = 3^{t-2}$$

$$t - 2 = 7$$

$$t = 9$$

كتاب الطالب صفحة 32

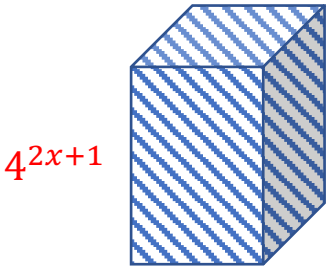
24 هندسةٌ: أكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ المجاور.



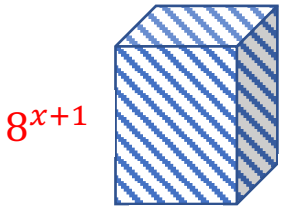
الحل:

$v = v_1 + v_2 + v_3$

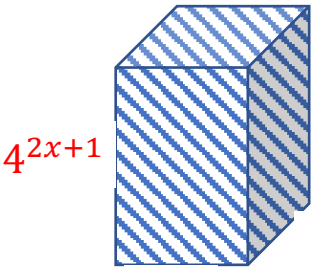
الارتفاع × العرض × الطول $= v_1$



$$v_1 = 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1}$$



$$v_2 = 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1}$$



$$v_1 = 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1}$$

$$v = 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1} + 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1} + 5^{1+5x} \times 2^x \times 4^{2x+1}$$

كتاب الطالب صفحة 32

25 تبريرٌ: هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2+2^x=1$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

$$2^x = 1 - 2$$

$$2^x = -1$$

لا يمكن حل المعادلة لأن مدى الاقتران الأسي 2^x هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالتالي لا يمكن أن يكون $2^x = -1$

كتاب الطالب صفحة 32

26 تبريرٌ: أَحُلُّ المعادلةَ: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

الحل:

$$x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$\times x^{\frac{1}{2}} \qquad x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$x^1 + 3x^0 - 4x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$x^1 - 4x^{\frac{1}{2}} + 3 = 0$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 3\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0$$

$$\sqrt{x} = 3, \quad \sqrt{x} = 1$$

$$x = 9, \quad x = 1$$

كتاب الطالب صفحة 32

27 تحدٍّ: ما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y في المعادلةِ الآتيةِ: $\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$

الحل:

$$36^{x-y+1} \times 54^{-x-y+1} = 48^{x+y}$$

$$(2 \times 2 \times 3 \times 3)^{x-y+1} \times (2 \times 3 \times 3 \times 3)^{-x-y+1} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3)^{x+y}$$

$$(2^2 \times 3^2)^{x-y+1} \times (2 \times 3^3)^{-x-y+1} = (2^4 \times 3)^{x+y}$$

$$(2)^{2x-2y+2} \times (3)^{2x-2y+2} \times (2)^{-x-y+1} \times (3^3)^{-x-y+1} = (2^4)^{x+y} \times (3)^{x+y}$$

$$(2)^{2x-2y+2} \times (3)^{2x-2y+2} \times (2)^{-x-y+1} \times (3)^{-3x-3y+3} = 2^{4x+4y} \times (3)^{x+y}$$

$$(2)^{2x-2y+2-x-y+1} \times (3)^{2x-2y+2-3x-3y+3} = 2^{4x+4y} \times (3)^{x+y}$$

$$(2)^{x-3y+3} \times (3)^{-x-5y+5} = 2^{4x+4y} \times (3)^{x+y}$$

$$x - 3y + 3 = 4x + 4y$$
$$-x - 5y + 5 = x + y$$

$$\begin{aligned} -3x - 7y &= -3 \\ -2x - 6y &= -5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x + 7y &= 3 \\ 6y + 2x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times 2 \quad & 7y + 3x = 3 \\ \times 3 \quad & 6y + 2x = 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & 14y + 6x = 6 \\ - \quad & 18y + 6x = 15 \\ \hline & -4y = -11 \end{aligned}$$

$$y = \frac{11}{4}$$

$$3x + \frac{77}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3x = 3 - \frac{77}{4} \quad \Rightarrow \quad 3x = \frac{12}{4} - \frac{77}{4}$$

$$3x = \frac{-65}{4}$$

$$x = \frac{-65}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{-65}{12}$$

كتاب الطالب صفحة 32

28 تحدٍّ: أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

الحل:

$$2^x + 3^y = 1 + 9$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 2 + 27$$

$$2^x + 3^y = 2^0 + 3^2$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 2^1 + 3^3$$

$$x = 0, \qquad y = 2$$

كتاب التمارين صفحة 11

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةِ:

14 $125^{x} \times 25^{-y} = 625$

$4^{x} \times 2^{y} = 8$

الحل:

$5^{3x} \times 5^{-2y} = 5^{4}$

$2^{2x} \times 2^{y} = 2^{3}$

$3x - 2y = 4$

$2x + y = 3$

$3x - 2y = 4$

$\times 2 \quad 2x + y = 3$

$3x - 2y = 4$

$4x + 2y = 3$

$3x - 2y = 4$

$+ \quad 4x + 2y = 3$

$7x = 7$

$x = 1$

$2 \times 1 + y = 3$

$2 + y = 3$

$y = 1$

كتاب الطالب صفحة 34

1 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1, 3)$ b) $(0, 2)$

c) $(2, 0)$ d) $(-2, -2)$

الحل:

الجواب c لأن

$$(2)^2 + (0)^2 = 4$$
$$3 \times (2) + (0) = 6$$

كتاب الطالب صفحة 34

2 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

a) (0, 3) b) (1, 2)

c) (2, 0) d) (3, 0)

الحل:

الجواب d لأن

$$(0) = (3)^2 - 5 \times (3) + 6$$

$$(0) = -(3)^2 + 2 \times (3) + 3$$

كتاب الطالب صفحة 34

3 أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ يُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ:

$$3^{5x} \times 9^{y} = 27$$

$$5^{3x} \times 5^{y} = 25$$

a) $(-1, -1)$ b) $(1, 1)$

c) $(-1, 1)$ d) $(1, -1)$

الجواب d لأن

$$3^{5\times(1)} \times 9^{(-1)} = 27$$
$$5^{3\times(1)} \times 5^{(-1)} = 25$$

حيث

$$3^5 \times \frac{1}{3^2} = 27$$
$$5^3 \times \frac{1}{5} = 25$$

كتاب الطالب صفحة 34

4 يمثّلُ $x = -1$ حلًّا للمعادلةِ الأُسّيّةِ:

a) $5^{2x+1} = 25$

b) $3^{1+x} = 81$

c) $7^{3-2x} = 49$

d) $4^{2-x} = 64$

الجواب d لأن

$$4^{2-(-1)} = 64$$

حيث

$$4^3 = 64$$

كتاب الطالب صفحة 34

5 المقدارُ الجبريُّ الــذي يجبُ وضعُه في المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\frac{8x^2y^3}{\square}=\left(\frac{2y}{x}\right)^2$ هوَ:

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$

c) $2xy$ d) x^2y^2

الجواب a لأن

$$\frac{8x^2y^3}{2x^4y}=\left(\frac{2y}{x}\right)^2$$

حيث

$$\frac{8x^2y^3}{2x^4y}=\frac{4y^2}{x^2}$$

كتاب الطالب صفحة 34

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

6 $y = 4x$
$y = 5 - x^2$

الحل:

$$4x = 5 - x^2$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5, \quad x = 1$$

$$x = -5 \quad \rightarrow \quad y = 4 \times -5 = -20$$
$$x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 4 \times 1 = 4$$

حل النظام

$$(-5, -20), (1,4)$$

كتاب الطالب صفحة 34

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

7 $y - x = 15$
$x^2 + y^2 = 64$

الحل:

$$y = x + 15$$

$$x^2 + (x + 15)^2 = 64$$
$$x^2 + x^2 + 30x + 225 = 64$$
$$2x^2 + 30x + 225 - 64 = 0$$
$$2x^2 + 30x + 161 = 0$$

المميز

$$900 - 4 \times 2 \times 161$$
$$900 - 1288$$
$$-388$$

لا يوجد حل لأن المميز سالب

كتاب الطالب صفحة 34

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

8 $y = x^2 - 4x + 5$

$y = -x^2 + 5$

الحل:

$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 5$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x-2) = 0$$
$$x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$x = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 5 = 1$$

حل النظام

$$(0,5), (2,1)$$

كتاب الطالب صفحة 34

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

9 $y = -x^2 - x + 12$
$y = x^2 + 7x + 12$

الحل:

$$x^2 + 7x + 12 = -x^2 - x + 12$$

$$2x^2 + 8x = 0$$
$$2x(x + 4) = 0$$
$$x = 0, \quad x = -4$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 12 = 12$$
$$x = -4 \rightarrow y = 16 - 28 + 12 = 0$$

حل النظام

$$(0,12), (-4,0)$$

كتاب الطالب صفحة 34

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي،

$$3x - 2y = 7$$

$$x^2 - y^2 = c$$

فأَجِدُ:

10 حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$

الحل:

$$2y = 3x - 7$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$x^2 - \left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right)^2 = 8$$
$$x^2 - \left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{42}{4}x + \frac{49}{4}\right) = 8$$
$$\times 4 \qquad x^2 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{42}{4}x - \frac{49}{4} = 8$$
$$4x^2 - 9x^2 + 42x - 49 = 32$$
$$-5x^2 + 42x - 49 - 32 = 0$$
$$-5x^2 + 42x - 81 = 0$$

المميز

$$42^2 - 4 \times -5 \times -81$$
$$1764 - 1620$$
$$144$$

$$x_1 = \frac{-42 + \sqrt{144}}{2 \times -5} = \frac{-42 + 12}{-10} = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-42 - \sqrt{144}}{2 \times -5} = \frac{-42 - 12}{-10} = 5.4 \rightarrow y = \frac{3}{2} \times 5.4 - \frac{7}{2} = \frac{16.2}{2} - \frac{7}{2} = \frac{9.2}{2} = 4.6$$

الحل:

$$(3,1)(5.4,4.6)$$

كتاب الطالب صفحة 34

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي،

$$3x - 2y = 7$$
$$x^2 - y^2 = c$$

فأَجِدُ:

11 جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ.

الحل:

$$2y = 3x - 7$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$x^2 - \left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right)^2 = c$$
$$x^2 - \left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{42}{4}x + \frac{49}{4}\right) = c$$
$$\times 4 \qquad x^2 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{42}{4}x - \frac{49}{4} = c$$
$$4x^2 - 9x^2 + 42x - 49 = 4c$$
$$-5x^2 + 42x - 49 - 4c = 0$$
$$-5x^2 + 42x - (49 + 4c) = 0$$

يجب أن يكون المميز سالب

$$42^2 - 4 \times -5 \times -(49 + c) < 0$$
$$1764 - 20(49 + c) < 0$$
$$1764 < 20(49 + c)$$
$$\frac{1764}{20} < \frac{20(49 + c)}{20}$$
$$88.2 < (49 + c)$$
$$88.2 - 49 < c$$
$$39.2 < c$$

$$c \in (39.2, \infty)$$

كتاب الطالب صفحة 34

12 أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3-7x<6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y=3-7x$$
$$y=6x^2$$

الحل:

$$6x^2=3-7x$$

$$6x^2+7x-3=0$$

المميز

$$7^2-4\times 6\times -3$$
$$49+72$$
$$121$$

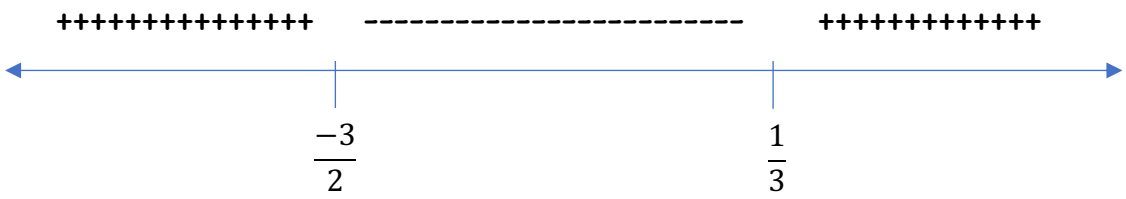
$$x_1=\frac{-7+\sqrt{121}}{2\times 6}=\frac{-7+11}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\rightarrow y=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-7-\sqrt{121}}{2\times 6}=\frac{-7-11}{12}=\frac{-18}{12}=\frac{-3}{2}\rightarrow y=\frac{3}{2}\times\frac{-3}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-9}{4}-\frac{7}{2}=\frac{-9}{4}-\frac{14}{4}=\frac{-23}{4}$$

حل النظام $\left(\frac{1}{3},-3\right),\left(\frac{-3}{2},\frac{-23}{4}\right)$

لكن حل المتباينة

$$6x^2+7x-3>0$$



هو $\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

ملاحظة ما بين الصفرين عكس إشارة x^2 ونحن نبحث عن الموجب

كتاب الطالب صفحة 35

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

13 $\frac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$

الحل:

$$\frac{2}{2^{3+\,-4}} = \frac{2^1}{2^{-1}} = 2^{1-\,-1} = 2^2 = 4$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

14 $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

الحل:

$$\frac{64^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{64^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

15 $\dfrac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$

الحل:

$$= \frac{16^{\frac{-3}{2}} \times p^{4\frac{-3}{2}} \times q^{-2\frac{-3}{2}}}{64^{\frac{-1}{2}} \times p^{2\frac{-1}{2}} \times q^{-1\frac{-1}{2}}}$$

$$= \frac{16^{\frac{-3}{2}} \times p^{-6} \times q^{3}}{64^{\frac{-1}{2}} \times p^{-1} \times q^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{64^{\frac{1}{2}} \times p^{-6--1} \times q^{3-\frac{1}{2}}}{16^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{64} \times p^{-5} \times q^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{16^3}}$$

$$= \frac{8 \times q^{\frac{5}{2}}}{64 \times p^5}$$

$$= \frac{q^{\frac{5}{2}}}{8 \times p^5}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

16 $\dfrac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^{4}b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$

الحل:

$$= \frac{27^{\frac{-1}{3}} \times a^{\frac{3}{2}\frac{-1}{3}} \times b^{-6\frac{-1}{3}}}{729^{\frac{-1}{2}} \times a^{4\frac{-1}{2}} \times b^{-2\frac{-1}{2}}}$$

$$= \frac{729^{\frac{1}{2}} \quad a^{\frac{-1}{2}} \quad b^{2}}{27^{\frac{1}{3}} \quad a^{-2} \quad b^{1}}$$

$$= \frac{\sqrt{729} \quad a^{\frac{-1}{2}--2} \quad b^{1}}{\sqrt[3]{27}}$$

$$= \frac{27 \quad a^{\frac{3}{2}} \quad b^{1}}{3}$$

$$= 9 \quad a^{\frac{3}{2}} \quad b$$

كتاب الطالب صفحة 35

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $3^a x^b = \dfrac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

الحل:

$$3^a x^b = 3^3 x^{\frac{7}{3}-\frac{1}{2}}$$

$$3^a x^b = 3^3 x^{\frac{11}{6}}$$

$$a = 3 \quad , \quad b = \frac{11}{6}$$

كتاب الطالب صفحة 35

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{x-x^{2}}=x^{a}$

الحل:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}(1-x)}{x(1-x)}=x^{a}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}=x^{a}$$

$$x^{\frac{1}{2}-1}=x^{a}$$

$$x^{\frac{-1}{2}}=x^{a}$$

$$a=\frac{-1}{2}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

19 $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$

الحل:

$$\frac{t}{2} = 2t - 1$$

$$1 = 2t - \frac{1}{2}t$$

$$1 = \frac{3}{2}t$$
$$2 = 3t$$

$$t = \frac{2}{3}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

20 $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$

الحل:

$$3^{3\frac{-1}{c}} = (\frac{1}{3^2})^{c-\frac{5}{2}}$$

$$3^{\frac{-3}{c}} = (3^{-2})^{c-\frac{5}{2}}$$

$$3^{\frac{-3}{c}} = 3^{-2c+5}$$

$$\frac{-3}{c} = -2c + 5$$

$$-3 = -2c^2 + 5c$$
$$2c^2 - 5c - 3 = 0$$

المميز

$$= 25 - 4 \times 2 \times -3$$
$$= 25 + 24$$
$$= 49$$

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$c_2 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

21 $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$

الحل:

$$2 \times 216 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2 \times 2 \times 108 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 54 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2^4 \times 3^3 = 2^{2x} \times 3^{x+1}$$

$$2x = 4 \rightarrow x = 2$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

22 $500 = \dfrac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$

الحل:

$$2 \times 250 = 2^{\frac{1}{2}-x} \times 5^{-2x}$$

$$2 \times 2 \times 125 = 2^{\frac{1}{2}-x} \times 5^{-2x}$$

$$2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2^{\frac{1}{2}-x} \times 5^{-2x}$$

$$2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^{\frac{1}{2}-x} \times 5^{-2x}$$

$$2^2 \times 5^3 = 2^{\frac{1}{2}-x} \times 5^{-2x}$$

$$\frac{1}{2} - x = 2$$

$$\frac{1}{2} - 2 = x$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

23 $36^{x+4} = 6^{y}$

$36^{y} = 36^{x+6}$

الحل:

$$(6^2)^{x+4} = 6^y$$
$$6^{2x+8} = 6^y$$

$$(6^2)^y = (6^2)^{x+6}$$
$$6^{2y} = 6^{2x+12}$$

$$2x + 8 = y$$
$$2y = 2x + 12$$

$$2x - y = -8$$
$$2x - 2y = 12$$

$$2x - y = -8$$
$$x - y = 6$$

$$\begin{array}{rr} & 2x - y = -8 \\ - & x - y = 6 \\ \hline & x = -14 \end{array}$$

$$x - y = 6$$
$$-14 - y = 6 \rightarrow y = -14 - 6 = -20$$

كتاب الطالب صفحة 35

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

24 $5^{2x+4} = 5^{y-3}$

$7^{y-x} = 49$

الحل:

$$5^{2x+4} = 5^{y-3}$$

$$7^{y-x} = 7^2$$

$$2x + 4 = y - 3$$
$$y - x = 2$$

$$2x - y = -3 - 4$$
$$y - x = 2$$

$$\begin{array}{rl} & 2x - y = -7 \\ + & -x + y = 2 \\ \hline & x = -5 \end{array}$$

$$-x + y = 2$$
$$-(-5) + y = 2 \rightarrow y = -5 + 2 = -3$$

كتاب الطالب صفحة 35

25 عددانِ مجموعُ مربعَيْهِما 85 ومربعُ مجموعِهِما 121، ما هُما؟

الحل:

$$x^2+y^2 = 85$$
$$(x+y)^2 = 121$$
$$(x+y)^2 = 121$$
$$\rightarrow x^2+2xy+y^2 = 121$$

$$\rightarrow x^2+y^2+2xy = 121$$
$$\rightarrow 85+2xy = 121$$
$$\rightarrow 2xy = 36$$
$$\rightarrow xy = 18$$
$$\rightarrow y = \frac{18}{x}$$

$$x^2+y^2 = 85$$
$$\rightarrow x^2+(\frac{18}{x})^2 = 85$$
$$\rightarrow x^2+\frac{324}{x^2} = 85$$
$$\times x^2 \qquad x^2+\frac{324}{x^2} = 85$$
$$\rightarrow \quad x^4+324 = 85x^2$$
$$\rightarrow \quad x^4-85x^2+324 = 0$$
$$\rightarrow \quad (x^2-81)(x^2-4) = 0$$
$$(x^2-81) = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9$$
$$(x^2-4) = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$
$$y = \frac{18}{x}$$
$$x = 9 \rightarrow y = 2$$
$$x = -9 \rightarrow y = -2$$
$$x = 2 \rightarrow y = 9$$
$$x = -2 \rightarrow y = -9$$

الحلول $(9,2), (-9,-2), (2,9), (-2,-9)$

كتاب الطالب صفحة 35

26 يمثلُ كلٌّ مِنْ X, Y عددَينِ مفقودَينِ في الرقْمِ السّـرّيِّ $XY1290$. إذا كانَ مجمـوعُ العددَيـنِ المفقودَينِ 12 ومجموعُ مربعَيهِما يساوي 90، فأجدُ قيمةَ كلٍّ منهُما.

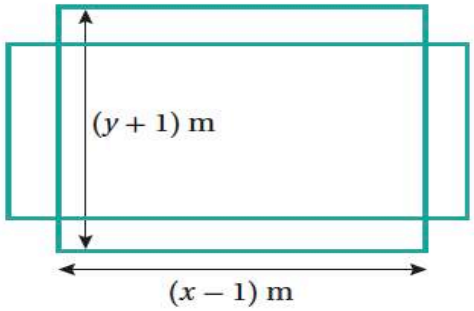
الحل:

$$x + y = 12 \rightarrow y = (12 - x)$$
$$x^2 + y^2 = 90$$
$$x^2 + (12 - x)^2 = 90$$
$$x^2 + 144 - 24x + x^2 = 90$$
$$2x^2 - 24x + 144 - 90 = 0$$
$$2x^2 - 24x + 54 = 0$$
$$2(x^2 - 12x + 27) = 0$$
$$2(x - 3)(x - 9) = 0$$
$$x = 3, \ \ x = 9$$

$$x = 3 \rightarrow \ y = 9$$
$$x = 9 \ \rightarrow y = 3$$

كتاب الطالب صفحة 35

27 تنسٌ: ملعبُ تنسٍ طولُهُ x مترًا وعرضُهُ y مترًا ومِساحتُهُ $224\ \text{m}^2$ ، إذا تمّت زيــادةُ عرضه بمقدارِ $1\ \text{m}$ وتقليل طوله بمقدارِ $1\ \text{m}$ فازدادَتْ مساحتُهُ بمقدارِ $1\ \text{m}^2$ كما في الشكل الآتي، فأجدُ أبعادَ ملعبِ التنسِ.



الحل:

$$xy = 224 \rightarrow y = \frac{224}{x}$$

$$(x-1)(y+1) = 225$$

بالتالي $$(x-1)\left(\frac{224}{x}+1\right) = 225$$

$$224 + x - \frac{224}{x} - 1 = 225$$

$$224 + x - \frac{224}{x} - 1 = 225$$

$$224 + x - \frac{224}{x} - 226 = 0$$

$\times x$ $$224 + x - \frac{224}{x} - 226 = 0$$

$$224x + x^2 - 224 - 226x = 0$$

$$x^2 - 2x - 224 = 0$$

$$(x-16)(x+14) = 0$$

$x = 16$ $x = -14$ مرفوضة

$$y = \frac{224}{16} = 14$$

كتاب الطالب صفحة 35

28 أَجِدُ جميعَ قيمِ p التـــي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطِّيةِ $y=2x+p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ

$y=x^2+3x-1$.

الحل:

$$2x+p=x^2+3x-1$$

$$x^2+3x-2x-1-p=0$$

$$x^2+x-(1+p)=0$$

بما أنه لا يوجد نقط تقاطع يجب أن يكون المميز هنا سالب

$$1-4\times 1\times -(1+p)<0$$

$$1+4(1+p)<0$$

$$1+4+4p<0$$

$$5+4p<0$$
$$4p<-5$$
$$p<\frac{-5}{4}$$
$$p=(-\infty,\frac{-5}{4})$$

كتاب الطالب صفحة 35

29 أجدُ الأعدادَ الصحيحةَ الموجبةَ a,b,c إذا كانَ

$$(ab^c)^3 = 27b^{21}$$

الحل:

$$(ab^c)^3 = 3^3 b^{21}$$

$$(ab^c)^3 = 3^3 b^{21}$$

$$(ab^c)^3 = 3^3 b^{7^3}$$

$$(ab^c)^3 = (3b^7)^3$$

$$ab^c = 3b^7$$

$$a = 3$$
$$c = 7$$

b هو أي عدد صحيح موجب

كتاب الطالب صفحة 35

30 أجـدُ العددَيـنِ اللذَينِ ناتـجُ جمعِ القوة الخامسـة لأحدِهما مَعَ مربعِ العددِ الثاني يساوي 268

الحل:

$$x^5 + y^2 = 268$$

$$x^5 + y^2 = 243 + 25$$

$$x^5 + y^2 = 3^5 + 5^2$$

$$x = 3 \ , \ \ y = 5$$

كتاب الطالب صفحة 35

31 أُثبتُ أنَّــهُ يمكنُ كتابةُ العددِ 81 علــى صورةِ مجموعِ مربعِ كاملٍ وإحدى قوى العددِ 5

الحل:

$$81 = 32 + 49$$

$$81 = 2^5 + 7^2$$

ملخصات في

الرياضيات

للصف العاشر

الوحدة الثانية كتاب الطالب

عصام الشيخ
ماجستير رياضيات

كتاب الطالب صفحة 39

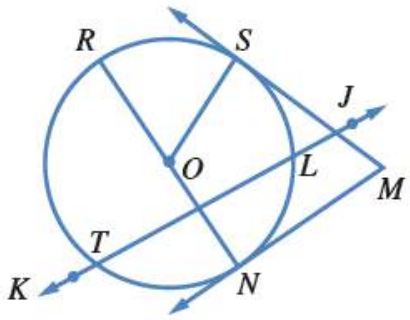
أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:

a) قاطعًا للدائرةِ.

b) وترًا للدائرةِ.

c) مماسًّا للدائرةِ.



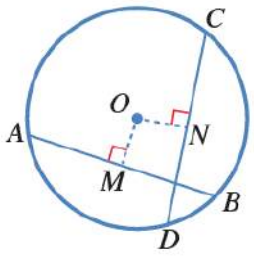
الحل:

a) $\overleftrightarrow{KJ}$

b) $\overline{TL}$ or $\overline{RN}$

c) $\overrightarrow{MN}$ or $\overrightarrow{MS}$

كتاب الطالب صفحة 40



أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12$ cm، فما طولُ $\overline{AB}$؟

الحل:

من المعطيات $CN = 12\ cm$

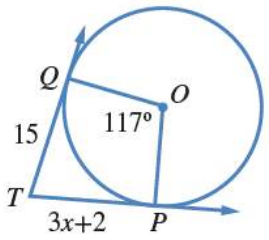
$\overline{CD} = 24\ cm$

لأن CN هو نصف $\overline{CD}$

$\overline{AB} = 24\ cm$

لأن $\overline{CD} = \overline{AB}$ وهما مماسان مرسومان من نفس النقطة

كتاب الطالب صفحة 41



أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{TP}$ وَ $\overrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

a) أجِدُ قيمةَ x.

b) أجِدُ قياسَ الزاويةِ PTQ.

الحل:

a)

$\overline{TP} = \overline{TQ}$ بالتالي

$$3x + 2 = 15$$
$$3x = 13$$
$$x = \frac{13}{3}$$

b)

$\measuredangle OPT = 90°, \measuredangle OQT = 90°$ لأنها مماسية مع نصف القطر

مجموع زوايا الشكل الرباعي يساوي 360^o بالتالي

$$\measuredangle OPT = 360 - (90^o + 90^o + 117^o)$$

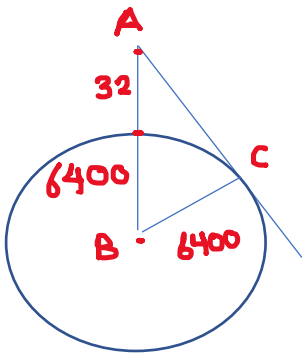
$$= 360 - (297^o)$$
$$= 63^o$$

كتاب الطالب صفحة 42

أتحقق من فهمي

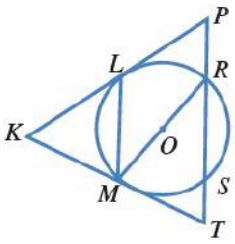
برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ **32 km** عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطرِها **6400 km** تقريبًا.

الحل:



$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$(6400 + 32)^2 = (6400)^2 + AC^2$$
$$41370624 = 40960000 + AC^2$$
$$41370624 - 40960000 = AC^2$$
$$410624 = AC^2$$
$$AC = \sqrt{410624}$$
$$AC \approx 640.8$$

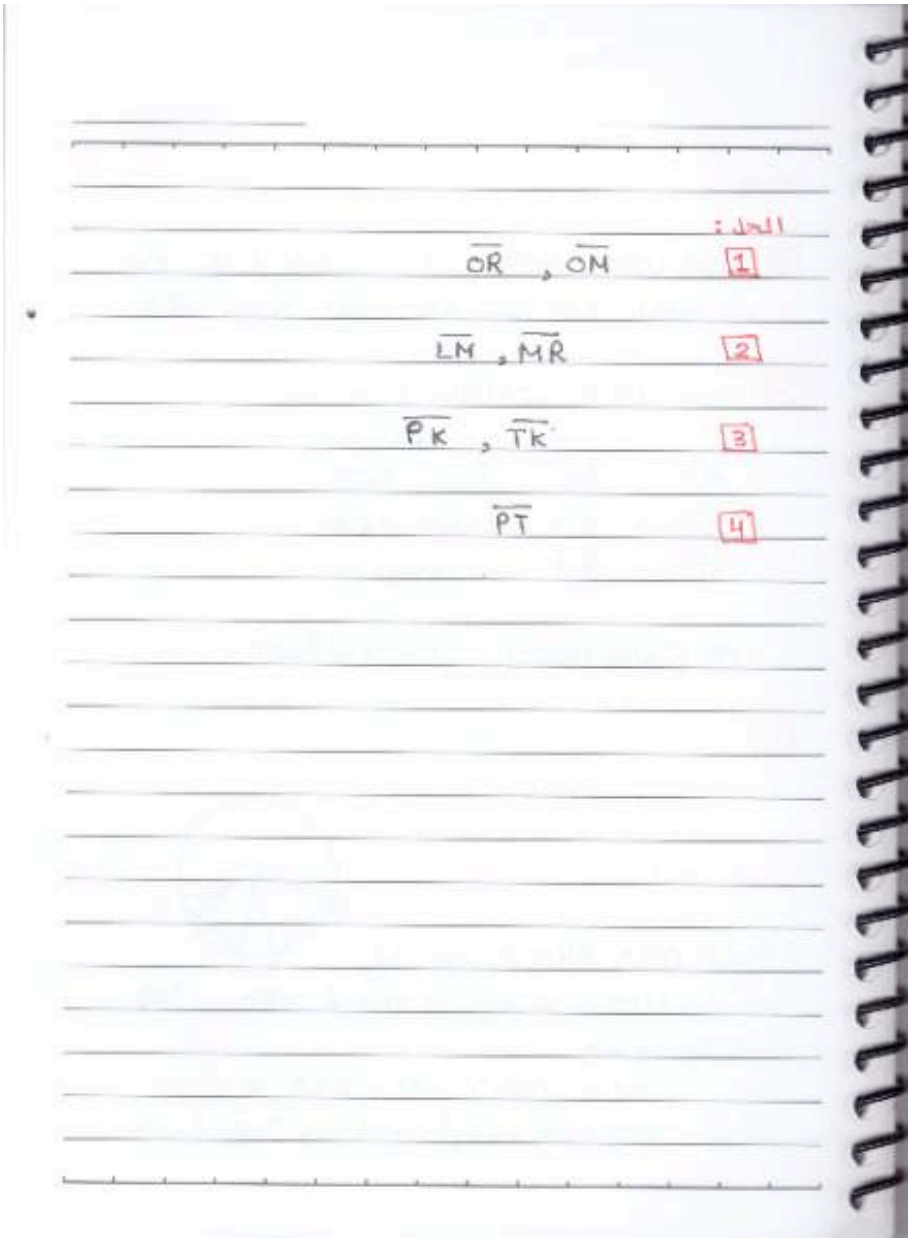
كتاب الطالب صفحة 42



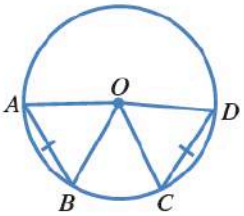
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O. أُسمّي:

1. نصفَيْ قُطْرَيْنِ.
2. وترَيْنِ.
3. مماسَّيْنِ.
4. قاطعًا.

الحل:



كتاب الطالب صفحة 42



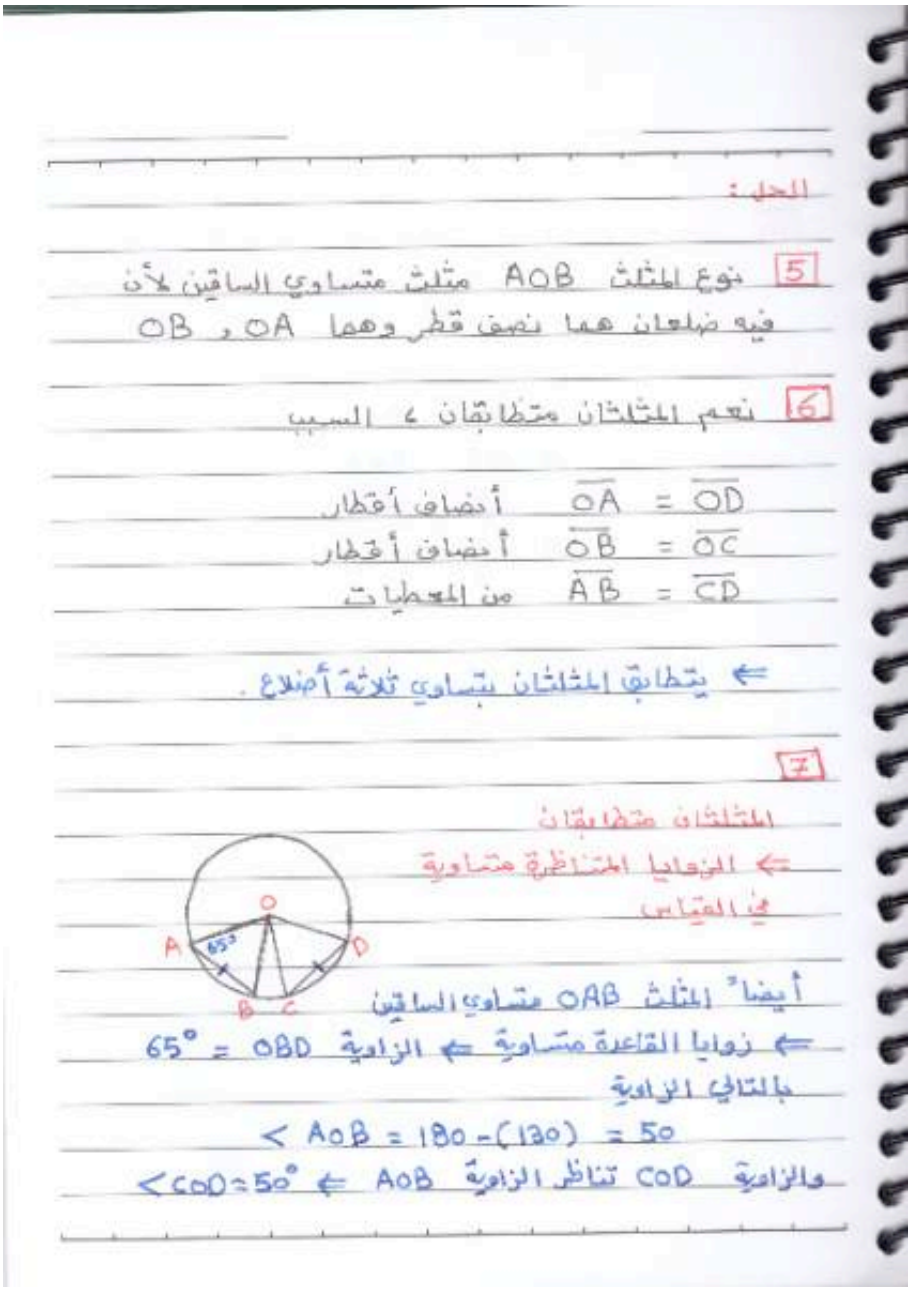
$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وتران لهُما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:

5 ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي.

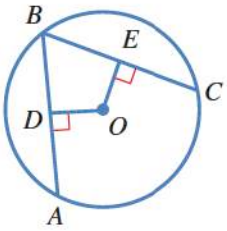
6 هلِ المثلثانِ AOB وَ COD مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

7 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ $65°$، فما قياسُ الزاويةِ COD؟

الحل:

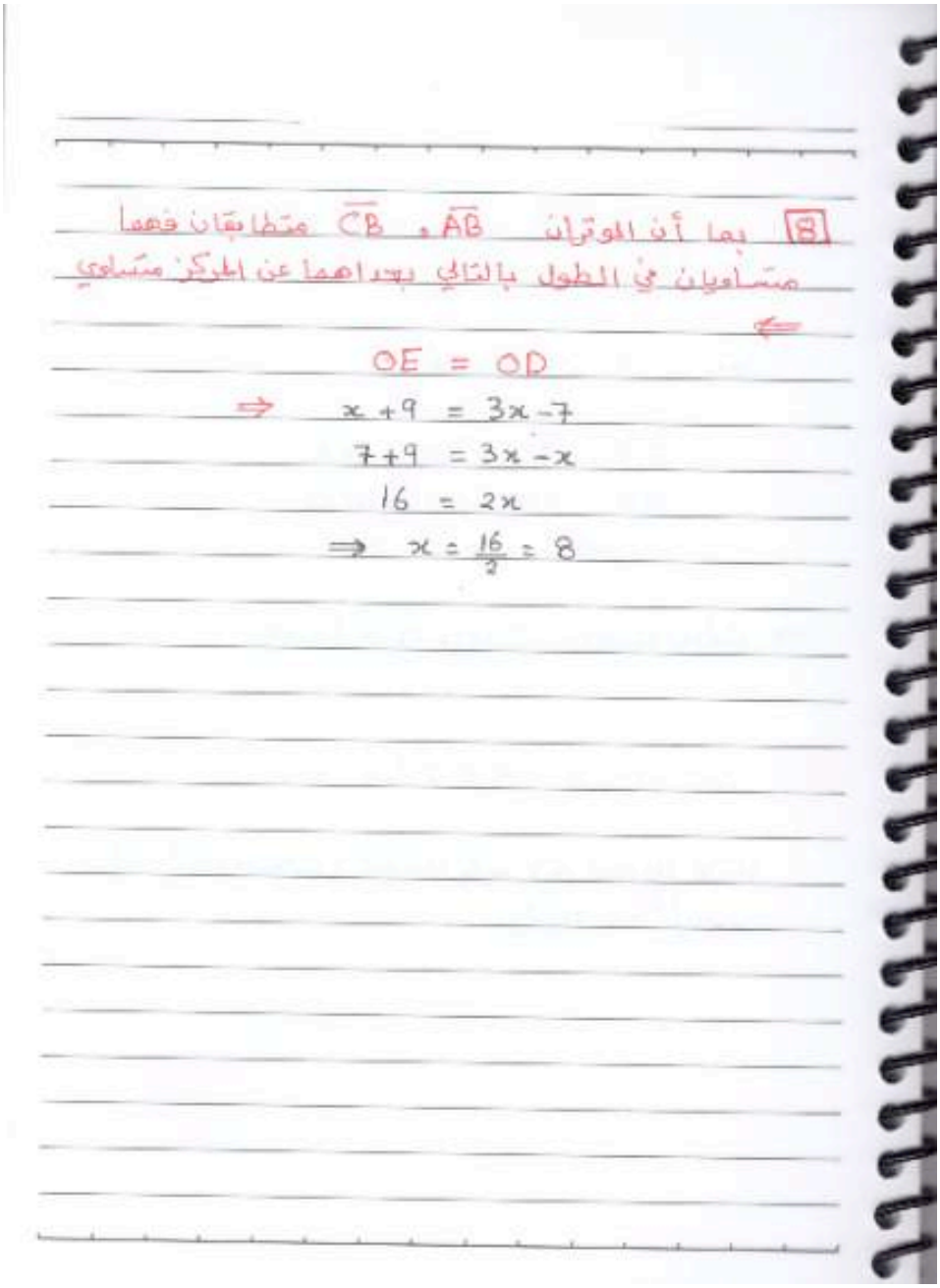


كتاب الطالب صفحة 43

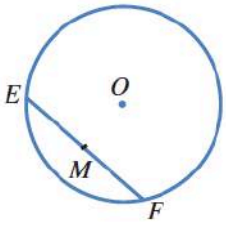


8 جَبْرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابِقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟

الحل:



كتاب الطالب صفحة 43



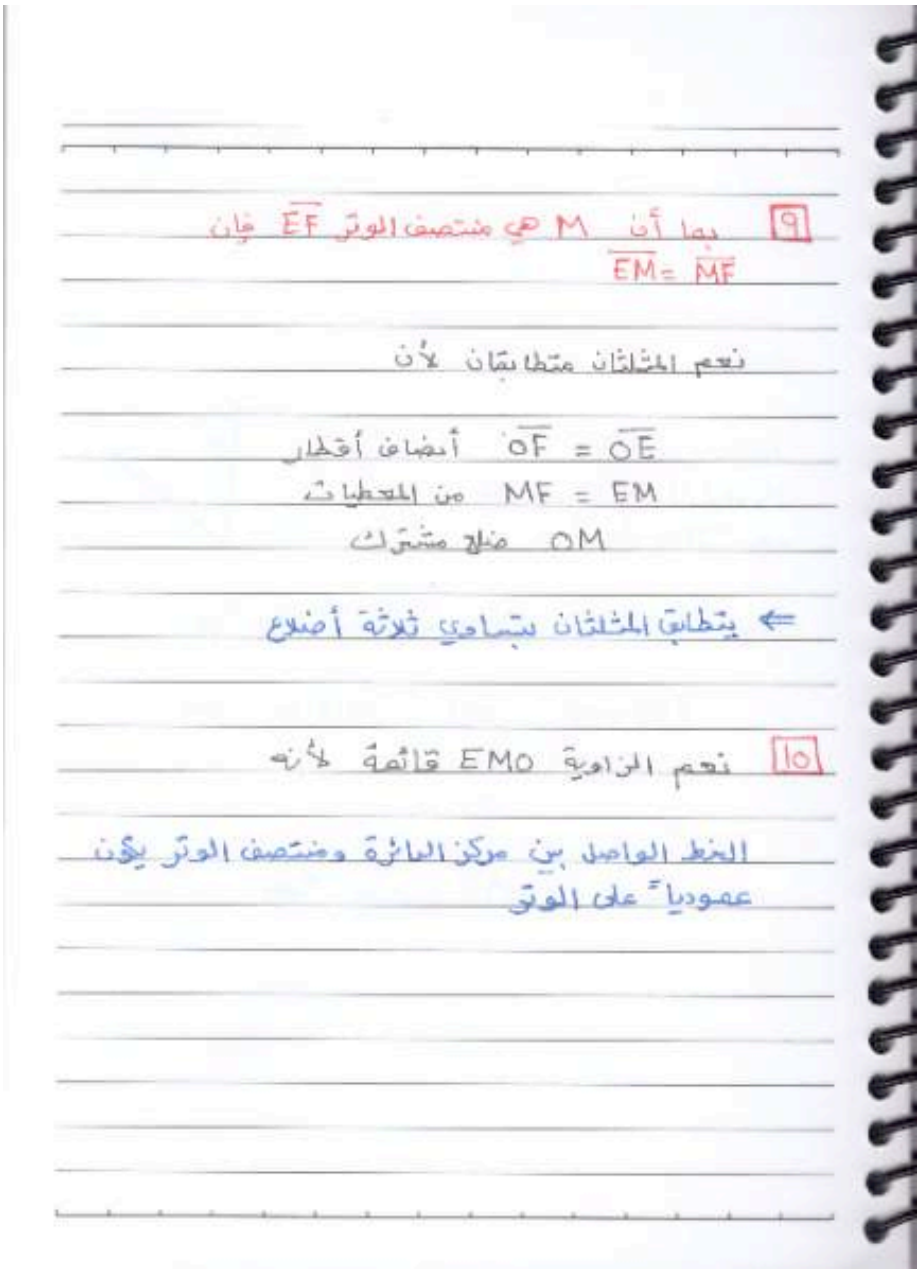
في الشكلِ المجاورِ، $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هلِ المثلثانِ EOM، وَ FOM مُتطابِقانِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

10 هلِ الزاويةُ EMO قائمةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

11 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ MOF هوَ $72°$، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أُبرِّرُ إجابتي.

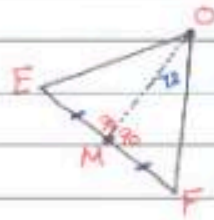
الحل:



11 قياس الزاوية MOF هو 72°

المطلوب قياس الزاوية MEO

الحل :



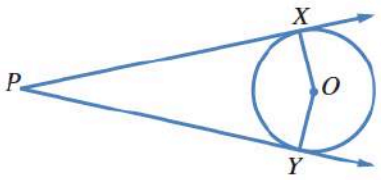
المثلثان متطابقان ⇐
الزوايا المتناظرة متساوية
$\angle MOE = 72^\circ$ ⇐

أيضاً الزاوية OME قائمة وتساوي 90°

$\Rightarrow \angle MEO = 180 - (90 + 72)$
$= 180 - (162)$
$= 18^\circ$

حيث مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

كتاب الطالب صفحة 43



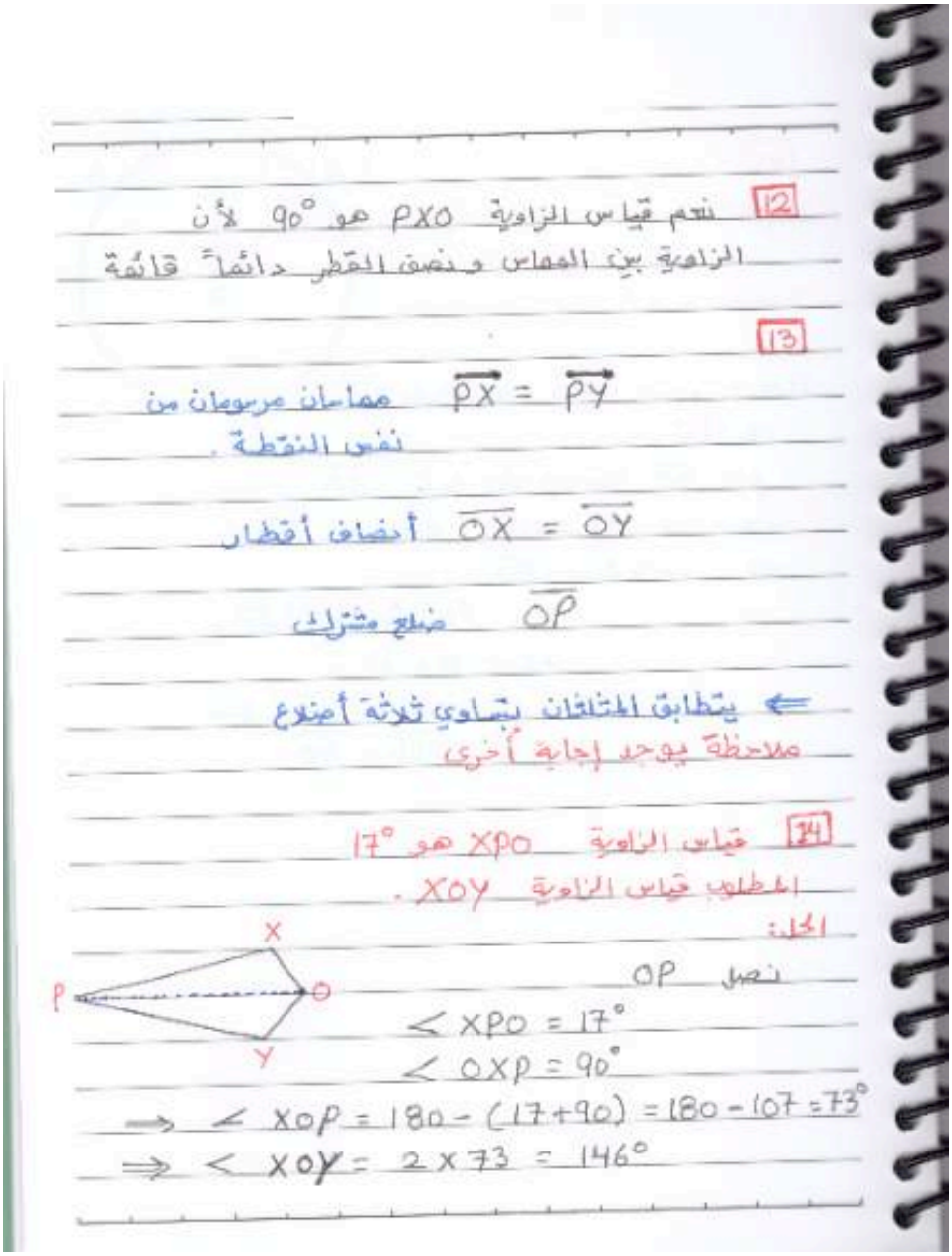
في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{PX}$ وَ $\overrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

12 هلْ قياسُ الزاويةِ PXO هوَ $90°$؟ أُبرِّرُ إجابتي.

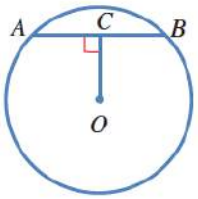
13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ $17°$، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟

الحل:

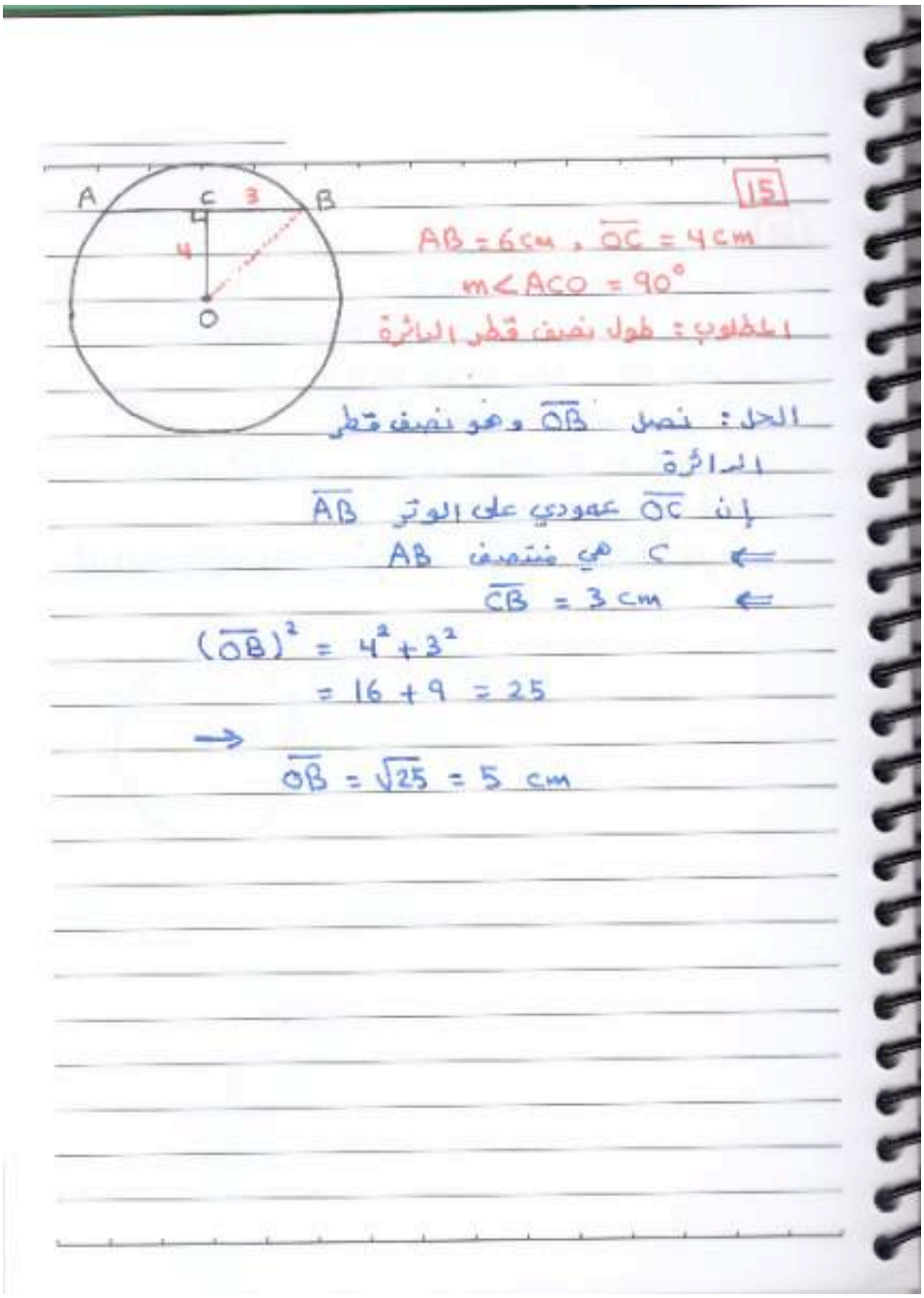


كتاب الطالب صفحة 43



15 في الشكلِ المجاورِ، $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ 6 cm في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ $90°$، وَ $OC = 4$ cm، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟

الحل:

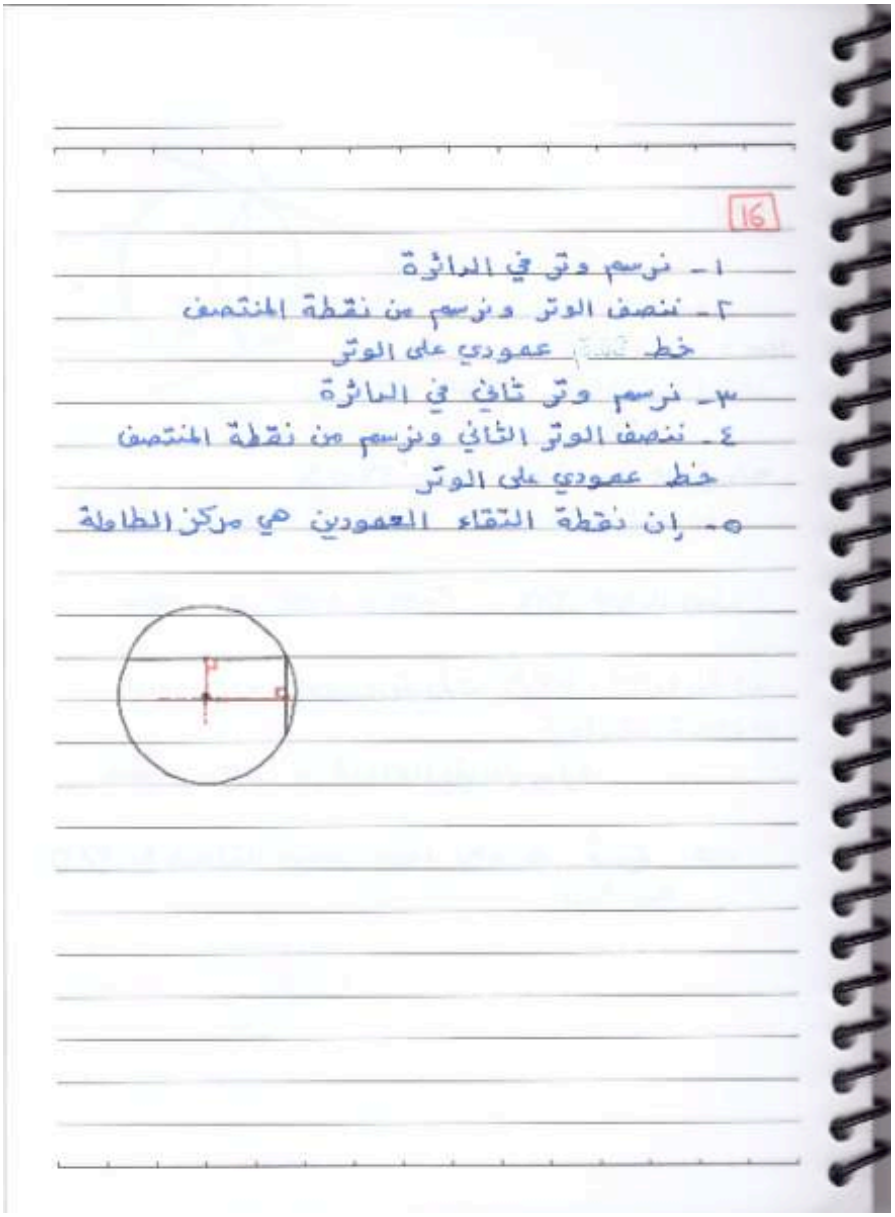


كتاب الطالب صفحة 43

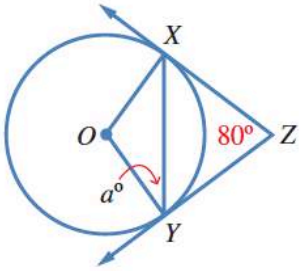
16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألة اليوم في حديقةِ منـــزلِ عبيرَ طاولـــةٌ دائريةٌ، وهيَ تريدُ عمـــلَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيـــتِ عمودٍ يحملِ مِظلَّةٍ بها. كيـــفَ يُمكِنُ لعبيرَ تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

الحل:

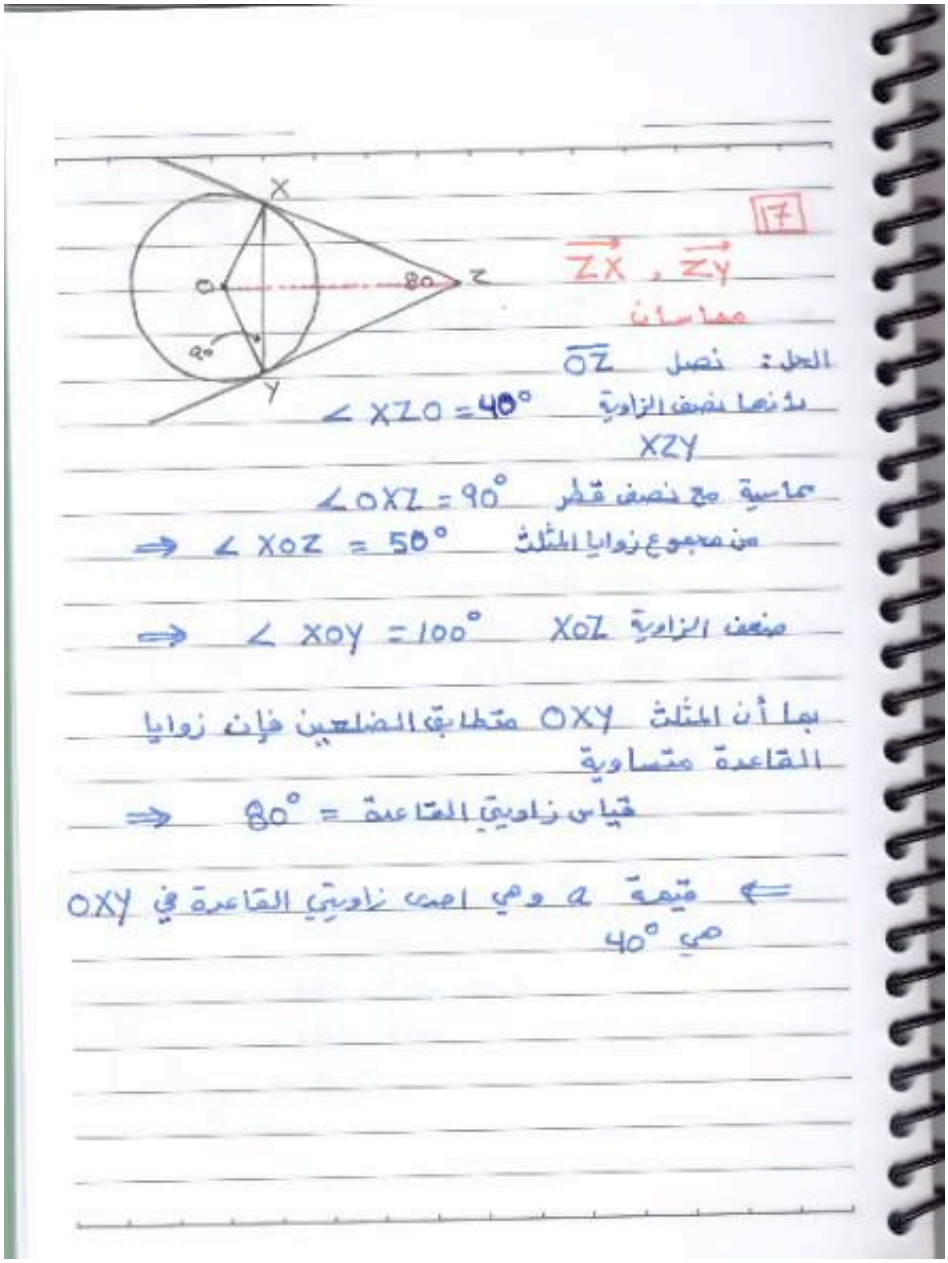


كتاب الطالب صفحة 43



17 في الشكلِ المجاورِ، $\overrightarrow{ZX}$ وَ $\overrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a.

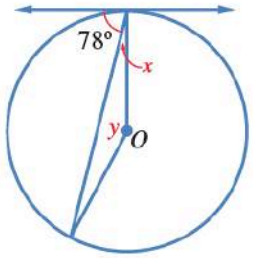
الحل:



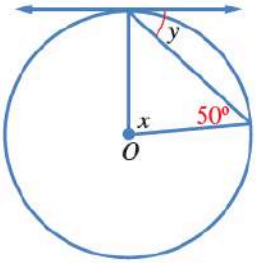
كتاب الطالب صفحة 44

يَظهرُ في كلٍّ منَ الشكلينِ الآتيينِ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

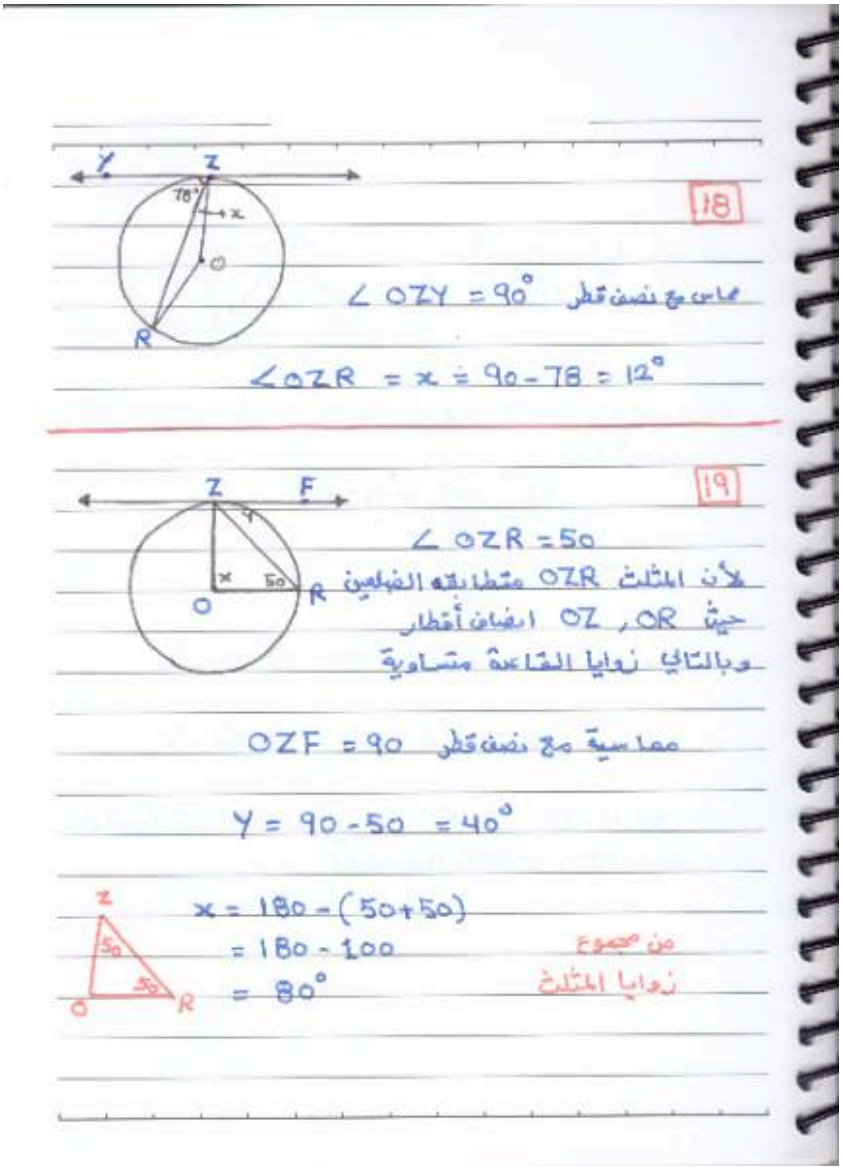
18



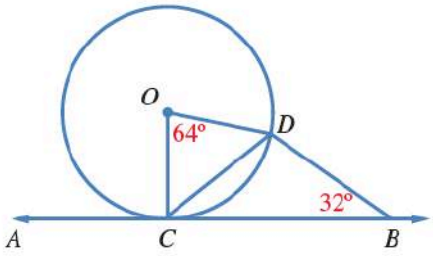
19



الحل:

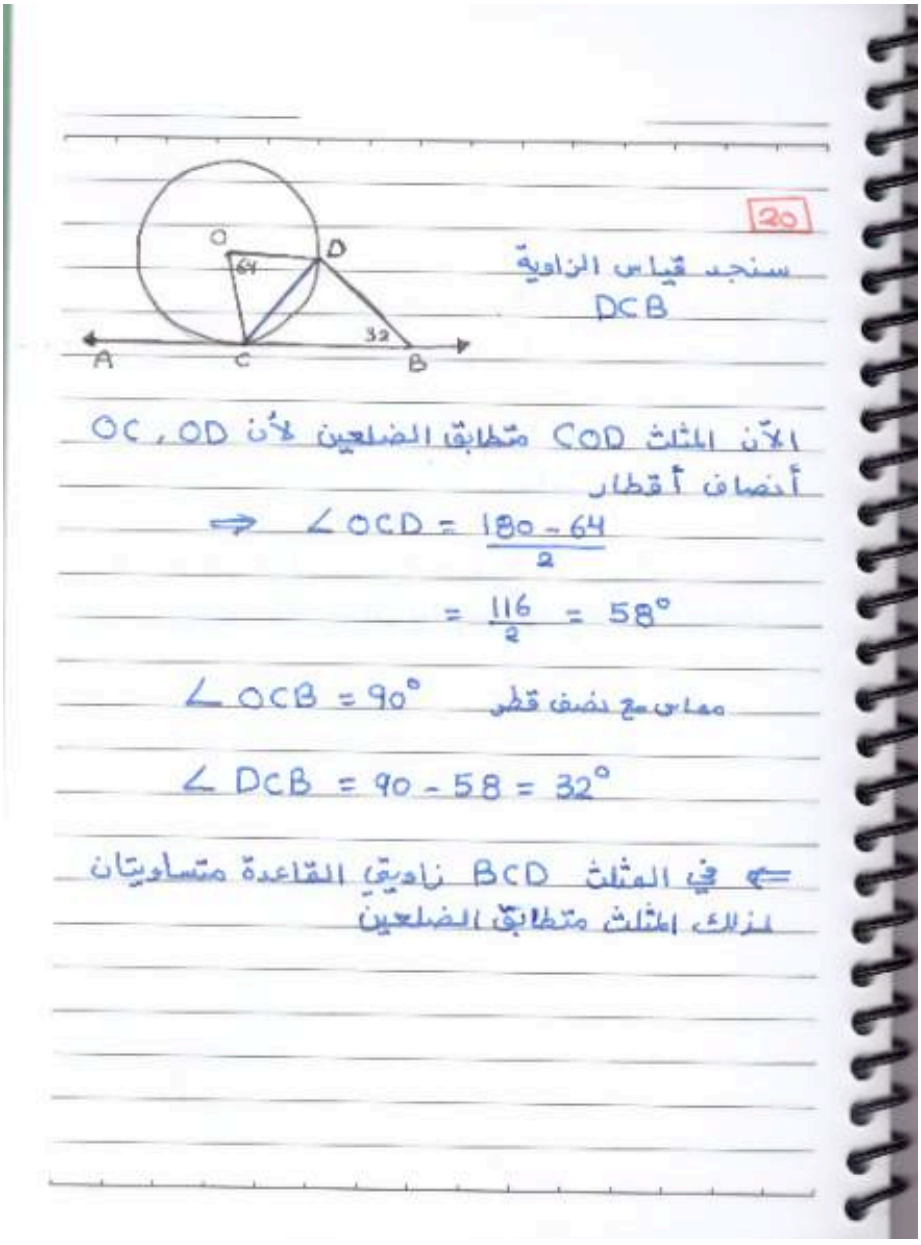


كتاب الطالب صفحة 44



20 في الشـكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُهـا O في النقطةِ C.
لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

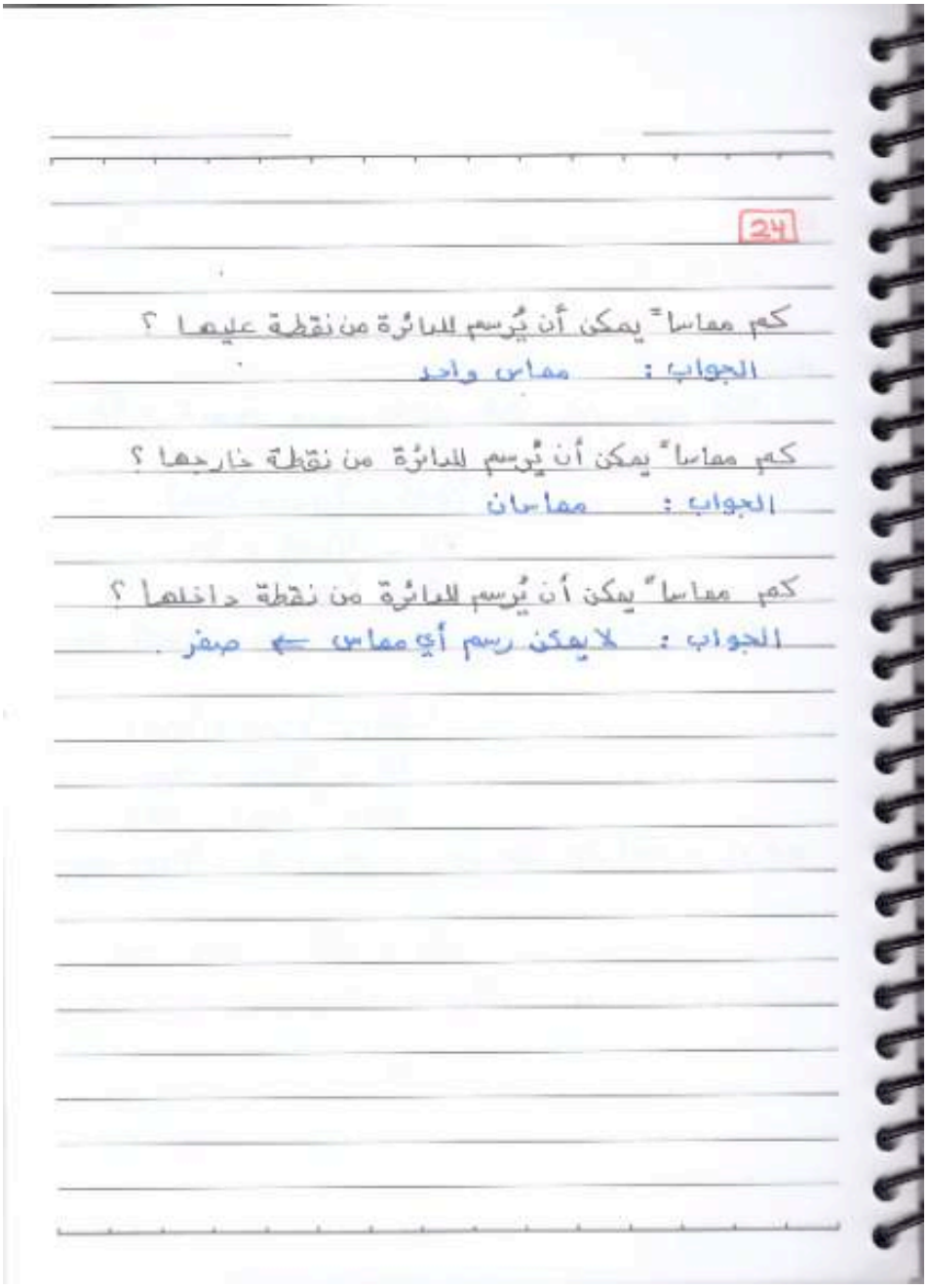
الحل:



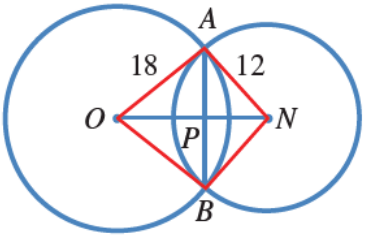
كتاب الطالب صفحة 44

24 كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:

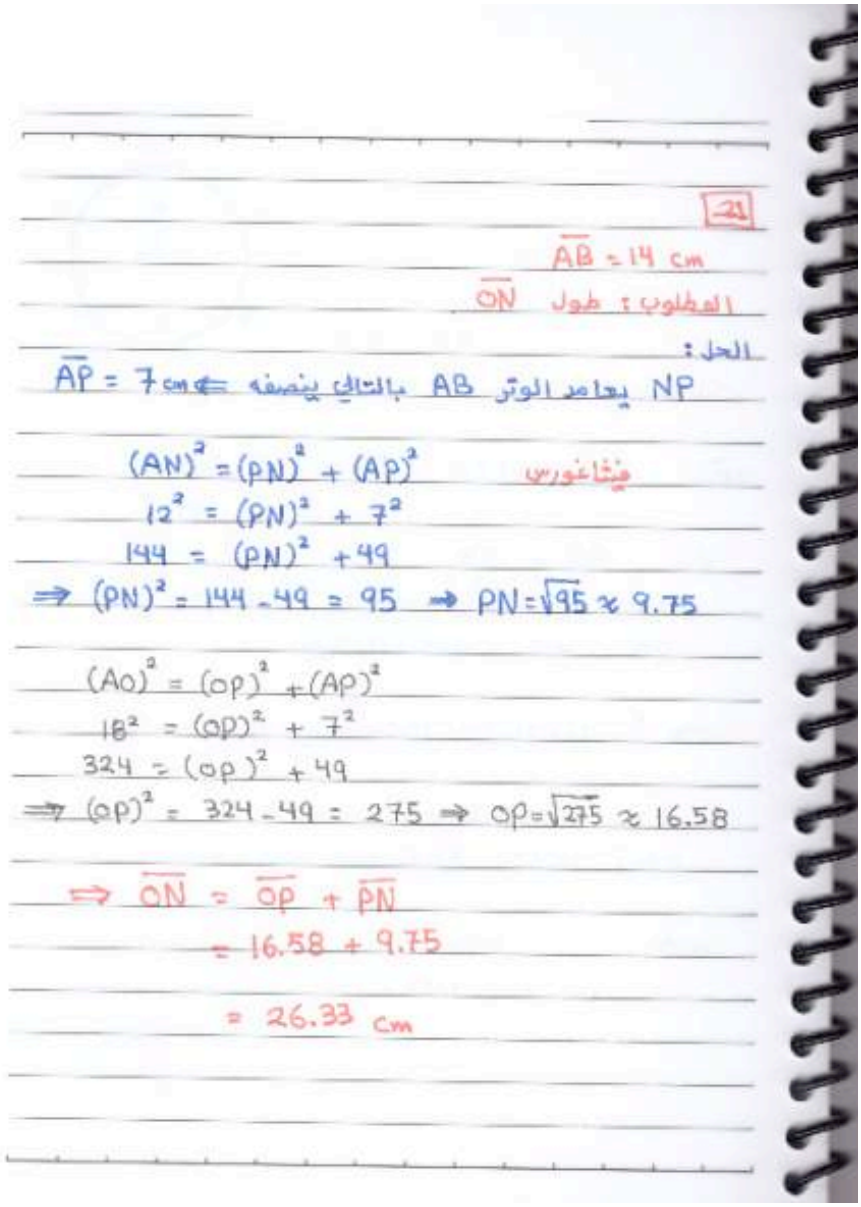


كتاب الطالب صفحة 44



21 **تحدٍّ:** $\overline{AB}$ وترٌ مشـــتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المســـتقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14\text{ cm}$، فما طولُ $\overline{ON}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

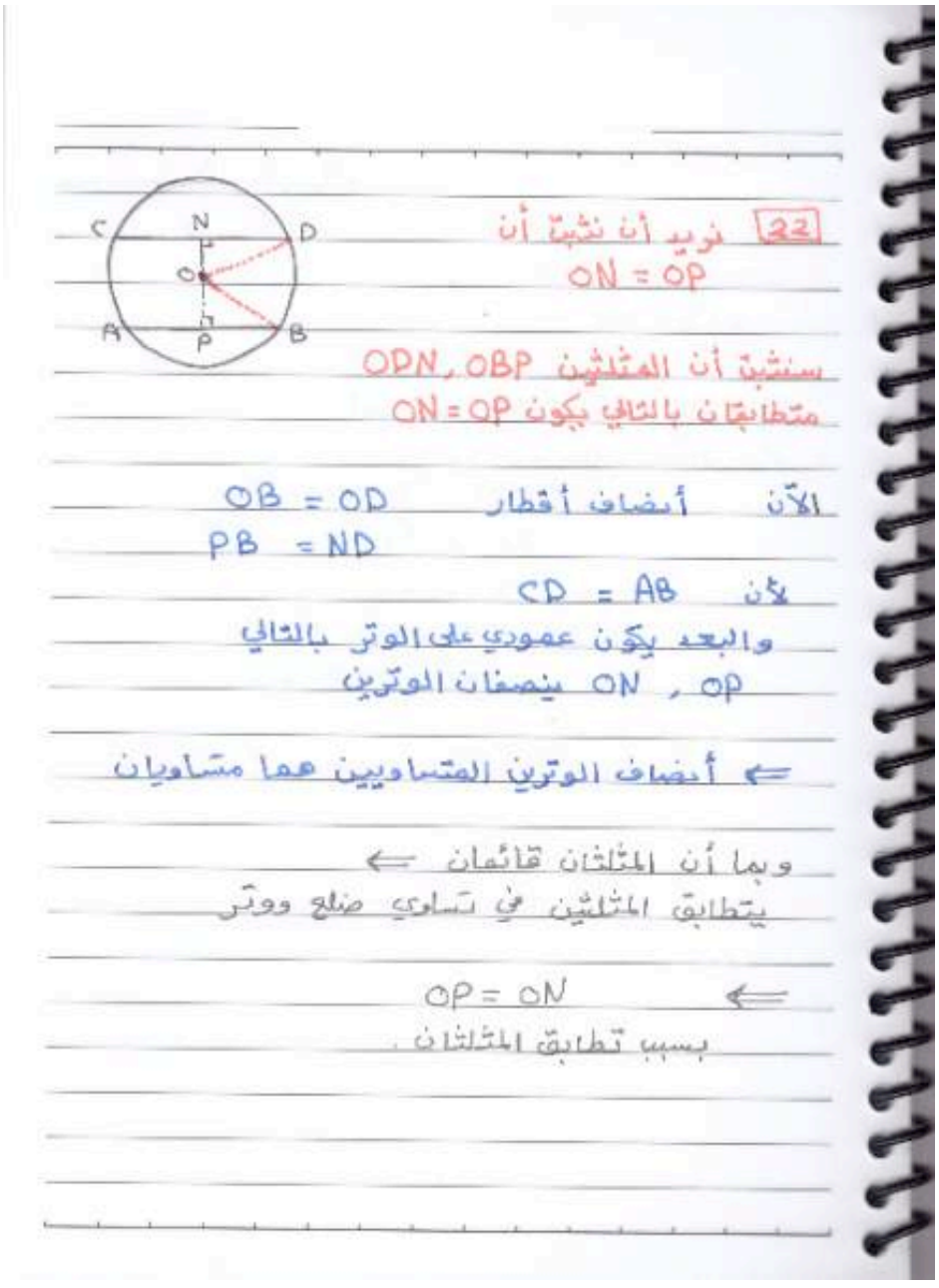
الحل:



كتاب الطالب صفحة 44

22 **برهانٌ:** $\overline{AB}$، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أُثبِتُ أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.

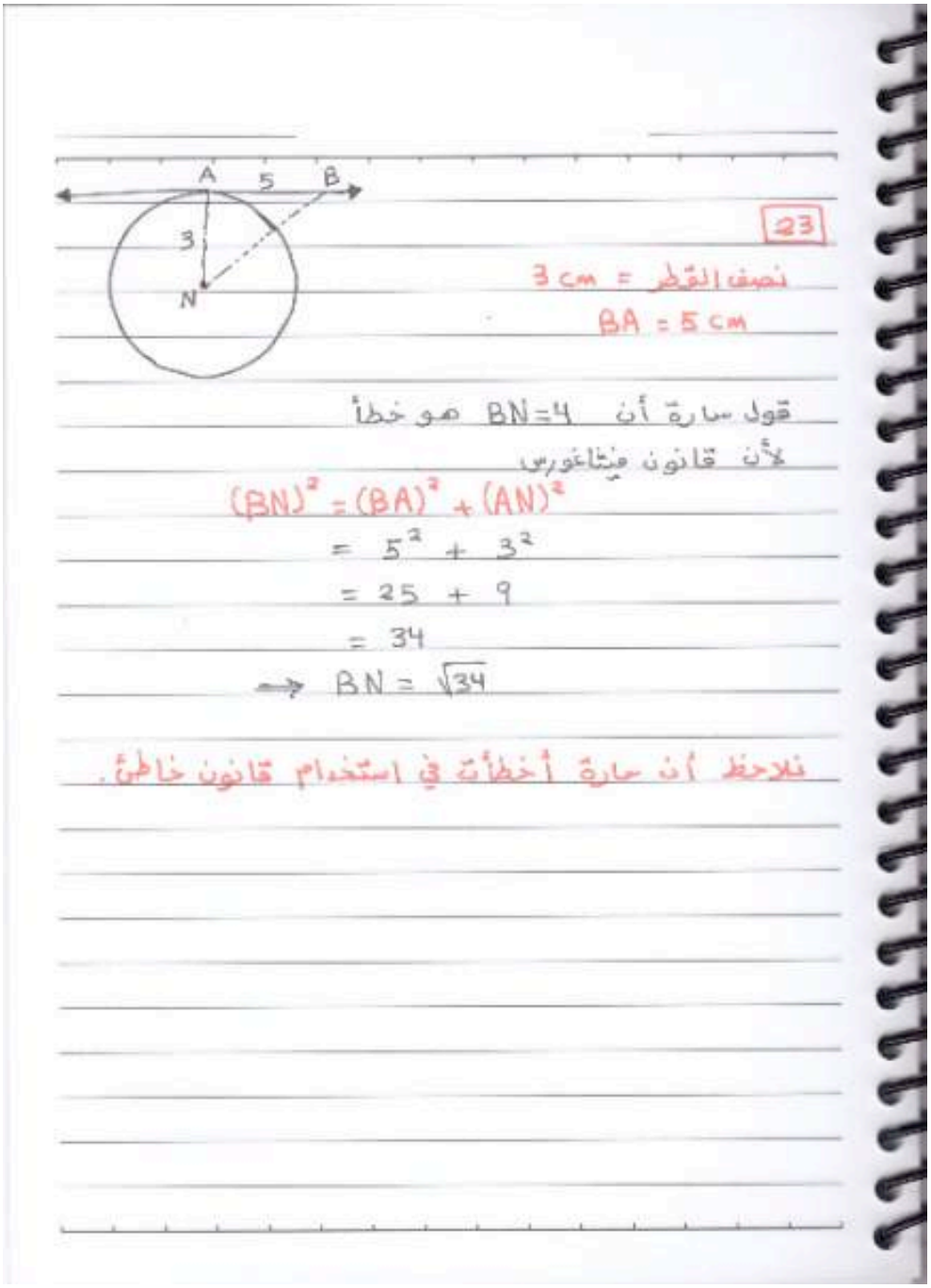
الحل:



كتاب الطالب صفحة 44

23 **تبريرٌ:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، وَ$BA = 5\text{ cm}$. قالَتْ سارةُ إنَّ $BN = 4\text{ cm}$؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل:



قوانين الدرس الثاني الوحدة الثانية:

r **هو نصف قطر الدائرة**

$$\text{محيط الدائرة} = l = 2\pi r$$

$$\text{مساحة الدائرة} = A = \pi r^2$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

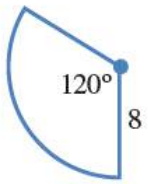
$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\text{محيط القطاع الدائري} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r$$

كتاب الطالب صفحة 46

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ.



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{120}{360} \times 2\pi \times 8$$

$$l = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 8$$

$$l = \frac{16}{3}\pi \approx 16.75$$

حيث $\pi \approx 3.14$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

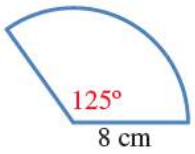
$$A = \frac{120}{360} \times \pi \times 8^2$$

$$A = \frac{1}{3} \times \pi \times 64 \approx 66.99$$

كتاب الطالب صفحة 47

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{125}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{25}{72} \times 2\pi \times 8$$

$$l = \frac{50}{9}\pi \approx 17.\overline{4}$$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{125}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{25}{72} \times \pi \times 8^2$$

$$A = \frac{25}{72} \times \pi \times 8 \times 8$$

$$A = \frac{25 \times 8}{9} \times \pi$$

$$A = \frac{200}{9} \times \pi \approx 69.\overline{7}$$

كتاب الطالب صفحة 47

أتحقق من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطــاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها 50 cm، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

الحل:

$$\text{محيط القطاع الدائري} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r$$

$$L = \frac{225}{360} \times 2\pi \times 50 + 2 \times 50$$

$$L = \frac{45}{72} \times 2 \times \pi \times 50 + 100$$

$$L \approx \frac{2250}{36} \times 3.14 + 100$$

$$L = 196.3 + 100$$

$$L = 296.3$$

كتاب الطالب صفحة 48

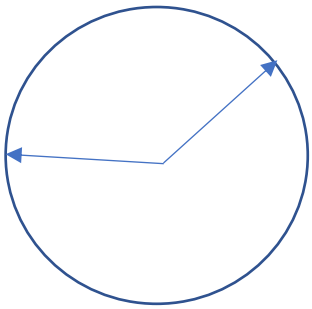
أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في ســاعةِ حائطٍ هوَ 15 cm. ما مِساحةُ المنطقةِ التي يُغطّيها العقربُ في أثناءِ حركتِهِ منَ العددِ 9 إلى العددِ 2؟

الحل:

يعتبر طول العقرب هو نصف القطر ويساوي 15

الزاوية بين 9 و2 هي 150°



$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

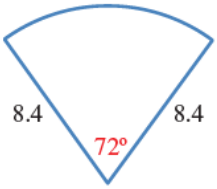
$$A = \frac{150}{360} \times \pi \times 15^2$$

$$A = \frac{5}{12} \times \pi \times 15^2$$

$$A \approx \frac{5 \times 225}{12} \times 3.14 = 294.375$$

كتاب الطالب صفحة 48

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:



1) أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ.

2) أَجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

3) أَجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

الحل:

1)

$$\frac{72}{360}=\frac{1}{5}$$

2)

$$\text{طول القوس} = l=\frac{72}{360}\times 2\pi r$$

$$l=\frac{1}{5}\times 2\pi\times 8.4$$

$$l=\frac{16.8}{5}\pi\approx 10.6$$

3)

$$\text{مساحة القطاع} = A=\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$$

$$A=\frac{72}{360}\times \pi\times (8.4)^2$$

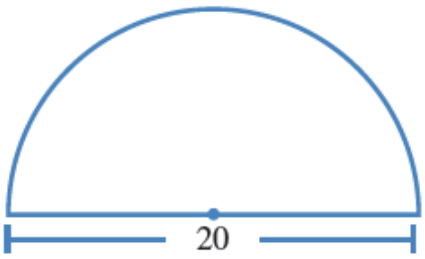
$$A=\frac{1}{5}\times \pi\times 70.56$$

$$A\approx \frac{70.56}{5}\times 3.14\approx 44.3$$

كتاب الطالب صفحة 48

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

4



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{180}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 10$$

$$l = 10\,\pi$$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{180}{360} \times \pi \times (10)^2$$

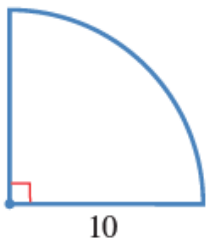
$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times 100$$

$$A = 50\,\pi$$

كتاب الطالب صفحة 48

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

5



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{90}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 10$$

$$l = \frac{20}{4} \times \pi$$

$$l = 5\,\pi$$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{90}{360} \times \pi \times (10)^2$$

$$A = \frac{1}{4} \times \pi \times 100$$

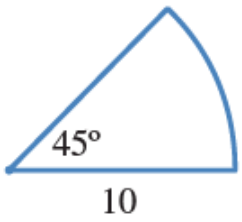
$$A = \frac{100}{4} \times \pi$$

$$A = 25\,\pi$$

كتاب الطالب صفحة 48

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

6



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{45}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{1}{8} \times 2\pi \times 10$$

$$l = \frac{20}{8} \times \pi$$

$$l = \frac{5}{2}\pi = 2.5\pi$$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{45}{360} \times \pi \times (10)^2$$

$$A = \frac{1}{8} \times \pi \times 100$$

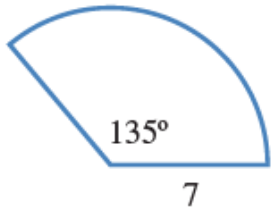
$$A = \frac{100}{8} \times \pi$$

$$A = \frac{25}{2}\pi = 12.5\pi$$

كتاب الطالب صفحة 48

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

7



الحل:

$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{135}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{3}{8} \times 2\pi \times 7$$

$$l = \frac{6 \times 7}{8} \times \pi$$

$$l = \frac{42}{8}\pi = 5.25\pi$$

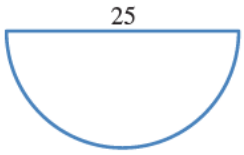
$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{135}{360} \times \pi \times (7)^2$$

$$A = \frac{3}{8} \times \pi \times 49$$

$$A = \frac{147}{8} \times \pi = 18.375\pi$$

كتاب الطالب صفحة 48



8 أَجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أُجِدُ محيطَها.

الحل:

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{180}{360} \times \pi \times (12.5)^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times 156.25$$

$$A \approx 78.125 \times 3.14 = 245.3$$

$$\text{محيط القطاع الدائري} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r$$

$$L = \frac{180}{360} \times 2\pi \times 12.5 + 2 \times 12.5$$

$$L = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 12.5 + 25$$

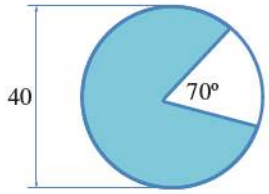
$$L \approx 12.5 \times 3.14 + 25$$

$$L = 39.3 + 25$$

$$L = 64.3$$

كتاب الطالب صفحة 49

9 أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ المجاورِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π). أُبرِّرُ إجابتي.



الحل:

زاوية الجزء المظلل (القطاع الدائري) تساوي $360 - 70 = 290$

نصف القطر يساوي $\frac{40}{2} = 20$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{290}{360} \times \pi \times (20)^2$$

$$A = \frac{29}{36} \times \pi \times 400$$

$$A = \frac{29 \times 100}{9} \times \pi$$

$$A \approx 322.2\pi$$

كتاب الطالب صفحة 49

10 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم أَعَدَّتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَتْها أحدثَتْ فيها شَقَّيْنِ منَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 45°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَتْهُ عفافُ منَ الفطيرةِ؟

الحل:

زاوية الجزء الذي قطعته عفاف (القطاع الدائري) تساوي 45

نصف القطر يساوي $12 = \frac{24}{2}$

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{45}{360} \times \pi \times (12)^2$$

$$A = \frac{1}{8} \times \pi \times 144$$

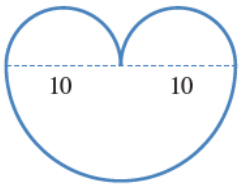
$$A = \frac{144}{8} \times 3.14$$

$$A \approx 56.52$$

كتاب الطالب صفحة 49

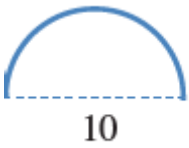
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:

11 أَجِدُ محيطَ الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



الحل:

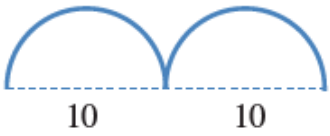
$$\text{طول القوس المجاور} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$



$$\text{طول القوس} = l = \frac{180}{360} \times 2\pi r$$

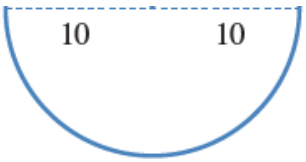
$$l = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 5$$

$$l = 5\pi$$



لأنه لدينا جزئين متساويين اذن طول القوسين التاليين هو $2 \times 5\pi = 10\pi$

الآن



$$\text{طول القوس} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$\text{طول القوس} = l = \frac{180}{360} \times 2\pi r$$

$$l = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 10$$

$$l = 10\pi$$

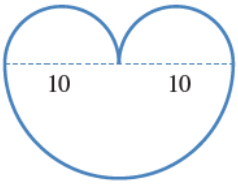
اذن محيط الشكل يساوي

$$10\pi + 10\pi = 20\pi$$

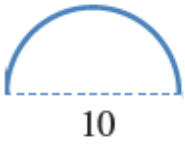
كتاب الطالب صفحة 49

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:

12 أَجِدُ مساحةَ الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



الحل:



مساحة القطاع المجاور $= A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

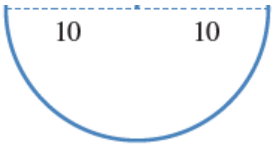
$$A = \frac{180}{360} \times \pi \times (5)^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times 25$$

$$A = \frac{25}{2} \times \pi$$

$$A = 12.5\pi$$

لأنه لدينا جزئين متساويين اذن مساحة القطاعين المجاورين هو $2 \times 12.5\pi = 25\pi$



مساحة القطاع المجاور $= A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$A = \frac{180}{360} \times \pi \times (10)^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times \pi \times 100$$

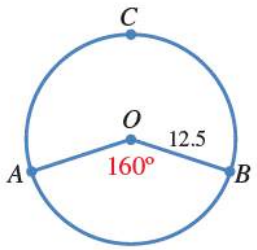
$$A = \frac{100}{2} \times \pi = 50\pi$$

اذن مساحة الشكل يساوي

$$25\pi + 50\pi = 75\pi$$

$$A = 12.5\pi$$

كتاب الطالب صفحة 49



13 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطْرِها 12.5 وحدةِ طولٍ.
أَجِدُ طولَ القوسِ ACB.

الحل:

زاوية (القطاع الدائري المطلوب) تساوي $360 - 160 = 200$

$$\text{طول القوس} = \boldsymbol{l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r}$$

$$\text{طول القوس} = \boldsymbol{l = \frac{200}{360} \times 2\pi r}$$

$$\boldsymbol{l = \frac{5}{9} \times 2\pi \times 12.5}$$

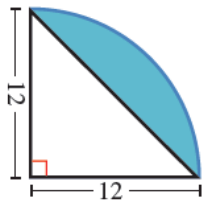
$$\boldsymbol{l = \frac{5 \times 12.5 \times 2}{9} \times \pi}$$

$$\boldsymbol{l = \frac{125}{9} \times \pi}$$

$$\boldsymbol{l = 13.8 \times \pi = 13.8 \times 3.14 = 43.6}$$

كتاب الطالب صفحة 49

14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ربعَ دائرةٍ. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



الحل:

مساحة الجزء المظلل يساوي مساحة ربع الدائرة ــ مساحة المثلث

$$\text{مساحة ربع الدائرة} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{90}{360} \times \pi \times (12)^2$$

$$A = \frac{1}{4} \times \pi \times 144$$

$$A = \frac{144}{4} \times \pi$$

$$A = 36\pi$$

$$\text{مساحة المثلث} = A = \frac{1}{2} \times 12 \times 12$$

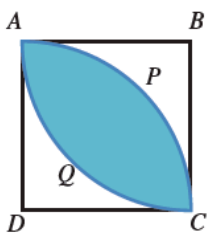
$$A = 72$$

مساحة الجزء المظلل يساوي

$$36\pi - 72$$

كتاب الطالب صفحة 49

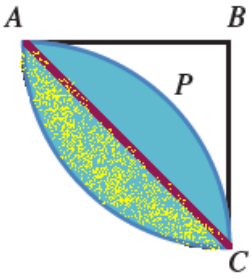
15 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسيْنِ منْ دائرتيْنِ مركزاهُما D وَ B على التوالي. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π).



الحل:

سأقسم المنطقة المطلوبة إلى قسمين متطابقين

وسأقوم بحساب مساحة المنطقة المظللة بالأصفر ثم سأضرب في 2 لآنه يوجد تطابق بين المنطقتين



مساحة الجزء المظلل بالأصفر يساوي مساحة ربع الدائرة ــ مساحة المثلث

$$\text{مساحة ربع الدائرة} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{90}{360} \times \pi \times (8)^2$$

$$A = \frac{1}{4} \times \pi \times 64$$

$$A = \frac{64}{4} \times \pi$$

$$A = 16\pi$$

$$\text{مساحة المثلث} = A = \frac{1}{2} \times 8 \times 8$$

$$A = 32$$

مساحة الجزء المظلل بالأصفر يساوي

$$16\pi - 32$$

مساحة الجزء المظلل المطلوب يساوي

$$2 \times (16\pi - 32) = 32\pi - 64$$

كتاب الطالب صفحة 49

16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\,m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطْرِهِ $15\,m$. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟

الحل:

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$100 = \frac{\theta}{360} \times \pi \times (15)^2$$

$$100 = \frac{\theta}{360} \times \pi \times 225$$

$$36000 = \theta \times \pi \times 225$$

$$\theta = \frac{36000}{\pi \times 225} = \frac{36000}{706.5} \approx 51^o$$

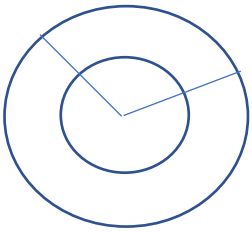
كتاب الطالب صفحة 50

17 **سياراتٌ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ماسحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسحةِ 40 cm، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها 66 cm، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟

الحل:

$$\text{مساحة الزجاج} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{130}{360} \times \pi(66)^2 - \frac{130}{360} \times \pi(66-40)^2$$



$$A = \frac{13 \times 4356}{36} \times \pi - \frac{13}{36} \times \pi \times (26)^2$$

$$A \approx \frac{13 \times 4356}{36} \times 3.14 - \frac{13 \times 676}{36} \times 3.14$$

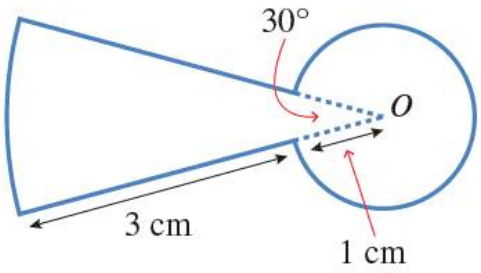
$$A = 1573 \times 3.14 - 244.1 \times 3.14$$

$$A = 4939.2 - 766.5$$

$$A = 4172.7$$

كتاب الطالب صفحة 50

18 تحدٍّ: أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ ومِساحتَهُ.



محيط الشكل = طول القوس في الشكل الأول + (محيط القطاع الثاني – 2)

$$\text{طول القوس في الشكل الأول} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$L = \frac{360 - 30}{360} \times 2\pi \times 1$$

$$L = \frac{330}{360} \times 2\pi$$

$$L \approx \frac{33}{36} \times 2 \times 3.14$$

$$L \approx \frac{11}{12} \times 6.28$$

$$L = 5.8$$

$$\text{محيط القطاع الثاني – 2} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r - 2$$

$$L = \frac{30}{360} \times 2\pi \times 3 + 2 \times 3 - 2$$

$$L = \frac{3}{36} \times 6 \times 3.14 + 6 - 2$$

$$L = \frac{1}{12} \times 18.84 + 6 - 2$$

$$L = 1.57 + 6 - 2$$

$$L = 7.57 - 2 = 5.57$$

$$\text{محيط الشكل} = 5.8 + 5.57 = 11.37$$

كتاب الطالب صفحة 50

19 **تحدٍّ**: اشترى سعيدٌ فطيرةَ بيتزا دائريةَ الشـكلِ طولُ قُطْرِها 36 cm، ثمَّ قسَّمَها إلى قطعٍ متسـاويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَ منْها قطعتيْنِ تُمثِّـلانِ معًا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ.

الحل:

مساحة فطيرة البيتزا = $\pi(18)^2$ ويساوي 1017.4

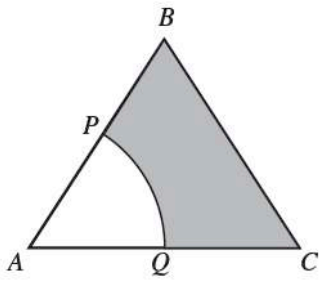
مساحة القطعتين اللتين قسمهما سعيد 180 بالتالي كل قطعة مساحتها تساوي 90

عدد القطع التي قطعها سعيد تساوي $\frac{1017.4}{90}$ وتساوي 11

بالتالي قياس الزاوية يساوي $\frac{360}{11}$ وتساوي 32^o

كتاب الطالب صفحة 50

20 **تحدٍّ**: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثًا مُتطابِقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ 6 cm. إذا كانَتِ النقطتانِ P وَ Q تُنصِّفانِ الضلعيْنِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ على التوالي، وكانَ APQ قطاعًا دائريًّا منْ دائرةٍ مركزُها A، فأَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ.



الحل:

مساحة الجزء المظلل A = مساحة المثلث ـ مساحة القطاع الدائري

$$A = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin(60) - \frac{60}{360} \times \pi \times 3^2$$

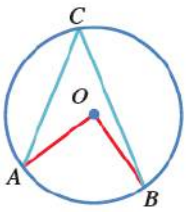
$$A = 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \times \pi \times 9$$

$$A \approx 3 \times 3 \times \sqrt{3} - \frac{3}{2} \times 3.14$$

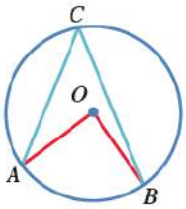
$$A \approx 15.6 - 4.7$$

$$A \approx 10.9$$

ملاحظة يمكن إيجاد ارتفاع المثلث من فيثاغورس وبالتالي إيجاد مساحة المثلث من قانون نصف في القاعدة في الارتفاع



تُسمّى الزاويةُ التي يكونُ رأسُها في مركزِ الدائرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطْرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً** (central angle). ففي الشكلِ الآتي، AOB زاويةٌ مركزيةٌ في الدائرةِ التي مركزُها O، ويُسمّى القوسُ $\overset{\frown}{AB}$ **القوسَ المقابلَ** (subtended arc).



تُسمّى الزاويةُ التي يقعُ رأسُها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةً محيطيةً** (inscribed angle). ففي الشكلِ السابقِ، الزاويةُ ACB محيطيةٌ، والزاويةُ AOB مركزيةٌ، وهما مرسومتانِ على القوسِ $\overset{\frown}{AB}$. وعندَ قياسِ هاتَيْنِ الزاويتَيْنِ سنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ

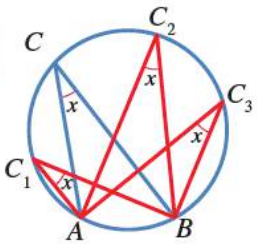
قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

نظريةٌ

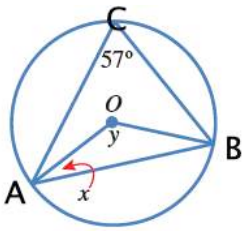
جميعُ الزوايا المحيطيةِ المرسومةِ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$



ملاحظة $m\angle$ تعني قياس الزاوية

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 52



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

الحل :

$$m\angle y = 57 \times 2 = 114^\circ$$

لأنها زاوية مركزية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطة C

المثلث AOB متطابق الضلعين لأن $\overline{OB}, \overline{OA}$ أنصاف أقطار بالتالي زوايا القاعدة متساوية بالتالي

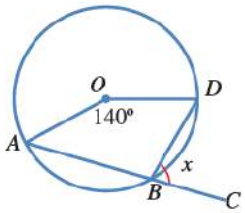
$$m\angle x = \frac{(180 - 114)}{2} = \frac{66}{2} = 33^\circ$$

ملاحظة مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 53

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟



الحل :

الزاوية المركزية العليا AOD قياسها يساوي $360 - 140 = 220^\circ$

الزاوية ABD محيطية مرسومة معها على نفس القوس بالتالي تساوي $\frac{220}{2} = 110^\circ$

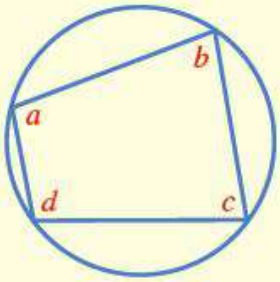
الزاوية CBD تجاور على استقامة مع الزاوية ABD

بالتالي قياسها يساوي $180 - 110 = 70^\circ$

إذن $x = 70^\circ$

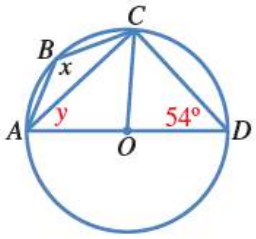
إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍّ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا** (cyclic quadrilateral).
وإذا حسَبْنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ $180°$.

نظريةٌ



مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ $180°$:

$$b+d=180°, a+c=180°$$



أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

الحل :

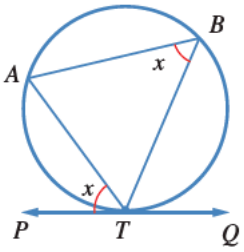
الزاوية ACD زاوية قائمة لأنها محيطية مرسومة على قطر الدائرة بالتالي من مجموع زاويا المثلث ينتج أن

$$y = 180 - (90 + 54) = 180 - 144 = 36^{\circ}$$

الشكل $ABCD$ رباعي دائري بالتالي

$$x = 180 - 54 = 126^{\circ}$$

لأنه في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين مجموعهما يساوي 180°



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ عندَ النقطةِ T، وَ $\overline{TA}$ هوَ وترٌ للدائرةِ. تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ المماسِّ والوترِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ **الزاويةَ المماسِّيةَ** (angle between a tangent and a chord). وهذهِ الزاويةُ تحصرُ القوسَ $\overset{\frown}{TA}$، ويُمكِنُ ملاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المماسِّيةِ PTA يساوي قياسَ الزاويةِ ABT المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ $\overset{\frown}{TA}$ نفسِهِ.

نظريةٌ

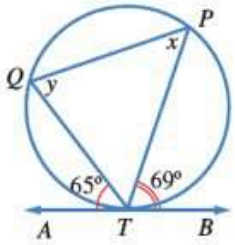
قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها في القوسِ:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

أتحقق من فهمي

في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ للدائرةِ في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، وَ TPQ، وَ QTP.



الحل:

esam shikh

$$m\angle TQP = 69^\circ$$

لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع المماسية PTB

$$m\angle TPQ = 65^\circ$$

لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع المماسية QTA

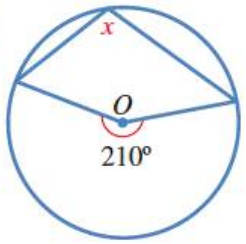
$$m\angle QTP = 180 - (69 + 65) = 180 - 134 = 46^\circ$$

لأن مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 54

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

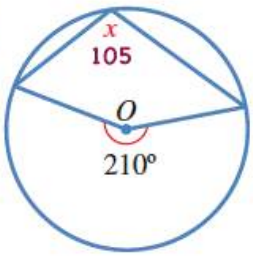
1



الحل :

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

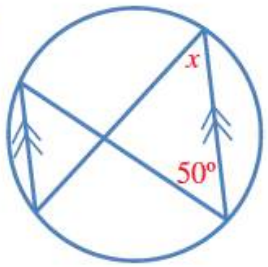
1



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 54

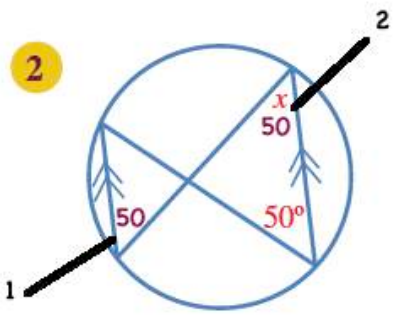
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

2



الحل:

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



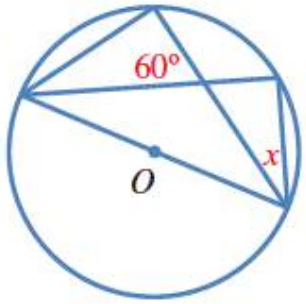
1- محيطيتان مرسومتان على نفس القوس

2- بالتبادل

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 54

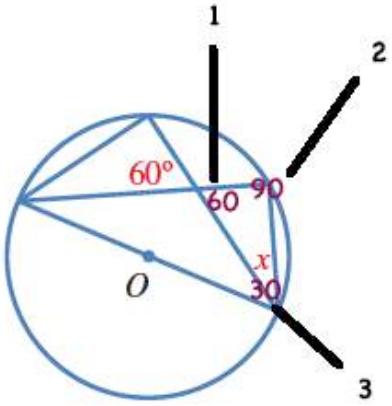
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ ممّا يأتي:

3



الحل:

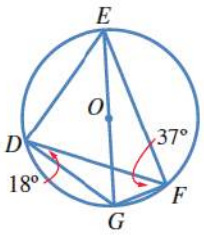
تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



1- تقابل بالرأس

2- محيطية مرسومة على قطر الدائرة أو محيطية مرسومة على نفس القوس مع زاوية مركزية قياسها 180

3- مجموع زوايا المثلث

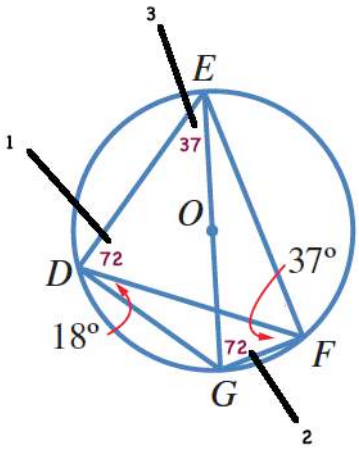


إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

4 $m\angle EGF$. 5 $m\angle DEG$. 6 $m\angle EDF$.

الحل:

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



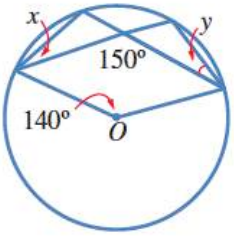
1- لأن الزاوية EDG محيطية مرسومة على القطر ويكون قياسها 90°

2- لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطية EDF

3- لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطية DFG

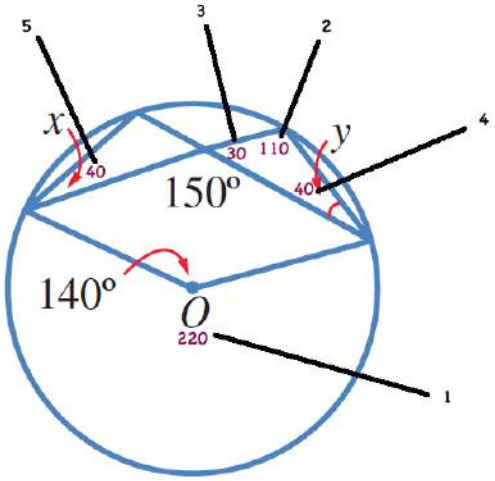
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7



الحل :

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



1- مجموع الزوايا حول نقطة يساوي 360°

2- لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المركزية التي قياسها 220°

3- تجاور على استقامة مع الزاوية التي قياسها 150°

مجموع الزوايا المتجاورة على استقامة يساوي 180°

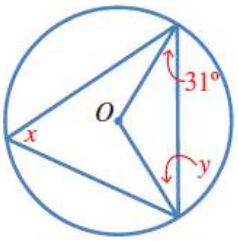
4- مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

5- لأنها محيطية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطية التي قياسها 40°

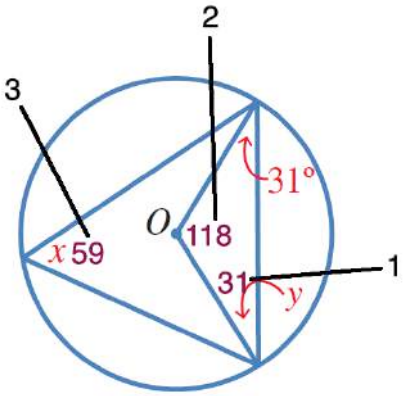
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 54

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

8



الحل :



1- لأن المثلث متطابق الضلعين تكون زوايا القاعدة متطابقة

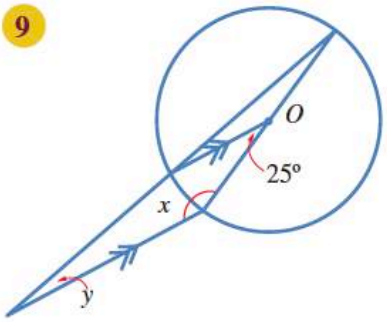
2- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°

3- لأنها محيطية مرسومة على قطر الدائرة أو محيطية مرسومة على نفس القوس مع زاوية مركزية قياسها 118°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 54

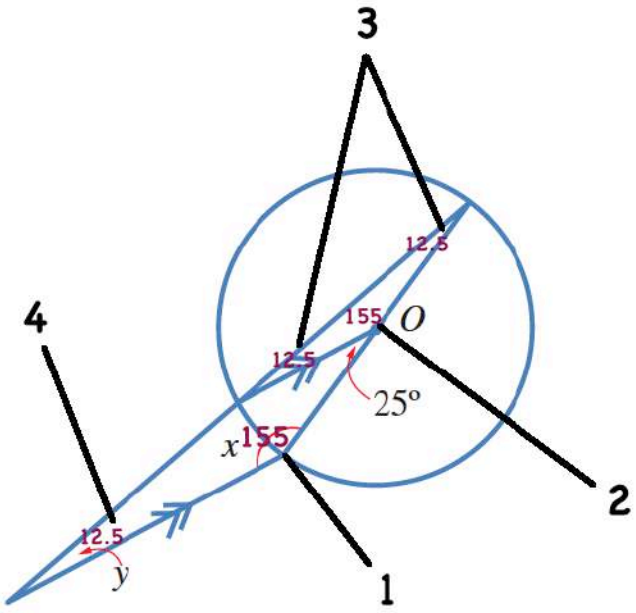
إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

9



الحل:

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



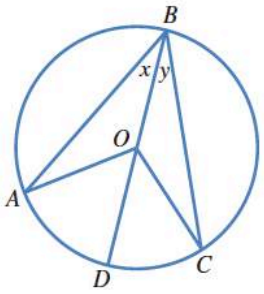
1- 155° تحالف مع الزاوية التي قياسها يساوي 25°

2- 155° تجاور على استقامة مع الزاوية التي قياسها 25°

3- 12.5° لأن المثلث متطابق الضلعين وزوايا القاعدة متساوية

4- 12.5° تناظر مع الزاوية التي قياسها 12.5°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 55



في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ $x°$، وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ $y°$:

10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO.

11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD.

الحل :

10-

$$m\angle BAO = x$$

لأن المثلث OAB متطابق الضلعين

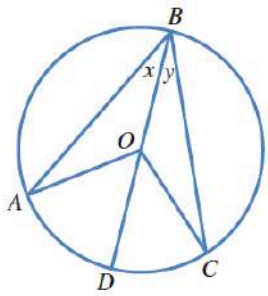
11-

$$m\angle AOD = 2x$$

لأنها زاوية مركزية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطية ABO

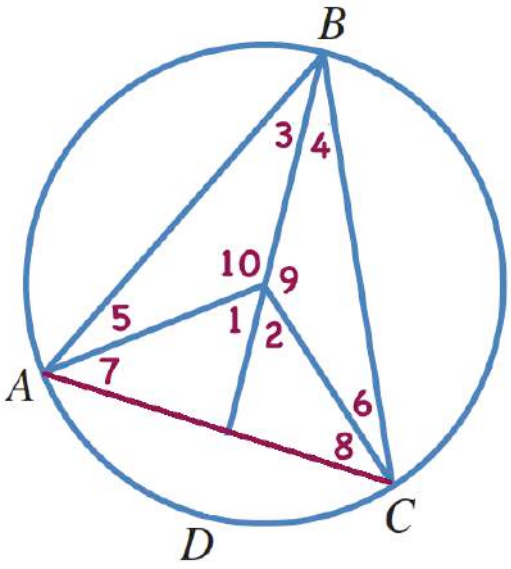
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 55

في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ $x°$، وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ $y°$:



12 أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.

الإثبات :



قياس الزاوية المركزية $= m\angle 1 + m\angle 2$

قياس الزاوية المحيطية $= m\angle 3 + m\angle 4$

الآن :

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 9 + m\angle 10 = 360^\circ$$

لكن $m\angle 9 = 180^\circ - (m\angle 4 + m\angle 6)$

$m\angle 10 = 180^\circ - (m\angle 3 + m\angle 5)$

$\Rightarrow$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 180^\circ - (m\angle 4 + m\angle 6) + 180^\circ - (m\angle 3 + m\angle 5) = 360^\circ$$

أيضا

$m\angle 4 = m\angle 6$

$m\angle 3 = m\angle 5$

$\Rightarrow$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 180^\circ - (m\angle 4 + m\angle 4) + 180^\circ - (m\angle 3 + m\angle 3) = 360^\circ$$

$\Rightarrow$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ + (m\angle 4 + m\angle 4) + (m\angle 3 + m\angle 3)$$

$\Rightarrow$

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 360^\circ = 360^\circ + 2m\angle 4 + 2m\angle 3$$

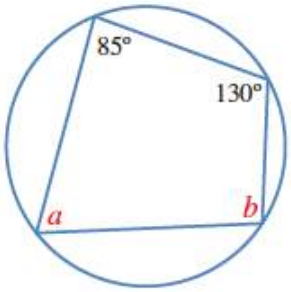
$\Rightarrow$

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 2(m\angle 4 + m\angle 3)$$

وهو المطلوب

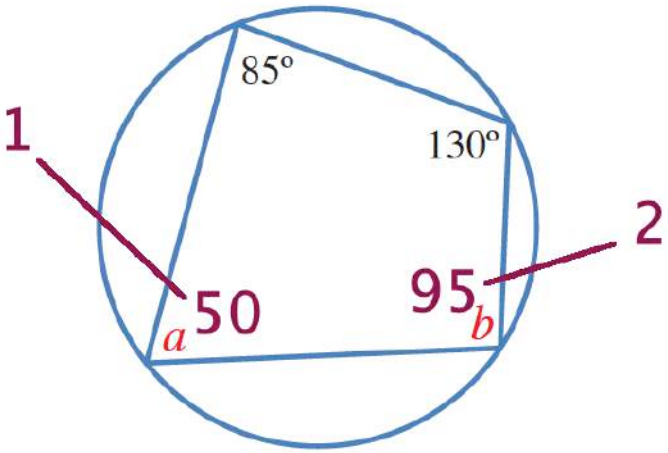
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13



الحل :

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم

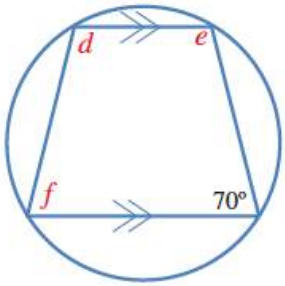


1- 50° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

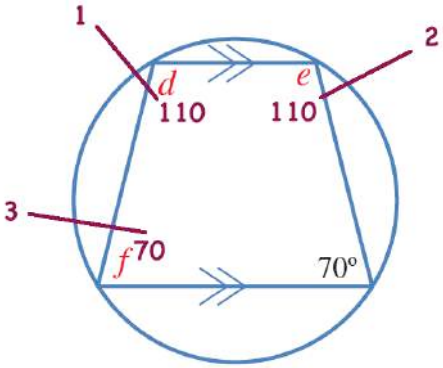
2- 95° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

14



الحل:



1- 110° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

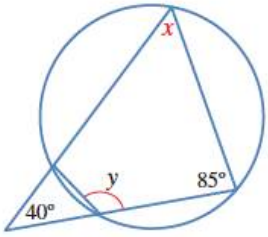
2- 110° لأن مجموع كل زاويتين متحالفتين يساوي 180°

3- 70° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

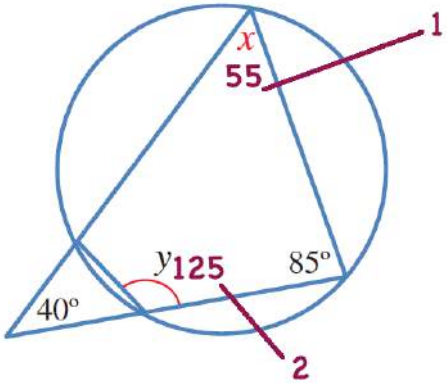
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

15



الحل:



1- 55° مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°

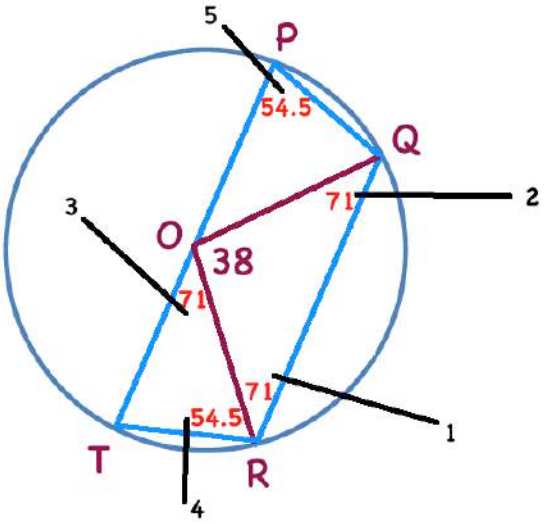
2- 125° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 56

في الشكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$ ، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ $38°$، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَ POT قُطْرٌ فيها يوازي QR. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

16 ROT. 17 QRT. 18 QPT.

الحل :



1- 71° المثلث متطابق الضلعين وزوايا القاعدة متساوية

3- 71° بالتبادل

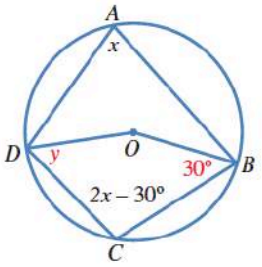
4- 54.5° المثلث متطابق الضلعين وزوايا القاعدة متساوية

5- 54.5° لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180°

حيث $54.5 = 180 - (71 + 54.5)$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 56

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O:



19 لماذا $3x - 30^\circ = 180^\circ$؟

20 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

الحل :

19) $x + 2x - 30 = 180$

لأن مجموع كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي 180 بالتالي

$$3x - 30 = 180$$

20)

نجد قيمة $\boldsymbol{x}$ في البداية

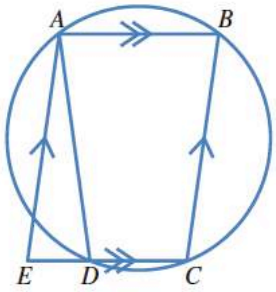
$$3x - 30 = 180$$
$$3x = 210$$
$$x = 70$$

بالتالي $\boldsymbol{m\angle DOB = 140}$ لأنها مركزية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية $\boldsymbol{DAB}$ والتي قياسها 70

وعند تعويض قيمة $\boldsymbol{x}$ ينتج أن $\boldsymbol{m\angle DCB = 110}$

ولأن مجموع قياس الزوايا في الشكل الرباعي 360°

$$\boldsymbol{y = 360 - (30 + 140 + 110) = 80^\circ}$$



21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَ أضلاعٍ. أُبيِّنُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

الحل :

لنفرض أن

$$m\angle AED = x$$

بالتالي

$$m\angle ABC = x$$

لأنهما زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع

لكن $m\angle ADC + m\angle ABC = 180^\circ$ لأن

ABC, ADC

زاويتان متقابلتان في رباعي دائري

وأيضا

$$m\angle ADE + m\angle ADC = 180^\circ$$

تجاور على استقامة بالتالي

$$m\angle ADE + 180^\circ - x = 180^\circ$$

بالتالي

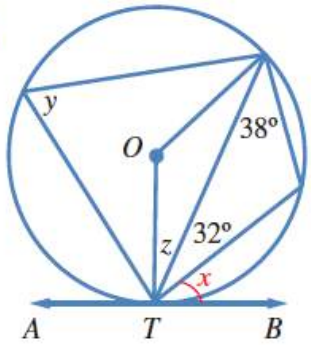
$$m\angle ADE = x$$

بالتالي

$$m\angle ADE = m\angle AED$$

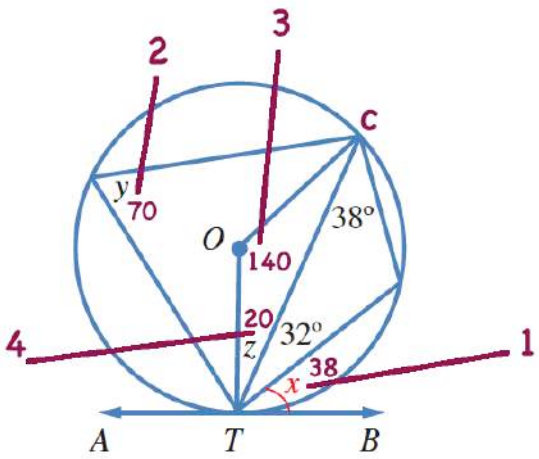
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

22



الحل:

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



1- 38° زاوية مماسية مرسوم على ضلعها زاوية محيطية قياسها 38°

2- 70° زاوية محيطية مرسومة على ضلع زاوية مماسية هي CTB والتي قياسها

$$32 + 38 = 70^{\circ}$$

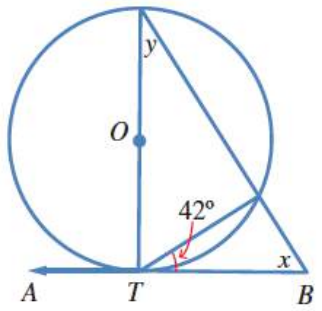
3- 140° زاوية مركزية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية المحيطية y

4- 20° لأن المثلث CTB متطابق الضلعين بالتالي زوايا القاعدة

$$= \frac{\mathbf{180 - 140}}{\mathbf{2}} = \mathbf{20}$$

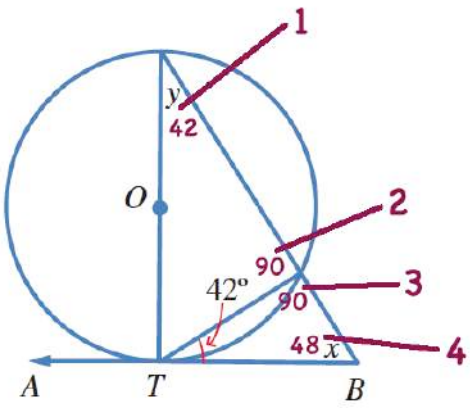
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

23



الحل:

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



1- 42° زاوية محيطية مرسومة على ضلع زاوية مماسية هي قياسها 42°

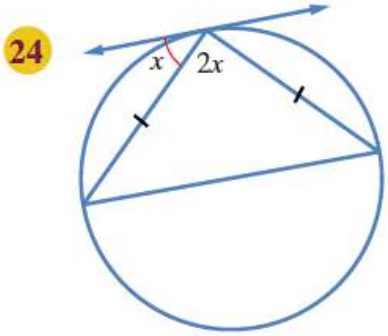
2- 90° زاوية محيطية مرسومة على القطر

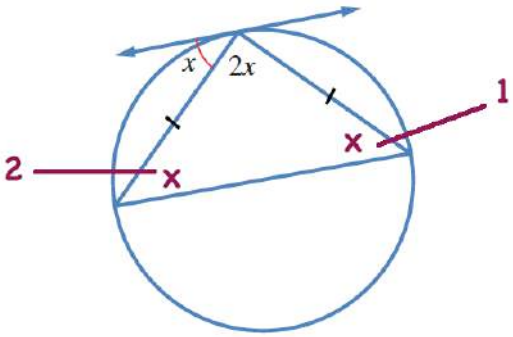
3- 90° تجاور على استقامة مع الزاوية في الخطوة 2

4- 48° مجموع زوايا المثلث

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ:

24





الحل :

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم

1- x° زاوية محيطية مرسومة على ضلع زاوية مماسية هي قياسها x°

2- x° لأن المثلث متطابق الضلعين

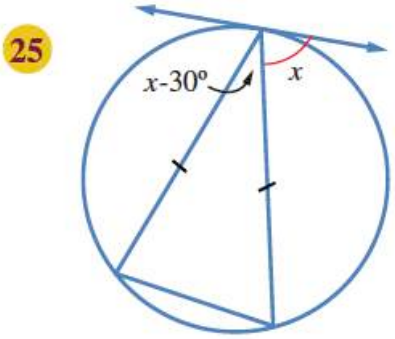
بالتالي

من مجموع زوايا المثلث نجد أن

$$2x + x + x = 180$$
$$4x = 180$$
$$x = 45^\circ$$

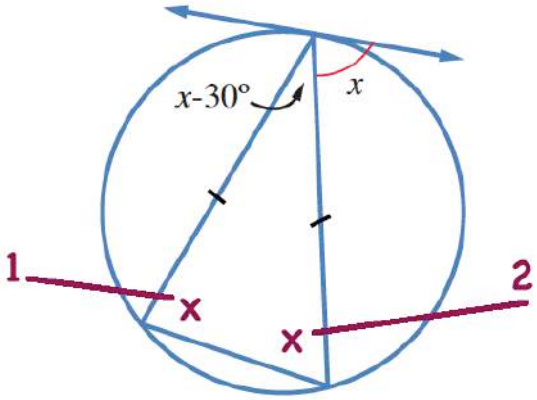
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ:

25



الحل :

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم



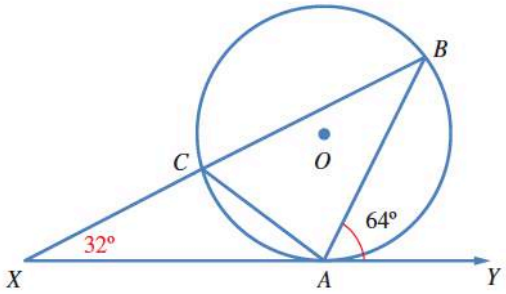
1- x° زاوية محيطية مرسومة على ضلع زاوية مماسية هي قياسها x°

2- x° لأن المثلث متطابق الضلعين

بالتالي

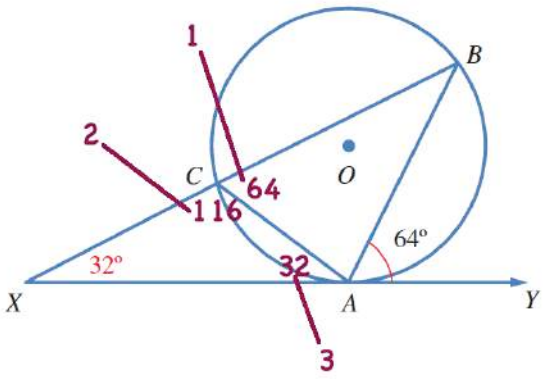
من مجموع زوايا المثلث نجد أن

$$x - 30 + x + x = 180$$
$$3x - 30 = 180$$
$$3x = 210^\circ$$
$$x = 70^\circ$$



26 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل :



سنثبت أن زوايا القاعدة في المثلث متساوية

تم ترقيم خطوات الحل على الرسم

1- 64° زاوية محيطية مرسومة على ضلع زاوية مماسية هي قياسها 64°

2- 116° تجاور على استقامة لأن

3- 32° من مجموع زوايا المثلث

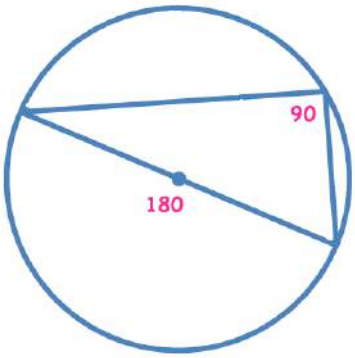
بالتالي زوايا القاعدة متساوية بالتالي المثلث متطابق الضلعين

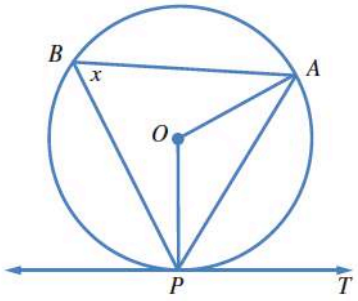
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس : الزوايا في الدائرة الصفحة : 57

27 تبريـــرٌ: قالَـــتْ فاتـــنُ إنَّ الزاويـــةَ المحيطيةَ المرســـومةَ على قُطْرِ الدائـــرةِ زاويةٌ قائمـــةٌ. هلْ قولُ فاتـــنَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل :

نعم صحيح قول فاتن لأن الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس تساوي 180°





28 تبريرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ x^o، فأُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

الحل :

الزاوية ABP **قياسها** x° من المعطيات

الزاوية AOP **قياسها** $2x^\circ$ لأنها مركزية مرسومة على نفس القوس مع الزاوية ABP

المثلث AOP متطابق الضلعين وبالتالي زوايا القاعدة متساوية

بالتالي

$$m\angle OPA = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x$$

الآن

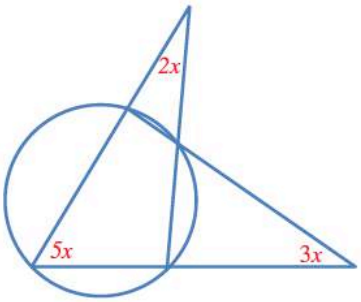
الزاوية OPT قائمة (أي تساوي 90°)لأنها تتكون من نصف قطر ومماس

لكن

$$m\angle OPT = m\angle OPA + m\angle APT$$
$$90 = 90 - x + m\angle APT$$
$$0 = -x + m\angle APT$$
$$x = m\angle APT$$

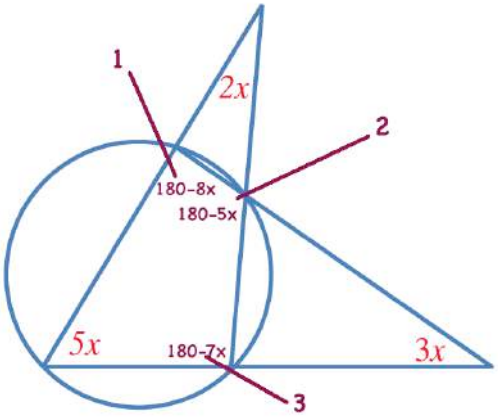
بالتالي

$$m\angle APT = m\angle ABP$$



29 تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ.

الحل :



1- من مجموع زوايا المثلث

2- كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي دائري مجموعهما يساوي 180°

3- من مجموع زوايا المثلث

الآن

من مجموع زوايا الشكل الرباعي الدائري

$$5x + (180 - 8x) + (180 - 5x) + (180 - 7x) = 360$$

$$5x - 8x - 5x + 180 - 7x = 0$$

$$-8x + 180 - 7x = 0$$

$$180 - 15x = 0$$

$$180 = 15x$$

$$x = \frac{180}{15} = 12$$

الدرسُ 4

معادلةُ الدائرةِ
Equation of a Circle

مفهومٌ أساسيٌّ

1. الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a,b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0,0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $x^2+y^2=r^2$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أتحقق من فهمي

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

a) المركزُ هوَ النقطةُ (0, 4)، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

b) المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ القُطْرِ 8 وحداتٍ.

الحل :

a) $(x-0)^2+(y-4)^2=9^2$

$$(x)^2+(y-4)^2=81$$

b) المركز $(0,0)$ $r=\frac{8}{2}=4$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=4^2$$

$$(x)^2+(y)^2=16$$

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعةُ المفهومِ

إذا كانَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (3–, 4)، وتمرُّ بالنقطةِ (2, 0).

الحل :

نجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ

$$r^2 = (4 - 2)^2 + (-3 - 0)^2$$
$$r^2 = (2)^2 + (-3)^2$$
$$r^2 = 4 + 9$$
$$r^2 = 13$$

معادلة الدائرة

$$(x - 4)^2 + (y - (-3))^2 = 13$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$، حيثُ $r>0$ فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$.

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ الآتيةِ:

$$x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$$

حيثُ: $f=-a, g=-b, c=a^2+b^2-r^2$، وهيَ تُسمّى **الصورةَ العامةَ** (general form) لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ

لإكمالِ المربَّــعِ للحدَّيْنِ x^2+ax، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطــرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x+\frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ x^2+ax إلى $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

الحل :

بإكمالِ المربَّعِ

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y = 10$$

$$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 - 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) = 10 + 1 + 25$$

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

المركز $(-1,5)$

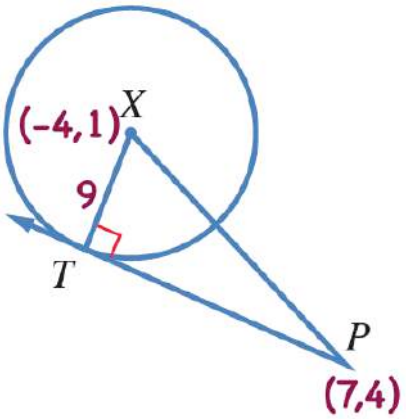
$r = \sqrt{36} = 6$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 62

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\,(7, 4)$، الذي يمسُّ الدائرةَ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$.

الحل :



لحساب XP ، نجِدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرة $(-4,1)$ والنقطةِ $(7,4)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ

$$(XP)^2 = \big(7 - (-4)\big)^2 + (4 - 1)^2$$
$$= (11)^2 + (3)^2$$
$$= 121 + 9$$
$$= 130$$

نظريةُ فيثاغورس

$$(XP)^2 = (XT)^2 + (TP)^2$$

$$130 = (9)^2 + (TP)^2$$
$$(TP)^2 = 130 - 81$$
$$(TP)^2 = 49$$
$$TP = 7$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 62

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$.

الحل :

نجدِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرة فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدًا فقطْ، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ

لدينا النظام التالي:

$$y = 4x - 5$$
$$(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$$
$$(x + 5)^2 + (4x - 5 - 9)^2 = 68$$
$$(x + 5)^2 + (4x - 14)^2 = 68$$
$$x^2 + 10x + 25 + 16x^2 - 112x + 196 = 68$$
$$17x^2 - 102x + 221 - 68 = 0$$
$$17x^2 - 102x + 153 = 0$$

نحسب المميز

$$b^2 - 4ac$$
$$= (-102)^2 - 4 \times 17 \times 153$$
$$= 10404 - 10404$$
$$= 0$$

بالتالي لدينا حل وحيد

$$x = \frac{-(-102) + 0}{2 \times 17}$$
$$x = \frac{102}{34} = 3$$

نعوض في المستقيم لنجد y

$$y = 4x - 5$$
$$y = 4 \times 3 - 5$$
$$y = 12 - 5 = 7$$

نقطة التماس هي $(3,7)$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ.

الحل :

$$x^2 + y^2 = 49$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

2 المركزُ هوَ النقطةُ $(-1, 3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 5 وحداتٍ.

الحل :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

3 المركزُ هوَ النقطةُ (2– ,3–)، وطولُ قُطْرِها 10 وحداتٍ.

الحل:

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

الصفحة : 63

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 المركزُ (2 ,1–)، وتمرُّ بالنقطةِ (3, 5).

الحل :

نجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ

$$r^2 = (3 - -1)^2 + (5 - 2)^2$$
$$r^2 = (4)^2 + (3)^2$$
$$r^2 = 16 + 9$$
$$r^2 = 25$$

معادلة الدائرة

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركزُها وإحداثيّا نقطةٍ تمرُّ بها في كلٍّ ممّا يأتي:

5 المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ $(-4, -9)$.

الحل:

المركز $(0,0)$

نجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ

$$r^2 = (-9 - 0)^2 + (-4 - 0)^2$$
$$r^2 = (-9)^2 + (-4)^2$$
$$r^2 = 81 + 16$$
$$r^2 = 97$$

معادلة الدائرة

$$(x)^2 + (y)^2 = 97$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

6 $(x+5)^2+(y-8)^2=36$

الحل :

المركز $(-5,8)$

نصف القطر $= r = \sqrt{36} = 6$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

7 $(x-19)^2+(y-33)^2=400$

الحل :

المركز (19,33)

نصف القطر $= r = \sqrt{400} = 20$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

8 $x^2 + (y+4)^2 = 45$

الحل :

المركز $(0, -4)$

نصف القطر $= r = \sqrt{45}$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

9 $(x-3)^2+(y+10)^2=28$

الحل :

المركز $(3,-10)$

نصف القطر $= r = \sqrt{28}$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

الحل :

الحل الأول:

بإكمالِ المربَّعِ

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y = -30$$

$$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 - 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = -30 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = -30 + 9 + 25$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = -30 + 34$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$$

المركز $(3,5)$

$r = \sqrt{4} = 2$

الحل الثاني:

يجب جعل معامل x^2, y^2 يساوي 1 قبل الحل

يجب تصفير احدى طرفي معادلة الدائرة قبل الحل

المركز $(-a,-b)$

حيث

$a =$ نصف معامل x –

$b =$ نصف معامل y –

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

حيث

$c =$ العدد في المعادلة

بالتالي

المركز $(3,5)$

$$r = \sqrt{9 + 25 - 30}$$
$$= \sqrt{34 - 30}$$
$$= \sqrt{4}$$
$$= 2$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$

الحل :

$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$$

الحل الأول:

بإكمالِ المربَّعِ

$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 = 9$$

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + y^2 = 9 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$(x^2 + 8x + 16) + y^2 = 9 + 16$$

$$(x+4)^2 + (y-0)^2 = 25$$

المركز $(-4,0)$

$$r = \sqrt{25} = 5$$

الحل الثاني:

يجب جعل معامل x^2, y^2 يساوي 1 قبل الحل

يجب تصفير احدى طرفي معادلة الدائرة قبل الحل

المركز (-a,-b)

حيث

$a = x$ معامل – نصف

$b = y$ معامل – نصف

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

حيث

$c =$ العدد في المعادلة

بالتالي

المركز $(-4,0)$

$$r = \sqrt{16 + 0 - (-9)}$$
$$= \sqrt{16 + 9}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

الحل :

$$2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$$

بالقسمة على 2

$$x^2 + y^2 + 10x + 18y + 79 = 0$$

الحل الأول:

بإكمالِ المربَّعِ

$$x^2 + y^2 + 10x + 18y + 79 = 0$$

$$x^2 + 10x + y^2 + 18y = -79$$

$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 + y^2 + 18y + \left(\frac{18}{2}\right)^2 = -79 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2$$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 + 18y + 81) = -79 + 25 + 81$$

$$(x + 5)^2 + (y + 9)^2 = 27$$

المركز $(-5, -9)$

$$r = \sqrt{27}$$

الحل الثاني:

يجب جعل معامل x^2, y^2 يساوي 1 قبل الحل

يجب تصفير احدى طرفي معادلة الدائرة قبل الحل

المركز (-a,-b)

حيث

$a =$ نصف معامل x –

$b =$ نصف معامل y –

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

حيث

$c =$ العدد في المعادلة

بالتالي

المركز $(-5, -9)$

$$r = \sqrt{25 + 81 - (79)}$$
$$= \sqrt{106 - 79}$$
$$= \sqrt{27}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

الحل :

$$x^2 + y^2 - 18x + 14y - 14 = 0$$

الحل الأول:

بإكمالِ المربَّعِ

$$x^2 + y^2 - 18x + 14y - 14 = 0$$

$$x^2 - 18x + y^2 + 14y = 14$$

$$x^2 - 18x + \left(\frac{18}{2}\right)^2 + y^2 + 14y + \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 14 + \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 18x + 81) + (y^2 + 14y + 49) = 14 + 81 + 49$$

$$(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 144$$

المركز $(9, -7)$

$$r = \sqrt{144} = 12$$

الحل الثاني:

يجب جعل معامل x^2, y^2 يساوي 1 قبل الحل

يجب تصفير احدى طرفي معادلة الدائرة قبل الحل

المركز (-a,-b)

حيث

$a =$ نصف معامل x –

$b =$ نصف معامل y –

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

حيث

$c =$ العدد في المعادلة

بالتالي

المركز $(9, -7)$

$$r = \sqrt{81 + 49 - (-14)}$$
$$= \sqrt{130 + 14}$$
$$= \sqrt{144} = 12$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

أكتــبُ معادلــةَ الدائرةِ بالصورتيْــنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$ ، حيثُ: f ، وَ g ، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14 المركزُ $(-1, -11)$، وطولُ القُطْرِ 26 وحدةً.

الحل :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-(-11))^2+(y-(-1))^2=13^2$$

$$x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$$

$$f=--11 \qquad g=--1 \qquad c=(-11)^2+(-1)^2-13^2$$

$$f=11 \qquad g=1 \qquad c=121+1-169=-47$$

$$x^2+y^2+2(11)x+2(1)y+-47=0$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أكتــبُ معادلــةَ الدائرةِ بالصورتيْــنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ، $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$ ، حيثُ: f ، وَ g ، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

15 المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

الحل :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-(3))^2+(y-(0))^2=(4\sqrt{3})^2$$

$$x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$$

$$f=-3 \qquad g=0 \qquad c=(-3)^2+(0)^2-(4\sqrt{3})^2$$

$$c=9+0-48=-39$$

$$x^2+y^2+2(-3)x+2(0)y+-39=0$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

أكتــبُ معادلــةَ الدائرةِ بالصورتيْــنِ: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$ ، حيثُ: f ، وَ g ، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

16 المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$.

الحل :

نجد نصف القطر أولا

$$r^2 = (1 - -4)^2 + (3 - 7)^2$$
$$r^2 = (5)^2 + (-4)^2$$
$$r^2 = 25 + 16$$
$$r^2 = 41$$
$$\boldsymbol{r = \sqrt{41}}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-(-4))^2+(y-(7))^2=(\sqrt{41})^2$$

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

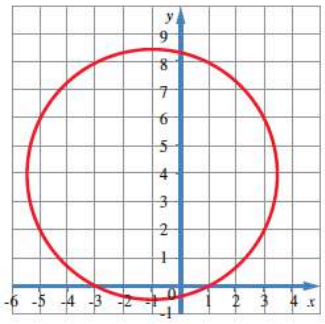
$$f = - -4 \qquad g = -7 \qquad c = (-4)^2 + (7)^2 - (\sqrt{41})^2$$

$$c = 16 + 49 - 41 = 24$$

$$x^2 + y^2 + 2(4)x + 2(-7)y + 24 = 0$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

17 أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ.



الحل :

من خلال الرسم نلاحظ أن الدائرة تمر بالنقط $(1,0), (-3,0), (3,6)$

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

$(1,0)$

$$1^2 + 0^2 + 2f \times 1 + 2g \times 0 + c = 0$$
$$1 + 2f + c = 0$$
$$2f + c = -1 \ \dots\dots\dots (1)$$

$(-3,0)$

$$(-3)^2 + 0^2 + 2f \times -3 + 2g \times 0 + c = 0$$
$$9 - 6f + c = 0$$
$$-6f + c = -9 \ \dots\dots\dots (2)$$

$(3,6)$

$$3^2 + 6^2 + 2f \times 3 + 2g \times 6 + c = 0$$
$$9 + 36 + 6f + 12g + c = 0$$
$$45 + 6f + 12g + c = 0$$
$$6f + 12g + c = -45 \ \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{array}{rr} & 2f + c = -1 \\ - & -6f + c = -9 \\ \hline & 8f = 8 \end{array}$$

$$f = 1$$
$$2 \times 1 + c = -1 \rightarrow c = -1 - 2 = -3$$
$$6 \times 1 + 12g + -3 = -45$$
$$12g = -48 \rightarrow g = -4$$

معادلة الدائرة

$$x^2 + y^2 + 2x + 2(-4)y + (-3) = 0$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 63

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم تُمثِّلُ النقطةُ (7,4) موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ (−75,95) على مستوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟

الحل :

يجد فواز المسافة بين بيته وبين موقع المحطة

$$r^2 = (7 - -75)^2 + (4 - 95)^2$$
$$r^2 = (82)^2 + (-91)^2$$
$$r^2 = 6724 + 8281$$
$$r^2 = 15005$$
$$r = \sqrt{15005} \approx 122.5$$

وبما أن

$$122.5 < 224$$

فإن البث سيصل لبيته

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 64

19 أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ التي معادلتُها: $(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$.

الحل :

$$(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$$
$$(2(x-2))^2+(2(y+3))^2=100$$

$$2^2(x-2)^2+2^2(y+3)^2=100$$

$$4(x-2)^2+4(y+3)^2=100$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

المركز $(2,-3)$

نصف القطر $= r=\sqrt{25}=5$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

20 دائـرةٌ معادلتُها $x^2+y^2+px+6y=96$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحـدةً، وَp عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ.

الحل :

$$x^2+y^2+px+6y-96=0$$

$$r=\sqrt{(\frac{-p}{2})^2+(\frac{-6}{2})^2-(c)}$$

$$11=\sqrt{\frac{(-p)^2}{4}+\frac{(-6)^2}{4}-(-96)}$$

$$121=\frac{p^2}{4}+\frac{36}{4}+96$$

$$484=p^2+36+384$$

$$p^2=484-420$$

$$p^2=64$$

$$p=\sqrt{64}=\mp 8$$

$p=8$ حسب معطيات السؤال موجب

المركز $(-4,-3)$

المسافة عن نقطة الأصل $(0,0)$

$$d^2=(0--4)^2+(0--3)^2$$

$$d^2=(4)^2+(3)^2$$

$$d^2=16+9$$

$$d^2=25$$

$$d=5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

تُمثِّلُ النقطتانِ $D\ (2, 9)$ وَ $E\ (14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

21 أَجِدُ إحداثيَّيِ المركزِ C.

22 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ.

23 أَكتبُ معادلةَ الدائرةِ.

الحل :

المركز هو احداثيات منتصف القطر

المركز $(\frac{14+2}{2}, \frac{-7+9}{2})$

المركز $(\frac{16}{2}, \frac{2}{2})$

المركز $(8,1)$

طول نصف القطر هو المسافة بين المركز ونقطة على الدائرة مثل $(2, 9)$

$$r^2 = (8-2)^2 + (1-9)^2$$
$$r^2 = (-6)^2 + (-8)^2$$
$$r^2 = 36 + 64$$
$$r^2 = 100$$
$$r = 10$$

معادلة الدائرة

$$(x-8)^2 + (y-1)^2 = 100$$

24 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 3x - 2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$.

الحل :

سنثبت أنه يوجد نقطة تقاطع وحيدة بين المستقيم والدائرة

$$y = 3x - 2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$$

$$x^2 + (3x - 2)^2 + 4x - 24(3x - 2) + 108 = 0$$
$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 + 4x - 72x + 48 + 108 = 0$$
$$10x^2 - 80x + 160 = 0$$

نحسب المميز

$$b^2 - 4ac$$
$$= (-80)^2 - 4 \times 10 \times 160$$
$$= 6400 - 6400$$
$$= 0$$

بالتالي يوجد نقطة تقاطع وحيدة لأن المميز صفر

بالتالي المستقيم مماس للدائرة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 64

25 رُسِمَ مماسٌّ منَ النقطةِ $P(8,5)$ للدائرةِ التي معادلتُها: $x^2+y^2+8x-6y-75=0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ.

الحل :

أولا نجد احداثيات المركز

$$\text{المركز } \left(\frac{x \text{ معامل سالب}}{2}, \frac{y \text{ معامل سالب}}{2}\right)$$

المركز $(-4,3)$

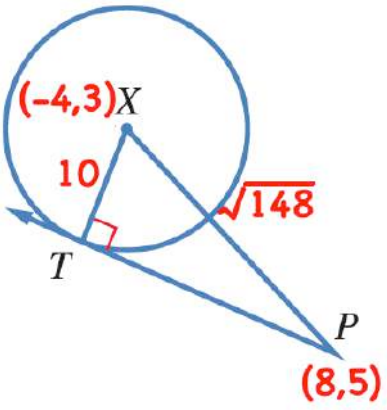
ثانيا نجد نصف القطر

$$r=\sqrt{(\frac{-8}{2})^2+(\frac{6}{2})^2-(-75)}$$

$$r=\sqrt{16+9+75}$$
$$r=\sqrt{100}=10$$

ثالثا نجد المسافة بين النقطة والمركز

$$d^2=(8--4)^2+(5-3)^2$$
$$d^2=(12)^2+(2)^2$$
$$d^2=144+4$$
$$d^2=148$$
$$d=\sqrt{148}$$



حسب فيثاغورس

$$\mathbf{148=100+(PT)^2}$$
$$\mathbf{(PT)^2=148-100}$$
$$\mathbf{(PT)^2=48}$$
$$\mathbf{PT=\sqrt{48}=4\sqrt{3}}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 64

26 تبريرٌ: قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2+y^2-14x+6y+59=0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل :

لكي نقول إنها معادلة دائرة يجب أن يكون

$$(\frac{14}{2})^2+(\frac{-6}{2})^2-(59)>0$$
$$(7)^2+(-3)^2-(59)>0$$
$$49+9-(59)>0$$
$$58-(59)>0$$
$$-1>0$$

وهذا لم يتحقق وبالتالي قول عبد الرحمن لا غبار عليه (أحسنت يا عبد الرحمن)

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 64

27 تحـدٍّ: ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُـهُ، وهـوَ النقطةُ (7, 3). إذا كانَـتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحـورَ y، والصغرى تمسُّ المحورَ x، فأَكتبُ معادلتَي الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشـكِّلانِ المحيـطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ.

الحل :

عندما تمس الدائرة محور y فإن نصف القطر يكون |الاحداثي x| بالتالي نصف قطر الدائرة الكبرى يساوي $|7| = 7$

عندما تمس الدائرة محور x فإن نصف القطر يكون |الاحداثي y| بالتالي نصف قطر الدائرة الصغرى يساوي $|3| = 3$

مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى = مساحة الممر

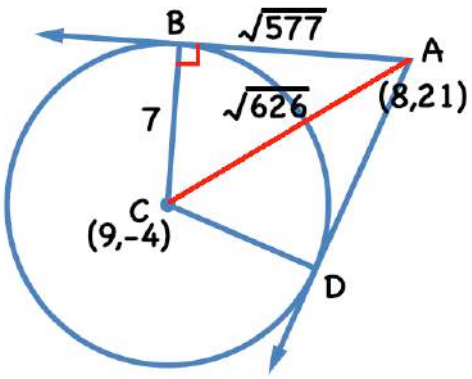
$$\text{مساحة الممر} = \pi \times (7)^2 - \pi \times (3)^2$$

$$\text{مساحة الممر} = 49\,\pi - 9\,\pi$$
$$\text{مساحة الممر} = 40\,\pi$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ

28 تحدٍّ: رُسِمَ منَ النقطةِ $A\,(8,21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2+(y+4)^2=49$، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟

الحل :



$r = 7$ المركز $(9,-4)$

نحسب مساحة المثلث ACB ونضرب في 2 لأن المثلثان متطابقان وهما يشكلان الشكل الرباعي

نحسب المسافة AC

$$(AC)^2 = (8-9)^2 + (21--4)^2$$
$$(AC)^2 = (-1)^2 + (25)^2$$
$$(AC)^2 = 1 + 625$$
$$(AC)^2 = 626$$
$$AC = \sqrt{626}$$

نحسب AB حسب فيثاغورس

$$\mathbf{626 = 49 + (AD)^2}$$
$$(AB)^2 = 626 - 49$$
$$(AB)^2 = 577$$
$$AB = \sqrt{\mathbf{577}}$$

نحسب مساحة المثلث ACB

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 7 \times \sqrt{\mathbf{577}} \approx \mathbf{84.07}$$

مساحة الشكل $ABCD$

$$84.07 \times 2 = 168.14$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 4 : معادلةُ الدائرةِ الصفحة : 64

29 تحدٍّ: أَكتبُ الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ منْ دونِ استعمالِ طريقةِ إكمالِ المربَّعِ.

الحل :

المركز $(-4,5)$

$$r = \sqrt{(\frac{-8}{2})^2 + (\frac{10}{2})^2 - (24)}$$
$$r = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 - (24)}$$
$$r = \sqrt{16 + 25 - (24)}$$
$$r = \sqrt{41 - (24)}$$
$$r = \sqrt{17}$$

معادلة الدائرة

$$(x + 4)^2 + (x - 5)^2 = 17$$

الدرسُ 5

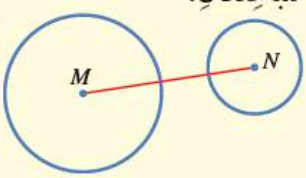
الدوائرُ المتماسَّةُ
Tangent Circles

يُمكِنُ أنْ تتقاطعَ الدائرتانِ المرسومتانِ في مستوًى واحدٍ في نقطةٍ واحدةٍ، أوْ نقطتيْنِ، وقدْ لا تتقاطعانِ أبدًا وتُسمّى الدائرتانِ المُتقاطِعتانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ tangent circles

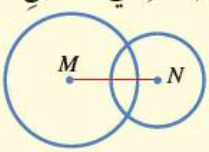
مفهومٌ أساسيٌّ

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

1. مُتباعِدتانِ.

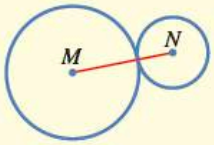


2. مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.

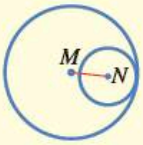


3. إحداهُما داخلَ الأُخرى.

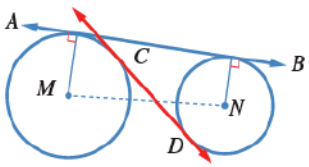
4. مُشترِكتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتانِ. ولهذا الوضعِ صورتانِ:



متماسَّتانِ منَ الخارجِ.



متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

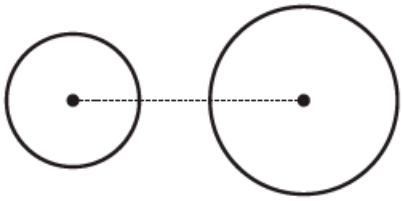


إذا كانَ المستقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا** (common tangent).

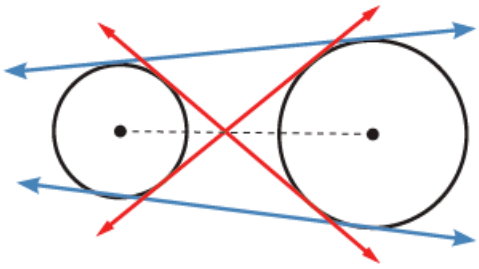
وإذا قطعَ المماسُّ المشتركُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الداخليَّ** (common internal tangent)، وإلّا فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الخارجيَّ** (common external tangent). ففي الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.

يُمكِنُ رسمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما.

مثال 1



كمْ مماسًّا مُشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.



أرسمُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، ثمَّ أرسمُ المماسّاتِ التي تقطعُها بلونٍ أحمرَ، والمماسّاتِ التي لا تقطعُها بلونٍ أزرقَ.

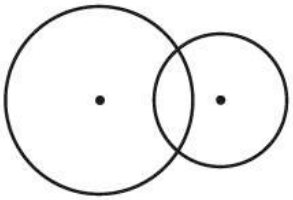
أُلاحِظُ أنَّهُ يوجدُ للدائرتيْنِ مماسّانِ داخليانِ، وآخرانِ خارجيانِ.

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 68

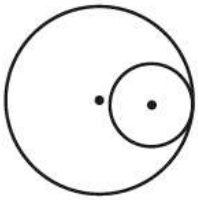
أتحقق من فهمي

كمْ مماسًّا مُشترَكًا يُمكِنُ رسمُهُ للدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي؟ أرسمُ المماسّاتِ، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

a)

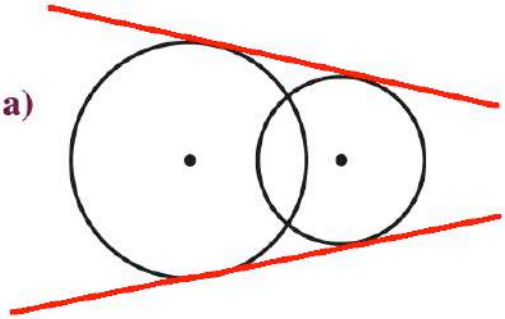


b)



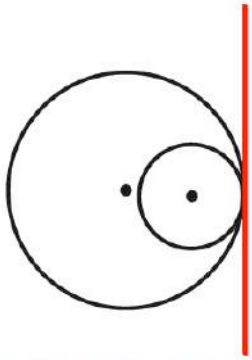
الحل :

a)



مماسان خارجيان

b)



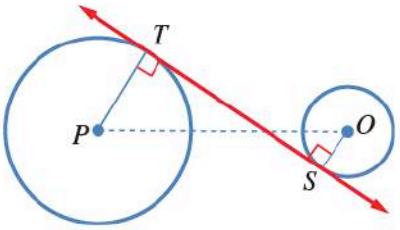
مماس واحد خارجي

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 69

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المشتركِ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$PT = 12$ cm, $OS = 4$ cm, $PO = 34$ cm



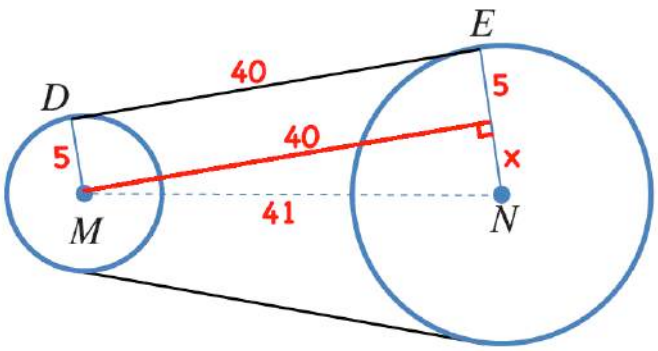
الحل :

$$(PO)^2 = (12 + 4)^2 + (TS)^2$$
$$(34)^2 = (16)^2 + (TS)^2$$
$$(TS)^2 = (34)^2 - (16)^2$$
$$(TS)^2 = 1156 - 256$$
$$(TS)^2 = 900$$
$$TS = \sqrt{900} = 30$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 70

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسـنَّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علمًا بأنَّ طولَ السلسـلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسـنَّنتيْنِ 40 cm، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الصغرى 5 cm، والمسافةَ بينَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنَّنتيْنِ 41 cm.



الحل :

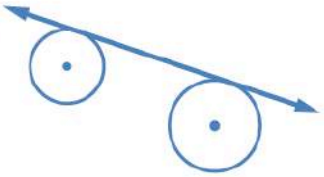
$$41^2 = x^2 + 40^2$$
$$x^2 = 41^2 - 40^2$$
$$x^2 = 1681 - 1600$$
$$x^2 = 81$$
$$x = 9$$

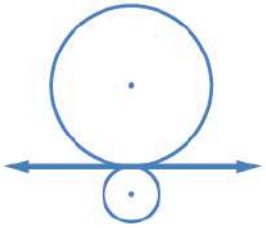
بالتالي

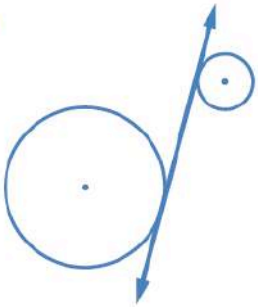
$$NE = 5 + 9 = 14cm$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 71

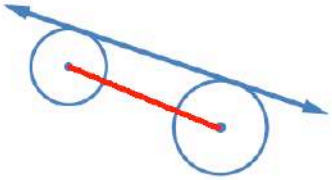
أُحدِّدُ إذا كانَ المماسُّ داخليًّا أمْ خارجيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

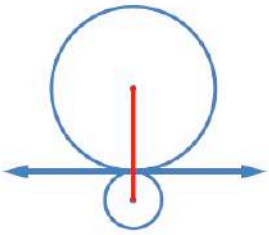
2 

3 

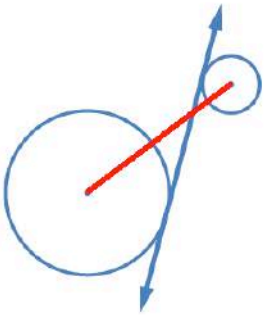
الحل :

1 

خارجي لأنه لا يقطع الخط الواصل بين المركزين

2 

داخلي لأنه يقطع الخط الواصل بين المركزين

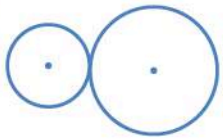
3 

داخلي لأنه يقطع الخط الواصل بين المركزين

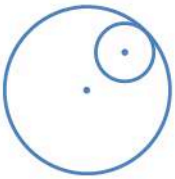
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 71

كمْ مماسًّا مشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ لكلٍّ منْ أزواجِ الدوائرِ الآتيةِ؟ أرسمُها، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ وداخليةٍ.

4



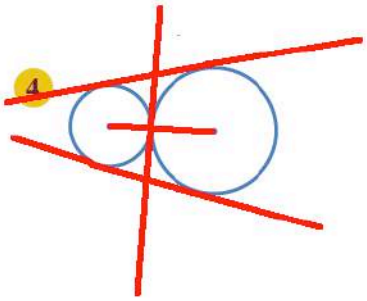
5



6

الحل :

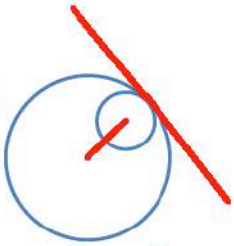
4



مماس واحد داخلي

مماسان خارجيان

5

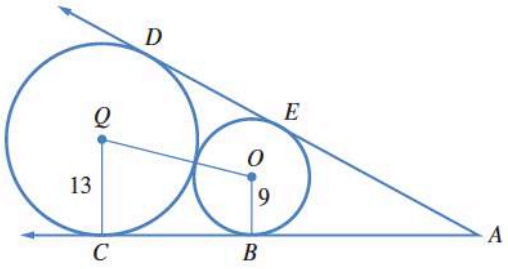


مماس واحد
خارجي

6

صفر مماس

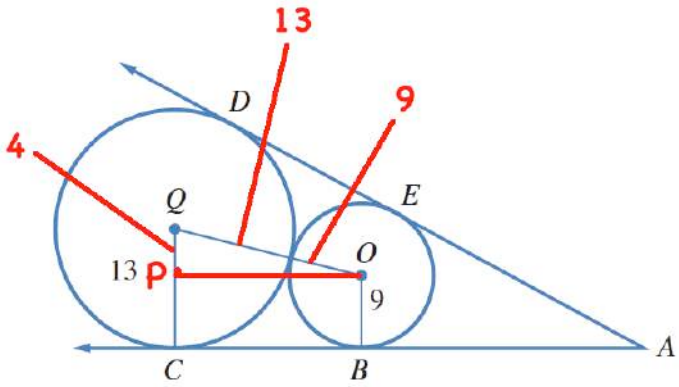
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 71



7 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ مِنَ النقطةِ A لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ. أَجِدُ طولَ $\overline{CB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ.

الحل :

حسب فيثاغورس



$$(QO)^2 = (QP)^2 + (OP)^2$$

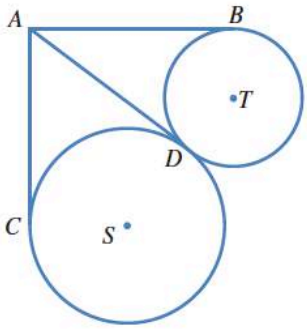
$$(22)^2 = (4)^2 + (OP)^2$$

$$(OP)^2 = 484 - 16$$

$$(OP)^2 = 468$$

$$OP = \sqrt{468} \approx 21.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 71



8 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، والمماسّاتِ: $\overline{AB}$، وَ $\overline{AC}$، وَ $\overline{AD}$. إذا كانَ $AC = 2x + 5$، وَ $AB = 3x - 2$، فما قيمةُ x؟

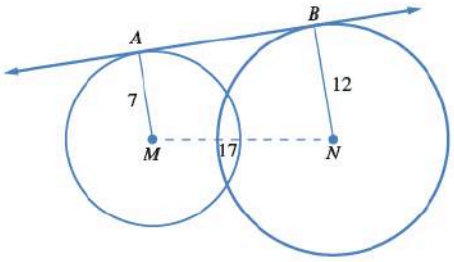
الحل :

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها T AB = AD

مماسان مرسومان من النقطة A للدائرة التي مركزها S AC = AD

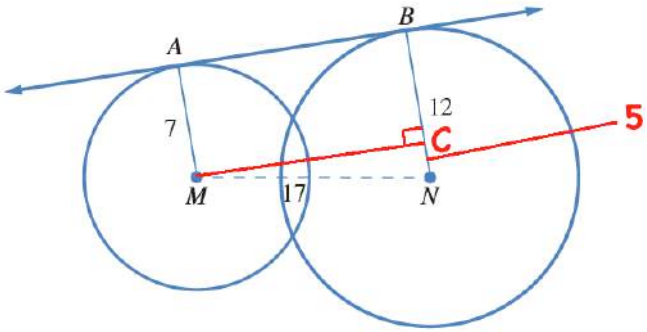
$$AB = AC$$
$$3x - 2 = 2x + 5$$
$$3x - 2x = 5 + 2$$
$$x = 7$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ



9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.

الحل :



يُرسَم العمود MC على NB، فينتج المستطيل ABCM، والمثلث القائم MCN

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث MCN، فإن

$$17^2 = (MC)^2 + 5^2$$
$$(MC)^2 = 289 - 25$$
$$(MC)^2 = 264$$
$$MC = \sqrt{264}$$
$$MC \approx 16.2$$
$$AB = MC \approx 16.2$$

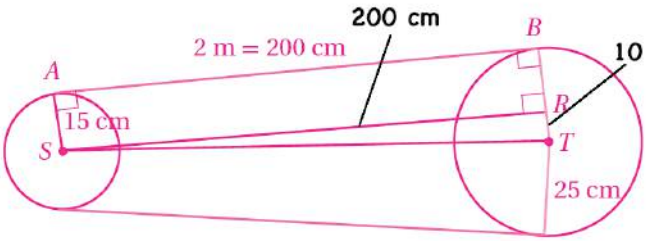
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ

10 **حــزامٌ ناقلٌ**: يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريْنِ، نصفُ قُطرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟

الحل :

لتكن النقطتان S، و Tمركزي الدولابين، ولتكن A، B نقطتي تماس الحزام مع الدولابين

يُرسَم العمود SR على TB، فينتج المستطيل ABRS، والمثلث القائمSRT.



بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث SRT، فإن

$$(ST)^2 = (SR)^2 + 10^2$$
$$(ST)^2 = 200^2 + 100$$
$$(ST)^2 = 40000 + 100$$
$$(ST)^2 = 40100$$
$$ST = \sqrt{40100} \approx 200.2\ cm$$

11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما إذا كانَتْ معادلتاهُما: $x^2+y^2=25, x^2+y^2-6x+8y-11=0$.

الحل :

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$
$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = 11$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 11 + 9 + 16$$
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

مركز هذه الدائرة هو (3 , -4)، وطول نصف قطرها 6 وحدات،

$$x^2 + y^2 = 25$$

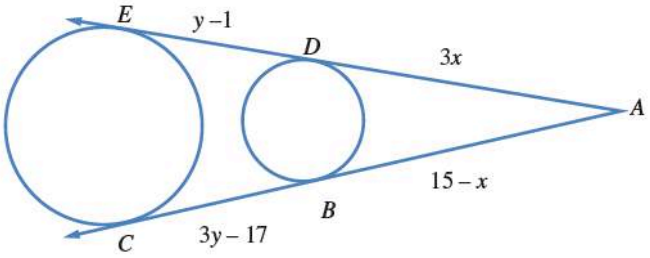
ومركز الدائرة هذه هو (0 , 0)، وطول نصف قطرها 5 وحدات

المسافة بين مركزيهما هي $\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

مجموع نصفي القطرين هو 11، والفرق بينهما 1

بما أن $1 < 5 < 11$

فإن الدائرتين متقاطعتان في نقطتين



12 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.

الحل :

$$AB = AD$$

مماسان للدائرة الصغرى، مرسومان من النقطةA

$$3x = 15 - x$$
$$3x + x = 15$$
$$4x = 15$$
$$x = \frac{15}{4}$$
$$x = 3.75$$

$$AE = AC$$

مماسان للدائرة الكبرى، مرسومان من النقطةA

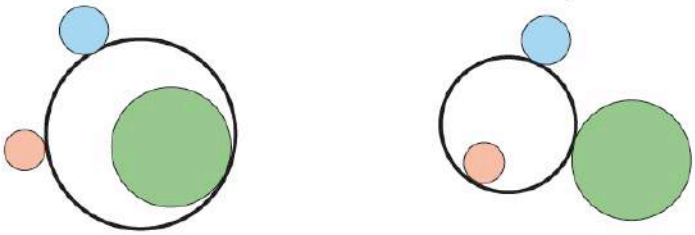
$$3x + y - 1 = 15 - x + 3y - 17$$

$$3x + x - 1 - 15 + 17 = 3y - y$$

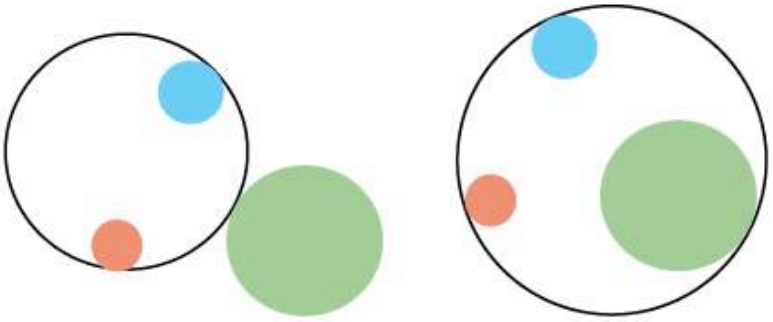
$$2y = 4x + 1$$
$$2y = 15 + 1 = 16$$
$$y = 8$$

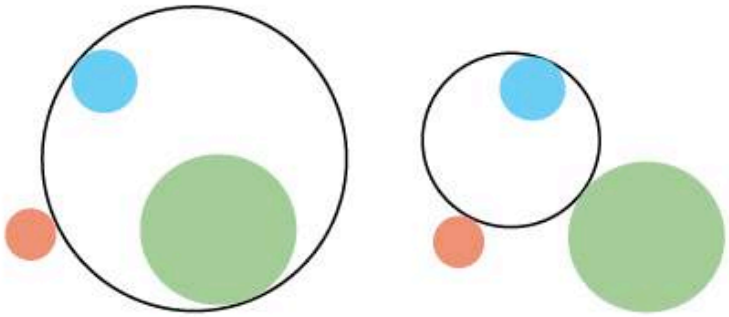
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ الصفحة : 72

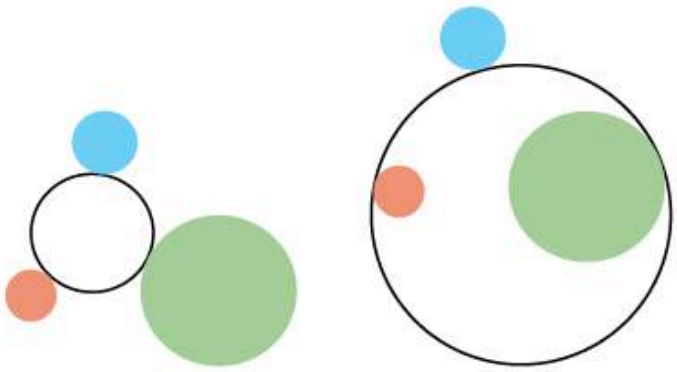
13 تحـدٍّ: يُمثِّلُ الشـكلانِ الآتيانِ طريقتيْنِ لرسـمِ دائرةٍ تُلامِـسُ كلًّا منَ الدائـرةِ الزرقاءِ، والخضـراءِ، والحمراءِ. أَجِدُ 6 طرائقَ أُخرى لرسمِ هذهِ الدائرةِ.



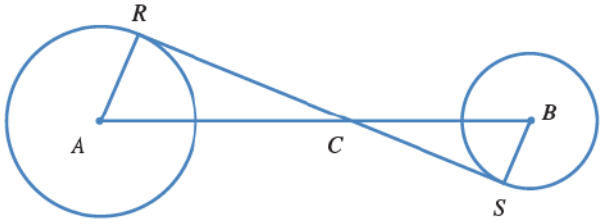
الحل :







رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثانية الدرس 5 : الدوائرُ المتماسَّةُ



14 **برهــانٌ**: تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشــكلِ المجاورِ مماسًّــا داخليًّا مشــتركًا لدائرتيْنِ مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ: $\frac{RC}{SC}=\frac{AC}{BC}$.

الحل :

المثلثان BSC، و ARC متشابهان؛ لأن

$$m\angle RCA = m\angle SCB$$

زاويتان متقابلتان بالرأس

$$m\angle ARC = m\angle BSC = 90^\circ$$

المماس يعامد نصف القطر المار بنقطة التماس

إذن يتشابه المثلثان ARC، و BSC ؛ لأن زاويتين في المثلث الأول مطابقتان لزاويتين مناظرتين لهما في المثلث الثاني

نتيجة لهذا التشابه؛ فإن الأضلاع المتناظرة في المثلثين ARC تكون متناسبة؛ أي إن

$$\frac{AR}{BS}=\frac{RC}{SC}=\frac{AC}{BC}$$

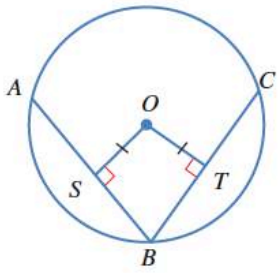
إذن

$$\frac{RC}{SC}=\frac{AC}{BC}$$

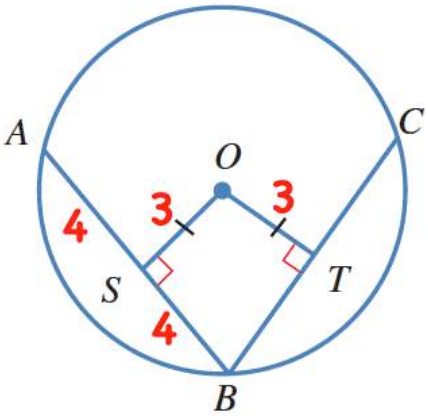
اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وترانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $AS = 4\text{ cm}$، وَ $OT = 3\text{ cm}$، فـإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



a) 6 b) 7
c) 8 d) 10



الحل:

$$BC = AB$$
$$AB = AS + SB$$
$$AB = 4 + 4 = 8$$
$$BC = 8$$

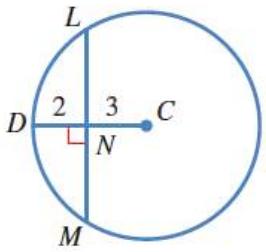
الجواب: c

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة

الصفحة : 73

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:

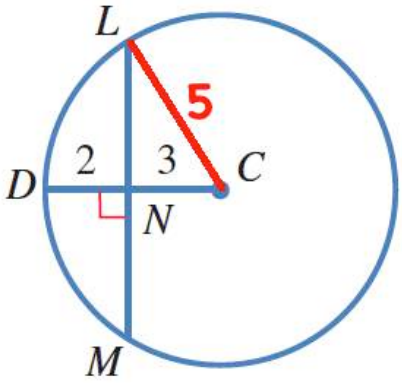


a) 5 b) 8

c) 10 d) 13

الحل :

$r = 2 + 3 = 5$



حسب فيثاغورس

$$5^2 = (LN)^2 + 3^2$$

$$25 - 9 = (LN)^2$$
$$16 = (LN)^2$$
$$4 = LN$$

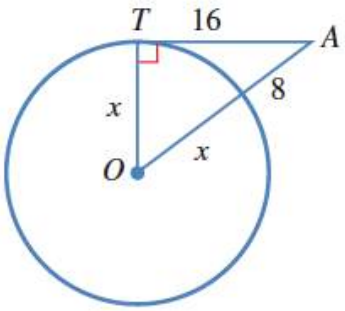
بالتالي

$$LM = 2 \times 4 = 8$$

الجواب: b

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ هوَ:



a) 5.75 b) 12

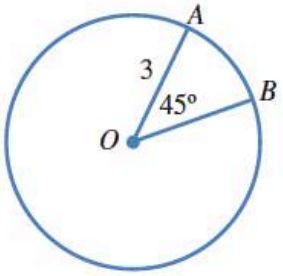
c) 4 d) 8

الحل :

$$(x+8)^2 = x^2 + 16^2$$
$$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 256$$
$$16x + 64 - 256 = 0$$
$$16x - 192 = 0$$
$$16(x-12) = 0$$
$$x - 12 = 0$$
$$x = 12$$

الجواب: b

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\overset{\frown}{AB}$ بدلالةِ π في الشـكلِ الآتي هوَ:



a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

الحل :

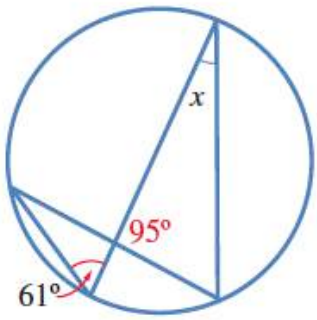
$$\text{طول القوس} = \frac{45}{360} \times 2 \times \pi \times 3$$

$$\text{طول القوس} = \frac{1}{8} \times 6 \times \pi$$

$$\text{طول القوس} = \frac{3\pi}{4}$$

الجواب: d

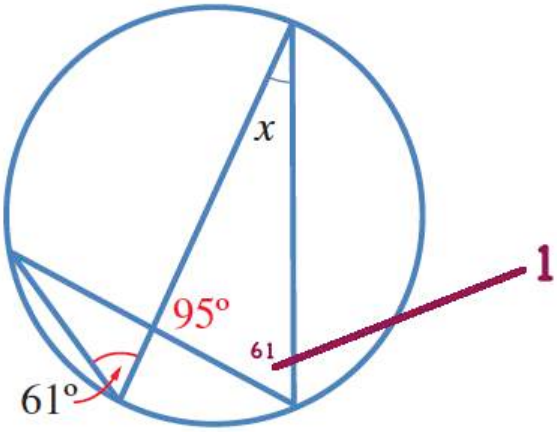
5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) $61°$ b) $24°$

c) $34°$ d) $95°$

الحل :



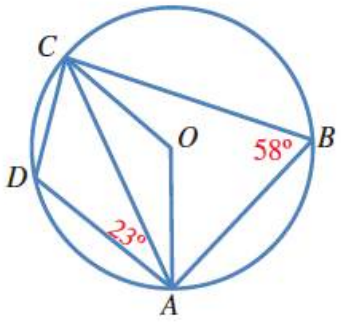
1 61 محيطية مرسومة على نفس القوس مع محيطية قياسها 61

2

$$x = 180 - (95 + 61)$$
$$x = 180 - (156)$$
$$x = 24$$

الجواب: b

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55°

b) 35°

a) 41°

c) 45°

الحل :

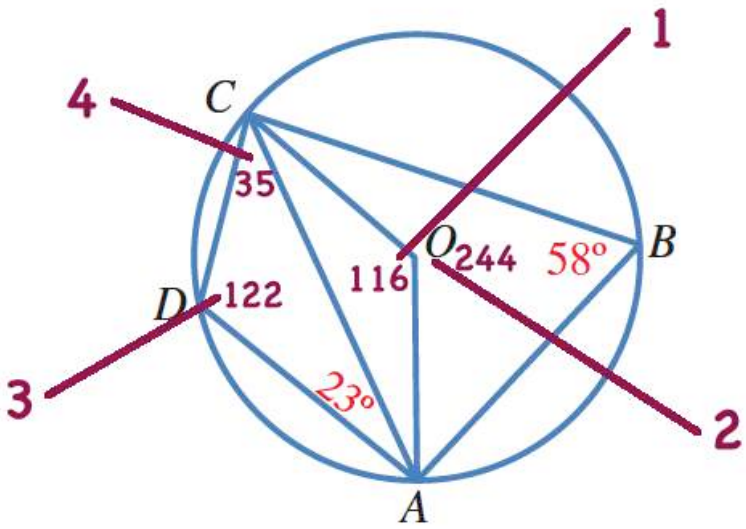
1 116 مركزية مع المحيطية (58)

2 244 زاويتان حول نقطة مع (116)

3 122 محيطية مع المركزية (244)

4 35 من مجموع زوايا المثلث

الجواب: b



7 النقطــةُ التي لا تقــعُ علــى الدائــرةِ التــي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2,-1)$ b) $(1,8)$

c) $(3,4)$ d) $(0,5)$

الحل:

هي النقطة التي لا تحقق المعادلة وهي (0,5) حيث

$$(0+2)^2+(5-4)^2=25$$

$$(2)^2+(1)^2=25$$

$$4+1=25$$

$$5=25$$

وهو غير صحيح

الجواب: d

8 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2

c) 1 d) 0

الحل:

الجواب: c

9 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التـــي تُمثِّلُ النقطتانِ $A(4,-3)$، وَ $B(6,9)$ طرفا قُطْرٍ فيها.

الحل:

احداثيات المركز $\left(\frac{4+6}{2},\frac{-3+9}{2}\right)$

$$\left(\frac{10}{2},\frac{6}{2}\right)=(5,3)$$

$$r=\sqrt{(6-5)^2+(9-3)^2}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(6)^2}$$

$$r=\sqrt{1+36}$$

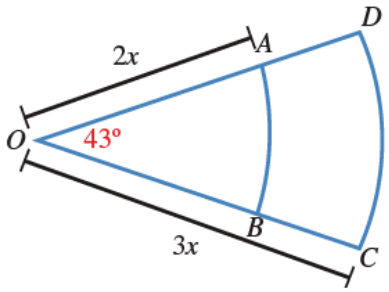
$$r=\sqrt{37}$$

معادلة الدائرة $(x-5)^2+(y-3)^2=37$

يُمثِّلُ الشـــكلُ التالي قطاعيْنِ دائريْنِ منْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُـــهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائـــرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْـــرِ الدائرةِ الكبـــرى $3x$، وقياسُ الزاويـــةِ AOB هوَ 43°، ومساحةُ المنطقةِ $ABCD$ هيَ $30\ \text{cm}^2$، فأَجِدُ:

10 قيمةَ x.

11 الفرقَ بينَ طولَيِ القوسيْنِ CD، وَAB.



الحل:

10

$$\text{المساحة} = \frac{43}{360} \times \pi \times (3x)^2 - \frac{43}{360} \times \pi \times (2x)^2$$

$$30 = \frac{43}{360} \times \pi \times 9x^2 - \frac{43}{360} \times \pi \times 4x^2$$

$$30 = \frac{43}{360} \times \pi \times 5x^2 \implies \frac{30 \times 360}{43 \times 3.14} = 5x^2$$

$$5x^2 \approx 80$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

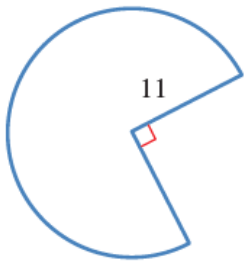
11

$$\frac{43}{360} \times 2\pi \times 3 \times 4 - \frac{43}{360} \times 2\pi \times 2 \times 4$$

$$\frac{43}{360} \times 24\pi - \frac{43}{360} \times 16\pi = \frac{43}{360} \times 8\pi = 3$$

أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

12



الحل:

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{270}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{27}{36} \times \pi \times 11^2$$

$$A = \frac{3}{4} \times \pi \times 121 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{3 \times 121}{4} \times \pi = 285$$

$$\text{محيط القطاع} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r$$

$$L = \frac{270}{360} \times 2\pi \times 11 + 2 \times 11$$

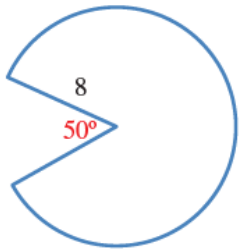
$$L = \frac{3}{4} \times 2 \times \pi \times 11 + 22$$

$$L \approx \frac{66}{4} \times 3.14 + 22$$
$$L = 51.8 + 22$$
$$L = 73.8$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة

أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

13



الحل:

$$\text{مساحة القطاع} = A = \frac{310}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{31}{36} \times \pi \times 8^2$$

$$A = \frac{31}{36} \times \pi \times 64 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{31 \times 64}{36} \times \pi = 173$$

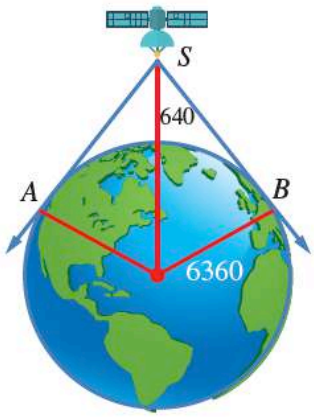
$$\text{محيط القطاع} = L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r + 2r$$

$$L = \frac{310}{360} \times 2\pi \times 8 + 2 \times 8$$

$$L = \frac{31 \times 16}{36}\pi + 16$$

$$L \approx \frac{496}{36} \times 3.14 + 16$$
$$L = 43.3 + 16$$
$$L = 59.3$$

14 **أقمارٌ صناعيــةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مسـافةَ 640 km عنْ سـطحِ الأرضِ التـي نصفُ قُطْرِهـا 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّيْنِ $\overrightarrow{SB}$ وَ $\overrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟



الحل :

المسافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكن مشاهدتها منه على سطح الأرض هي SA

$$(SA)^2 = (640 + 6360)^2 - 6360^2$$
$$= 7000^2 - 6360^2$$

$$= 49000000 - 40449600$$

$$= 8550400$$

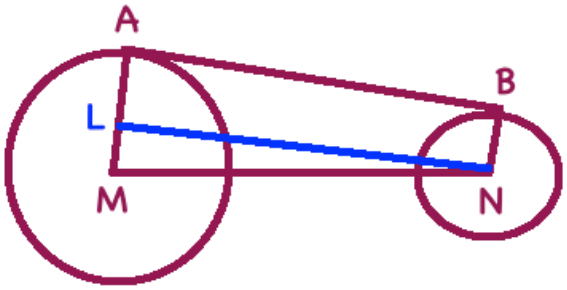
$$SA = \sqrt{8550400}$$

$$SA \approx 2924\ km$$

15 **حـــزامٌ مطّاطيٌّ**: يـــدورُ حـــزامٌ مطّاطيٌّ حـــولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَـــيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـــي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بيـــنَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

الحل :

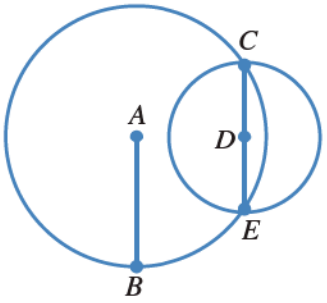
بافتراض أن مركزي البكرتين هما M، وN، وأن نقطتي تماس الحزام مع البكرتين هما A، وB، يُرسَم عمود من N إلى AM بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم MLN، فإن



$$(MN)^2 = (NL)^2 + (ML)^2$$
$$(MN)^2 = 25^2 + (8-3)^2$$
$$(MN)^2 = 650$$

$$MN = \sqrt{650} \approx 25.5\ cm$$

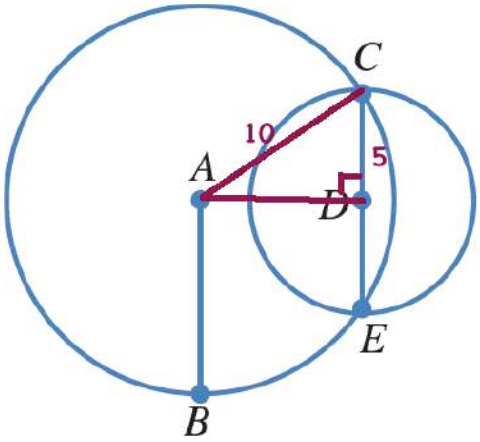
16 تتقاطعُ دائرتانِ مركزاهُما A, D في النقطتيْنِ C وَ E. إذا كانَ $AB = EC = 10\text{ cm}$، فما طولُ $\overline{AD}$ بالسنتيمتراتِ؟



a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

الحل :

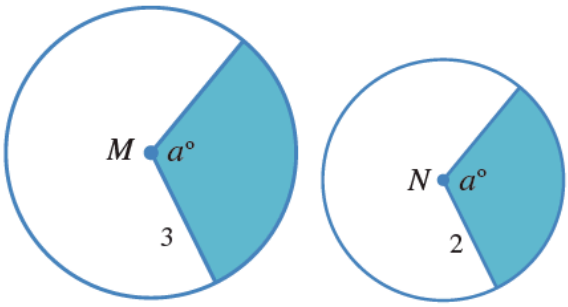


$$10^2 = 5^2 + AD^2$$
$$AD^2 = 100 - 25$$
$$AD^2 = 75$$

$$AD = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

الجواب: d

17 النقطتانِ N وَ M هما مركزا الدائرتيْنِ في الشكلِ الآتي.
إذا كانَتْ مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الكبرى 9 وحداتٍ مربَّعةٍ، فما مساحةُ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَّعةِ؟



a) 3 b) 4

c) 5 d) 7

الحل:

$$\text{مساحة القطاع الكبير} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$9 = \frac{\theta}{360} \times \pi \times 9$$

$$\frac{\theta}{360} \times \pi = 1$$

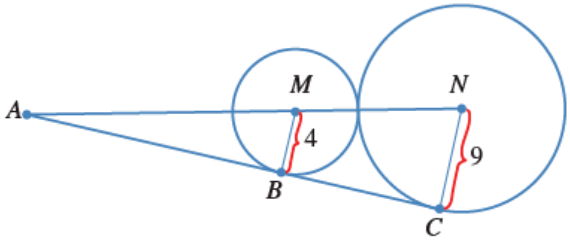
$$\text{مساحة القطاع الصغير} = A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi \times 4$$

$$A = 1 \times 4 = 4$$

الجواب: b

18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطْرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:



a) طولُ $\overline{AN}$ يساوي طولَ $\overline{AC}$.

b) طولُ $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدةً.

c) $AC = \frac{9}{4}AB$.

d) $AC = \frac{4}{9}AB$.

الحل:

من تشابه المثلثات

$$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{9}$$

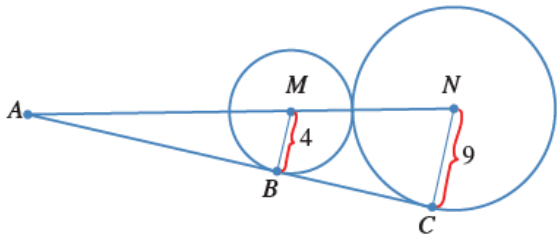
بالضرب التبادلي

$$4AC = 9AB$$

$$AC = \frac{9}{4}AB$$

الجواب: c

18 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، رُسِمَ لهُما مماسٌّ مشتركٌ منَ النقطةِ A الواقعةِ على المستقيمِ المارِّ بالمركزيْنِ N وَ M. إذا كانَ نصفا قُطْرَيِ الدائرتيْنِ 4 وحداتٍ وَ 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التاليةِ صحيحةٌ:



19 أَجِدُ طولَ $\overline{AM}$ في السؤالِ السابقِ مُبيِّنًا خطواتِ الحَلِّ.

الحل :

$$MN = 9 + 4 = 13$$

من تشابه المثلثات

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$$

لكن

$$AN = AM + MN$$
$$AN = AM + 13$$

لدينا

$$\frac{AM}{AM + 13} = \frac{4}{9}$$

$$9AM = 4(M + 13)$$

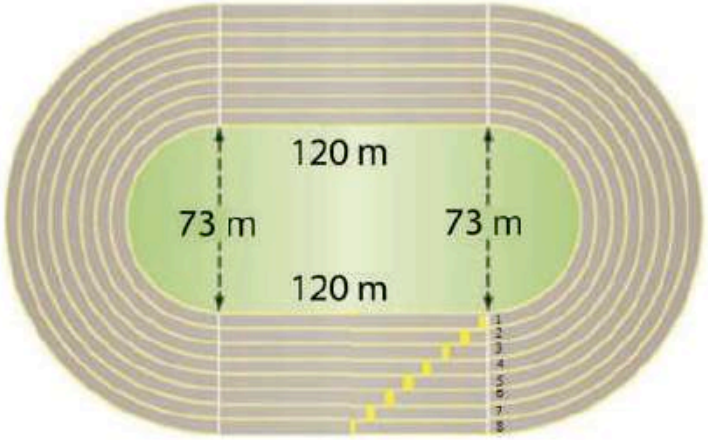
$$9AM = 4AM + 52$$

$$9AM - 4AM = 52$$

$$5AM = 52$$

$$AM = \frac{52}{5} = 10.4$$

20 يُمثِّلُ الشكلُ الآتي مضمارًا للجريِ منْ ثمانيةِ مساربَ، كلٌّ منْها يتكوَّنُ منْ جزأيْنِ مستقيميْنِ متوازييْنِ، ونصفَيْ دائرتيْنِ متصلتيْنِ بهِما. إذا كانَ عرضُ كلِّ مسربٍ 1 m، فبكمْ يزيدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟



الحل :

طول الحد الداخلي للمسرب الأول يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 73 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب

$$L_1 = 2(\frac{180}{360} \times 2 \times \frac{73}{2}\pi) + 2(120) = 240 + 73\pi \approx 469.3 \text{ m}$$

طول الحد الداخلي للمسرب الثالث يساوي محيط نصفي دائرة قطرها 77 m مضافًا إليه طولي الجزأين المستقيمين من المسرب

$$L_3 = 2(\frac{180}{360} \times 2\frac{77\pi}{2}) + 2(120) = 240 + 77\pi \approx 481.9 \text{ m}$$

$$L_3 - L_1 = 481.9 - 469.3 = 12.6\, m$$

إذن يزيد الحد الداخلي للمسرب الثالث بنحو 12.6 m على الحد الداخلي للمسرب الأول

ملخصات في

الرياضيات

للصف العاشر

كتاب الطالب

الوحدة الثالثة

الوحدةُ 3

حسابُ المثلثاتِ
Trigonometry

الدرسُ 1

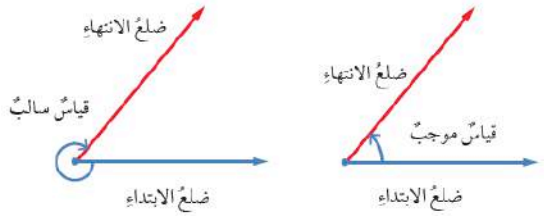
النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

الزاويــةُ هيَ اتحادُ شــعاعيْنِ لهُمــا نقطةُ البدايةِ نفسُــها. والنقطةُ المشــتركةُ تُعــرَفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشــعاعانِ فيُســمّى أحدُهُما **ضلعَ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعَ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدُهُما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الانتهاءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الســاعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الانتهاءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

إرشادٌ

اتِّجاهُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

عكسُ حركةِ عقاربِ الساعةِ.



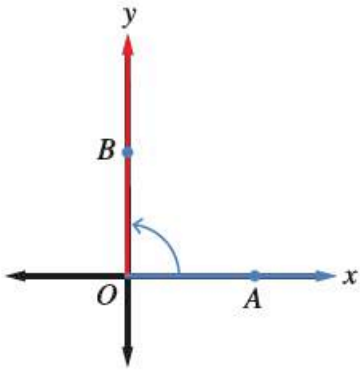
تكونُ الزاويةُ المرســومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0,0)$، وضلعُ ابتدائِها مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ.

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

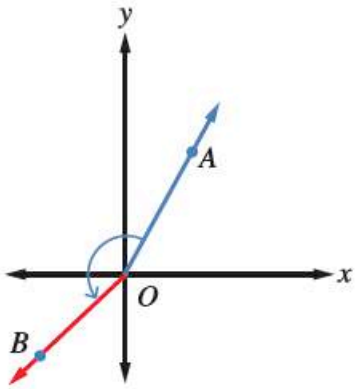
أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

1



2



الحل :

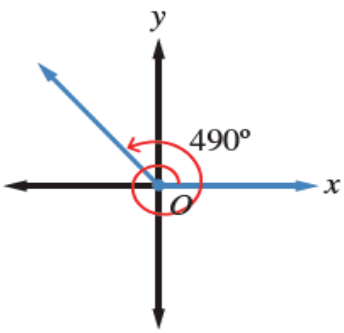
1)

الزاوية في الوضع القياسي؛ لأن رأسها في نقطة الأصل، وضلع الابتداء منطبق على المحور x

2)

الزاوية ليست في الوضع القياسي؛ لأن ضلع الابتداء غير منطبق على المحور x

إذا دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها بينَ $0°$ وَ $360°$. وإذا استمرَّ في دورانِهِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها أكبرُ منْ $360°$.

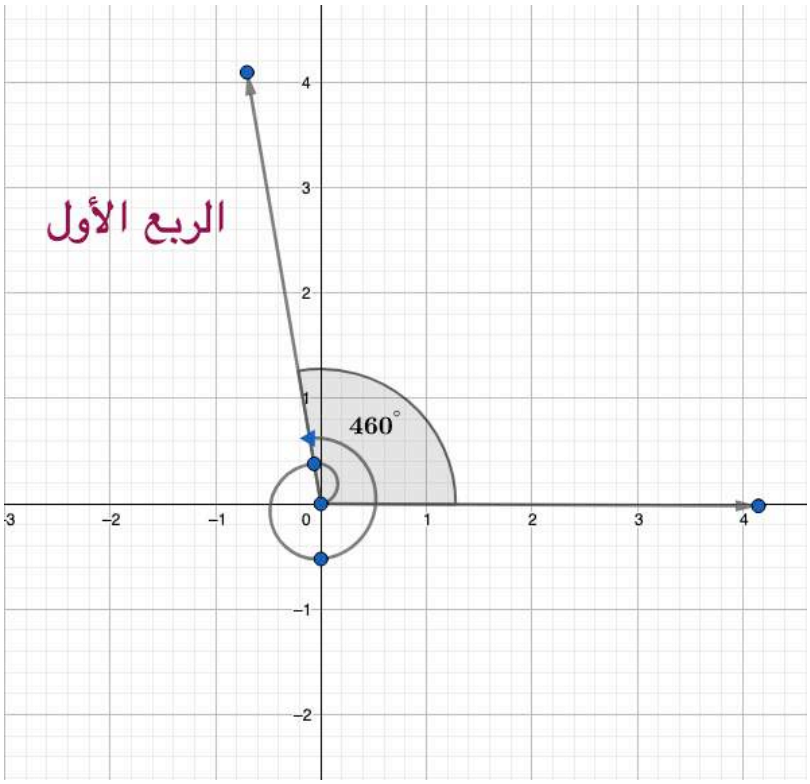


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 80

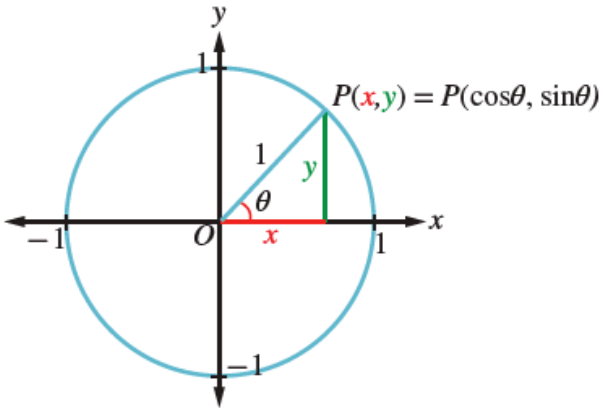
أتحقق من فهمي

أرسمُ زاويةً قياسُها 460° في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانَها.

الحل :



دائرةُ الوحدةِ (unit circle) هيَ دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها وحدةٌ واحدةٌ. إذا رُسِمَتِ الزاويةُ θ في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهائِها يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ هيَ $P(x, y)$. ومعَ تغيُّرِ قياسِ الزاويةِ يتغيَّرُ موقعُ النقطةِ P على الدائرةِ، ويتغيَّرُ إحداثيّاها.



يُمكِنُ تعريفُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ بدلالةِ إحداثيَّيْ P كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{\text{المُقابِلَ}}{\text{الوترِ}} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المُقابِلَ}}{\text{المجاورِ}} = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

الحل :

$$\sin\theta = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

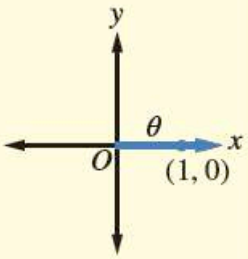
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times -\frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

عندَ رسمِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ، قدْ يقعُ ضلعُ انتهائِها في أحدِ الأرباعِ الأربعةِ، فيقالُ عندئذٍ إنَّ الزاويةَ θ واقعةٌ في الربعِ كذا، وقدْ ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، فتُسمّى الزاويةُ θ في هذهِ الحالةِ **زاويةً ربعيةً** (quadrantal angle).

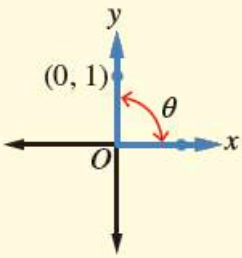
مفهومٌ أساسيٌّ

الزوايا الربعيةُ في دائرةِ الوحدةِ:

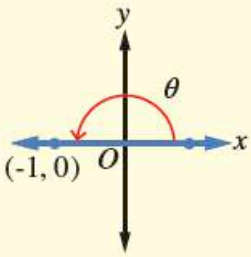
$\theta = 0°$



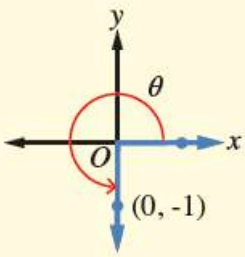
$\theta = 90°$



$\theta = 180°$



$\theta = 270°$

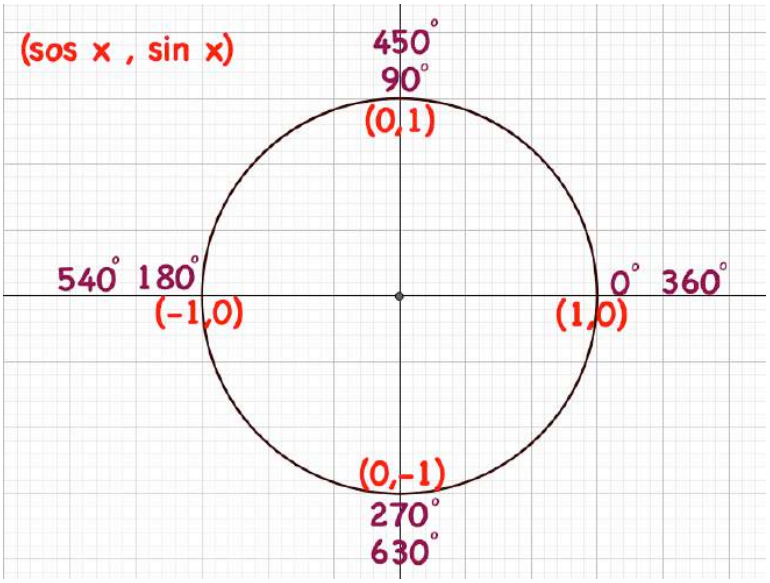


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 82

أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويتيْنِ اللتيْنِ قياسُ كلٍّ منْهُما 270° وَ 360° على الترتيبِ.

الحل :



$$sin\ 270^\circ = -1$$

$$cos\ 270^\circ = 0$$

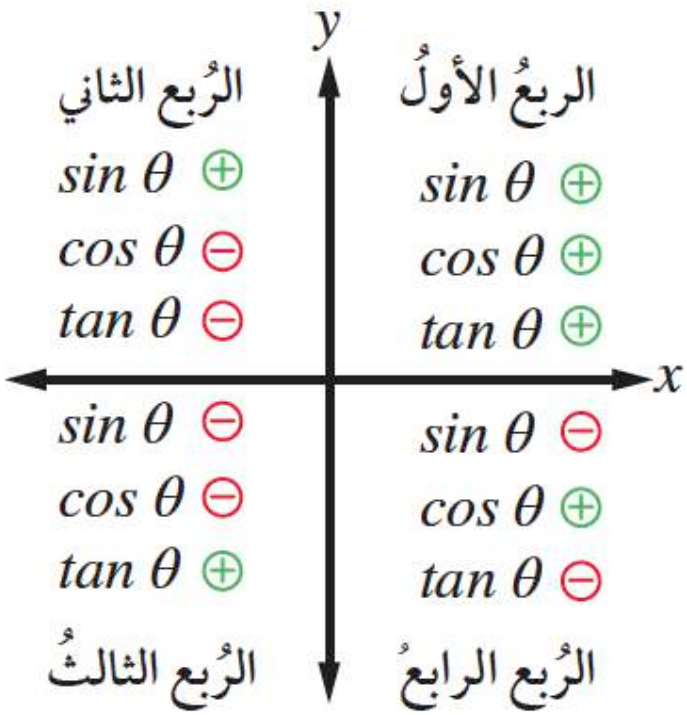
$$tan\ 270^\circ = \text{قيمة غير معرفة}$$

$$sin\ 360^\circ = 0$$

$$cos\ 360^\circ = 1$$

$$tan\ 360^\circ = 0$$

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$



أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ إذا كانَ $\cos\theta = 0.8$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ.

الحل :

$$\cos\theta = 0.8$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$(\sin\theta)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 1$$

$$(\sin\theta)^2 + \frac{64}{100} = 1$$

$$(\sin\theta)^2 = 1 - \frac{64}{100}$$

$$(\sin\theta)^2 = \frac{100}{100} - \frac{64}{100}$$

$$(\sin\theta)^2 = \frac{36}{100}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{6}{10}$$

لأن θ في الربع الرابع فإن

$$\sin\theta = -\frac{6}{10}$$

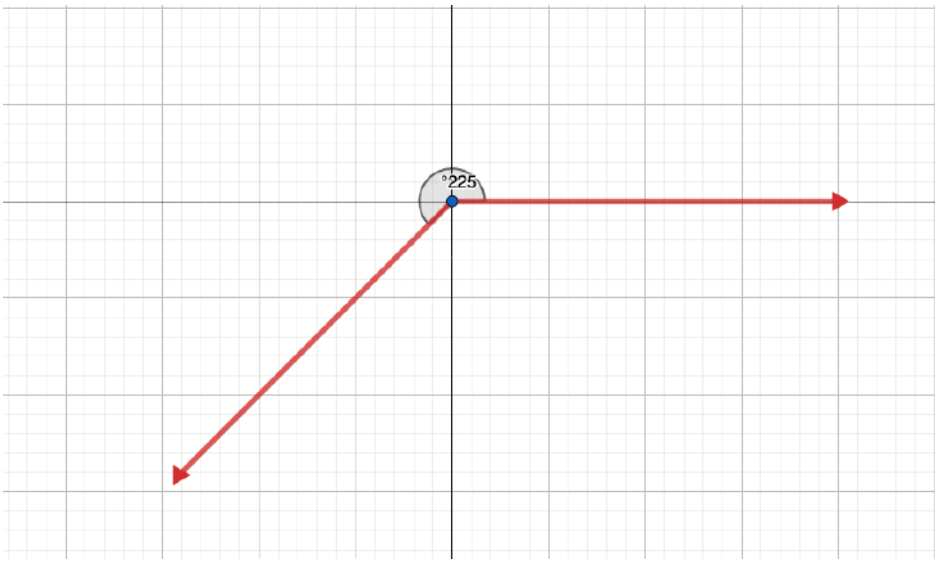
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-6}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{-6}{10} \times \frac{10}{8} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

1 225°

الحل :



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

2 $160°$

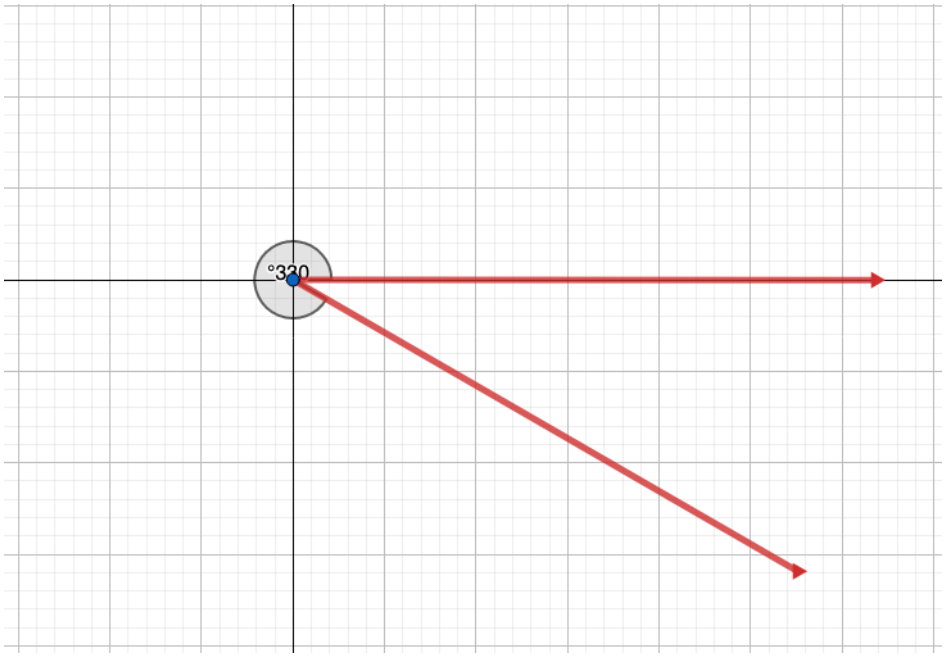
الحل :

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

3 330°

الحل :

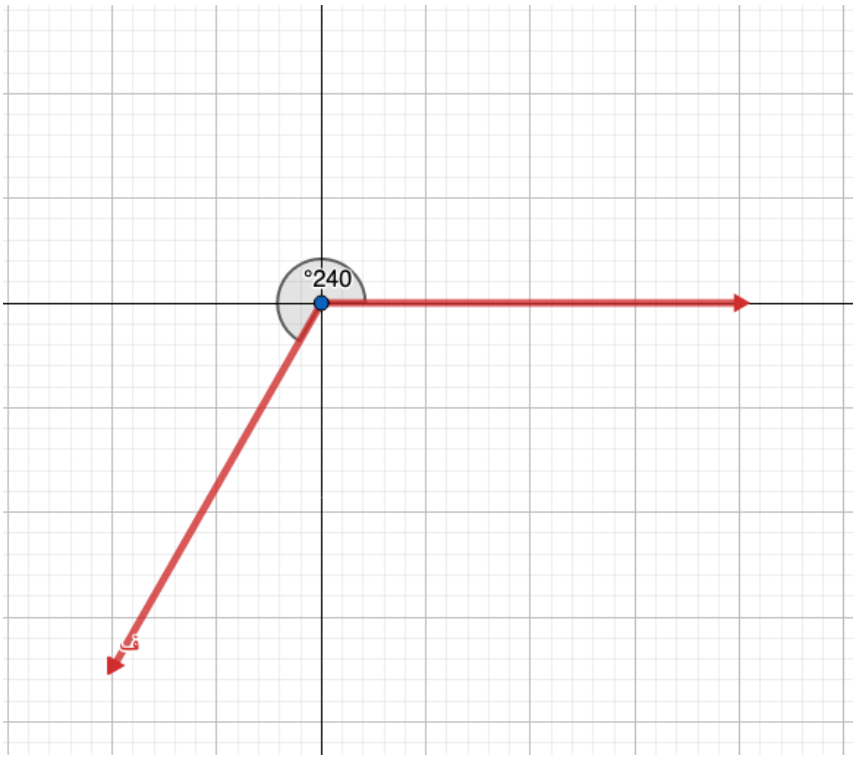


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

4 240°

الحل :



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 84

أُحدِّدُ الربعَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

5 285° 6 75° 7 100° 8 265°

الحل :

5 285° الربع الرابع 6 75° الربع الأول 7 100° الربع الثاني 8 265° الربع الثالث

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 85

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

12 $\sin\theta<0$ و $\cos\theta<0$ 11 $\tan\theta<0$ 10 $\cos\theta>0$ 9 $\sin\theta>0$

الحل :

12 $\sin\theta<0$ و $\cos\theta<0$ الربع الثالث

11 $\tan\theta<0$ الربع الثاني الربع الرابع

10 $\cos\theta>0$ الربع الأول الربع الرابع

9 $\sin\theta>0$ الربع الأول الربع الثاني

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

13 $\sin\theta = -0.7$

14 $\tan\theta = 2$

15 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

16 $\tan\theta = -1$

17 $\cos\theta = 0.45$

18 $\sin\theta = 0.55$

19 $\sin\theta = 0.3, \cos\theta < 0$

20 $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$

الحل :

13 $\sin\theta = -0.7$
الربع الثالث
الربع الرابع

14 $\tan\theta = 2$
الربع الأول
الربع الثالث

15 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$
الربع الثاني
الربع الثالث

16 $\tan\theta = -1$
الربع الثاني
الربع الرابع

---

17 $\cos\theta = 0.45$
الربع الأول
الربع الرابع

18 $\sin\theta = 0.55$
الربع الأول
الربع الثاني

19 $\sin\theta = 0.3, \cos\theta < 0$
الربع الثاني

20 $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$
الربع الثاني

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 85

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

21 $P(0, -1)$

الحل :

$$\sin\theta = y = -1$$

$$\cos\theta = x = 0$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1}{0}$$ قيمة غير معرفة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ الصفحة : 85

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

22 $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$

الحل :

$$\sin\theta = y = 0.5\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = x = 0.5$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.5\sqrt{3}}{0.5} = \sqrt{3}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

23 $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

الحل :

$$\sin\theta = y = \frac{15}{17}$$

$$\cos\theta = x = \frac{-8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{-8}{17}} = \frac{15}{17} \times \frac{17}{-8} = \frac{-15}{8}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

24 $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

الحل :

$$\sin\theta = y = \frac{-21}{29}$$

$$\cos\theta = x = \frac{20}{29}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-21}{29}}{\frac{20}{29}} = \frac{-21}{29} \times \frac{29}{20} = \frac{-21}{20}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

25 $\sin\theta = \frac{3}{4}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

الزاوية θ في الربع الثاني

$$\sin\theta = \frac{3}{4}$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$\frac{9}{16} + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$(\cos\theta)^2 = 1 - \frac{9}{16}$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{16}{16} - \frac{9}{16}$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{7}{16}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

لأن θ في الربع الثاني فإن

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{-\sqrt{7}} = \frac{-3}{\sqrt{7}}$$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

26 $\tan\theta = 0.78\,, \quad -1 < \sin\theta < 0$

الحل:

الزاوية θ في الربع الثالث

$$tan\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{78}{100} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$$

ضرب تبادلي

$$25\sin\theta = 18\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{18}{25}\cos\theta$$

$$(sin\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$$

$$(\frac{18}{25}\cos\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$$

$$\frac{324}{625}(\cos\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$$

$$324(\cos\theta)^2 + 625(cos\theta)^2 = 625$$

$$949(cos\theta)^2 = 625$$

$$(cos\theta)^2 = \frac{625}{949}$$

$$cos\theta = \pm\sqrt{\frac{625}{949}}$$

لأن الزاوية θ في الربع الثالث

$$cos\theta = -\sqrt{\frac{625}{949}} = -\frac{25}{\sqrt{949}} \approx -0.812$$

$$\sin\theta = \frac{18}{25}\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{18}{25} \times -0.812 \approx -0.585$$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

27 $\cos\theta = -0.75$, $\tan\theta < 0$

الحل:

الزاوية θ في الربع الثاني

$$\cos\theta = \frac{-75}{100} = \frac{-3}{4}$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$$(\sin\theta)^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2 = 1$$

$$(\sin\theta)^2 + \frac{9}{16} = 1$$

$$(\sin\theta)^2 = 1 - \frac{9}{16}$$

$$(\sin\theta)^2 = \frac{16}{16} - \frac{9}{16}$$

$$(\sin\theta)^2 = \frac{7}{16}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{7}{16}}$$

لأن θ في الربع الثاني فإن

$$\sin\theta = +\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{-3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{-4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -0.88$$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

28 $\sin\theta = -0.87\,, \qquad 270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل:

الزاوية θ في الربع الرابع

$$sin\ \theta = \frac{-87}{100}$$

$$(sin\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$$

$$\left(\frac{-87}{100}\right)^2 + (cos\ \theta)^2 = 1$$

$$\frac{7569}{10000} + (cos\ \theta)^2 = 1$$

$$(cos\ \theta)^2 = 1 - \frac{7569}{10000}$$

$$(cos\ \theta)^2 = \frac{10000}{10000} - \frac{7569}{10000}$$

$$(cos\ \theta)^2 = \frac{2431}{10000}$$

$$cos\ \theta = \pm\frac{\sqrt{2431}}{100}$$

لأن θ في الربع الرابع فإن

$$cos\theta \approx +\frac{49}{100} = 0.49$$

$$tan\ \theta = \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{\frac{-87}{100}}{\frac{49}{100}} = \frac{-87}{100} \times \frac{100}{49} = \frac{-87}{49} \approx -1.78$$

29 **تبريرٌ:** ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ لهُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل :

أكبر قيمة لجيب الزاوية هي 1، وعندئذٍ يكون قياس الزاوية هو 90° ، وأصغر قيمة هي -1، وعندئذٍ يكون قياس الزاوية هو 270° ؛ لأن ضلع انتهاء الزاوية 90° يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(0,1)$ وضلع انتهاء الزاوية 270° يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $(-1,0)$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس 1 : النسبُ المثلثيةُ

30 **أكتشــفُ الخطأَ**: حَلَّ كلٌّ منْ أمجدَ وزينةِ المسـألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$ ، وكانَتْ x بينَ 180° وَ 360°، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$؟

أمجدُ:
$\sin x + \cos x = 0.2$

زينةُ:
$\sin x + \cos x = -1.4$

أُحدِّدُ أَيُّهُما كانَتْ إجابتُهُ صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل :

الزاوية x في الربع الثالث

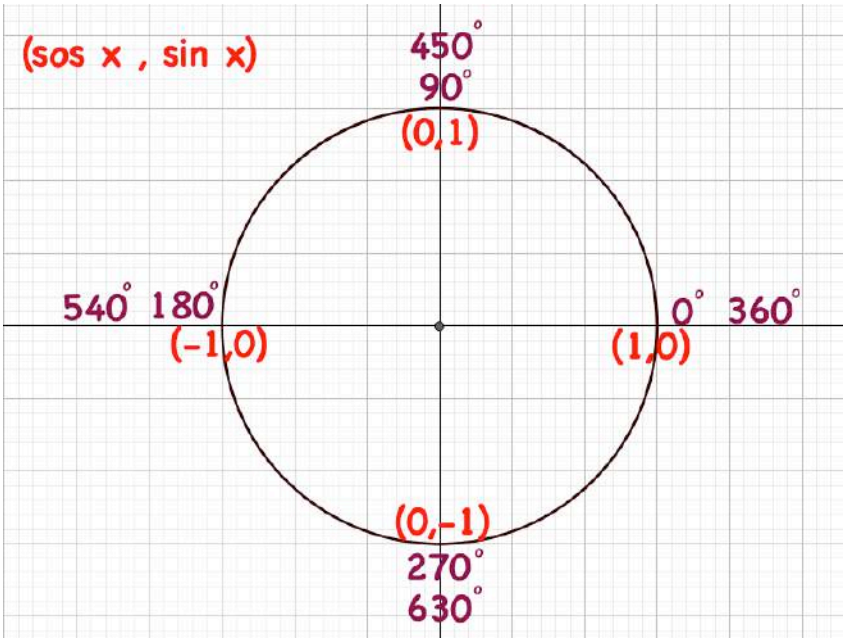
بالتالي

كل من $\sin x$ و $\cos x$ قيم سالبة وبالتالي مجموعهما قيمة سالبة بالتالي حل زينة هو الصحيح

مراجعةُ المفاهيمِ

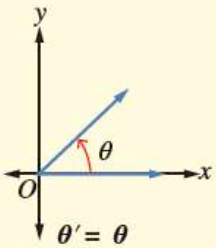
النسبُ المثلثيةُ للزوايا الخاصةِ:

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



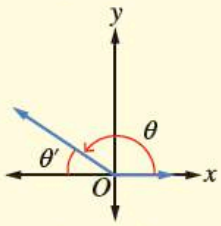
مفهومٌ أساسيٌ

الربعُ الأولُ



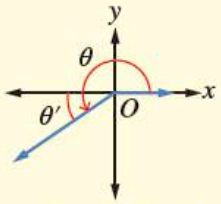
$\theta' = \theta$

الربعُ الثاني



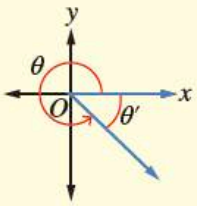
$\theta' = 180^\circ - \theta$

الربعُ الثالثُ



$\theta' = \theta - 180^\circ$

الربعُ الرابعُ



$\theta' = 360^\circ - \theta$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 120^\circ$

الحل:

الزاوية 120 في الربع الثاني

الفرق بين 120 و180 يساوي 60 بالتالي هي الزاوية المرجع

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن 120 تقع في الربع الثاني ال sin قيمة موجبة

$$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

b) $\tan 240^\circ$

الحل:

الزاوية 240 في الربع الثالث

الفرق بين 240 و180 يساوي 60 بالتالي هي الزاوية المرجع

$$\tan 60 = \sqrt{3}$$

بما أن 240 تقع في الربع الثالث ال tan قيمة موجبة

$$\tan 240 = \sqrt{3}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

c) $\cos 315°$

الحل:

الزاوية 315 في الربع الرابع

الفرق بين 315 و360 يساوي 45 بالتالي هي الزاوية المرجع

$$\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بما أن 315 تقع في الربع الرابع ال cos قيمة موجبة

$$\cos 315 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

d) $\sin 210^\circ$

الحل:

الزاوية 210 في الربع الثالث

الفرق بين 210 و180 يساوي 30 بالتالي هي الزاوية المرجع

$$\sin 30 = \frac{1}{2}$$

بما أن 210 تقع في الربع الثالث ال sin قيمة سالبة

$$\sin 210 = -\frac{1}{2}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

a) sin 320° b) cos 175° c) tan 245°

الحل :

a) $sin\ 320 = -0.643$

b) $cos\ 175 = -0.996$

c) $tan\ 245 = 2.145$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$:

a) $\cos\theta = -0.4$ b) $\tan\theta = 5.653$ c) $\sin\theta = -0.5478$

الحل :

a) $\cos\theta = -0.4$

بالآلة الحاسبة : $\theta = 113.6^\circ$

الزاوية المرجع $180 - 113.6 = 66.4^\circ$

ال **cos** سالب في الربع الثاني والثالث $\theta = 113.6^\circ$

$\theta = 180 + 66.4 = 246.4^\circ$

b) $\tan\theta = 5.653$

بالآلة الحاسبة : $\theta = 80^\circ$

ال **tan** موجب في الربع الأول والثالث $\theta = 80^\circ$

$\theta = 180 + 80 = 260^\circ$

c) $\sin\theta = -0.5478$

بالآلة الحاسبة : $\theta = -33.2^\circ$

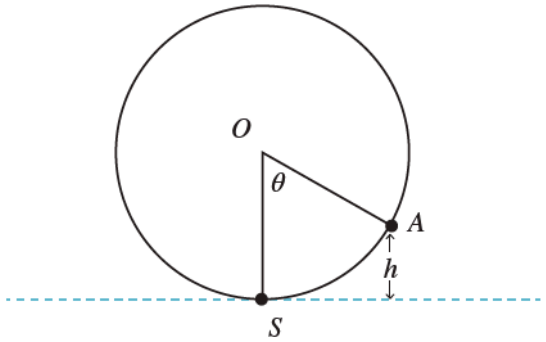
الزاوية المرجع $\theta = 33.2^\circ$

ال **sin** سالب في الربع الثالث والرابع $\theta = 180 + 33.2^\circ = 213.2^\circ$

$\theta = 360 - 33.2 = 326.8^\circ$

مثال 4: من الحياة

نواعيرُ: يُمثِّلُ الشكلُ الآتي ناعورةَ ماءٍ تدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ أخفضَ نقطةٍ تبلغُها الناعورةُ تحتَ الماءِ، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الناعورةِ. إذا دارتِ الناعورةُ بزاويةٍ θ؛ فإنَّ ارتفاعَ صندوقِ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عنْ أخفضِ نقطةٍ تبلغُها الناعورةُ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 7.5 - 7.5\cos\theta$ حيثُ (h) الارتفاعُ بالأمتارِ. أَجِدُ طولَ قُطرِ الناعورةِ.



أتحقق من فهمي

أَجِدُ ارتفاعَ صندوقِ الماءِ الذي موقعُهُ النقطةُ A عندما تصبحُ $\theta = 235°$

الحل :

$$h = 7.5 - 7.5 \times cos\ 235$$
$$h \approx 11.8\ m$$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\sin 130^\circ$
2. $\sin 325^\circ$
3. $\cos 270^\circ$
4. $\tan 120^\circ$
5. $\cos 250^\circ$
6. $\tan 315^\circ$

الحل :

آلة حاسبة

1. $\sin 130^\circ$
$= 0.766$

آلة حاسبة

2. $\sin 325^\circ$
$= -0.574$

حفظ

3. $\cos 270^\circ$
$= 0$

آلة حاسبة

4. $\tan 120^\circ$
$= -\tan 60$
$= -\sqrt{3}$

$180 - 120 = 60$
ربع ثاني

آلة حاسبة

5. $\cos 250^\circ$
$= -0.342$

6. $\tan 315^\circ$
$= -\tan 45$
$= -1$

$360 - 315 = 45$
ربع رابع

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

7 325°

الحل :

325 تقع في الربع الرابع

الزاوية المرجع $360 - 325 = 35$

الجيب في الربع الرابع سالب

أيضا الجيب سالب في الربع الثالث

الزاوية الثانية هي $180 + 35 = 215$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

8 84°

الحل :

84 تقع في الربع الأول

الجيب في الربع الأول موجب

أيضا الجيب موجب في الربع الثاني

الزاوية الثانية هي $180 - 84 = 96$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

9 245°

الحل :

245 تقع في الربع الثالث

الزاوية المرجع $245 - 180 = 65$

الجيب في الربع الثالث سالب

أيضا الجيب سالب في الربع الرابع

الزاوية الثانية هي $360 - 65 = 295$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

10 280°

الحل :

280 تقع في الربع الرابع

الزاوية المرجع $360 - 280 = 80$

جيب التمام في الربع الرابع موجب

أيضا جيب التمام موجب في الربع الأول

الزاوية الثانية هي 80

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

11 150°

الحل :

150 تقع في الربع الثاني

الزاوية المرجع $180 - 150 = 30$

جيب التمام في الربع الثاني سالب

أيضا جيب التمام سالب في الربع الثالث

الزاوية الثانية هي $180 + 30 = 210$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

12 215°

الحل :

215 تقع في الربع الثالث

الزاوية المرجع $215 - 180 = 35$

جيب التمام في الربع الثالث سالب

أيضا جيب التمام سالب في الربع الثاني

الزاوية الثانية هي $180 - 35 = 145$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

13 75°

الحل :

75 تقع في الربع الأول

الظل في الربع الأول موجب

أيضا الظل موجب في الربع الثالث

الزاوية الثانية هي $180 + 75 = 255$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

14 300°

الحل :

300 تقع في الربع الرابع

الزاوية المرجع $360 - 300 = 60$

الظل في الربع الرابع سالب

أيضا الظل سالب في الربع الثاني

الزاوية الثانية هي $180 - 60 = 120$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها، مثلَ الزاويةِ المعطاةِ:

15 235°

الحل :

235 تقع في الربع الثالث

الزاوية المرجع $235 - 180 = 55$

الظل في الربع الثالث موجب

أيضا الظل موجب في الربع الأول

الزاوية الثانية هي 55

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بـأنَّ $0^o \le \theta \le 360^o$:

16 $\sin\theta = 0.55$

الحل :

باستخدام الآلة الحاسبة

$$shift \rightarrow sin \rightarrow 0.55 = 33.4$$

33.4 في الربع الأول

الجيب موجب أيضا في الربع الثاني

الزاوية الثانية هي

$$180 - 33.4 = 146.6$$

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أَوْ قيمَ) θ، علمًا بـأنَّ $0^o \le \theta \le 360^o$:

17 $\cos\theta = -0.05$

الحل :

باستخدام الآلة الحاسبة

$$shift \rightarrow cos \rightarrow -0.05 = 92.9$$

92.9 في الربع الثاني

جيب التمام سالب أيضا في الربع الثالث

الزاوية الثانية هي

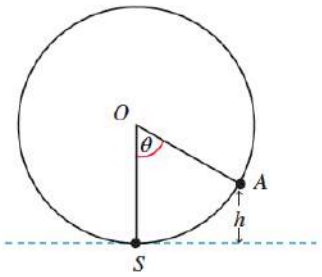
$$180 + 92.9 = 272.9$$

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أَوْ قيمَ) θ، علمًا بـأنَّ $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$:

18 $\tan\theta = 0$

الحل :

$$\theta = 0 \quad , \quad \theta = 180 \quad , \quad \theta = 360$$



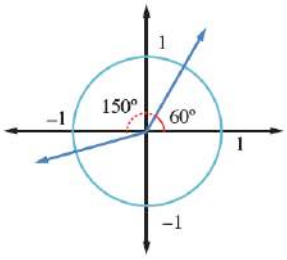
19 **ترفيهٌ:** يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دولابًا دوّارًا في مدينةِ ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثِّلُ S في الشكلِ نقطةَ صعودِ الراكبِ الذي موقعُهُ الآنَ عندَ النقطةِ A، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدولابِ. إذا دارَ الدولابُ بزاويةٍ θ، فإنَّ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ (h) بالأمتارِ يُعطى بالعلاقةِ: $h = 12.5 - 12.5\cos\theta$. أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ عن سطحِ الأرضِ عندما تصبحُ $\theta = 345°$.

الحل :

$$h = 12.5 - 12.5 \times cos\ 345$$
$$h = 12.5 - 12.5 \times 0.966$$
$$h = 12.5 - 12.075$$
$$h = 0.425$$

20 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها $60°$ في الوضعِ القياسيِّ بزاويةٍ $150°$ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. كيفَ نجدُ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ في موقعِهِ الجديدِ؟



الحل :

الزاوية الجديدة $60 + 150 = 210$

نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة هي $(cos\ 210, sin 210)$

وهي زاوية تقع في الربع الثالث والزاوية المرجع لها

$$210 - 180 = 30$$

$$sin\ 30 = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ولأن الزاوية 210 تقع في الربع الثالث

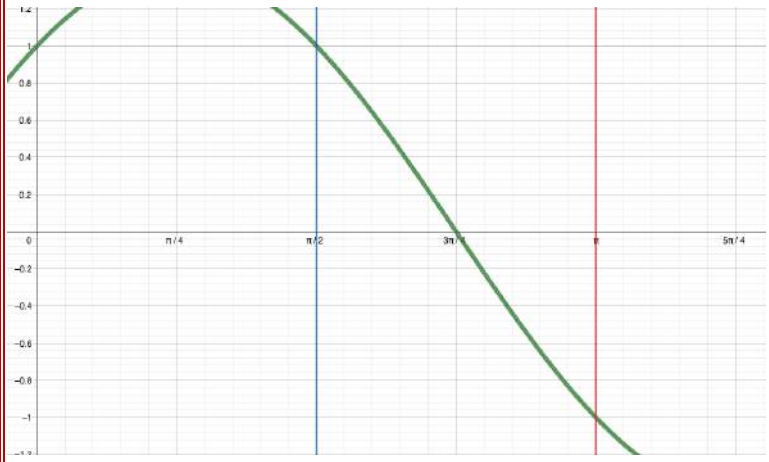
$$(cos\ 210, sin 210) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

حيث الجيب وجيب التمام سالب في الربع الثالث

21 تحدٌّ: أَجِدُ مجموعةَ قيمِ θ التي تجعلُ المتباينةَ الآتيةَ صحيحةً، علمًا بأنَّ $90^\circ < \theta < 180^\circ$:

$$\cos\theta + \sin\theta < 0$$

الحل :



$$\sin\theta + \cos\theta = 0$$

$$\sin\theta = -\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = -1$$

$$\theta = 135$$ بالتالي

$$\underset{90}{+}\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ \underset{135}{0}\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ \underset{180}{}$$

$$\theta \in (135, 180)$$

22 **أكتشفُ الخطأَ**: حسبَتْ سندسُ نسبةَ جيبِ إحدى الزوايا في الربعِ الثاني، فكانَتْ قيمتُها 1.4527 هلْ إجابةُ سندسَ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل :

إن أكبر قيمة لجيب الزاوية هو **1** وأقل قيمة له هو **1-** ونعبر عن ذلك كما يلي

$$-1 \leq sin\,\theta \leq 1$$

بالتالي الخطأ هو أن تكون قيمة الجيب تساوي **1.4527** وهي أكبر من **1** وهذا مستحيل

23 تبريرٌ: أَجِدُ قيمةَ ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots\ldots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ + \cos 360^\circ$$

الحل :

0

لأنه يقابل القيم الموجبة لجيوب تمام الزوايا في الربعين الأول والرابع قيمة سالبة لجيوب تمام الزوايا المنعكسة في الربعين الثالث والثاني على الترتيب

الدرسُ 3

تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ

Graphing Trigonometric Functions

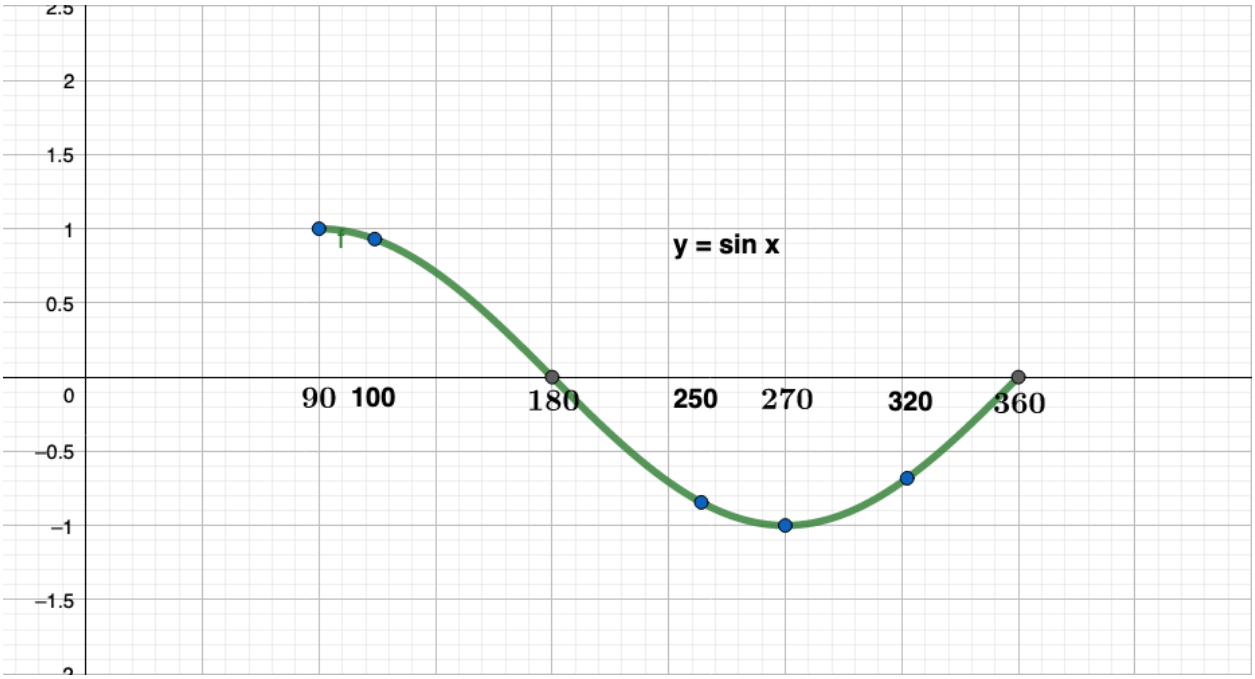
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 96

أتحقق من فهمي

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، علمًا بأنَّ $90^\circ \le x \le 360^\circ$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الجيبِ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

الحل :

x	90°	100°	180°	250°	270°	320°	360°
$y = \sin x$	1	0.98	0	-0.94	-1	-0.64	0



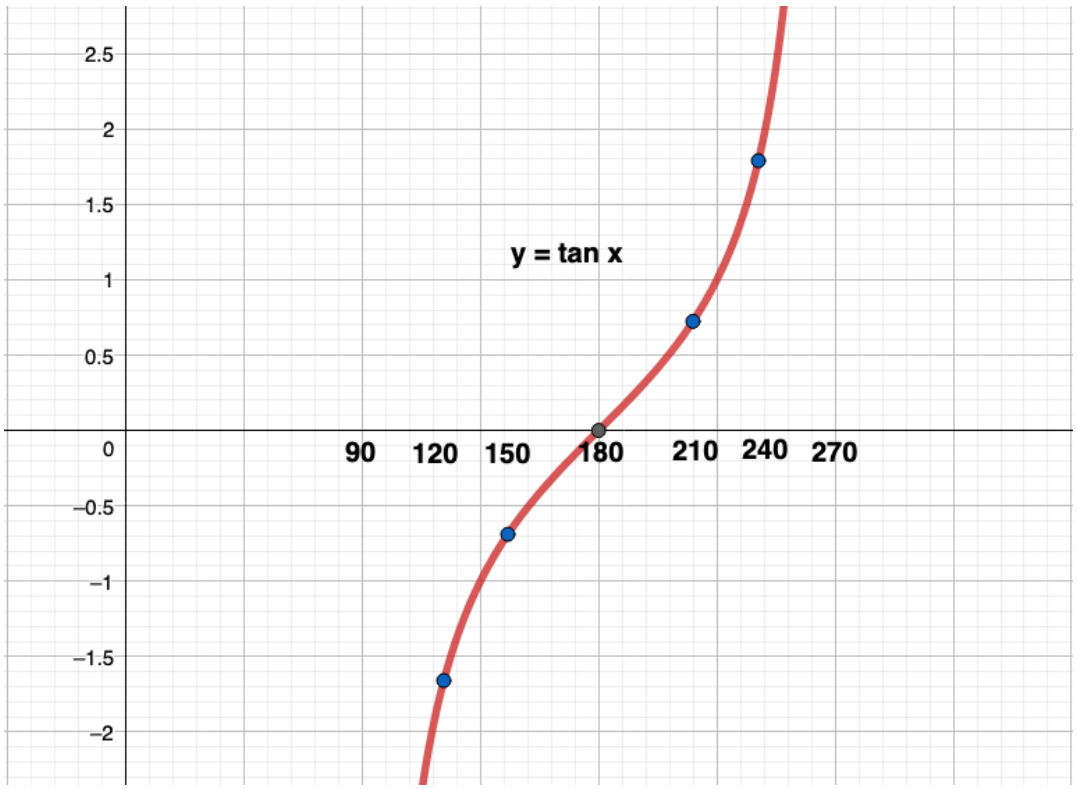
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 97

أتحقق من فهمي

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $90^o < x < 270^o$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الظلِّ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

الحل :

x	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°
$y = \tan x$	غير معرف	-1.73	-0.58	0	0.58	1.73	غير معرف



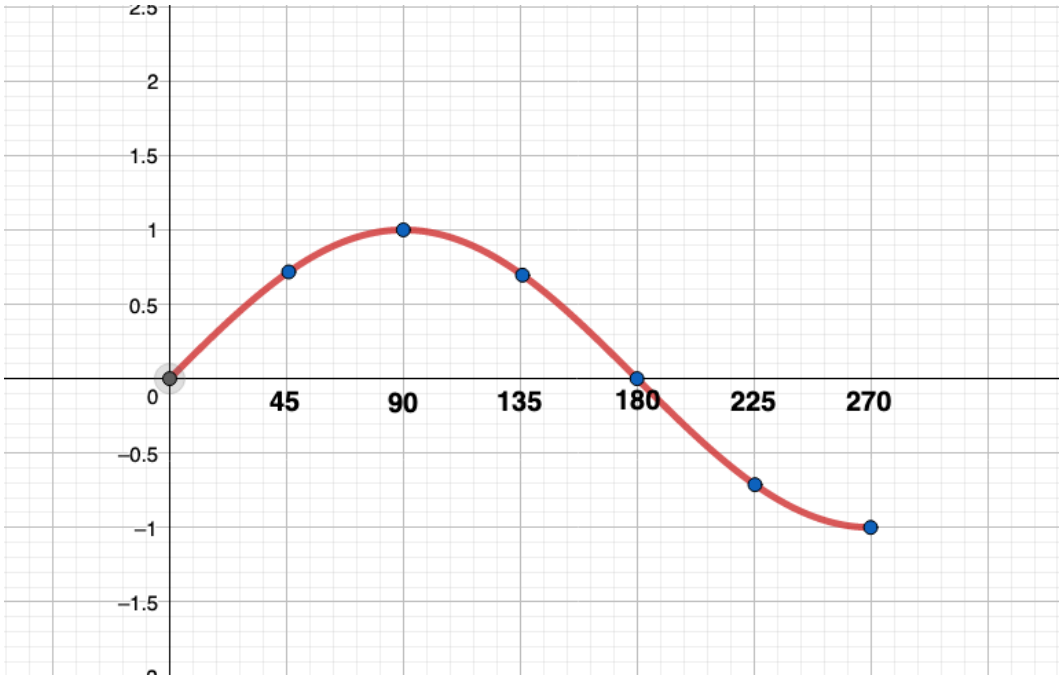
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 97

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ:

1 $y = \sin x \quad 0^\circ \le x \le 270^\circ$

الحل :

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°
$y = \sin x$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1



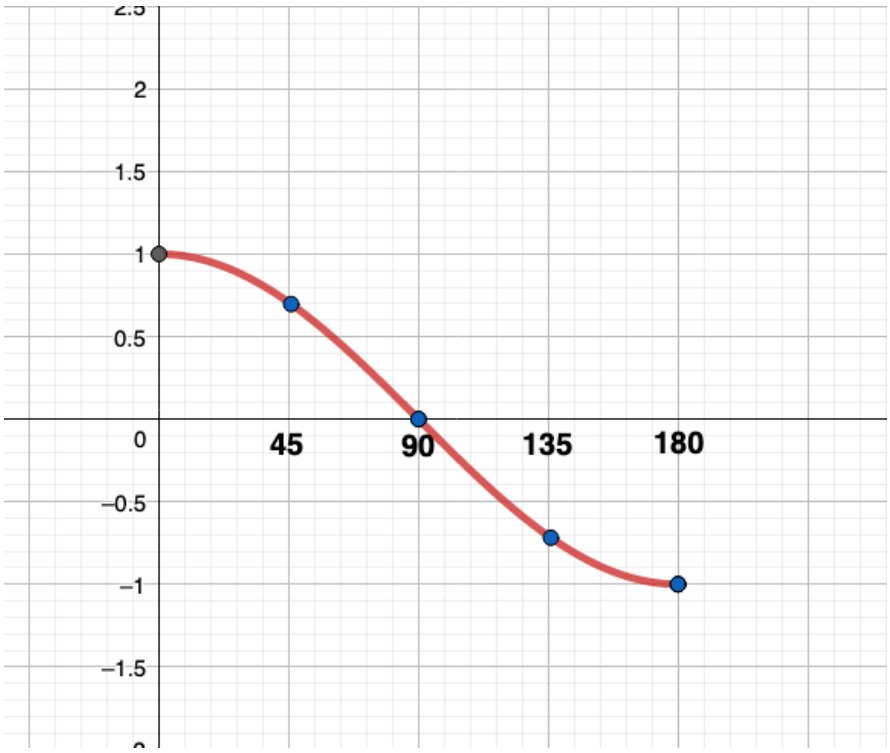
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 97

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ:

2 $y = \cos x \quad 0^o \le x \le 180^o$

الحل :

x	0°	45°	90°	135°	180°
$y = \cos x$	1	0.71	0	-0.71	-1



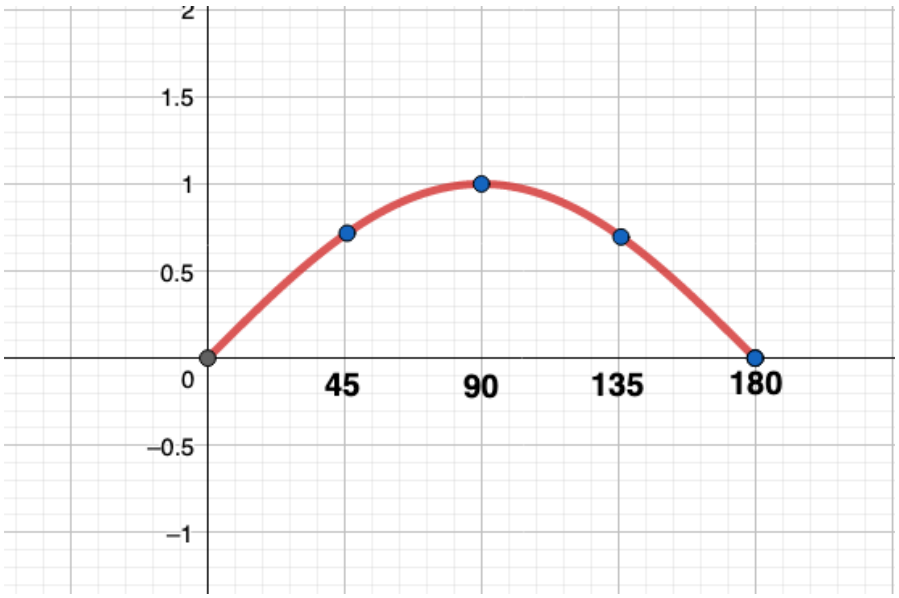
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 97

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ:

3 $y = \sin x \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ$

الحل :

x	0°	45°	90°	135°	180°
$y = \sin x$	0	0.71	1	0.71	0



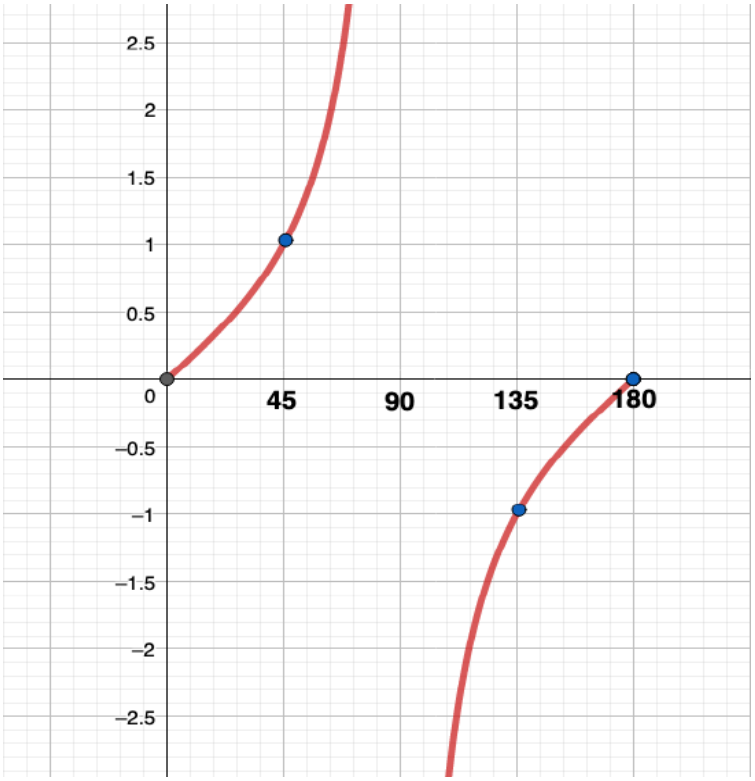
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 97

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، ثمَّ أَصِفُهُ:

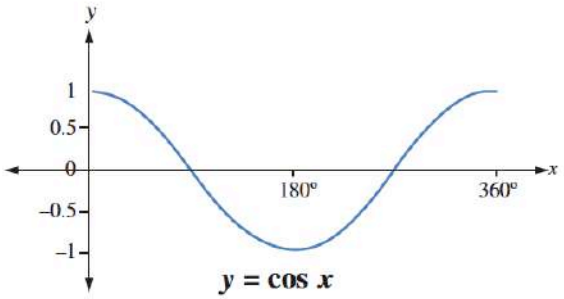
4 $y = \tan x \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ$

الحل :

x	0°	45°	90°	135°	180°
$y = \tan x$	0	1	غير معرف	-1	0

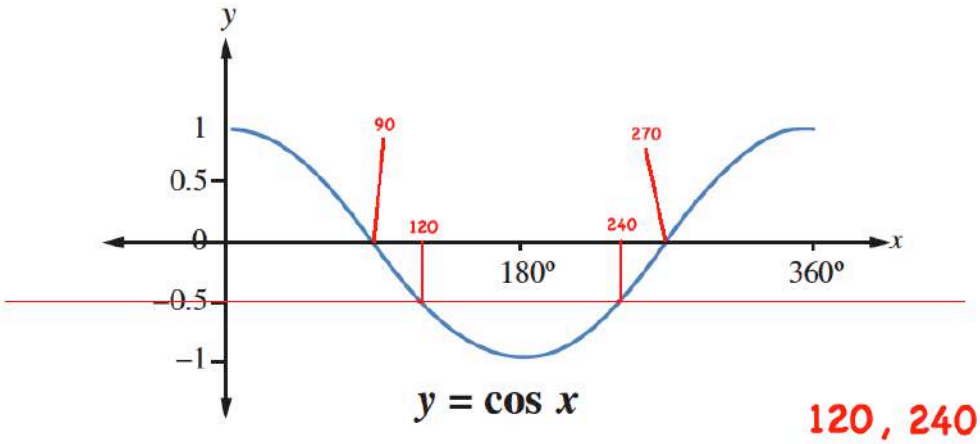


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 98



5 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتَيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\cos x = -0.5$

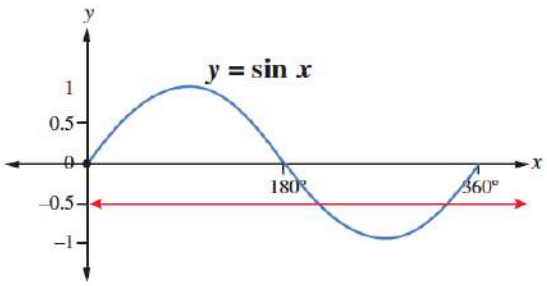
الحل :



الجواب 120 , 240

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 98

6 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\sin x = -0.5$



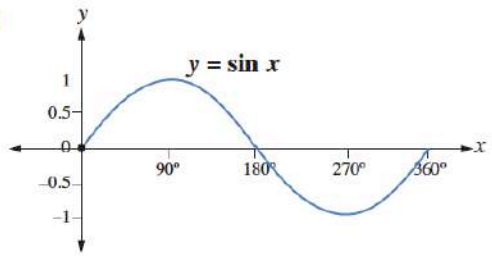
الحل :

210 , 330

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 98

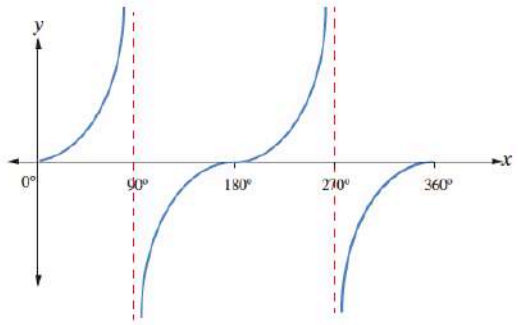
أستعملُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لأَجِدَ جميعَ القيمِ الممكنةِ لكلٍّ مِن: a, b, c, d, e, f, g, h.

7



$\sin 0^\circ = \sin a^\circ = \sin b^\circ$
$\sin 30^\circ = \sin c^\circ$
$\sin 60^\circ = \sin d^\circ$
$\sin 210^\circ = \sin e^\circ$

8



$\tan 0^\circ = \tan e^\circ = \tan f^\circ$
$\tan 45^\circ = \tan g^\circ$
$\tan 60^\circ = \tan h^\circ$

الحل :

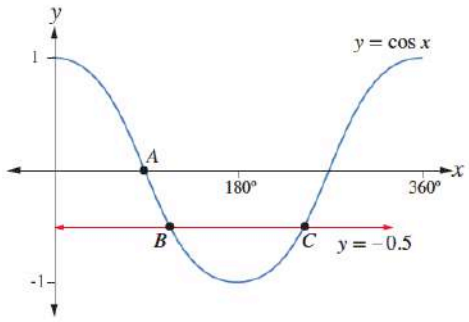
7)

$$a = 180 \ , \quad b = 360$$
$$c = 150$$
$$d = 120$$
$$e = 330$$

8)

$$e = 180 \ , \ f = 360$$
$$g = 225$$
$$h = 240$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 98



يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = cos\ x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتيْنِ B, C:

9 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

10 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B, C باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

الحل :

9)

$$A(90,0)$$

10)

$$B(150, \frac{-1}{2})$$

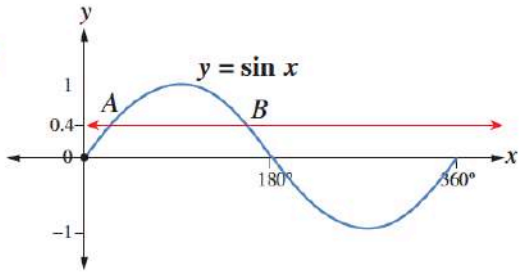
$$C(210, \frac{-1}{2})$$

على فكرة ما بدها آلة حاسبة

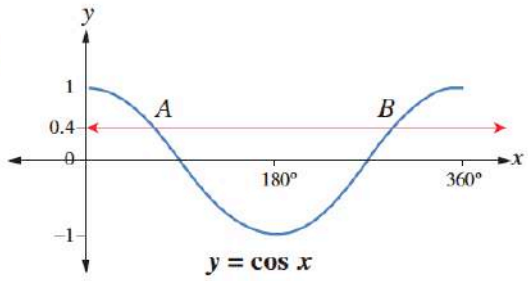
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 99

أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ A و B في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

11



12



الحل :

11)

$$shift + \sin + 0.4 \;=\; 23.6$$
$$A(23.6\,,0.4)$$
$$B(180 - 23.6\,,0.4) = (156.4\,,0.4)$$

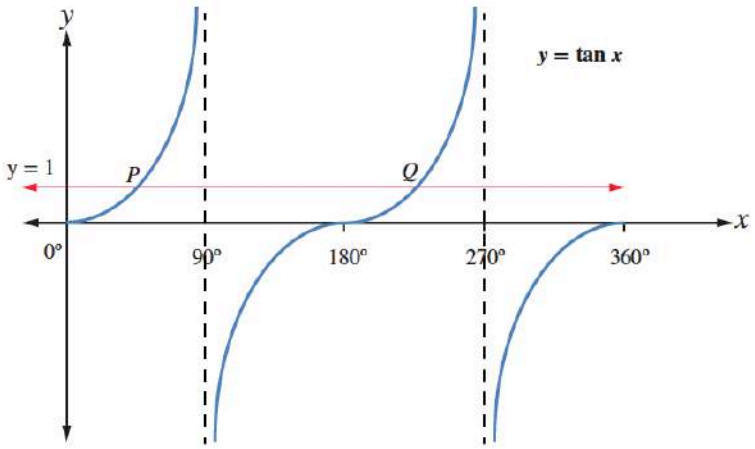
12)

$$shift + \cos + 0.4 \;=\; 66.4$$
$$A(66.4\,,0{,}4)$$
$$B(360 - 66.4\,,0.4) = (293.6\,,0.4)$$

على فكرة بدها آلة حاسبة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 99

13 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$، حيثُ يقطعُ المستقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتيْنِ: P، وَQ. أَكتبُ الإحداثيَّ x لكلٍّ منَ النقطتيْنِ: P، وَQ.



الحل :

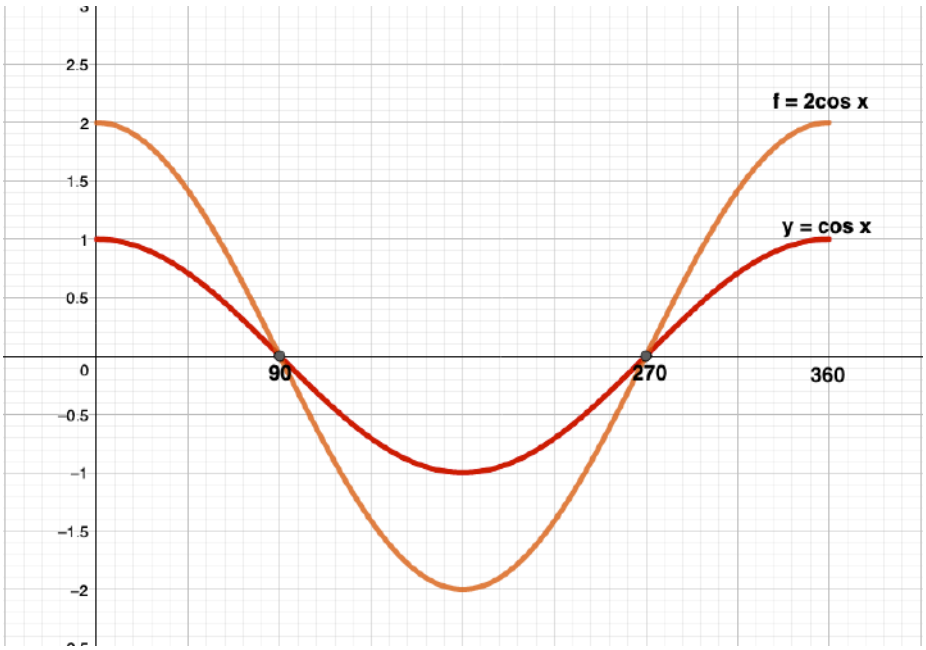
$$\tan x = 1$$
$$x = 45$$
$$P(45,1)$$
$$Q(180 + 45\ , 1) = (225,1)$$

ملاحظة: الحل بدون آلة حاسبة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 99

14 تحدٍّ: أرسـمُ منحنَيَي الاقترانيْنِ $y=\cos x$ وَ $f=2\cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، في الفترةِ $0^\circ \le x \le 360^\circ$، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما.

الحل :

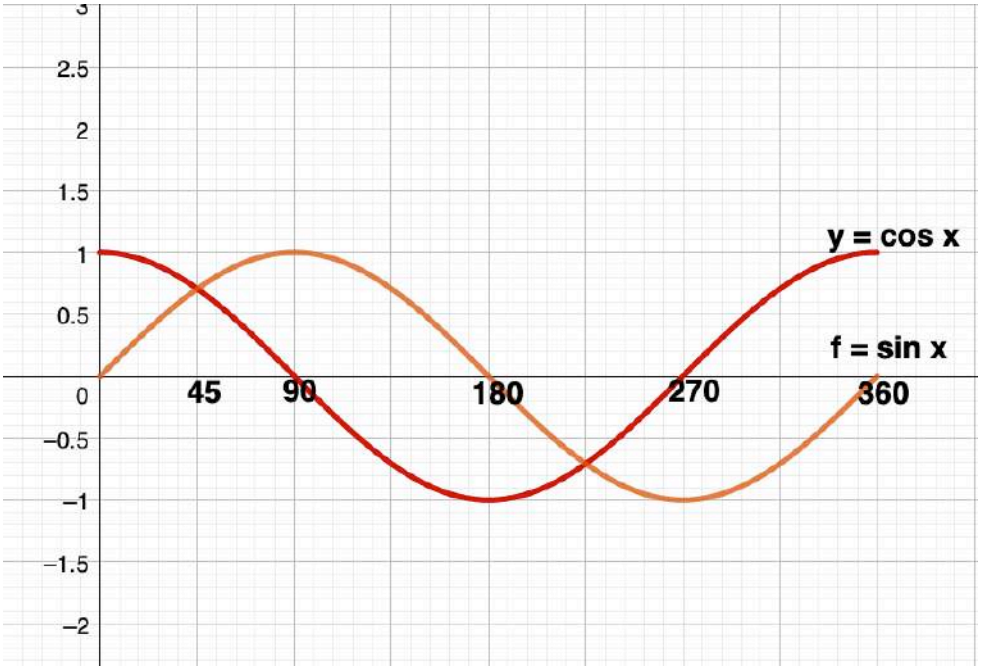


الاقتران	أعلى قيمة	أقل قيمة
$y = cos\ x$	1	-1
$f = 2cos\ x$	2	-2

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ الصفحة : 99

15 أكتبُ: ما الفرقُ بينَ منحنيَي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟

الحل :



يمكنك المقارنة بين القيم للزوايا في كل اقتران

الدرسُ 4

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ

Solving Trigonometric Equations

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 101

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

الحل :

$$2\cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

من هي الزاوية x التي جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x = cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x = 30^\circ$$

جيب التمام موجب أيضا في الربع الرابع

$$x = 360 - 30 = 330^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 101

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

b) $2\tan x + 3 = 1$

الحل :

$$2\tan x + 3 = 1$$

$$2\tan x = 1 - 3$$

$$2\tan x = -2$$

$$\tan x = \frac{-2}{2} = -1$$

من هي الزاوية x التي ظلها يساوي -1

$$x = tan^{-1}(-1)$$

بالآلة الحاسبة $x = -45^\circ$

وهذا يعني أن $\boldsymbol{x = 360 - 45 = 315^\circ}$

الظل سالب أيضا في الربع الثاني

$$x = 180 - 45 = 135^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 102

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x\ ,\ 0^o \le x \le 360^o$

الحل :

$$3(sinx + 2) = 3 - sinx$$
$$3sinx + 6 = 3 - sinx$$
$$3sinx + sinx = 3 - 6$$
$$4sinx = -3$$
$$sinx = \frac{-3}{4}$$
$$x = \sin^{-1}(\frac{-3}{4})$$

$$x = -48.6$$
$$x = 360 - 48.6 = 311.4^{\circ}$$

جيب سالب أيضا في الربع الثالث

$$x = 180 + 48.6 = 228.6^{\circ}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 102

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

b) $3\cos(2x) - 1 = 0\ ,\ 0^\circ \le x \le 180^\circ$

الحل :

$$3\ cos2x - 1 = 0$$
$$3\ cos2x = 1$$

$$cos2x = \frac{1}{3}$$

$$2x = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$$

$$2x = 70.5^\circ \quad \Longrightarrow x = 35.25^\circ$$

$$2x = 360 - 70.5^\circ = 289.5^\circ \quad \Longrightarrow x = 144.75^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 104

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

a) $4 \sin x \tan x + 3 \tan x = 0$

الحل :

$$4 \sin x \tan x + 3 \tan x = 0$$
$$\tan x \ (4 \sin x + 3) = 0$$
$$\tan x = 0 \quad or \quad (4 \sin x + 3) = 0$$
$$\tan x = 0 \quad or \quad \sin x = \frac{-3}{4}$$
$$x = \tan^{-1}(0) \quad or \quad x = \sin^{-1}(\frac{-3}{4})$$
$$x = 0 , 180 , 360 \quad or \quad x = -48.6$$

$$x = 0 , 180 , 360 \ or \ x = 360 - 48.6 = 311.4 , 180 + 48.6 = 228.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 104

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

الحل :

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$(2\cos x - 1) = 0 \quad or \quad (\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad or \quad \cos x = 1$$

$$x = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) \quad or \quad x = \cos^{-1}(1)$$

$$x = 60\,,300 \quad or \quad x = 0\,,360$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 105

أتحقق من فهمي

a) أَفترضُ أنَّ $x = 180\,t$ ، وأَحُلُّ المعادلةَ $12 = 20\cos x$ ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

الحل :

$$12 = 20\cos(180t)$$

$$\cos(180t) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$180t = \cos^{-1}(\frac{3}{5})$$

$$180t = 53.13 \quad or \quad 180t = 360 - 53.13 = 306.87$$

$$t = \frac{53.13}{180} \quad or \quad t = \frac{306.87}{180}$$

$$so \quad x = 180 \times \frac{53.13}{180} \quad or \quad t = 180 \times \frac{306.87}{180}$$

$$so \quad x = 53.13 \quad or \quad x = 306.87$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 105

أتحقق من فهمي

فيزياءُ: فــرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دارةٍ كهربائيةٍ يُعطــى بالعلاقةِ: $E = 20\cos(180t)$ ، حيثُ t الزمنُ (بالثواني):

b) أَجِــدُ الزمــنَ t (حيثُ $0 \le t \le 2$) عندما يكونُ فرقُ الجهــدِ 12 volt، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ منَ الثانيةِ.

الحل :

$$12 = 20\cos(180t)$$

$$\cos(180t) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$180t = \cos^{-1}(\frac{3}{5})$$

$$180t = 53.13 \quad or \quad 180t = 360 - 53.13 = 306.87$$

$$t = \frac{53.13}{180} \quad or \quad t = \frac{306.87}{180}$$

$$t \approx 0.30 \quad or \quad t \approx 1.70$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

1 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل :

$$x = 45^\circ$$

جيب موجب أيضا في الربع الثاني

$$x = 180 - 45 = 135^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

2 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل :

$x = 30^\circ$

ظل موجب أيضا في الربع الثالث

$x = 180 + 30 = 210^\circ$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 360^o$:

3 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل :

$$x = 30^\circ$$

جيب تمام موجب أيضا في الربع الرابع

$$x = 360 - 30 = 330^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

4 $7 + 9\cos x = 1$

الحل :

$$7 + 9\cos x = 1$$

$$9\cos x = -6$$

$$\cos x = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

$$x = \cos^{-1}(\frac{-2}{3})$$

$$x = 131.8$$

الزاوية المرجع هي $180 - 131.8 = 48.2$

جيب تمام سالب أيضا في الربع الثالث

$$x = 180 + 48.2 = 228.2^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

5 $2 \sin x + 1 = 0$

الحل :

$$2 \sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1}{2}$$

$$x = 150$$

الزاوية المرجع هي $180 - 150 = 30$

جيب سالب أيضا في الربع الثالث

$$x = 180 + 30 = 210^\circ$$

جيب سالب أيضا في الربع الرابع

$$x = 360 - 30 = 330^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

6 $1 - 2\tan x = 5$

الحل :

$$1 - 2\tan x = 5$$

$$-2\tan x = 4$$

$$\tan x = -2$$

$$x = \tan^{-1}(-2)$$

$$x = -63.4$$

الزاوية الأولى هي $x = 360 - 63.4 = 296.6$

الزاوية المرجع هي 63.4

ظل سالب أيضا في الربع الثاني

$$x = 180 - 63.4 = 116.6^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 90^o$:

7 $5 - 2\cos(4x) = 4$

الحل :

$$5 - 2\cos(4x) = 4$$
$$-2\cos(4x) = -1$$

$$\cos(4x) = \frac{1}{2}$$
$$4x = \cos^{-1}(\frac{1}{2})$$

$$4x = 60$$
$$x = \frac{60}{4} = 15$$

الزاوية الأولى هي

جيب تمام موجب أيضا في الربع الرابع

$$4x = 360 - 60 = 300^\circ$$
$$x = \frac{300^\circ}{4} = 75^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 90^o$:

8 $3 + 4\tan(2x) = 6$

الحل :

$$3 + 4\tan(2x) = 6$$
$$4\tan(2x) = 3$$

$$\tan(2x) = \frac{3}{4}$$
$$2x = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$$

$$2x = 36.9$$

الزاوية الأولى هي $x = \frac{36.9}{2} = 18.5$

ظل موجب أيضا في الربع الثالث

$$2x = 180 + 36.9 = 216.9^\circ$$
$$x = \frac{216.9^\circ}{2} = 108.5^\circ$$

وهي مرفوضة لأن $0 \le x \le 90$ حسب شرط السؤال

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0^o \le x \le 90^o$:

9 $13 \sin(3x) + 1 = 6$

الحل :

$$13\sin(3x) + 1 = 6$$
$$13\ \sin(3x) = 5$$

$$\sin(3x) = \frac{5}{13}$$
$$3x = \sin^{-1}(\frac{5}{13})$$

$$3x = 22.6$$
$$x = \frac{22.6}{3} = 7.5$$

الزاوية الأولى هي

جيب موجب أيضا في الربع الثاني

$$3x = 180 - 22.6 = 157.4^\circ$$
$$x = \frac{157.4^\circ}{3} = 52.5^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

10 $2(\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

الحل :

$$2(\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$$

$$2 \sin x - 4 + 1 = 3 \sin x$$

$$-3 = \sin x$$

$$\sin x = -3$$

وهذا مستحيل بالتالي لا يوجد حل للمعادلة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

11 $\tan x - 3\,(2\tan x - 1) = 10$

الحل :

$$\tan x - 3\,(2\tan x - 1\,) = 10$$

$$\tan x - \ 6\tan x + 3 = 10$$

$$-\,5\tan x = 7$$

$$\tan x = \frac{-7}{5}$$

$$x = \tan^{-1}(\frac{-7}{5})$$

$$x \approx -54.5$$

الزاوية المرجع هي 54.5

ظل سالب في الربع الثاني $x = 180 - 54.5 = 125.5$

ظل سالب أيضا في الربع الرابع

$$x = 360 - 54.5 = 305.5^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

12 $15\tan x - 7 = 5\tan x - 3$

الحل :

$$15\tan x - 7 = 5\tan x - 3$$

$$10\tan x = 4$$

$$\tan x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x = \tan^{-1}(\frac{2}{5})$$

$$x \approx 21.8$$

ظل موجب أيضا في الربع الثالث

$$x = 180 + 21.8 = 201.8^\circ$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

13 $5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$

الحل :

$$5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$$

$$5\cos x - 5 = 6 + \cos x$$

$$5\cos x - \cos x = 6 + 5$$

$$4\cos x = 11$$

$$\cos x = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

وهذا مستحيل بالتالي لا يوجد حل للمعادلة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

14 $\tan^2 x - 9\tan x + 20 = 0$

الحل :

$$(\tan x - 5)(\tan x - 4) = 0$$

$$\tan x = 5 \quad or \quad \tan x = 4$$

$$x = \tan^{-1} 5 \quad or \quad x = \tan^{-1} 4$$

$$x = 78.7 \quad or \quad x = 76$$

$$also \quad x = 180 + 78.7 = 258.7 \quad or \quad x = 180 + 76 = 256$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^o, 360^o]$:

15 $2\cos^2 x - \cos x = 0$

الحل :

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad or \quad 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \quad or \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 90\,, 270 \quad or \quad x = 60\,, 300$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^\circ, 360^\circ)$:

16 $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

الحل :

$$4\ sin^2 x - 3 \sin x = 1$$

$$4\ sin^2 x - 3 \sin x - 1 = 0$$

$$(4 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$(4 \sin x + 1) = 0 \quad or \quad (\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{-1}{4} \quad or \quad \sin x = 1$$

$$x = \sin^{-1}(\frac{-1}{4}) \quad or \quad x = 90$$

$$x = -14.5 \quad or \quad x = 90$$

الزاوية المرجع هي 14.5

$$x = 180 + 14.5 = 194.5 \quad or \quad x = 360 - 14.5 = 345.5 \quad or \quad x = 90$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^o, 360^o]$:

17 $2\sin^2 x - 1 = 0$

الحل :

$$2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad or \quad \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad or \quad x = \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = 45 \ , x = 180 - 45 = 135 \quad or \quad x = -45$$

الزاوية المرجع هي 45

$$x = 180 + 45 = 225 \quad or \quad x = 360 - 45 = 315$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^o, 360^o]$:

18 $4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$

الحل :

$$4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$$

$$4\cos^2 x - 15\cos x - 4 = 0$$

$$(4\cos x + 1)(\cos x - 4) = 0$$

$$(4\cos x + 1)(\cos x - 4) = 0$$

$$(4\cos x + 1) = 0 \quad or \quad (\cos x - 4) = 0$$

$$\cos x = \frac{-1}{4} \quad or \quad \cos x = 4 \text{ (مستحيل)}$$

$$x = \cos^{-1}(\frac{-1}{4})$$

$$x = 104.5$$

الزاوية المرجع هي 180-104.5 = 75.5

بالتالي أيضا $x = 180 + 75.5 = 255.5$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترةِ $[0^o, 360^o]$:

19 $\cos x = \sin x$

الحل :

الجيب يساوي جيب التمام في الربع الأول والثالث بسبب الإشارات (مهم جدا)

$$\cos x = \sin x$$

$$x = 45, 225$$

هذه المسألة للحفظ مهمة جدا

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106

20 ساعاتٌ: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم ساعةُ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وبُعْدُ رأسِ العقربِ عنْ سقفِ الغرفةِ يُمثَّلُ دائمًا بالعلاقةِ: $d = -60\cos(30x) + 110$ ، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمترِ، وَ x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعدُ فيهِ رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟

الحل :

$$118 = -60\cos(30x) + 110$$

$$118 - 110 = -60\cos(30x)$$

$$\frac{-8}{60} = \cos(30x)$$

$$30\,x = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{60}\right)$$

$$30\,x = 97.7$$

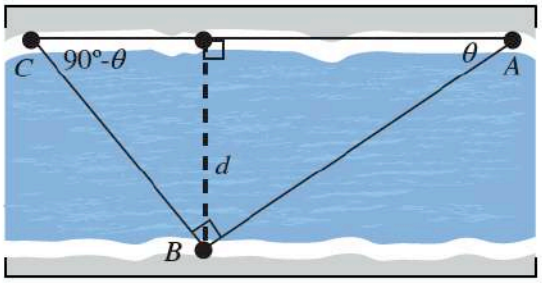
الزاوية المرجع هي 180-97.7=82.3

$$30\,x = 97.7 \;\; or \;\; 30\,x = 180 + 82.3 = 262.3$$

$$x = \frac{97.7}{30} \;\; or \;\; x = \frac{262.3}{30}$$

$$x = 3.3 \;\; or \;\; x = 8.7$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 106



21 سِباحةٌ: سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشـمـاليةِ لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وسـبحَ مسـافةَ 60 m إلـى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشـماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ (90° − θ)، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d، فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ (90° − θ) مرَّةً أُخـرى، ثمَّ أَكتبُ معادلةً وأَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أَجِدُ عرضَ النهرِ.

الحل :

ملاحظة مهمة أي زاويتين مجموعهما 90 فإن جيب الأولى يساوي جيب تمام الثانية، وجيب تمام الأولى يساوي جيب الثانية

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{d}{AB} \Rightarrow d = AB\sin\theta \Rightarrow d = 90\ \sin\theta$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{d}{CB} \Rightarrow d = CB\sin(90-\theta) \Rightarrow d = 60\ \sin(90-\theta)$$

بالتالي

$$d = 90\ \sin\theta = 60\ \sin(90-\theta)$$

بالتالي

$$90\ \sin\theta = 60\ \sin(90-\theta)$$
$$90\ \sin\theta = 60\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{60}{90}\cos\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{6}{9}\cos\theta}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3}$$
$$\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$$
$$\theta = 33.7$$
$$d = 90\ \sin 33.7 = 90 \times 0.55 = 49.5\ m$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 107

22 دولابٌ: يُعطى ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلةِ: $h = 27 - 25\cos\theta$، حيثُ h الارتفاعُ بالأمتارِ، وَ θ قياسُ الزاويةِ التي دارَها الدولابُ. متى يكونُ ارتفاعُ الراكبِ عنِ الأرضِ 49 m؟

الحل :

$$49 = 27 - 25\cos\theta$$

$$25\cos\theta = 27 - 49$$
$$25\cos\theta = -22$$
$$\cos\theta = \frac{-22}{25}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-22}{25}\right)$$

$$\theta = 151.6$$

الزاوية المرجع هي 180-151.6=28.4

$$also \quad \theta = 180 + 28.4 = 208.4$$

23 **حركةُ مقذوفاتٍ:** المسافةُ الأفقيةُ التي تقطعُها مقذوفةٌ في الهواءِ (منْ دونِ افتراضِ وجودٍ لمقاومةِ الهواءِ) تُعطى بالمعادلةِ: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$، حيثُ: v_0 السرعةُ الابتدائيةُ، وَ θ الزاويةُ التي تُطلَقُ بها المقذوفةُ، وَ g تسارُعُ الجاذبيةِ الأرضيةِ ($9.8\ m/s^2$). إذا قُذِفَتْ كرةُ بيسبول بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 40 m/s، فما الزاويةُ التي تُوجَّهُ بها الرميةُ لكيْ تقطعَ الكرةُ مسافةً أفقيةً مقدارُها 110 m قبلَ سقوطِها على الأرضِ؟ ما أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ أنْ تصلَها الكرةُ إذا قُذِفَتْ بهذهِ السرعةِ الابتدائيةِ؟

الحل :

$$110 = \frac{(40)^2 \, sin(2\theta)}{9.8}$$

$$\frac{110 \times 9.8}{1600} = sin(2\theta)$$

$$\Rightarrow sin(2\theta) = 0.674$$

$$2\theta = \sin^{-1}(0.674)$$

$$2\theta = 42.4 \quad or \quad 2\theta = 180 - 42.4 = 137.6$$

$$\theta = \frac{42.4}{2} = 21.2 \quad or \quad \theta = \frac{137.6}{2} = 68.8$$

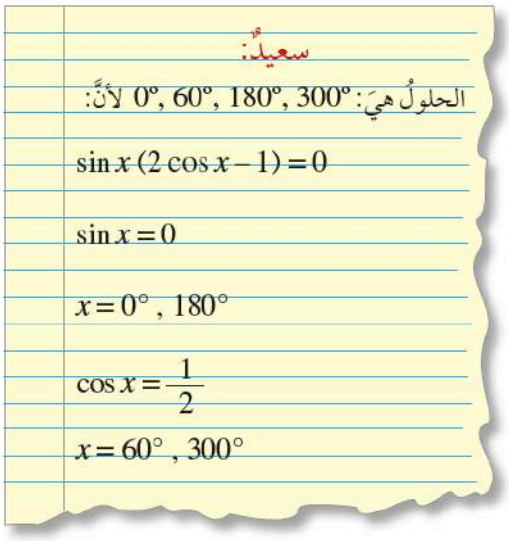
يصل المقذوف أبعد نقطة عندما $\theta = 45$ ،عندئذٍ

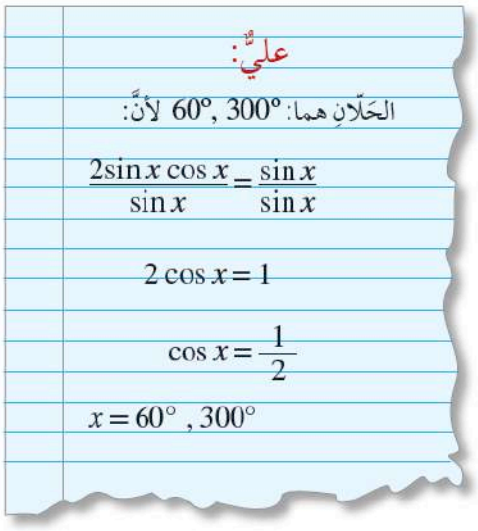
$$d = \frac{(40)^2 \, sin(90)}{9.8}$$

$$d = \frac{1600 \times 1}{9.8} = 163.3\ m$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 107

24 أكتشفُ الخطأَ: حَلَّ كلٌّ منْ سعيدٍ وعليٍّ المعادلةَ: $2\sin x\cos x=\sin x$، حيثُ: $0^\circ \le x < 360^\circ$:





الحل :

حل سعيد صحيح لأنه أخذ $sin\ x$ عامل مشترك

حل علي خاطئ لأنه قسم على $sin\ x$ وهذا يؤدي إلي حذف حلول للمعادلة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 107

25 تحدٍّ: أَحُلُّ المعادلةَ: $2\sin x\cos x+\sin x+2\cos x+1=0$، علمًا بأنَّ $0°\le x\le 360°$.

الحل :

$$2\ sin\ x\ cos\ x\ +\ sin\ x\ +\ 2\ cos\ x\ +\ 1\ =\ 0$$

$$sin\ x\ (2\ cos\ x\ +\ 1)\ +(2\ cos\ x\ +\ 1)\ =\ 0$$

$$(2\cos x+1)(\sin x+1)=0$$

$$(2\cos x+1)=0 \quad \text{or} \quad (\sin x+1)=0$$

$$cos\ x\ =\frac{-1}{2} \quad or \quad \sin x=-1$$

$$x=\cos^{-1}(\frac{-1}{2}) \ \ or \ \ \ \ x=\sin^{-1}(-1)$$

$$\Rightarrow\ x=120\ ,x=240 \ \ or \ \ \ \ x=270$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الثالثة الدرس : حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ الصفحة : 107

26 **تحدٍّ:** أُحدِّدُ عددَ حلولِ المعادلةِ: $\cos x - \sin x - 1 = 0$، حيثُ: $0° \leq x < 360°$.

الحل :

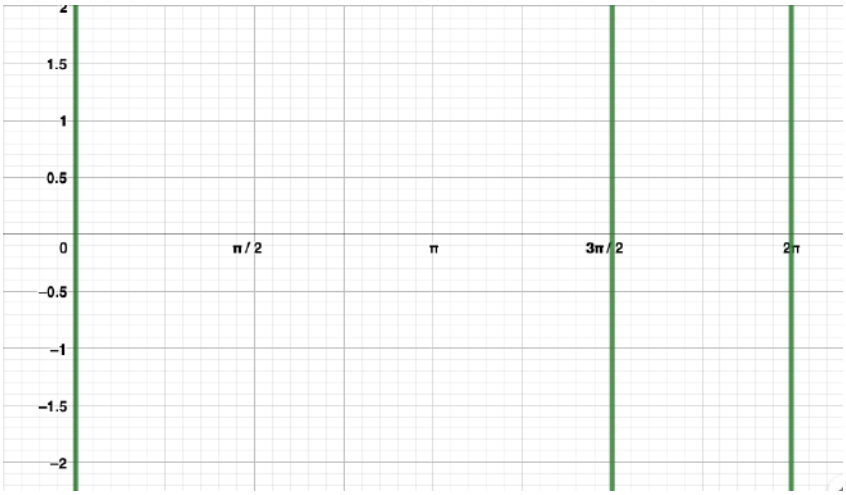
$$\cos x - \sin x = 1$$

$$\cos x = 1 , \sin x = 0 \quad or \quad \cos x = 0 , \sin x = -1$$

$$x = 0 , x = 360 \quad or \quad x = 270$$

إذن يوجد ثلاثة حلول للمعادلة

بيانيا للتوضيح



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 108

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\cos\theta = -0.5$، فـإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في:

a) الربعِ الثاني. b) الربعيْنِ: الثاني، والثالثِ.

c) الربعِ الرابعِ. d) الربعيْنِ: الثاني، والرابعِ.

الحل :

الجواب: b لأن جيب التمام سالب

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

2 إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$، فإنَّ قيمةَ $\sin\theta$ هيَ:

a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{9}{40}$

c) $-\frac{9}{41}$ d) $\frac{9}{41}$

الحل :

الجواب: d

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

3 قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هوَ:

a) 130° b) 40°

c) 50° d) 140°

الحل:

230 تقع في الربع الثالث

$$230 - 180 = 50$$

الجواب: c

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

4 إذا كانَتْ $90° < x < 180°$، وكانَ $\sin x = \frac{8}{17}$، فإنَّ قيمةَ $\tan x$ هيَ:

a) $-\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{15}{17}$ d) $-\frac{15}{8}$

الحل :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(\frac{8}{17})^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{64}{289} + \cos^2 x = \frac{289}{289}$$

$$\cos^2 x = \frac{289}{289} - \frac{64}{289}$$

$$\cos^2 x = \frac{225}{289}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{225}{289}}$$

x في الربع الثاني

$$\cos x = -\frac{15}{17}$$

$$\boldsymbol{\tan x = \frac{-8}{15}}$$

الجواب: a

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 108

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

5 حَلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) $0°$ b) $90°$

c) $270°$ d) $360°$

الحل:

$$x = 270$$

الجواب: c

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 108

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ:

6 $(0.6, 0.8)$

7 $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

8 $(-1, 0)$

9 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

10 $(0, 1)$

11 $(-0.96, 0.28)$

الحل :

6 $\sin x = \frac{8}{10}$ $\cos x = \frac{6}{10}$ $\tan x = \frac{8}{6}$

7 $\sin x = \frac{-12}{13}$ $\cos x = \frac{5}{13}$ $\tan x = \frac{-12}{5}$

8 $\sin x = 0$ $\cos x = -1$ $\tan x = 0$

9 $\sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\tan x = 1$

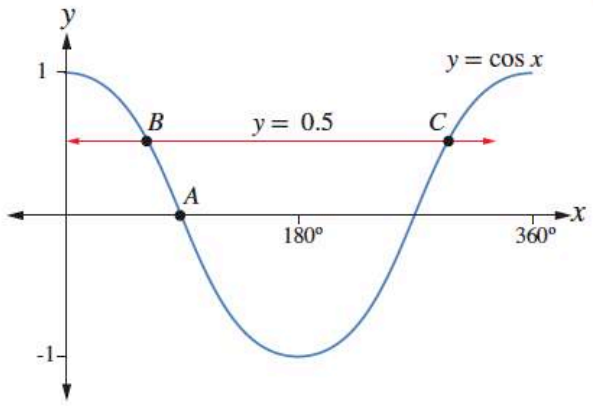
10 $\sin x = 1$ $\cos x = 0$ $\tan x =$ غير معرفة

11 $\sin x = \frac{28}{100}$ $\cos x = \frac{-96}{100}$ $\tan x = \frac{-28}{96}$

يُبيِّنُ الشكلُ التالي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِّ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = 0.5$ في النقطتيْنِ B وَ C:

12 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

13 أَجِدُ إحدثياتِ النقطتيْنِ: B، وَ C.



الحل :

12 $A(90,0)$

13 $B(60,0.5)$, $C(300,0.5)$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $\sin x = \frac{-1}{2}, 270^\circ \le x \le 360^\circ$

الحل:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$(\frac{-1}{2})^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 x = \frac{4}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$
$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

x في الربع الرابع

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{tan\ x = \frac{-1}{\sqrt{3}}}$$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

15 $\cos x = 0.4 \, , \, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

الحل:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + (\frac{4}{10})^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{16}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\sin^2 x = \frac{100}{100} - \frac{16}{100}$$

$$\sin^2 x = \frac{84}{100}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{84}{100}}$$

x في الربع الأول أو الربع الرابع

$$sin\, x = \frac{\sqrt{84}}{10} \quad or \quad sin\, x = -\frac{\sqrt{84}}{10}$$

$$\boldsymbol{tan\, x} = \frac{\sqrt{84}}{4} \quad \boldsymbol{or} \quad \boldsymbol{tan\, x} = \frac{-\sqrt{84}}{4}$$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\tan x = 3 \ , \ 180^\circ \leq x \leq 360^\circ$

الحل:

$$\tan x = 3$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 3$$

$$\sin x = 3\cos x$$

$$(3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$9\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$10\cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{10}$$

x في الربع الثالث

$$cos\, x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$sin\, x = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $\sin x = -\cos x \ , \ 0^\circ \le x \le 360^\circ$

الحل :

$$\sin x = -\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = -1$$

$$(-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2\cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

x في الربع الثاني أو الرابع

$$cos\, x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad or \quad cos\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad or \quad sin\, x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 109

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\sin 140°$

19 $\cos 173°$

20 $\tan 219°$

21 $\sin 320°$

الحل :

بالآلة الحاسبة

18 $\sin 140 = 0.643$

19 $\cos 173 = -0.993$

20 $\tan 219 = 0.809$

21 $\sin 320 = -0.643$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

22 $2\sin 150° + \tan 135°$

الحل:

$$= 2 \times \frac{1}{2} + (-1)$$

$$= (1) + (-1) = 0$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 109

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

23 $\sin^2 150° + \cos^2 150°$

الحل:

$$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

24 $3\cos^2 x - 1 = 0$

الحل :

$$\cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

بالتالي

$$x = 54.74 \quad or \; x = 360 - 54.74 = 305.26$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة الصفحة : 109

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

25 $\sin x = -1.3212 \cos x$

الحل :

$$\sin x = -1.3212 \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1.3212 \cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = -1.3212$$

$$x = \tan^{-1}(-1.3212)$$

$$x = -52.88$$

الزاوية المرجع هي **52.88**

بالتالي

$$x = 180 - 52.88 = 127.12 \quad or \quad x = 360 - 52.88 = 307.12$$

لأن ظل الزاوية سالب في الربع الثاني والرابع

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

26 $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

الحل :

$$5\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$$

$$(5\sin x - 4)(\sin x - 1) = 0$$

$$(5\sin x - 4) = 0 \quad or \quad (\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{4}{5} \quad or \quad \sin x = 1$$

$$x = \sin^{-1}(\frac{4}{5}) \quad or \quad x = 90$$

$$x = 53.13 \; or \; x = 180 - 53.13 = 126.87 \quad or \quad x = 90$$

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

27 $\tan x = 4 \sin x$

الحل :

$$\tan x = 4 \sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 4 \sin x$$

$$\sin x = 4 \sin x \ \cos x$$

$$\sin x - 4 \sin x \ \cos x = 0$$

$$\sin x \ (1 - 4 \ \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \ or \cos x = \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \ or \ x = 180 \ \ or \ x = \cos^{-1}(\frac{1}{4})$$

$$x = 75.52 \quad or \quad x = 360 - 75.52 = 284.48$$

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

28 $3 \tan^2 x \cos x = 3 \tan^2 x$

الحل :

$$3 \tan^2 x \cos x = 3 \tan^2 x$$

$$3 \tan^2 x \cos x - 3 \tan^2 x = 0$$

$$3 \tan^2 x (\cos x - 1) = 0$$

$$3 \tan^2 x = 0 \quad or \quad (\cos x - 1) = 0$$

$$\tan x = 0 \quad or \quad \cos x = 1$$

$$x = 0 \; or \; 180 \quad or \quad 0$$

$$x = 0 \; or \; 180$$

29 إذا كانَتْ x زاويةً في الربعِ الأولِ، وكانَ $\sin x + \sin(180° - x) = 1.4444$ فأَجِدُ قياسَ الزاويةِ x.

الحل :

$$\sin x + \sin(180 - x) = 1.4444$$

$$\sin x + \sin x = 1.4444$$

$$2 \sin x = 1.4444$$

$$\sin x = \frac{1.4444}{2} = 0.7222$$

$$x = \sin^{-1}(0.7222)$$

$$x = 46.24$$

x في الربع الأول حسب شرط السؤال

30 **لعبةُ مِدفعٍ**: يُطلِقُ مِدفعُ قذائفَ بالوناتٍ مائيةً في مسابقةٍ للتسليةِ. إذا كانَ البُعْدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلِقَتْ منَ المِدفعِ بزاويةٍ قياسُها x معَ المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 7 m/s، يُعطى بالأمتارِ حسبَ العلاقةِ: $d=7+2\sin\left(\frac{3x}{5}\right)$، فما المسافةُ الأفقيةُ التي قطعَتْها قذيفةٌ أُطلِقَتْ بزاويةٍ مقدارُها 50°؟

الحل :

$$d = 7 + 2\sin(\frac{3x}{5})$$

$$d = 7 + 2\sin(\frac{3 \times 50}{5})$$

$$d = 7 + 2\sin(\frac{150}{5})$$

$$d = 7 + 2\sin(30)$$

$$d = 7 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$d = 7 + 1 = 8$$

31 أَجِدُ أصفــارَ الاقتــرانِ $y = 4(\sin x)^2 - 3$، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$.

الحل :

$$4(\sin x)^2 - 3 = 0$$

$$(\sin x)^2 = \frac{3}{4}$$

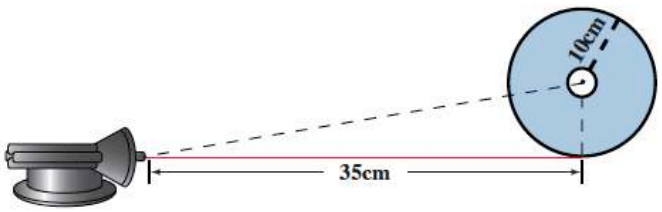
$$\sin x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad or \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 60 \; or \; 120 \quad or \quad x = 240 \; or \; 300$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس : أسئلة الوحدة

32 في تجربةِ علومٍ لاكتشـــافِ خصائصِ الضـــوءِ، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعْدِ 35 cm منْ قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ منْ مركزِهِ، وكانَ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 10 cm كما في الشـــكلِ الآتي. أَجِدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبِ مركزِ هذا القرصِ.



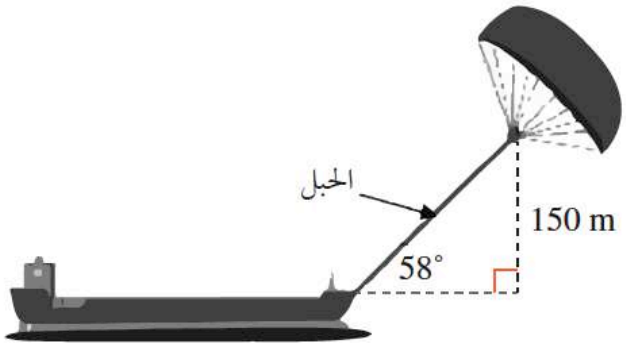
الحل :

$$\tan x = \frac{10}{35}$$

$$x = \tan^{-1}(\frac{10}{35})$$

$$x = 15.95$$

33 لاستغلالِ طاقةِ الرياحِ وخفضِ استهلاكِ الوقودِ؛ رُبِطَ شراعٌ طائرٌ بسفينةٍ. ما الطولُ المناسبُ لحبلِ الشراعِ كيْ يسحبَ السفينةَ بزاويةِ 58°، ويكونَ الشراعُ على ارتفاعٍ رأسيٍّ مقدارُهُ 150 m كَما هوَ مُبيَّنٌ في الشكلِ الآتي:



a) 177 m
b) 283 m
c) 160 m
d) 244 m

الحل :

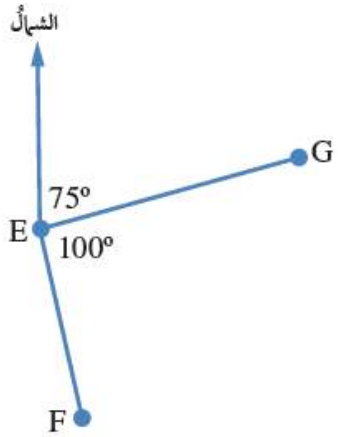
$$\sin 58 = \frac{150}{\text{طول الحبل}}$$

$$\frac{85}{100} = \frac{150}{\text{طول الحبل}}$$

$$\text{طول الحبل} = \frac{150 \times 100}{85} = 176.5 \approx 177$$

الجواب a

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ سفنٍ، هيَ: E، وَ F، وَ G. أَكتبُ اتجاهَ السفينةِ G منَ السفينةِ E، واتجاهَ السفينةِ F منَ السفينةِ E.

الحل :

اتجاه G من E هو 75°

اتجاه F من E هو 175°

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X منَ النقطةِ Z هوَ 295°، فما اتجاهُ النقطةِ Z منَ النقطةِ X؟

الحل :

$$360 - 295 = 65^{\circ}$$

اتجاه Z من X هو

$$180 - 65 = 115^{\circ}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 115

أتحقق من فهمي

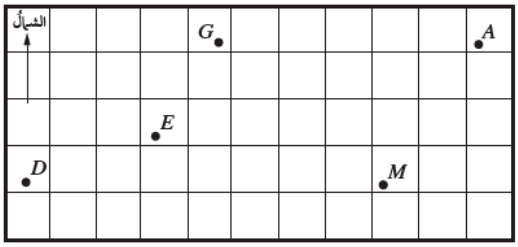
أستعملُ الخريطةَ في المثالِ السابقِ لتحديدِ اتجاهِ مدينةِ حيفا منْ مدينةِ القدسِ الشريفِ.

الحل :

الجواب 350°

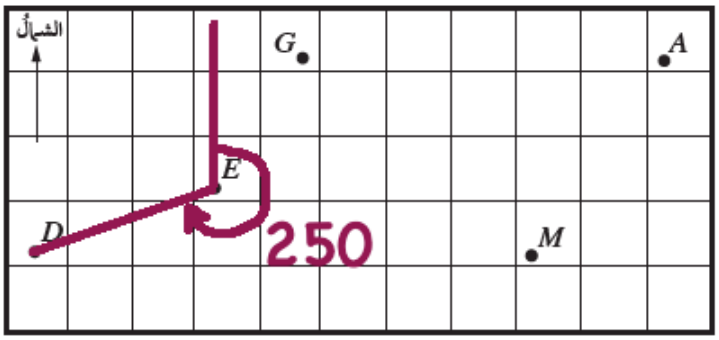
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 115

أَجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:



1 اتجاهُ النقطةِ D منَ النقطةِ E.

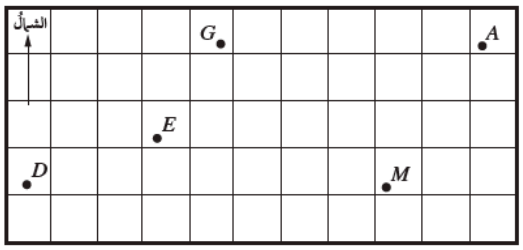
الحل :



الجواب 250°

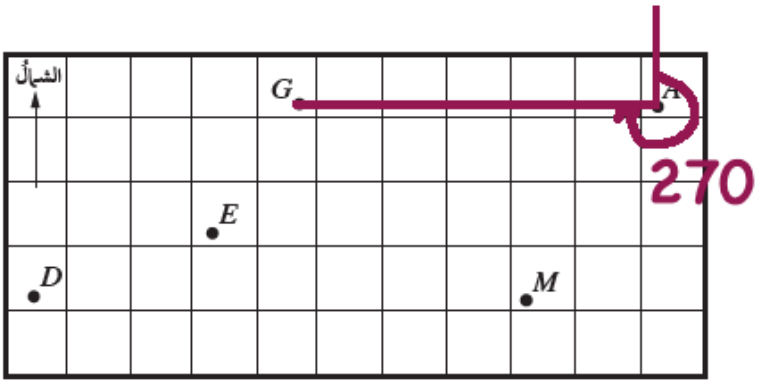
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 115

أَجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:



2 اتجاهُ النقطةِ G منَ النقطةِ A.

الحل :

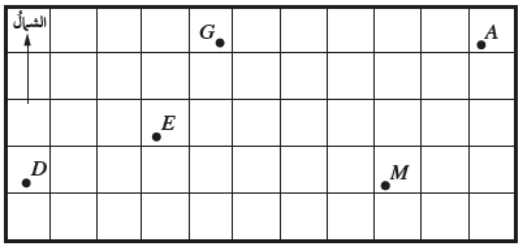


الجواب 270°

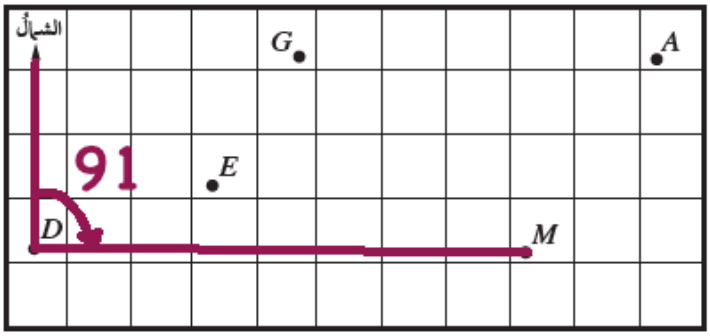
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 115

أَجِدُ كلًّا منَ الاتجاهاتِ الآتيةِ باستعمالِ المنقلةِ:

3 اتجاه النقطةُ M منَ النقطةِ D.



الحل :



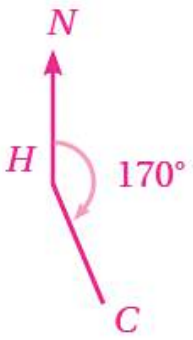
الجواب: 91°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 116

أرسمُ شكلًا يُوضِّحُ كلَّ موقفٍ ممّا يأتي:

4 اتجاهُ النقطةِ C منَ النقطةِ H هوَ $170°$.

الحل:

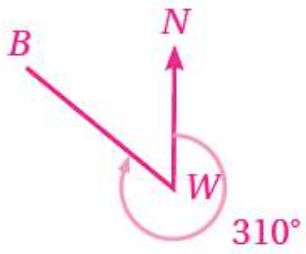


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

أرسمُ شكلًا يُوضِّحُ كلَّ موقفٍ ممّا يأتي:

5 اتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ W هوَ $310°$.

الحل:

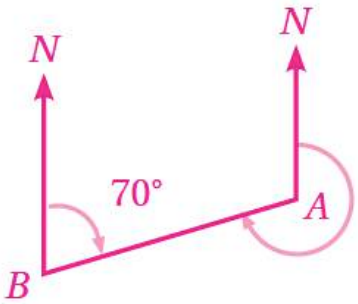


رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 116

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

6 اتجاهُ A منْ B هوَ $070°$. أَجِدُ اتجاهَ B منْ A.

الحل:



قياس الزاوية NAB الداخلية

$$180 - 70 = 110$$

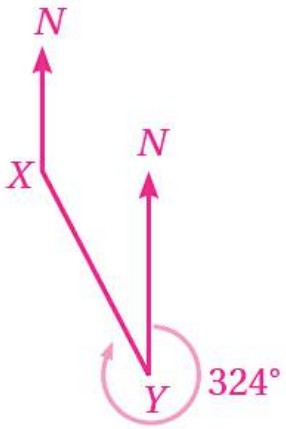
إذن اتجاه النقطة B من النقطة A هو

$$360 - 110 = 250$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

7 اتجاهُ X منْ Y هوَ $324°$. أَجِدُ اتجاهَ Y منْ X.



الحل:

قياس الزاوية NYX الداخلية

$$360 - 324 = 36$$

إذن اتجاه النقطة Y من النقطة X

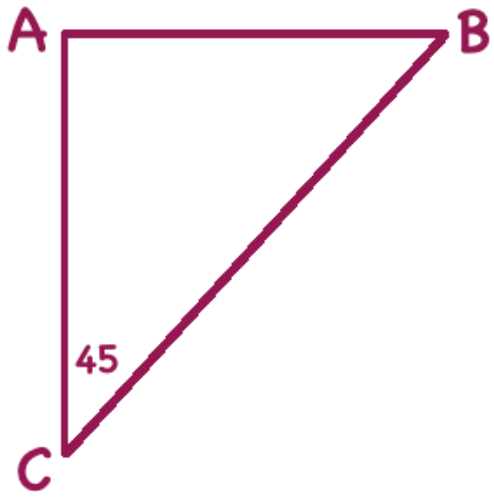
$$180 - 36 = 144$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 116

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

8 تقعُ النقطةُ A شماليَّ النقطةِ C، وتقعُ النقطةُ B شرقيَّ النقطةِ A، واتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ C هوَ $045°$. أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ الثلاثِ.

الحل :



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 116

ملاحةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ حولَ الأضلاعِ الأربعةِ لمربَّعٍ مساحتُهُ كيلو مترٍ مربَّعٌ واحدٌ:

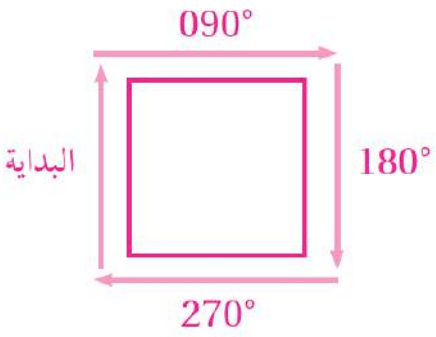
9 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ الشمالِ، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

10 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ 090°، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ بعكسِ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

الحل :

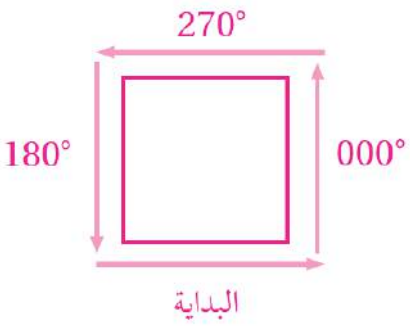
9

إذا كانت البداية في اتجاه الشمال، فإنه سيتحوَّل إلى اتجاه الشرق عند نهاية ضلع المربع، ثم الجنوب، فالغرب؛ أي إن الاتجاهات التي سلكها هي 90، و180، و270 بالترتيب



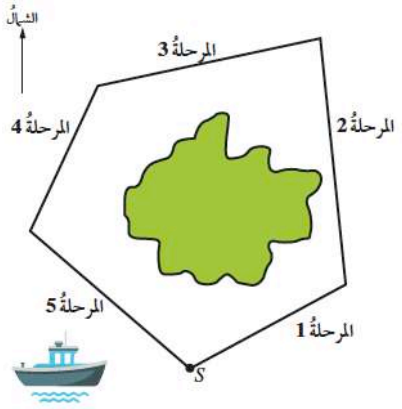
10

إذا كانت البداية في اتجاه 90، فإنه سيتحوَّل إلى اتجاه الشمال عند نهاية ضلع المربع، ثم الغرب، فالجنوب؛ أي إن الاتجاهات التي سلكها هي 000، 270، و 180بالترتيب



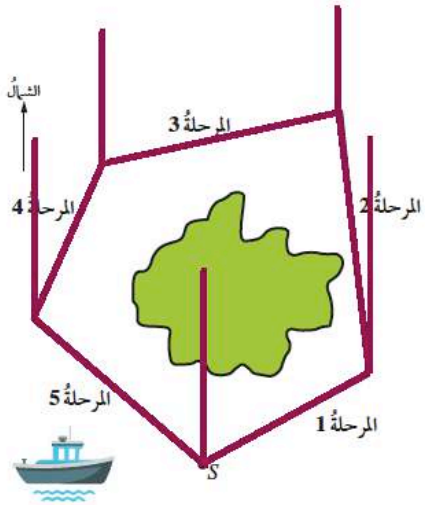
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

11 **خرائــطُ**: تُبيِّنُ الخريطةُ الآتيةُ رحلةَ قاربٍ حولَ إحــدى الجُزرِ، بدأَتْ منَ الموقعِ S، وانتهَتْ عندَهُ. إذا كانَ كلُّ 1 cm على الخريطةِ يُمثِّلُ 20 km، فما طولُ كلِّ مرحلةٍ منْ مراحلِ الرحلةِ واتجاهُها؟ أنسخُ الجدولَ الآتيَ، ثمَّ أُكمِلُهُ:



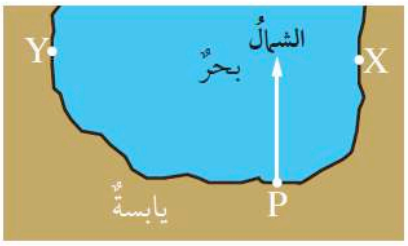
المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1		
2		
3		
4		
5		

الحل :



المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1	50 km	60
2	70 km	355
3	66 km	260
4	46 km	204
5	60 km	130

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ



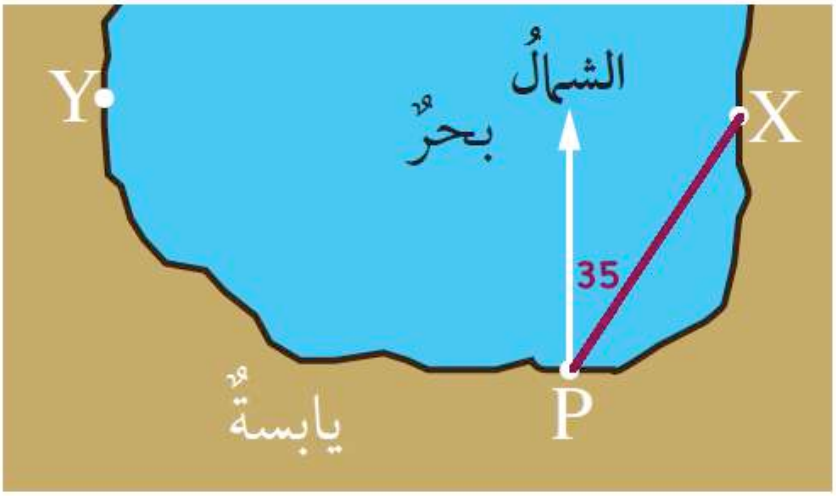
موانئُ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ الميناءَ P والمرفأينِ X وَ Y على الساحلِ:

12 أبحــرَ قاربُ صيدٍ منَ الميـنــاءِ P إلى المرفأ X. ما اتجــاهُ المرفأ X منَ الميناءِ P؟

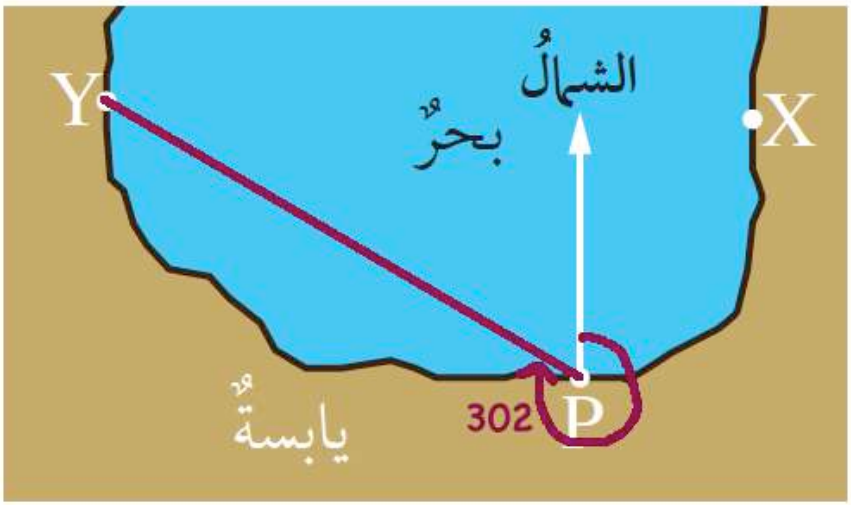
13 أبحرَ يختٌ منَ الميناءِ P إلى المرفأ Y. ما اتجاهُ المرفأ Y منَ الميناءِ P؟

الحل :

12

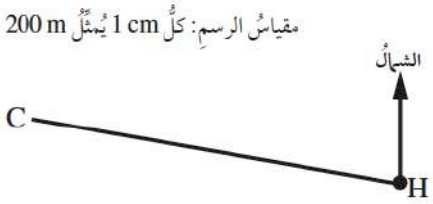


13



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 117

مواقعُ جغرافيةٌ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ موقعَ بيتِ أريجَ عندَ النقطةِ H والناديَ الرياضيَّ الذي ترتادُهُ عندَ النقطةِ C:



14 أَستعملُ مقياسَ الرسمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريجَ والنادي الرياضيِّ.

15 أستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ النادي منْ بيتِ أريجَ.

16 يبعدُ السوقُ التجاريُّ S مسافةَ 600 m عنْ بيتِ أريجَ، وباتجاهِ 150° منْ بيتِها. أُعيِّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةٍ منَ المُخطَّطِ.

الحل :

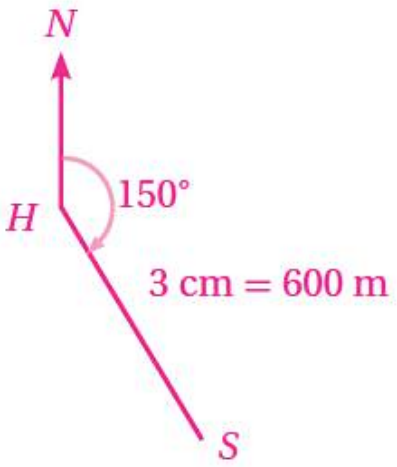
14

1100 m

15

280°

16



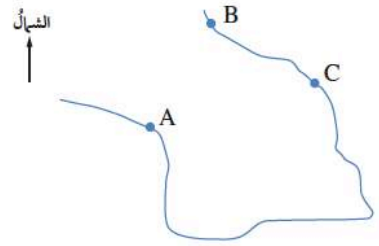
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 117

17 ملاحـــةٌ جويةٌ: في أثناءِ تحليقِ طائرةٍ باتجاهِ 072°، طُلِبَ إلى قائدِها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟

الحل :

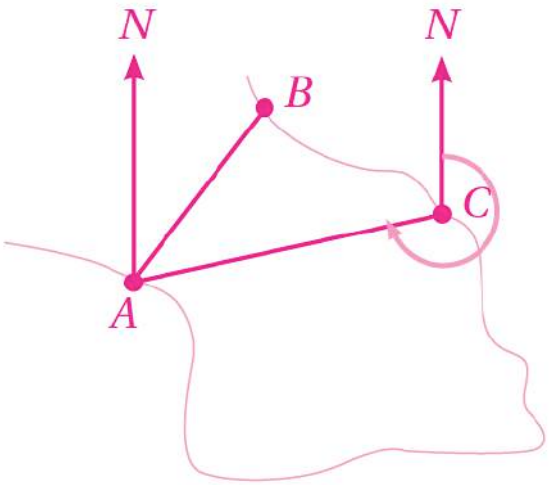
108°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ الصفحة : 117



18 خرائطُ: تُمثِّلُ A وَ B وَ C ثلاثَ قرًى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هوَ $030°$، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C؟

الحل :



قياس الزاوية NAB هو30 ، وقياس الزاوية BAC هو 45؛ لأن قُطْر المُربَّع يُنصِّف زواياه

إذن

قياس الزاوية NAC هو $30 + 45 = 75$

قياس الزاوية NCA الداخلية هو

$180 - 75 = 105$

لأن الزاويتين الداخليتين المتحالفتين بين متوازيين متكاملتان

اتجاه A من C يساوي قياس الزاوية NCA المنعكسة، وهو

$360 - 105 = 255$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم حلَّقَتْ طائرةٌ منْ عمّانَ إلى العقبةِ، وقدْ صنعَ مسارُها المستقيمُ زاويةً قياسُها 200° معَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ. ما قياسُ الزاويةِ بينَ مسارِ عودةِ الطائرةِ إلى عمّانَ وخطِّ الشمالِ الجغرافيِّ؟

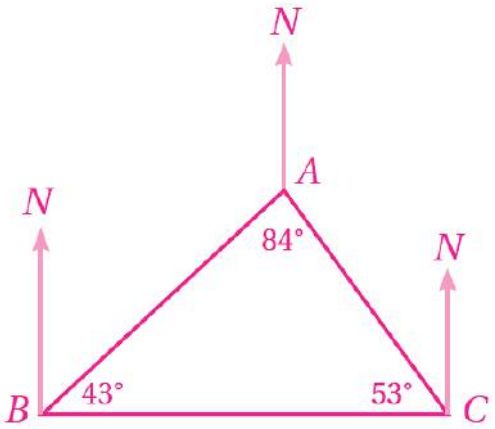
الحل :

20°

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

20 مسألةٌ مفتوحةٌ: أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُسمّيهِ ABC، ثمَّ أقيسُ زواياهُ، ثمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B، واتجاهَ C منْ A، واتجاهَ C منْ B.

الحل :



قياس الزاوية NBA هو

$$90 - 43 = 47$$

إذن اتجاه A من B هو047

قياس الزاوية NCA هو

$$90 - 53 = 37$$

قياس الزاوية NAC هو

$$180 - 37 = 143$$

إذن:

اتجاه C من A هو 143

اتجاه Cمن B هو 90

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : الاتجاهُ منَ الشمالِ

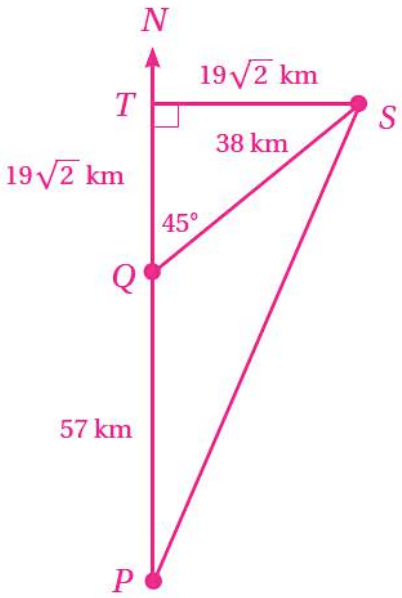
تحدٍّ: أبحرَتْ سـفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةَ 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ 045°، وقطعَتْ مسافةَ 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هوَ S، فأَجِدُ:

21 SP.

22 اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P.

الحل :

21



بعد أن قطعت السفينة $57\ km$ في اتجاه الشمال تحوَّلت عند Q إلى اتجاه 045 حتى وصلت الموقع S

لإيجاد PS ، يُرسَم عمود من S إلى امتداد PQ ، فينتج مثلثان قائما الزاوية، هما STQ ، و STP

في المثلث STQ ، الضلعان TS, TQ متطابقان، وكلٌّ منهما يساوي

$$SQ \times \sin 45 = 38 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 19\sqrt{2}\ km$$

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث STP ، ينتج

$$(SP)^2 = (ST)^2 + (PT)^2$$
$$(SP)^2 = (19\sqrt{2})^2 + (19\sqrt{2} + 57)^2$$
$$= 722 + 7034.1866$$
$$= 7756.1866$$
$$SP = \sqrt{7756.1866}$$
$$\approx 88.1\ km$$

22

لإيجاد اتجاه S من P ، يجب إيجاد قياس الزاوية QPS ، وليكن هذا القياس x

من المثلث قائم الزاوية STP ، يُلاحَظ أن

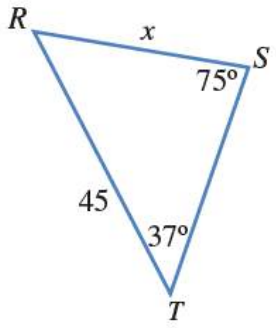
$$\tan x = \frac{19\sqrt{2}}{19\sqrt{2} + 57} = 0.3204$$
$$x = \tan^{-1}(0.3204) \approx 18$$

إذن اتجاه S من P هو 018 مُقرَّبًا إلى أقرب درجة

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 119

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المُبيَّنِ جانبًا.



الحل :

$$\frac{x}{\sin 37} = \frac{45}{\sin 75}$$

$$x \sin 75 = 45 \sin 37$$

$$x = \frac{45 \sin 37}{\sin 75}$$

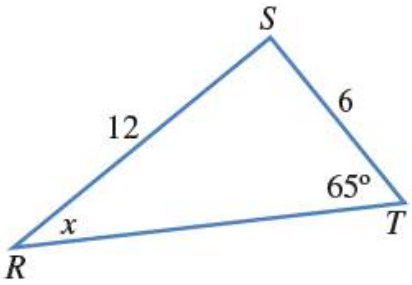
$$x = \frac{45 \times 0.602}{0.966}$$

$$x = 28.043$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 120

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST.



الحل :

$$\frac{6}{\sin x} = \frac{12}{\sin 65}$$

$$12 \sin x = 6 \sin 65$$

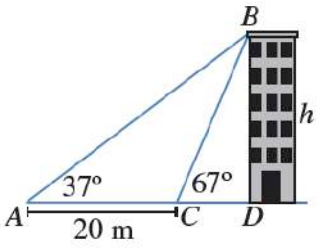
$$\sin x = \frac{6 \times \sin 65}{12}$$

$$\sin x = 0.453$$

$$x = \sin^{-1}(0.453)$$

$$x = 26.9$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 121



أتحقق من فهمي

رصدَ ليثٌ زاويةَ قمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A، فكانَتْ 37°، ثمَّ سارَ مسافةَ 20 m باتجاهِ البنايةِ حتّى النقطةِ C، ثمَّ رصدَ زاويةَ قمَّةِ البنايةِ، فكانَتْ 67°. أَجِدُ ارتفاعَ البنايةِ.

الحل :

قياس الزاوية ABD يساوي 90-37=53

قياس الزاوية CBD يساوي 90-67=23

بالتالي قياس الزاوية ABC يساوي 53-23=30

سنجد الأن طول CB

$$\frac{CB}{\sin 37} = \frac{20}{\sin 30}$$

$$CB \sin 30 = 20 \sin 37$$

$$CB = \frac{20 \times \sin 37}{\sin 30}$$

$$CB = 24.07$$

$$\frac{h}{\sin 67} = \frac{24.07}{\sin 90}$$

$$h \sin 90 = 24.07 \times \sin 67$$

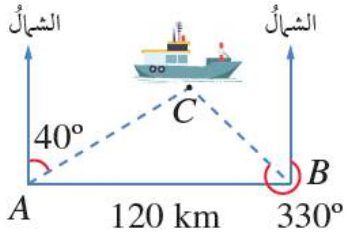
$$h = 24.07 \times 0.921$$

$$h = 22.16$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أتحقق من فهمي

أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ المحطَّةِ B في المثالِ السابقِ.



الحل :

قياس الزاوية CAB يساوي 50

قياس الزاوية ACB يساوي 70

$$\frac{CB}{\sin 50} = \frac{120}{\sin 70}$$

$$CB \sin 70 = 120 \sin 50$$

$$CB = \frac{120 \sin 50}{\sin 70}$$

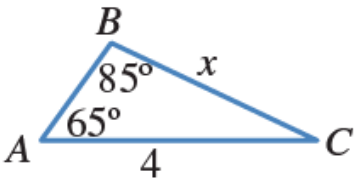
$$x = \frac{120 \times 0.766}{0.94}$$

$$x = 97.79$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1



الحل :

$$\frac{x}{\sin 65} = \frac{4}{\sin 85}$$

$$x \sin 85 = 4 \sin 65$$

$$x = \frac{4 \sin 65}{\sin 85}$$

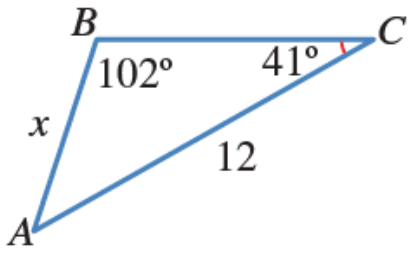
$$x = \frac{4 \times 0.906}{0.996}$$

$$x = 3.639$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

2



الحل :

$$\frac{x}{\sin 41} = \frac{12}{\sin 102}$$

$$x \sin 102 = 12 \sin 41$$

$$x = \frac{12 \sin 41}{\sin 102}$$

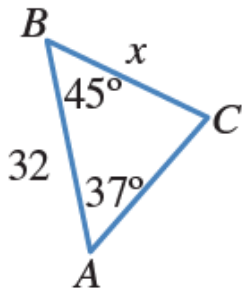
$$x = \frac{12 \times 0.656}{0.978}$$

$$x = 8.049$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

3



الحل :

الزاوية C تساوي $180 - (45 + 37) = 180 - 82 = 98^\circ$

$$\frac{x}{\sin 37} = \frac{32}{\sin 98}$$

$$x \sin 98 = 32 \sin 37$$

$$x = \frac{32 \sin 37}{\sin 98}$$

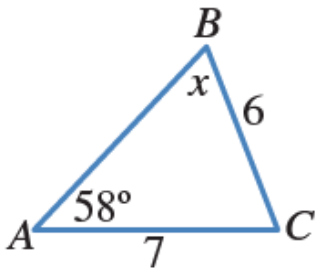
$$x = \frac{32 \times 0.602}{0.99}$$

$$x = 19.459$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

4



الحل :

$$\frac{7}{\sin x} = \frac{6}{\sin 58}$$

$$6 \sin x = 7 \sin 58$$

$$\sin x = \frac{7 \sin 58}{6}$$

$$\sin x = 0.989$$

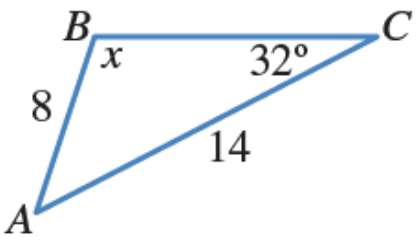
$$x = \sin^{-1}(0.989)$$

$$x = 81.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

5



الحل :

$$\frac{14}{\sin x} = \frac{8}{\sin 32}$$

$$8 \sin x = 14 \sin 32$$

$$\sin x = \frac{14 \sin 32}{8}$$

$$\sin x = 0.927$$

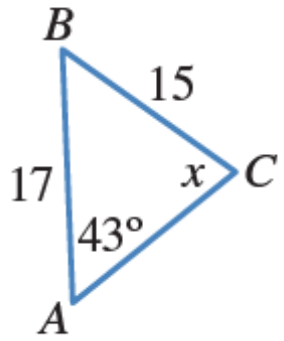
$$x = \sin^{-1}(0.927)$$

$$x = 68.02$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

6



الحل :

$$\frac{17}{\sin x} = \frac{15}{\sin 43}$$

$$15 \sin x = 17 \sin 43$$

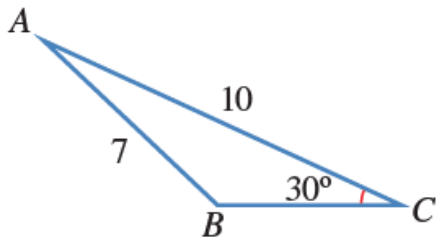
$$\sin x = \frac{17 \sin 43}{15}$$

$$\sin x = 0.773$$

$$x = \sin^{-1}(0.773)$$

$$x = 50.62^{\circ}$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ



7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.

الحل :

$$\frac{10}{\sin B} = \frac{7}{\sin 30}$$

$$7 \sin B = 10 \sin 30$$

$$\sin B = \frac{10 \sin 30}{7}$$

$$\sin B = 0.714$$

$$B = \sin^{-1}(0.714)$$

$$B = 45.58^{\circ}$$

الزاوية B المنفرجة في الربع الثاني وتساوي 180-45.58=134.42

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 122

8 **خرائطُ**: أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم إذا كانَتْ جرشُ والزرقاءُ ومأدبا تُشكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمسافةُ بينَ مدينتَيِ الزرقاءِ وجرشَ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ جرشَ 52°، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ الزرقاءِ 93°، فهلْ يُمكِنُ بهذهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتَيْ جرشَ ومأدبا؟

الحل :

المسافة بين جرش ومأدبا تساوي x

الزاوية التي يقع رأسها عند مأدبا تساوي 35

$$\frac{x}{\sin 93} = \frac{44}{\sin 35}$$

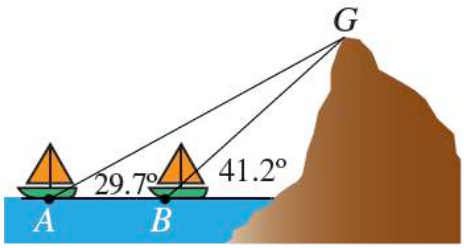
$$x \sin 35 = 44 \sin 93$$

$$x = \frac{44 \sin 93}{\sin 35}$$

$$x = \frac{44 \times 0.998}{0.574}$$

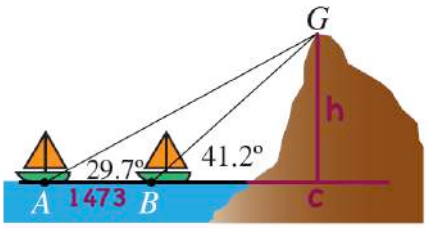
$$x = 76.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 123



9 **بِحارٌ**: ترصدُ سـفينتانِ في البحرِ قمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَتِ المسـافةُ بينَ السـفينتيْنِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ منْ مستوى سطحِ البحرِ؟

الحل :



قياس الزاوية AGC يساوي 90-29.7=60.3

قياس الزاوية BGC يساوي 90-41.2=48.8

بالتالي قياس الزاوية AGB يساوي 60.3-48.8=11.5

سنجد الأن طول BG

$$\frac{BG}{\sin 29.7} = \frac{1473}{\sin 11.5}$$

$$BG \sin 11.5 = 1473 \sin 29.7$$

$$BG = \frac{1473 \times \sin 29.7}{\sin 11.5}$$

$$BG = 3660.62$$

$$\frac{h}{\sin 41.2} = \frac{3660.62}{\sin 90}$$

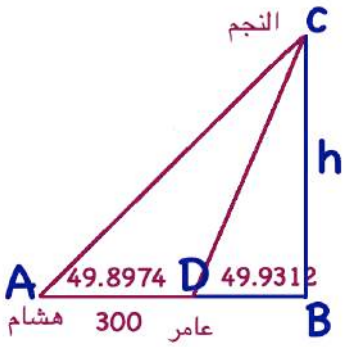
$$h \sin 90 = 3660.62 \times \sin 41.2$$

$$h = 3660.62 \times 0.659$$

$$h = 2411.21$$

10 **علمُ الفَلَكِ:** رصدَ عامرٌ وهشـــامٌ منْ منزليْهِما نجمًا في الســـماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَتْ زاويةُ رصدِ هشامٍ للنجمِ $49.8974°$، وزاويةُ رصدِ عامرٍ لهُ $49.9312°$، والمسافةُ بينَ منزليْهِما 300 km، فأُقدِّرُ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.

الحل :



قياس الزاوية ACB يساوي 90-49.8974=40.1026

قياس الزاوية DCB يساوي 90-49.9312=40.0688

بالتالي قياس الزاوية ACD يساوي 40.1026-40.0688=0.0338

سنجد الأن طول DC

$$\frac{h}{\sin 49.9312} = \frac{388980.14}{\sin 90}$$

$$h \sin 90 = 388980.14 \times \sin 49.9312$$

$$h = 388980.14 \times 0.765$$

$$h = 297675.6254$$

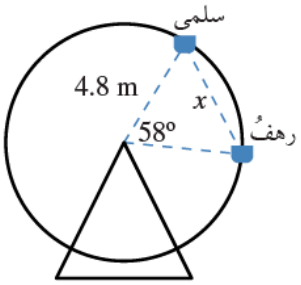
$$\frac{DC}{\sin 49.8974} = \frac{300}{\sin 0.0338}$$

$$DC \sin 0.0338 = 300 \sin 49.8974$$

$$DC = \frac{300 \sin 49.8974}{\sin 0.0338}$$

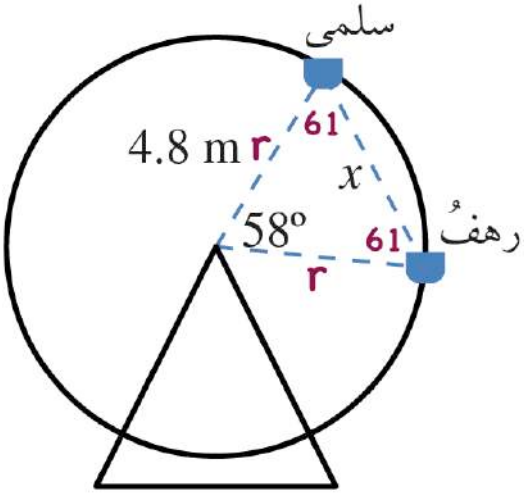
$$DC = 388980.14$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ



11 **مدينةُ الألعابِ:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَتْ سلمى ورهفُ على مقعديْنِ منفصليْنِ في لعبةِ الدولابِ الدوّارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ x بينَهُما.

الحل :



$$\frac{x}{\sin 58} = \frac{4.8}{\sin 61}$$

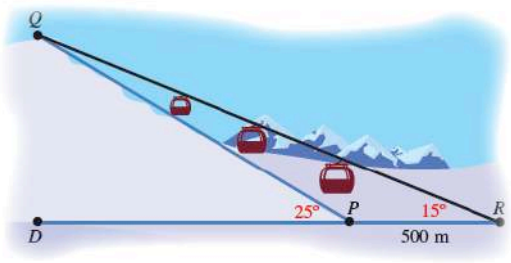
$$x \sin 61 = 4.8 \sin 58$$

$$x = \frac{4.8 \sin 58}{\sin 61}$$

$$x = \frac{4.8 \times 0.848}{0.875}$$

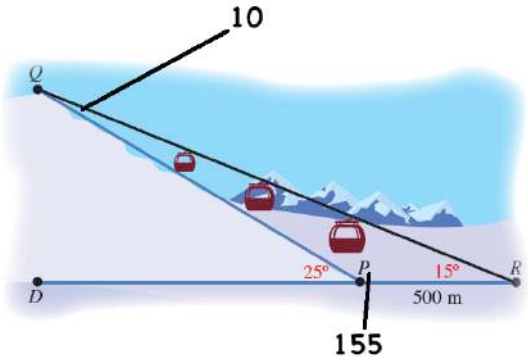
$$x = 4.65$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ



12 **رياضةُ التزلُّجِ**: يتكوَّنُ مسارُ تزلُّجٍ مِنْ جزءٍ مائلٍ، وآخرَ مستقيمٍ. إذا تزلَّجَ محمودٌ منَ النقطةِ Q إلى النقطةِ P، ثمَّ وصلَ خطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ مسارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25°، والمسافةُ بينَ النقطتيْنِ P وَ R هيَ 500 m، وزاويةُ رصْدِ الحَكَمِ مِنْ نقطةِ النهايةِ للمُتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البدايةِ 15°، فما طولُ QP؟

الحل :



$$\frac{QP}{\sin 15} = \frac{500}{\sin 10}$$

$$QP \sin 10 = 500 \sin 15$$

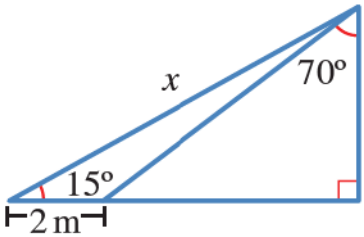
$$QP = \frac{500 \sin 15}{\sin 10}$$

$$QP = \frac{500 \times 0.259}{0.174}$$

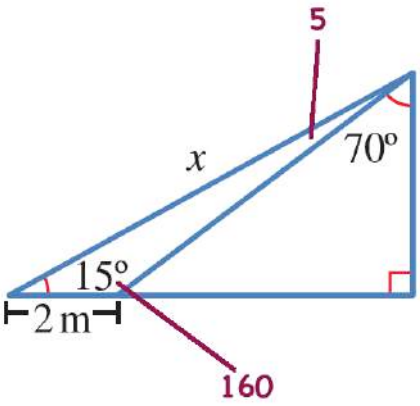
$$QP = 744.252$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 123

13 أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



الحل :



$$\frac{x}{\sin 160} = \frac{2}{\sin 5}$$

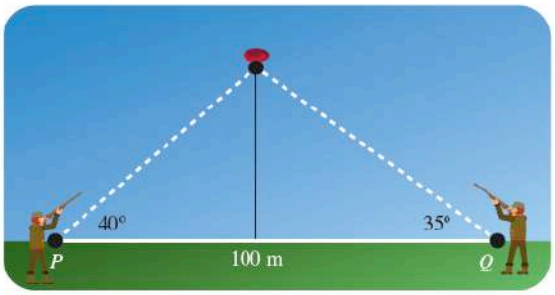
$$x \sin 5 = 2 \sin 160$$

$$x = \frac{2 \sin 160}{\sin 5}$$

$$x = \frac{2 \times 0.342}{0.087}$$

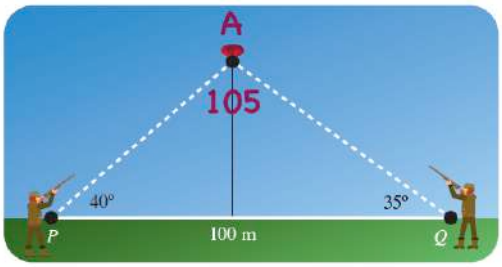
$$x = 7.862$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ



14 **تبريرٌ**: أطلقَ قنّاصانِ النارَ على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماءِ في لحظةٍ ما. إذا كانَتْ زاويةُ إطلاقِ الأولِ 40°، وزاويةُ إطلاقِ الثاني 35°، والمسافةُ بينَهُما 100 m، فأيُّهُما سيصيبُ الهدفَ أولًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الحل :



$$\frac{AQ}{\sin 40} = \frac{100}{\sin 105}$$

$$AQ \sin 105 = 100 \sin 40$$

$$AQ = \frac{100 \sin 40}{\sin 105}$$

$$AQ = \frac{100 \times 0.643}{0.966}$$

$$AQ = 66.563$$

$$\frac{AP}{\sin 35} = \frac{100}{\sin 105}$$

$$AP \sin 105 = 100 \sin 35$$

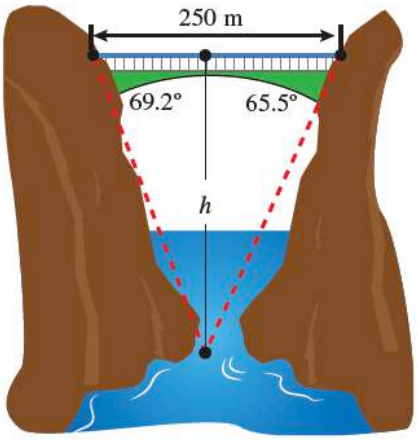
$$AP = \frac{100 \sin 35}{\sin 105}$$

$$AP = \frac{100 \times 0.574}{0.966}$$

$$AP = 59.42$$

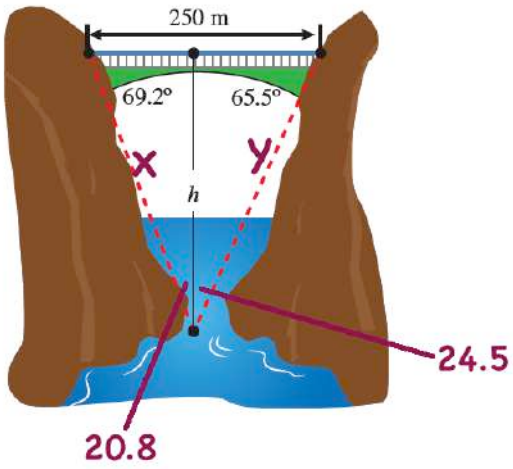
المسافة بين القناص الأول والهدف هي 59.42 والمسافة بين القناص الثاني والهدف هي 66.563
إذن القناص الأول يصيب الهدف أولا؛ لأن المسافة بينه وبين الهدف أقل

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 124



15 تحدٍّ: مرَّ قاربٌ أسفلَ جسرٍ طولُهُ 250 مترًا. وقدْ رصدَ الشخصُ الذي في القــاربِ الزاويتيْنِ اللتيْنِ تقعانِ عندَ طرفَيِ الجســرِ، فكانَتا 69.2° وَ 65.5°، أَجِدُ ارتفاعَ الجسرِ عنِ القاربِ.

الحل :



$$\frac{x}{\sin 65.5} = \frac{250}{\sin 45.3}$$

$$x \sin 45.3 = 250 \sin 65.5$$

$$x = \frac{250 \sin 65.5}{\sin 45.3}$$

$$x = \frac{250 \times 0.909}{0.711}$$

$$x = 319.62$$

$$\frac{h}{\sin 69.2} = \frac{319.62}{\sin 90}$$

$$h \sin 90 = 319.62 \sin 69.2$$

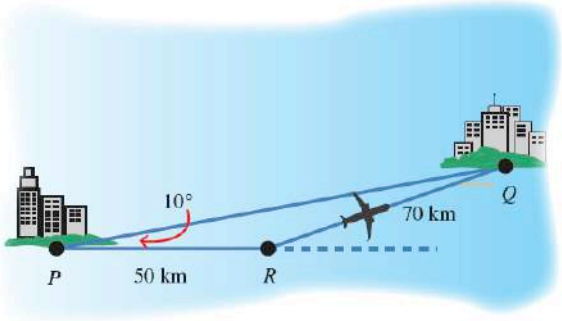
$$h = 319.62 \sin 69.2$$

$$h = 298.789$$

.

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ الجيوبِ الصفحة : 123

16 تبريرٌ: توجَّهَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ P إلى المدينةِ Q، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 50 km أدركَ الطيّارُ وجودَ خطأٍ في زاويةِ الانطلاقِ مقدارُهُ $10°$، فاستدارَ في الحالِ، وقطعَتِ الطائرةُ مسافةَ 70 km حتّى وصلَتِ المدينةَ Q. إذا كانَتْ سرعةُ الطائرةِ ثابتةً وتساوي 250 km/h، فما الوقتُ الإضافيُّ الذي استغرقَهُ الطيّارُ بسببِ خطئِهِ في زاويةِ الانطلاقِ؟



الحل :

$$\frac{50}{\sin Q} = \frac{70}{\sin 10}$$
$$70 \sin Q = 50 \sin 10$$
$$\sin Q = \frac{50 \sin 10}{70}$$
$$\sin Q = 0.124$$
$$Q = \sin^{-1}(0.124)$$
$$Q = 7^{\circ}$$

$$\frac{PQ}{\sin 163} = \frac{70}{\sin 10}$$
$$PQ \sin 10 = 70 \sin 163$$
$$PQ = \frac{70 \sin 163}{\sin 10}$$
$$pQ = \frac{70 \times 0.292}{0.174}$$
$$PQ = 118.28$$

.

الزاوية R تساوي $180 - (10 + 7.12) = 180 - 17.12 = 162.88$

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

وقت PR هو $\frac{50}{250} = \frac{1}{5}$ بالتالي وقت PR يساوي $\frac{1}{5} \times 60 = 12$ m

وقت RQ هو $\frac{70}{250} = \frac{7}{25}$ بالتالي وقت PR يساوي $\frac{7}{25} \times 60 = 16.8$ m

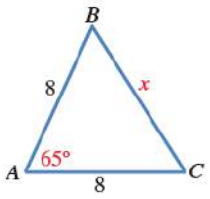
وقت PQ هو $\frac{118.28}{250} = \frac{59.14}{125}$ بالتالي وقت PR يساوي $\frac{59.14}{125} \times 60 = 28.39$ m

28.8-28.39 = 0.41m

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 126

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



الحل :

قانونُ جيوبِ التمامِ

$$x^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times cos\ 65$$

$$x^2 = 64 + 64 - 16 \times 8 \times 0.423$$

$$x^2 = 64 + 64 - 54.095$$

$$x^2 = 128 - 54.095$$

$$x^2 = 73.904$$

$$x = \sqrt{73.904} \approx 8.597$$

أتحقق من فهمي

في المثلّثِ ABC، إذا كانَ $AB = 16, BC = 12, AC = 20$ فأُثبتُ أنَّ الزاويةَ B قائمةٌ.

الحل :

$$20^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \times 16 \times 12 \times \cos B$$

$$400 = 256 + 144 - 32 \times 12 \times \cos B$$

$$400 = 400 - 384 \times \cos B$$

$$384 \times \cos B = 400 - 400$$

$$\cos B = 0$$

$$B = \cos^{-1}(0) \Rightarrow B = 90^\circ$$

أتحقق من فهمي

سـفنٌ: أبحرَتْ سـفينةٌ منَ الميناءِ **A** باتجاهِ الشمالِ، فقطعَتْ مسـافةَ **240 km**، ثمَّ انحرفَتْ بزاويةِ **50°**، وقطعَتْ مسـافةَ **160 km** حتّى وصلَتْ إلى الميناءِ **B**. ما المسـافةُ بينَ الميناءِ **A** والميناءِ **B**؟

الحل :

$$x^2 = 240^2 + 160^2 - 2 \times 240 \times 160 \times cos\ 50$$

$$x^2 = 57600 + 25600 - 480 \times 160 \times 0.643$$

$$x^2 = 57600 + 25600 - 49382.4$$

$$x^2 = 83200 - 49382.4$$

$$x^2 = 33817.6$$

$$x = \sqrt{33817.6} \approx 183.896$$

أتحقق من فهمي

سـارَ قطارٌ منَ المحطَّةِ A في اتجاهِ 080° إلى المحطَّةِ B التي تبعدُ عنْها 120 km، ثمَّ تَحوَّلَ إلى اتجاهِ 070°، وسارَ مسافةَ 90 km إلى المحطَّةِ C. ما المسافةُ بينَ المحطَّةِ A والمحطَّةِ C؟

الحل :

$$x^2 = 120^2 + 90^2 - 2 \times 120 \times 90 \times cos\ 170$$

$$x^2 = 14400 + 8100 - 240 \times 90 \times -0.984$$

$$x^2 = 14400 + 8100 + 21272$$

$$x^2 = 22500 + 21272$$

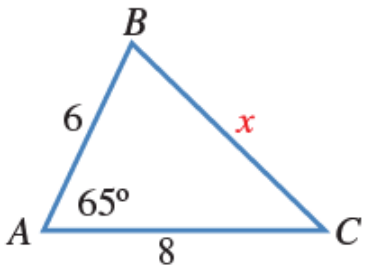
$$x^2 = 43772$$

$$x = \sqrt{43776} \approx 209.21$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 129

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1



الحل :

$$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times cos\ 65$$

$$x^2 = 64 + 36 - 96 \times 0.423$$

$$x^2 = 64 + 36 - 40.608$$

$$x^2 = 100 - 40.608$$

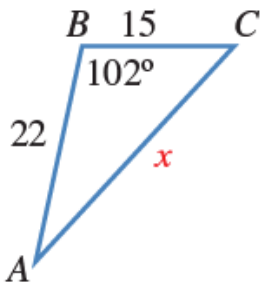
$$x^2 = 59.392$$

$$x = \sqrt{59.392} \approx 7.707$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 129

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

2



الحل :

$$x^2 = 22^2 + 15^2 - 2 \times 22 \times 15 \times cos\ 102$$

$$x^2 = 484 + 225 - 660 \times -0.208$$

$$x^2 = 484 + 225 - 137.208$$

$$x^2 = 709 - 137.208$$

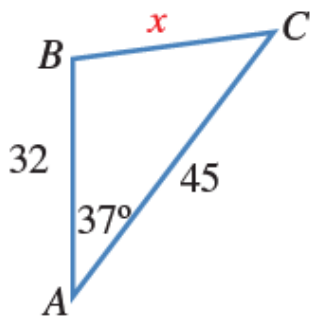
$$x^2 = 434.512$$

$$x = \sqrt{434.512} \approx 20.845$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 129

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

3



الحل :

$$x^2 = 45^2 + 32^2 - 2 \times 45 \times 32 \times cos\ 37$$

$$x^2 = 2025 + 1024 - 2880 \times 0.799$$

$$x^2 = 2025 + 1024 - 2301.12$$

$$x^2 = 3049 - 2301.12$$

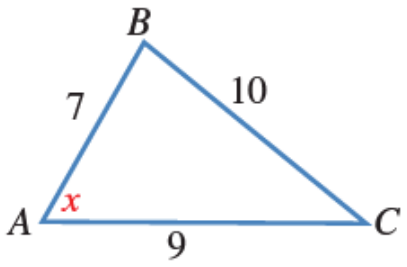
$$x^2 = 747.88$$

$$x = \sqrt{747.88} \approx 27.347$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

4



الحل :

$$10^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \times 9 \times 7 \times cos\ x$$

$$100 = 81 + 49 - 126 \times cos\ x$$

$$100 = 130 - 126 \times cos\ x$$

$$100 - 130 = -126 \times cos\ x$$

$$-30 = -126 \times cos\ x$$

$$cos\ x = \frac{-30}{-126} = 0.238$$

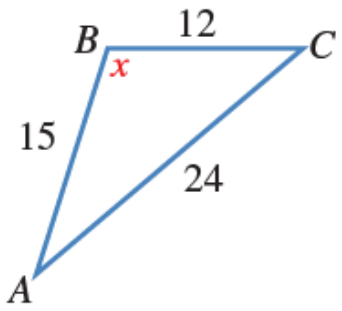
$$x = \cos^{-1} 0.238$$

$$x = 76.23$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

5



الحل :

$$24^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \times 15 \times 12 \times cos\ x$$

$$576 = 225 + 144 - 360 \times cos\ x$$

$$576 = 369 - 360 \times cos\ x$$

$$576 - 369 = -360 \times cos\ x$$

$$207 = -360 \times cos\ x$$

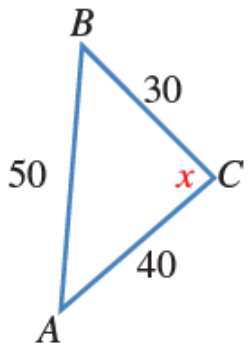
$$cos\ x = \frac{207}{-360} = -0.575$$

$$x = \cos^{-1} -0.575$$

$$x = 125.099$$

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

6



الحل:

$$50^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times cos\ x$$

$$2500 = 1600 + 900 - 2400 \times cos\ x$$

$$2500 = 2500 - 2400 \times cos\ x$$

$$2500 - 2500 = -2400 \times cos\ x$$

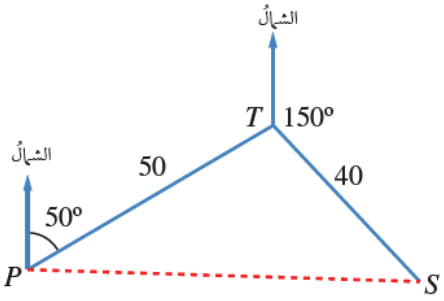
$$0 = -2400 \times cos\ x$$

$$cos\ x = \frac{0}{-2400} = 0$$

$$x = \cos^{-1} 0$$

$$x = 90$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ



7 **ملاحةٌ جويةٌ**: أبحرَتْ سفينةٌ منْ أحدِ الموانئِ مسافةَ 50 km في اتجاهِ 050°، ثمَّ غيَّرَ القبطانُ خطَّ سيرِها إلى اتجاهِ 150° وقطعَتْ مسافةَ 40 km، ثمَّ توقَّفَتْ بسببِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي ستقطعُها مروحيةُ الإنقاذِ منَ الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصرِ وقتٍ مُمكنٍ؟

الحل :

$$(PS)^2 = 50^2 + 40^2 - 2 \times 50 \times 40 \times cos\ 80$$

$$(PS)^2 = 2500 + 1600 - 4000 \times 0.174$$

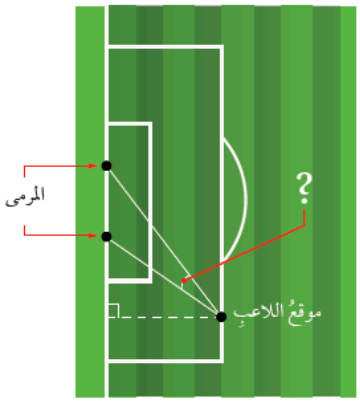
$$(PS)^2 = 2500 + 1600 - 696$$

$$(PS)^2 = 4100 - 696$$

$$(PS)^2 = 3408$$

$$PS = \sqrt{3408} \approx 58.344$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ



8 **كرةُ قدمٍ:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ موقع لاعبَ كرةِ قدمٍ يركلُ الكرةَ نحوَ مرمًى عرضُهُ 5 m. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يستطيعُ منْها اللاعبُ أنْ يركلَ الكرةَ لتسديدِ هدفٍ، علمًا بأَنَّهُ يبعدُ عنْ طرفَيِ المرمى مسافةَ 26 m وَ 23 m.

الحل :

$$5^2 = 26^2 + 23^2 - 2 \times 26 \times 23 \times \cos x$$

$$25 = 676 + 529 - 1196 \times \cos x$$

$$25 = 1205 - 1196 \times \cos x$$

$$25 - 1205 = -1196 \times \cos x$$

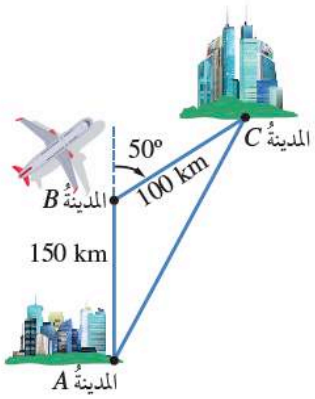
$$-1180 = -1196 \times \cos x$$

$$\cos x = \frac{-1180}{-1196} = 0.987$$

$$x = \cos^{-1} 0.987$$

$$x = 9.38$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 130



9 **خرائطُ طيرانٍ:** أقلعَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ A في اتجاهِ 000° مسافةَ 150 km، ثمَّ اتَّجهَتْ إلى 050°، وسارَتْ مسافةَ 100 km حتّى وصلَتِ المدينةَ C كما في الشكلِ المجاورِ. ما أقصرُ مسافةٍ ممكنةٍ بينَ المدينتيْنِ إذا كانَ مسموحًا للطائرةِ اتِّخاذُ المسارِ الذي تريدُ؟

الحل :

$$x^2 = 150^2 + 100^2 - 2 \times 150 \times 100 \times cos\ 130$$

$$x^2 = 22500 + 10000 - 30000 \times -0.643$$

$$x^2 = 22500 + 10000 + 19290$$

$$x^2 = 32500 + 19290$$

$$x^2 = 51790$$

$$x = \sqrt{51790} \approx 227.574$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ

10 ساعاتٌ: طولُ عقربَيْ ساعةٍ 3 cm، وَ 4 cm. أَجِدُ المسافةَ بينَ رأسَيِ العقربيْنِ عندما يشيرانِ إلى الساعةِ 4 تمامًا.

الحل :

$$x^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times cos\, 120$$

$$x^2 = 16 + 9 - 24 \times -0.5$$

$$x^2 = 16 + 9 + 12$$

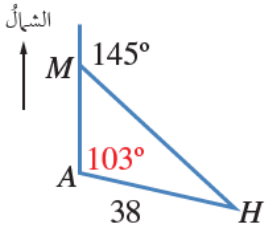
$$x^2 = 25 + 12$$

$$x^2 = 37$$

$$x = \sqrt{37} \approx 6.08$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ

الصفحة : 130



11 **مروحيةُ إنقاذٍ:** أُرسِــلَتْ مروحيةُ إنقاذٍ منَ القاعدةِ A لإسعافِ رجلٍ على جبلٍ عندَ النقطةِ M إلى الشــمالِ منْ هذهِ القاعدةِ، ثمَّ أوصلَتْهُ إلى المستشفى H الذي يبعدُ عنِ القاعدةِ مسافةَ 38 km كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ المسافةَ منَ الجبلِ إلى المستشفى بطريقتيْنِ.

الحل :

$$\frac{AM}{\sin 42} = \frac{38}{\sin 35}$$

$$AM = \frac{38 \times \sin 42}{\sin 35}$$

$$AM \approx 44$$

$$(MH)^2 = 44^2 + 38^2 - 2 \times 44 \times 38 \times cos\ 103$$

$$(MH)^2 = 1936 + 1444 - 3344 \times -0.225$$

$$(MH)^2 = 1936 + 1444 + 752.4$$

$$(MH)^2 = 4132.4$$

$$MH = \sqrt{4132.4} = 64.28$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 130

12 تحدٍّ: أَجِدُ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ $3a, 5a, 7a$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ.

الحل :

الزاوية الثالثة:

$(7a)^2 = (5a)^2 + (3a)^2 - 2 \times 5a \times 3a \times \cos x$

$49\,a^2 = 25\,a^2 + 9\,a^2 - 30\,a^2 \times \cos x$

$49\,a^2 = 34\,a^2 - 30\,a^2 \times \cos x$

$49\,a^2 - 34\,a^2 = -30\,a^2 \times \cos x$

$15\,a^2 = -30\,a^2 \times \cos x$

$\cos x = \frac{15\,a^2}{-30\,a^2} = \frac{15}{-30} = -0.5$

$x = \cos^{-1} -0.5$

$x = 120$

الزاوية الثانية:

$(5a)^2 = (7a)^2 + (3a)^2 - 2 \times 7a \times 3a \times \cos x$

$25\,a^2 = 49\,a^2 + 9\,a^2 - 42\,a^2 \times \cos x$

$25\,a^2 = 58\,a^2 - 42\,a^2 \times \cos x$

$25\,a^2 - 58\,a^2 = -42\,a^2 \times \cos x$

$-33\,a^2 = -42\,a^2 \times \cos x$

$\cos x = \frac{-33\,a^2}{-42\,a^2} = \frac{33}{42} = 0.786$

$x = \cos^{-1} 0.786$

$x = 38.21$

الزاوية الأولى:

$(3a)^2 = (7a)^2 + (5a)^2 - 2 \times 7a \times 5a \times \cos x$

$9\,a^2 = 49\,a^2 + 25\,a^2 - 70\,a^2 \times \cos x$

$9\,a^2 = 74\,a^2 - 70\,a^2 \times \cos x$

$9\,a^2 - 74\,a^2 = -70\,a^2 \times \cos x$

$-65\,a^2 = -70\,a^2 \times \cos x$

$\cos x = \frac{-65\,a^2}{-70\,a^2} = \frac{65}{70} = 0.929$

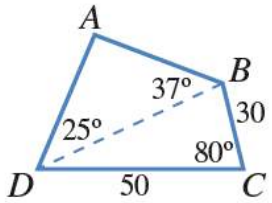
$x = \cos^{-1} 0.929$

$x = 21.79$

أصغر زاوية هي 21.79

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ الصفحة : 130

13 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشكلُ $ABCD$ المجاورُ حقلَ نخيلٍ يريدُ مالِكُهُ إحاطتهُ بسياجٍ. أَجِدُ طولَ السياجِ.



الحل :

$$(DB)^2 = 50^2 + 30^2 - 2 \times 50 \times 30 \times \cos 80$$

$$(DB)^2 = 2500 + 900 - 3000 \times 0.174$$

$$(DB)^2 = 2500 + 900 - 522$$

$$x^2 = 3400 - 522$$

$$x^2 = 2878$$

$$x = \sqrt{2878} \approx 53.65$$

$$\frac{53.65}{\sin 118} = \frac{AB}{\sin 25}$$

$$AB = \frac{53.65 \times \sin 25}{\sin 118}$$

$$AB \approx 25.679$$

$$\frac{AD}{\sin 37} = \frac{53.65}{\sin 118}$$

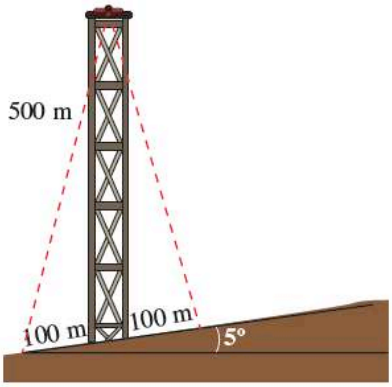
$$AD = \frac{53.65 \times \sin 37}{\sin 118}$$

$$AD \approx 36.57$$

المحيط

$$50 + 30 + 25.679 + 36.57 = 142.249$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : قانونُ جيوبِ التمامِ



14 **تحدٍّ**: يرتفعُ برجٌ 500 m على تلَّةٍ تميلُ بزاويةِ 5° عنِ المستوى الأفقيِّ كما في الشكلِ المجاورِ. أرادَتِ المهندسةُ صفاءُ تثبيتَ البرجِ بسلكيْنِ منْ قمَّتِهِ إلى نقطتيْنِ على الأرضِ، تبعدُ كلٌّ منْهُما مسافةَ 100 m عنْ قاعدةِ البرجِ. أَجِدُ طولَ السلكيْنِ.

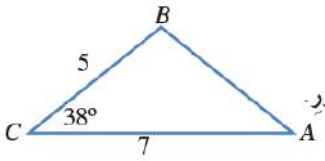
الحل :

$x^2 = 500^2 + 100^2 - 2 \times 500 \times 100 \times cos\ 95$	$x^2 = 500^2 + 100^2 - 2 \times 500 \times 100 \times cos\ 85$
$x^2 = 250000 + 10000 - 8715.57$	$x^2 = 250000 + 10000 - 8715.57$
$x^2 = 260000 + 8715.57$	$x^2 = 260000 - 8715.57$
$x^2 = 268715.57$	$x^2 = 251284.43$
$x = \sqrt{268715.57} \approx 518.38$	$x = \sqrt{251284.43} \approx 501.28$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 132

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ بالوحداتِ المربعةِ في الشكلِ المجاورِ.



الحل :

قانونُ مساحةِ المثلث

$$K = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

$$K = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin 38$$

$$K \approx 10.77$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 133

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF، علمًا بأنَّ $DE = 10\text{ cm}$، وَ $DF = 12\text{ cm}$، وَ $EF = 9\text{ cm}$.

الحل :

$$\cos E = \frac{e^2 - d^2 - f^2}{-2df}$$

$$\cos E = \frac{12^2 - 9^2 - 10^2}{-2 \times 9 \times 10}$$

$$\cos E = \frac{144 - 81 - 100}{-180}$$

$$\cos E = \frac{-37}{-180} \approx 0.206$$

$$E = \cos^{-1} 0.206$$

$$E = 78.14$$

$$K = \frac{1}{2} \times 10 \times 9 \times \sin 78.14$$

$$K = 3516.3$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 133

أتحقق من فهمي

قطعةُ رخامٍ مثلثةُ الشكلِ، أبعادُها: 50 cm، وَ 85 cm، وَ 70 cm. ما مساحتُها؟

الحل :

$$\cos E = \frac{e^2 - d^2 - f^2}{-2df}$$

$$\cos E = \frac{85^2 - 70^2 - 50^2}{-2 \times 50 \times 70}$$

$$\cos E = \frac{7225 - 4900 - 2500}{-7000}$$

$$\cos E = \frac{-175}{-7000} \approx 0.025$$

$$E = \cos^{-1} 0.025$$

$$E = 91.43$$

$$K = \frac{1}{2} \times 70 \times 50 \times \sin 91.43$$

$$K = 1749.45$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC الذي فيهِ $BC = 7$ cm ، وَ $AC = 8$ cm ، وقياسُ الزاويةِ ACB فيهِ $59°$.

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 59$$

$$K = 24$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

2 المثلثُ ABC الذي قياسُ الزاويةِ BAC فيهِ $85°$ ، وَ $AC = 6.7$ cm ، وَ $AB = 8$ cm .

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 6.7 \times \sin 85$$

$$K = 26.69$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

3 المثلثُ PQR الذي فيهِ $QR = 27\text{ cm}$ ، وَ $PR = 19\text{ cm}$ ، وقياسُ الزاويةِ QRP فيهِ $109°$.

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 27 \times 19 \times \sin 109$$

$$K = 242.53$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

4 المثلثُ XYZ الذي فيهِ $XY = 231$ cm ، وَ $XZ = 191$ cm ، وقياسُ الزاويةِ YXZ فيهِ $73°$.

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 231 \times 191 \times \sin 73$$

$$K = 21096.56$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

5 المثلثُ LMN الذي فيهِ $LN = 63$ cm ، وَ $LM = 39$ cm ، وقياسُ الزاويةِ NLM فيهِ $85°$.

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 63 \times 39 \times \sin 85$$

$$K = 1223.83$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

6 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ ABC هيَ $27\ \text{cm}^2$ ، وَ $BC = 14\ \text{cm}$ ، وقياسُ الزاويةِ BCA فيهِ $115°$، فما طولُ AC؟

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

$$27 = \frac{1}{2} \times 14 \times b \times \sin 115$$

$$27 = 7 \times \sin 115 \times b$$

$$27 = 6.34 \times b$$

$$b = \frac{27}{6.34} = 4.26$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

7 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ LMN هيَ $133\ \text{cm}^2$ ، وَ $LM = 16\ \text{cm}$ ، وَ $MN = 21\ \text{cm}$ ، والزاويةُ LMN حادَّةً، فما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتَيْنِ: LMN ، وَ MNL؟

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

$$133 = \frac{1}{2} \times 21 \times 16 \times \sin C$$

$$133 = 168 \times \sin C$$

$$\sin C = \frac{133}{168} = 0.791$$

$$C = \sin^{-1} 0.791$$

$$LMN = C = 52.28$$

$$LN^2 = MN^2 + ML^2 - 2 \times MN \times ML \times \cos M$$

$$LN^2 = 21^2 + 16^2 - 2 \times 21 \times 16 \times \cos 52.28$$

$$LN^2 = 441 + 256 - 672 \times 0.612$$

$$LN^2 = 697 - 411.264$$

$$LN^2 = 285.736$$

$$LN = \sqrt{285.736} = 16.904$$

$$\frac{16}{\sin N} = \frac{16.904}{\sin 52.28}$$

$$\sin N = \frac{16 \times \sin 52.28}{16.904}$$

$$\sin N = 0.749$$

$$N = \sin^{-1} 0.749$$

$$MNL = N = 48.504$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

9 لوحةٌ على شكلِ مثلثٍ، أطوالُ أضلاعِهِ: 60 cm ، وَ 70 cm، وَ 80 cm. أَجِدُ مساحةَ اللوحةِ.

الحل :

$$\cos E = \frac{e^2 - d^2 - f^2}{-2df}$$

$$\cos E = \frac{70^2 - 60^2 - 80^2}{-2 \times 60 \times 80}$$

$$\cos E = \frac{4900 - 3600 - 6400}{-9600}$$

$$\cos E = \frac{-5100}{-9600} \approx 0.531$$

$$E = \cos^{-1} 0.531$$

$$E = 57.91$$

$$K = \frac{1}{2} \times 80 \times 60 \times \sin 57.91$$

$$K = 2033.315$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134

10 دائرتــانِ، مركزُ إحداهُما P ومركزُ الأُخرى Q ، وطولُ نصفِ قُطْــرِ إحداهُما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعَتا في النقطتيْنِ X وَ Y، وكانَ $PQ = 9$ cm، فما مساحةُ المثلثِ PXQ؟

الحل :

$$\cos X = \frac{9^2 - 7^2 - 6^2}{-2 \times 7 \times 6}$$

$$\cos X = \frac{81 - 49 - 36}{-84}$$

$$\cos X = \frac{-4}{-84} \approx 0.048$$

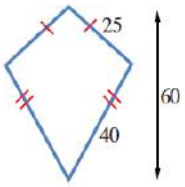
$$X = \cos^{-1} 0.048$$

$$X = 87.27$$

$$K = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times \sin 87.27$$

$$K = 20.98$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134



11 طائرةٌ ورقيةٌ: صنعَ سليمٌ طائرةً ورقيةً كما في الشكلِ المجاورِ. أجِدُ مساحةَ المادةِ اللازمةِ لصنعِ الطائرةِ بالوحداتِ المربعةِ.

الحل :

$$\cos X = \frac{60^2 - 40^2 - 25^2}{-2 \times 40 \times 25}$$

$$\cos X = \frac{3600 - 1600 - 625}{-2000}$$

$$\cos X = \frac{-1375}{-2000} \approx 0.6875$$

$$X = \cos^{-1} 0.6875$$

$$X = 46.57$$

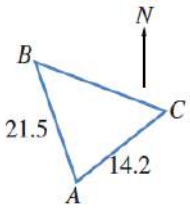
$$K = \frac{1}{2} \times 40 \times 25 \times \sin 46.57$$

$$K = 363.11$$

مساحة الطائرة

$$2 \times 363.11 = 726.22$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 134



12 مُتنزَّهٌ وطنيٌّ: يرادُ إنشاءُ مُتنزَّهٍ وطنيٍّ على قطعةِ أرضٍ مثلثةِ الشكلِ ABC. إذا كانَتِ النقطةُ B في اتجاهِ 324° منَ النقطةِ A، والنقطةُ C في اتجاهِ 042° منَ النقطةِ A، فما مساحةُ المُتنزَّهِ بالوحداتِ المربعةِ؟

الحل :

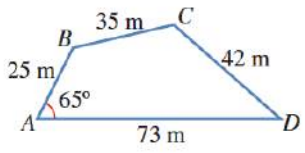
قياس الزاوية A يساوي 78

$$K = \frac{1}{2} \times 21.5 \times 14.2 \times \sin 78$$

$$K = 149.31$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

حقولٌ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ حقلٍ رباعيِّ الأضلاعِ:



13 أُثبِتُ أنَّ طولَ BD هوَ 66 m ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقربِ مترٍ.

14 أجِدُ قياسَ الزاويةِ C.

15 أحسُبُ مساحةَ الحقلِ.

الحل :

$$(BD)^2 = (25)^2 + (73)^2 - 2 \times 25 \times 73 \times cos\ 65 = 4411.443$$

$$BD = \sqrt{4411.443} = 66.418$$

إذن طول BD مُقرَّبًا إلى أقرب متر هو $66\ m$

$$(BD)^2 = (42)^2 + (35)^2 - 2 \times 42 \times 35 \times cos\ C$$

$$(66)^2 = 2989 - 2940 \times cos\ C$$

$$4350 = 2989 - 2940 \times cos\ C$$

$$4350 - 2989 = -2940 \times cos\ C$$

$$1361 = -2940 \times cos\ C$$

$$cos\ C = \frac{1361}{-2940} = -0.463$$

$$C = \cos^{-1} -0.463$$

$$C = 117.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مسألةُ اليوم لدى مُزارعٍ قطعةُ أرضٍ مثلثةُ الشكلِ، طولُ أحدِ أضلاعِها 84 m، وطولُ ضلعٍ آخرَ 110 m، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما 145°، وقدْ أرادَ زراعتَها بالبطاطا، فلَزِمَهُ 0.15 kg منْ درناتِ البطاطا لكلِّ مترٍ مربَّعٍ. كيفَ يستطيعُ المُزارعُ حسابَ كميةِ درناتِ البطاطا اللازمةِ لزراعةِ أرضِهِ؟

الحل :

$$K = \frac{1}{2} \times 110 \times 84 \times \sin 145$$

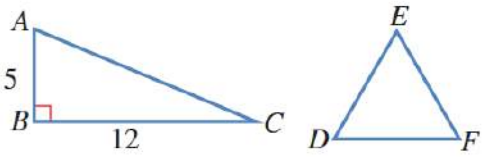
$$K = 2650$$

الكمية

$$2650 \times 0.15 = 397.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

17 المثلثُ ABC قائمُ الزاويةِ، والمثلثُ DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ وللمثلثيْنِ المحيطُ نفسُهُ. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF.



الحل :

$$AC^2 = 12^2 + 5^2$$

$$AC^2 = 169$$

$$AC = 13$$

محيط المثلث يساوي

$$13 + 12 + 5 = 30$$

طول الضلع في المثلث متساوي الأضلاع 10

قياس أي زاوية فيه 60

$$K = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 60$$

$$K = 43.3$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

18 **جغرافيا:** برمودا منطقةٌ مثلثةُ الشـكلِ، تقعُ في الجزءِ الغربيِّ منَ المحيطِ الأطلسـيِّ، رؤوسُها مدينةُ ميامي، وبرمودا، وسان خوان. وقدْ شـهدَ مثلثُ برمودا وقوعَ عددٍ منْ حوادثِ اختفاءِ السفنِ والطائراتِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ ميامي وسان خوان 1674 km تقريبًا، وبينَ ميامي وبرمودا نحوَ 1645 km، وبينَ سان خوان وبرمودا قرابةَ 1544 km، فما مساحةُ مثلثِ برمودا منْ دونِ اعتبارٍ لتقوُّسِ الأرضِ؟

الحل :

$$\cos X = \frac{1544^2 - 1674^2 - 1645^2}{-2 \times 1674 \times 1645}$$

$$\cos X = \frac{2383936 - 2802276 - 2706025}{-5507460}$$

$$\cos X = \frac{-3124365}{-5507460} \approx 0.567$$

$$X = \cos^{-1} 0.567$$

$$X = 55.46$$

$$K = \frac{1}{2} \times 1674 \times 1645 \times \sin 55.46$$

$$K = 1134165.78$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

19 تحدٍّ: أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC الذي قياسُ الزاويةِ A فيهِ $70°$، وقياسُ الزاويةِ B فيهِ $60°$، وطولُ الضلعِ AB فيهِ 4 cm.

الحل :

قياس الزاوية C يساوي 50

$$\frac{4}{\sin 50} = \frac{a}{\sin 70}$$

$$a = \frac{4 \sin 70}{\sin 50} = 4.9$$

$$K = \frac{1}{2} \times 4.9 \times 4 \times \sin 60$$

$$K = 8.49$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة درس : استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ الصفحة : 135

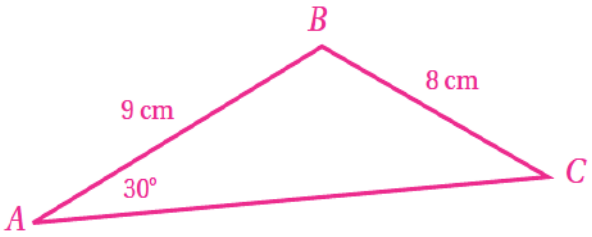
20 أكتشــفُ الخطأَ: ABC مثلثٌ فيهِ $BC = 8\text{cm}$، $AB = 9\text{cm}$، وقياسُ الزاويةِ A فيهِ $30°$. أرادَتْ نورُ إيجادَ مساحتِهِ إلى أقربِ عُشْرٍ، فكانَ حَلُّها كما يأتي:

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30°$$
$$= 18 \text{ cm}^2$$

أكتشفُ الخطأَ في حَلِّ نورَ، ثمَّ أُصحِّحُهُ.

الحل :

أخطأت نور حين جعلت الزاوية A محصورة بين الضلعين المعلومين



الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلومين هي B

$$\frac{\sin C}{9} = \frac{\sin 30}{8}$$

$$C = 34.2$$
$$B = 115.8$$

مساحة المثلث:

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \sin 115.8$$

وقد تكون $C = 145.8$ عندئذٍ تكون
$B = 4.2$ ، ومساحة المثلث

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \sin 4.2 \approx 2.64\ cm^2$$

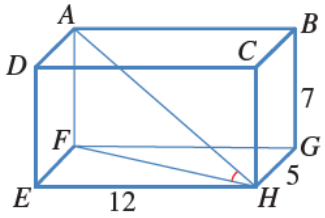
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 137

أتحقق من فهمي

أَجِدُ BE، وقياسَ الزاويةِ EBG في المثالِ السابقِ.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ متوازي مستطيلاتٍ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AHF، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



الحل :

حسب حل المثال إن $FH = 13$

$$m\,AHF = 28.3$$

$$EG = FH = 13$$

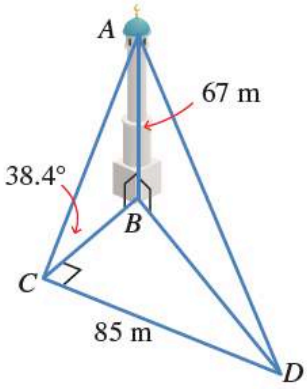
$$BE^2 = EG^2 + BG^2$$

$$BE^2 = 13^2 + 7^2$$
$$BE^2 = 169 + 49$$
$$BE^2 = 218$$
$$BE = \sqrt{218} = 14.76$$

$$\tan EBH = \frac{EG}{BG} = \frac{13}{7}$$

$$EBH = \tan^{-1}(\frac{13}{7}) = 61.7$$

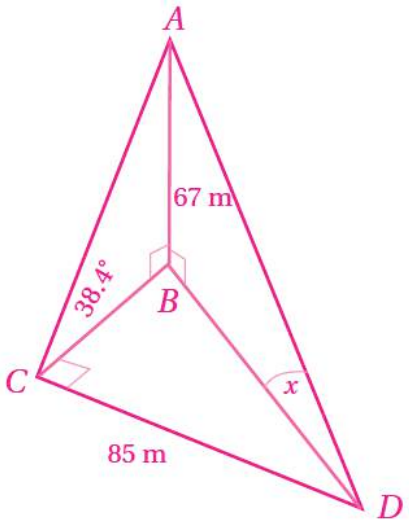
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 138



أتحقق من فهمي

رصدَ أحمدُ قمَّةَ مئذنةٍ منْ نقطةٍ على الأرضِ تقعُ جنوبَ المئذنةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 38.4°، ثمَّ سارَ شرقًا مسافةَ 85 m، ورصدَ قمَّةَ المئذنةِ مرَّةً أُخرى. إذا كانَ ارتفاعُ المئذنةِ 67 m، أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المئذنةِ في المرَّةِ الثانيةِ.

الحل :



$$CB = \frac{67}{\tan 38.4} = 84.5\ m$$

$$BD = \sqrt{85^2 + 84.5^2} = 119.9\ m$$

لتكن زاوية ارتفاع قمة المئذنة من النقطة D هي x ، فإن

$$\tan x = \frac{67}{119.9} = 0.559$$

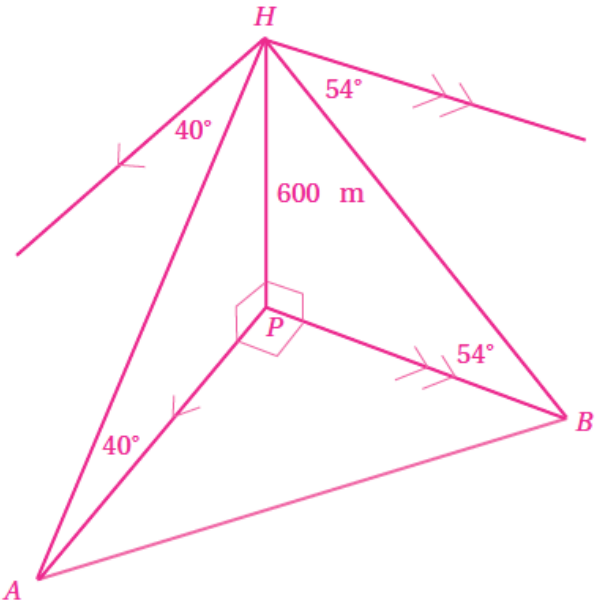
$$x = \tan^{-1}(0.559) = 29.21$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 139

أتحقق من فهمي

أبحرَتِ السفينتانِ A وَ B مِنَ الميناءِ P في اتجاهيْنِ مُتعامِدَيْنِ. وقدْ رصدَتْ طائرةٌ عموديةٌ تُحلِّقُ فوقَ الميناءِ هاتيْنِ السفينتيْنِ في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 40°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 54°. إذا كانَ ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ 600 m، فما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ لحظةَ رصدِهما؟

الحل :



من المثلث HPA ، يَتبيَّن أن

$$AP = \frac{600}{\tan 40} = 715.1$$

ومن المثلث HPB ، يَتبيَّن أن:

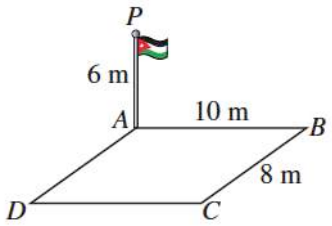
$$BP = \frac{600}{\tan 54} = 435.9$$

$$(AB)^2 = (715.1)^2 + (435.9)^2 = 701376.82$$

$$AB \approx 837.5\ m$$

إذن المسافة بين السفينتين $837.5\ m$ تقريبًا

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 140



1 **سـاريةُ العَلَمِ**: نُصِبَتْ سـاريةُ عَلَمٍ عموديًّا عندَ رُكنِ ساحةٍ مستطيلةِ الشكلِ $ABCD$. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ P منَ النقطةِ C.

الحل :

$$(AC)^2 = 10^2 + 8^2 = 164$$

$$AC = \sqrt{164} = 12.8$$

لتكن الزاوية هي x

$$\tan APC = \frac{12.8}{6} = 2.13$$

$$APC = \tan^{-1} 2.13$$

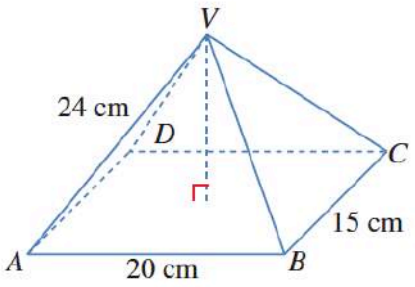
$$APC = 64.9$$

بالتالي

$$x = 90 - 64.9 = 25.1$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 140

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ هرمًا قائمًا قاعدتُهُ $ABCD$ مستطيلةُ الشكلِ، بُعْداها: 20 cm، وَ 15 cm. إذا كانَ طولُ كلٍّ منَ الأحرفِ الواصلةِ بينَ قمَّةِ الهرمِ ورؤوسِ القاعدةِ 24 cm، وكانَتِ القمَّةُ V تقعُ رأسيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأَجِدُ:



2 طولَ القُطْرِ AC.

3 قياسَ الزاويةِ VAC.

4 ارتفاعَ الهرمِ.

الحل :

2

$$(AC)^2 = 20^2 + 15^2 = 625$$

$$AC = \sqrt{625} = 25$$

3

لتكن الزاوية هي x

$$\cos x = \frac{12.5}{24} = 0.52$$

$$x = \cos^{-1} 0.52$$

$$x = 58.7$$

4

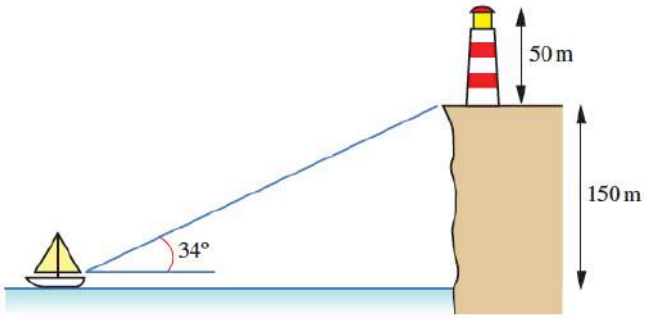
ليكن ارتفاع الهرم هو y

$$tan\, x = \frac{y}{12.5}$$

$$tan\, 58.7 = \frac{y}{12.5}$$

$$1.64 = \frac{y}{12.5} \Rightarrow y = 1.64 \times 12.5 = 20.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 140



5 منارةٌ: شاهدَ صيّادٌ منْ قاربِهِ قاعدةَ مَنارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةِ ارتفاعٍ قياسِـها 34°. إذا كانَ ارتفاعُ قاعدةِ المَنارةِ عنْ مستوى عينَيِ الصيّادِ 150 m، فكمْ يبعدُ الصيّادُ عنْ هذهِ القاعدةِ؟

6 إذا كانَ ارتفاعُ المَنارةِ 50 m، فما زاويةُ ارتفاعِ نظرِ الصيّادِ نحوَ قمّةِ المَنارةِ؟

الحل :

5

$$tan\ 34 = \frac{150}{x}$$

$$x = \frac{150}{tan\ 34} = 222.4$$

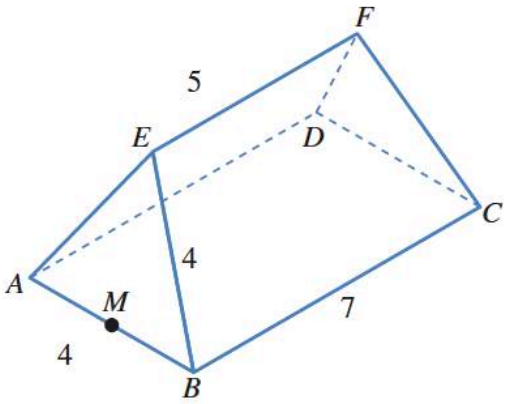
6

$$tan\ y = \frac{150 + 50}{222.4} = \frac{200}{222.4} = 0.899$$

$$y = \tan^{-1} 0.899 = 41.96$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 140

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سقفَ بنايةٍ، قاعدتُهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$ الـذي بُعْـداه: 7 m، وَ 4 m. وتُمثِّلُ نهايتا السـقفِ مثلثيْنِ متطابقَيِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلٌّ منْ جانبَيِ السـقفِ شبهَ منحرفٍ متطابقَ الساقيْنِ. إذا كانَ طولُ الحافةِ العلويةِ EF هوَ 5 m، فأَجِدُ:



7 طولَ EM، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB.

8 قياسَ الزاويةِ EBC.

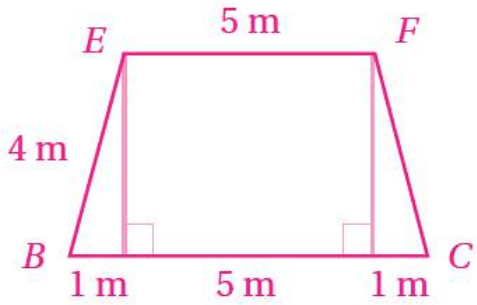
9 قياسَ الزاويةِ بينَ EM والقاعدةِ $ABCD$.

الحل :

7

$$\tan EBA = \frac{EM}{2} \Rightarrow \tan 60 = \frac{EM}{2} \Rightarrow 1.75 = \frac{EM}{2} \Rightarrow EM = 3.5$$

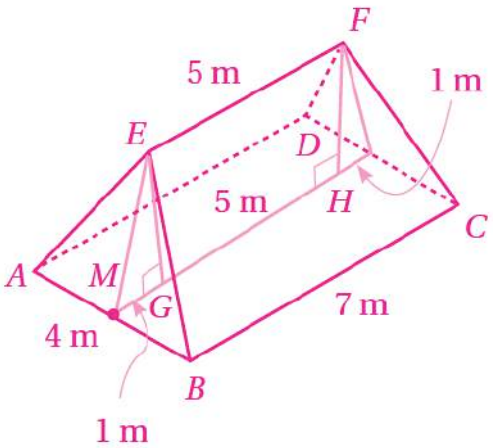
8



قياس الزاوية EBC

$$cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 75.5$$

9



الزاوية بين EM والقاعدة ABCD هي الزاوية EMG ، وإذا أُنزِل عمود من F إلى القاعدة تكوَّن المستطيل EGHF ومثلثان، طول قاعدة كلٍّ منهما $1\ m$

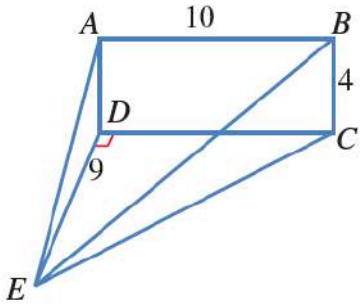
إذن جيب تمام الزاوية EMG هو

$$\frac{MG}{EM} = \frac{1}{3.46}$$

وقياسها هو

$$\cos^{-1}(\frac{1}{3.46}) = 73.2$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 141



$ABCD$ مستطيلٌ رأســيٌّ، وَ EDC مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CDE هوَ $90°$، وَ $AB = 10$ cm، وَ $BC = 4$ cm، وَ $ED = 9$ cm، فأَجِدُ:

10 قياسَ الزاويةِ AED.

11 قياسَ الزاويةِ DEC.

12 طولَ $\overline{EC}$.

13 قياسَ الزاويةِ BEC.

الحل :

10

$$\tan AED = \frac{4}{9} \Rightarrow AED = \tan^{-1}\frac{4}{9} = 24$$

11

$$\tan DEC = \frac{10}{9} \Rightarrow DEC = \tan^{-1}\frac{10}{9} = 48$$

12

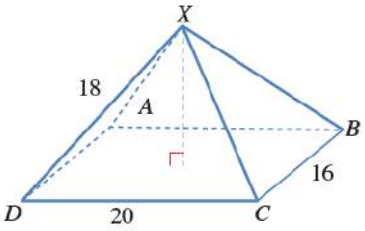
$$(EC)^2 = 10^2 + 9^2 = 181$$

$$AC = \sqrt{181} = 13.5$$

13

$$\tan BEC = \frac{4}{13.5} \Rightarrow BEC = \tan^{-1}\frac{4}{13.5} = 16.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 141



14 يُمثِّلُ الشــكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ الذي لهُ قاعدةٌ مستطيلةُ الشكلِ.
أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقُطْرِ القاعدةِ DB.

الحل :

$$(DB)^2 = 20^2 + 16^2 = 656$$

$$DB = \sqrt{656} = 25.6$$

$$\cos x = \frac{12.8}{18} = 0.71$$

$$x = \cos^{-1} 0.71 = 44.7$$

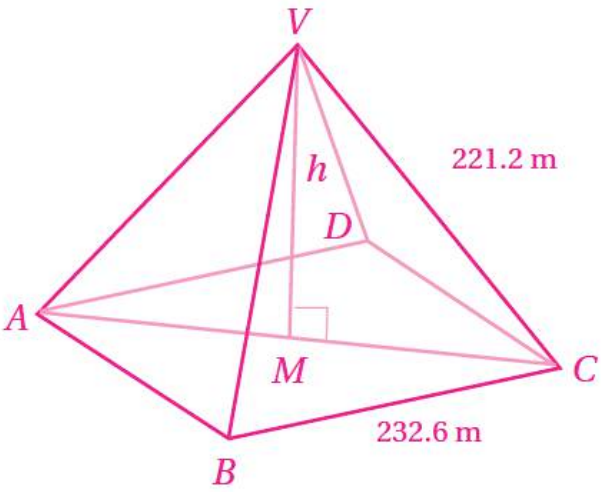
رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 141

15 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

شُيِّدُ الهرمُ الأكبرُ في مدينةِ الجيزةِ بمصرَ عامَ 2500 قبلَ الميلادِ تقريبًا، وتُمثِّلُ قاعدتُهُ مربَّعًا طولُ ضلعِهِ 232.6 m، وطولُ الضلعِ الواصلِ بينَ قمَّةِ الهرمِ وأيٍّ منْ رؤوسِ المربَّعِ 221.2 m. أَجِدُ ارتفاعَ هذا الهرمِ.

الحل :

$$(AC)^2 = 232.6^2 + 232.6^2 = 2 \times (232.6)^2$$
$$AC = 232.6 \times \sqrt{2}$$



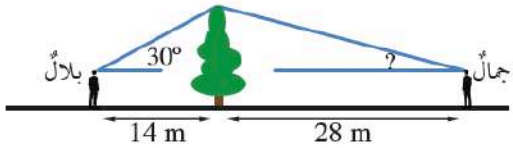
النقطة M هي منتصفAC ؛ أي إن:

$$AM = \frac{1}{2}\left(232.6 \times \sqrt{2}\right) = 116.3\sqrt{2}$$

$$h^2 = 221.2^2 - (116.3\sqrt{2})^2$$
$$= 21878.06$$
$$h = 147.9\, m$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 141

16 أكتشــفُ الخطأَ: يقفُ بلالٌ على بُعْدِ 14 m شرقيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتِها بالنسبةِ إليْهِ 30°، ويقفُ جمالٌ على بُعْدِ 28 m غربيَّ الشــجرةِ، وهوَ يرى أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشــجرةِ بالنسبةِ إليْهِ يجبُ أنْ تكونَ 15°؛ لأنَّهُ يبعدُ عنِ الشجرةِ مِثْلَي المسافةِ التي يبعدُها بلالٌ. هلْ رأيُ جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لمْ يكنْ رأيُهُ صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟



الحل :

ليس صحيحًا؛ لأن

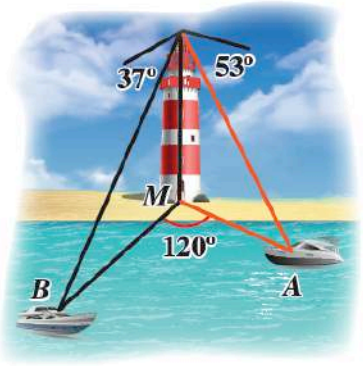
$$tan\ 15 \neq \frac{1}{2}\tan 30$$

ارتفاع الشجرة فوق مستوى عيني بلال هو $14\ tan\ 30$
إذا كانت زاوية ارتفاع الشجرة بالنسبة إلى جمال هي θ، فإن:

$$tan\ \theta\ = \frac{14\tan 30}{28} = \frac{8.083}{28}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8.083}{28}\right) = 16.1$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ الصفحة : 141



17 تحـدٍّ: رُصِدَ القاربانِ A وَ B فـي البحرِ منْ قمَّةِ مَنارةٍ على الشـاطئِ، ارتفاعُها 44 m، في اللحظةِ نفسِـها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A هيَ 53°، وزاويةُ انخفـاضِ القاربِ B هيَ 37°، وقياسُ الزاويةِ AMB هوَ 120°، حيثُ M قاعدةُ المَنارةِ. أَجِدُ المسافةَ بينَ القاربيْنِ.

الحل :

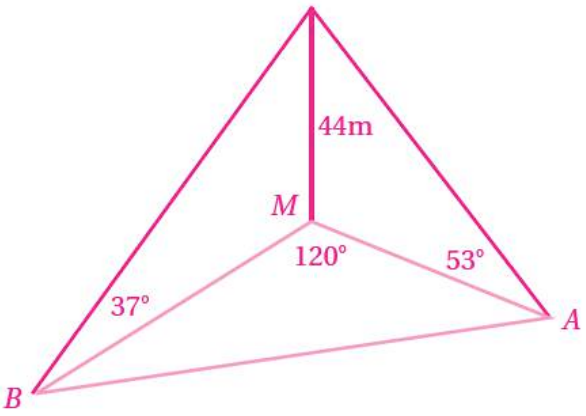
$$MB = 44 \div \tan 37 = 58.39$$

$$AM = 44 \div \tan 53 = 33.16$$

$$(AB)^2 = (58.39)^2 + (33.15)^2 - 2 \times 58.39 \times 33.16 \times \cos 120$$

$$= 6445.1901$$

$$AB \approx 80.3\ m$$



رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ زواياهُ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.

b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.

c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.

d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

الحل :

الجواب: d

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

2 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ أضلاعِهِ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ فقطْ.

b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقطْ.

c) قانونَي الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا.

d) لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

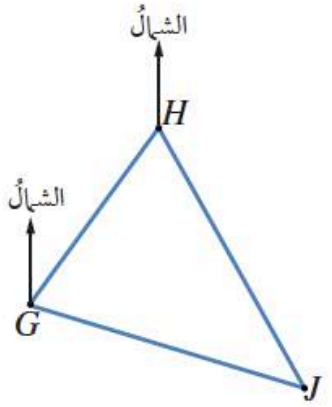
الحل:

الجواب: b

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

3 إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ H منَ النقطةِ G في الشكلِ الآتي هوَ 045°، واتجاهُ النقطةِ J منَ النقطةِ H هوَ 164°، فإنَّ قياسَ الزاويةِ GHJ هوَ:



a) 16°
b) 045°
c) 29°
d) 61°

الحل:

الجواب: d

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

4 إحدى الصيغِ الآتيةِ تُستعمَلُ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ ABC:

a) $\frac{1}{2}bc\sin C$ b) $\frac{1}{2}ab\sin C$

c) $\frac{1}{2}ab\sin A$ d) $\frac{1}{2}ab\sin B$

الحل :

الجواب: b

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

5 إذا كانَ اتجــاهُ النقطةِ R منَ النقطــةِ Z هوَ 070°، فإنَّ اتجاهَ النقطةِ Z منَ النقطةِ R هوَ:

a) 070° b) 110°

c) 250° d) 290°

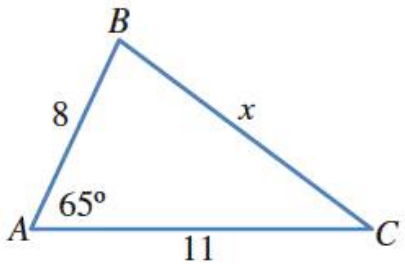
الحل:

الجواب: c

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

6



الحل:

$$x^2 = 11^2 + 8^2 - 2 \times 11 \times 8 \times \cos 65$$

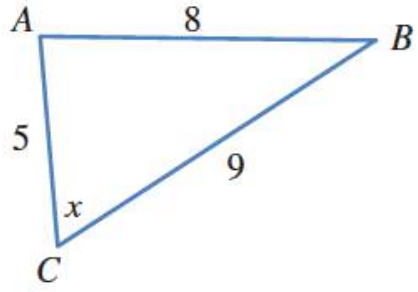
$$x^2 = 110.6$$

$$x = \sqrt{110.6} = 10.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

7



الحل:

$$8^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5 \times \cos x$$

$$64 = 81 + 25 - 90 \times \cos x$$

$$64 - 81 - 25 = -90 \times \cos x$$

$$-42 = -90 \times \cos x$$

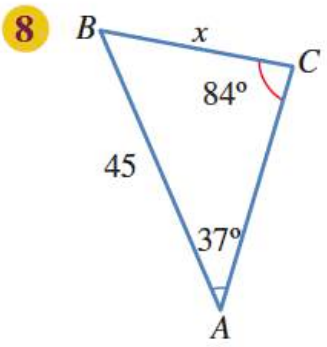
$$\cos x = \frac{-42}{-90} = 0.46$$

$$x = \cos^{-1} 0.46 = 62.2$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 142

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

8



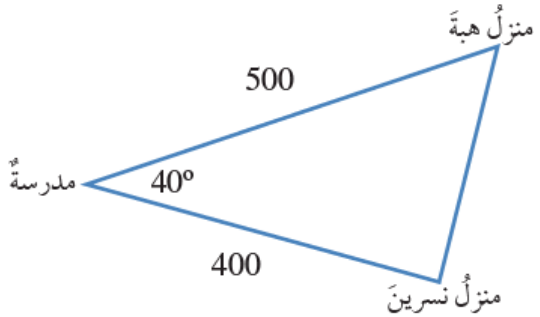
الحل :

$$\frac{x}{\sin 37} = \frac{45}{\sin 84}$$

$$x = \frac{45 \times \sin 37}{\sin 84} = 27.23$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

9 يبعدُ منزلُ نسـرينَ عنِ المدرسةِ مسافةَ 400 m، ويبعدُ منزلُ هبةَ عنِ المدرسـةِ نفسِها مسافةَ 500 m، كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ المسافةَ بينَ منزليْهِما.



الحل :

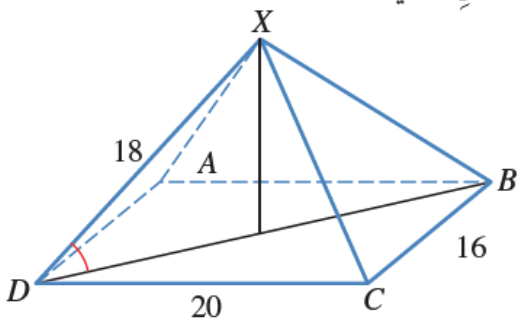
$$x^2 = 500^2 + 400^2 - 2 \times 500 \times 400 \times \cos 40$$

$$x^2 = 103582.2$$

$$x = \sqrt{103582.2} = 321.8$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

10 أَجِــدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافــةِ XD وقاعدةِ الهرمِ في الشكلِ الآتي.



الحل :

$$DB^2 = 20^2 + 16^2$$

$$DB^2 = 656$$

$$DB = \sqrt{656} = 25.6$$

$$\cos x = \frac{12.8}{18}$$

$$x = \cos^{-1}\frac{12.8}{18} = 44.7$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

11 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ PQR هيَ $68\ \text{cm}^2$، وكانَ $PQ = 18\ \text{cm}, RQ = 15\ \text{cm}$، فما قياسُ الزاويةِ الحادَّةِ PQR؟

الحل :

$$68 = \frac{1}{2} \times 18 \times 15 \times \sin PQR$$

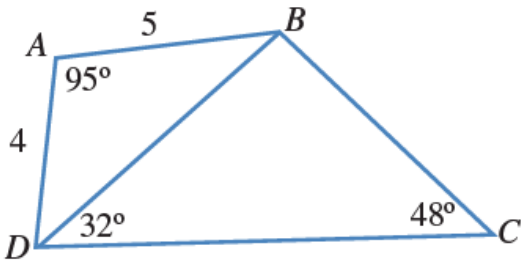
$$68 = 135 \times \sin PQR$$

$$\sin PQR = \frac{68}{135} = 0.503$$

$$PQR = \sin^{-1} 0.503 = 30.2$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

مستعينًا بالشكلِ الآتي، أَجِدُ:



12 طولَ $\overline{DB}$.

13 قياسَ الزاويةِ DBC.

14 طولَ $\overline{CD}$.

15 مساحةَ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$.

الحل :

12

$$DB^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 95$$

$$x^2 = 44.5$$

$$x = \sqrt{44.5} = 6.7$$

13

$$m\,DBC = 180 - 80 = 100$$

14

$$\frac{CD}{\sin 100} = \frac{6.7}{\sin 48}$$

$$CD = \frac{6.7 \times \sin 100}{\sin 48} = 8.9$$

15

$$ABCD = ADB + BDC$$

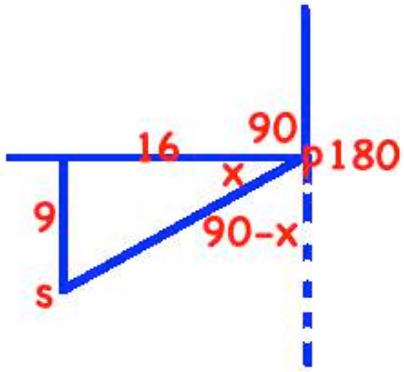
$$ABCD = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin 95 + \frac{1}{2} \times 8.9 \times 6.7 \times \sin 32$$

$$ABCD = 25.76$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

16 **موانئُ:** أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P باتجاهِ الغربِ مسافةَ 16 km، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ الجنوبِ، وقطعَتْ مسافةَ 9 km حتّى وصلَتِ الميناءَ S. أَجِدُ اتجاهَ الميناءِ S منَ الميناءِ P.

الحل :



$$\tan x = \frac{9}{16}$$

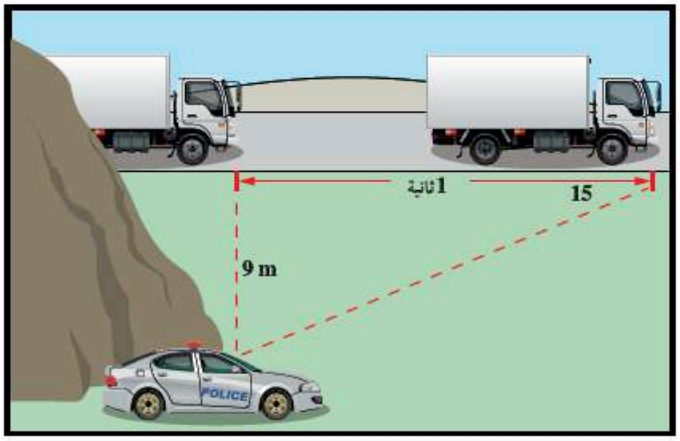
$$x = \tan^{-1}\frac{9}{16} = 29.36$$

الاتجاه

$$180 + 90 - 29.36 = 240.64$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

17 **رادارٌ:** رَصَدَ رادارٌ شاحنةً بعدَ ثانيةٍ منْ مرورِها بمحاذاتِهِ، فصنعَ الخطُّ الواصلُ بينَ الرادارِ والشاحنةِ وحافةِ الطريقِ زاويةً مقدارُها 15° كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ سرعةَ الشاحنةِ بوحدةِ km/h.



الحل :

$$9\ m = 0.009\ km$$

$$\tan 15 = \frac{0.009}{x}$$

$$x = \frac{9}{\tan 15} = 0.0336$$

$$1\ s = 0.00028\ h$$

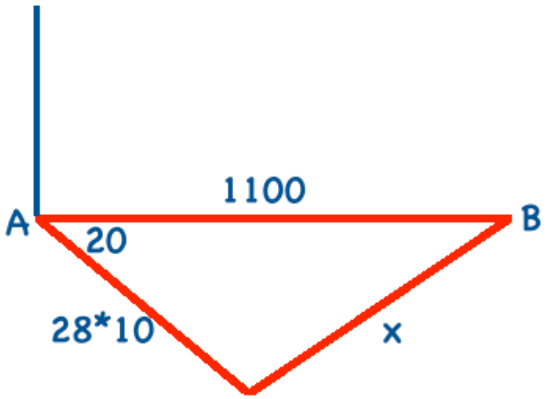
السرعة

$$\frac{0.0336}{0.00028} = 120\ km/h$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 143

18 عواصفُ بحريةٌ: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A بسرعةِ $28\ km/h$ مُتوجِّهةً إلى الميناءِ B على بُعْدِ $1100\ km$ شرقَ الميناءِ A. ولتجنُّبِ العواصفِ الشديدةِ التي هبَّتْ عندَ انطلاقِ السفينةِ؛ فقدْ سلكَ القبطانُ مسارًا ينحرفُ $20°$ جنوبًا عنْ خطِّ الملاحةِ المباشرِ بينَ الميناءيْنِ حتّى هدأَتِ العواصفُ بعدَ إبحارٍ استمرَّ 10 ساعاتٍ. كمْ تبعدُ السفينةُ عنِ الميناءِ B بعدَ هذهِ المدَّةِ منَ الإبحارِ؟ ما قياسُ الزاويةِ الذي سيجعلُ السفينةَ تتوجَّهُ مباشرةً إلى الميناءِ B؟

الحل :



$$x^2 = 1100^2 + 280^2 - 2 \times 1100 \times 280 \times \cos 20$$

$$x^2 = 709549.3456$$

$$x = \sqrt{709549.3456} = 842.34\ km$$

إيجاد الزاوية:

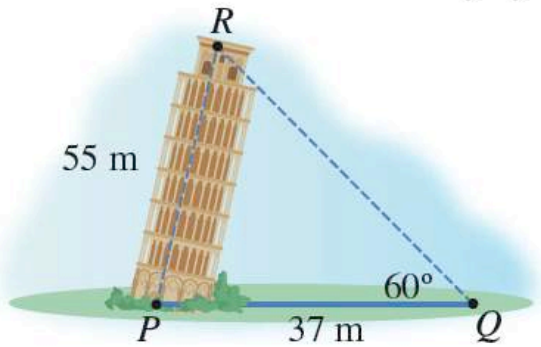
$$\frac{1100}{\sin y} = \frac{842.34}{\sin 20}$$

$$\sin y = \frac{1100 \times \sin 20}{842.34} = 0.447$$

$$y = \sin^{-1} 0.447 = 26.5$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 144

بــرجُ بيزا: طولُ برجِ بيزا المائلِ نحــوَ **55 m**، وزاويةُ ارتفاعِ أعلى البرجِ منْ نقطةٍ على بُعْدِ **37 m** هيَ **60°** كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ:



19 قياسَ الزاويةِ RPQ.

20 ارتفاعَ قمَّةِ البرجِ R عنِ الأرضِ.

الحل :

19

$$\frac{55}{\sin 60} = \frac{37}{\sin R}$$

$$\sin R = \frac{37 \times \sin 60}{55} = 0.583$$

$$R = \sin^{-1} 0.583 = 35.6$$

$$P = 180 - (60 + 35.6) = 84.4$$

20

$$\frac{55}{\sin 90} = \frac{h}{\sin 84.4}$$

$$\mathrm{h} = \frac{55 \times \sin 84.4}{\sin 90} = 54.73$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 144

21 **ملاحةٌ بحريــةٌ:** انطلقَ قاربٌ منَ النقطــةِ A منَ الميناءِ نحوَ سفينةٍ مُتوقِّفةٍ في عُرْضِ البحرِ باتجاهِ $030°$، وتبعدُ مســافةَ $2\,km$ عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، ثمَّ تحرَّكَ القاربُ إلى النقطةِ B التي تقعُ باتجاهِ $000°$ عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، وكانَتِ المسافةُ بينَهُما $3\,km$. أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ النقطةِ B.

الحل :

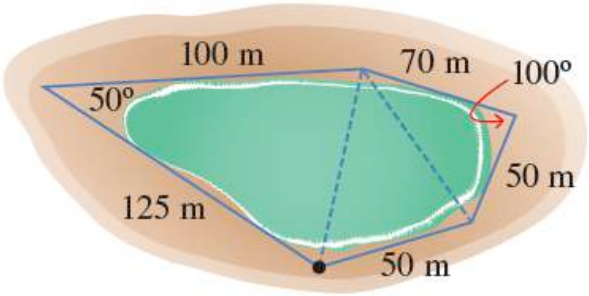
$$x^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 30$$

$$x^2 = 2.6$$

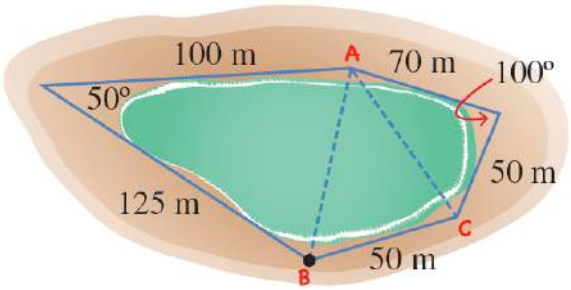
$$x = \sqrt{2.6} = 1.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 144

22 **زراعةٌ:** لتقديرِ مساحةِ حقلٍ منَ القمحِ، رسمَ خالدٌ مُضلَّعًا خماسيًّا حولَهُ، ثمَّ حدَّدَ قياساتِهِ المُبيَّنَةَ في الشكلِ الآتي. ما مساحةُ الحقلِ التقريبيةُ؟



الحل :



$$AB^2 = 125^2 + 100^2 - 2 \times 125 \times 100 \times \cos 50$$

$$AB^2 = 9555.3$$

$$x = \sqrt{9555.3} = 97.8$$

$$AC^2 = 70^2 + 50^2 - 2 \times 70 \times 50 \times \cos 100$$

$$x^2 = 8615.5$$

$$x = \sqrt{8615.5} = 92.8$$

$$50^2 = 97.8^2 + 92.8^2 - 2 \times 97.8 \times 92.8 \times \cos A$$

$$2500 - 9564.84 - 8611.84 = -18151.68 \times \cos A$$

$$\cos A = \frac{-15676.68}{-18151.68} = 0.86$$

$$A = \cos^{-1} 0.86 = 30.27$$

المساحة :

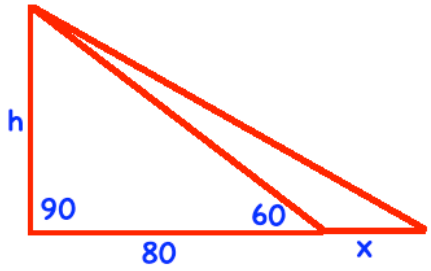
$$K = \frac{1}{2} \times 100 \times 125 \times sin\ 50 + \frac{1}{2} \times 97.8 \times 92.8 \times sin\ 30.27 + \frac{1}{2} \times 70 \times 50 \times sin\ 100$$

$$K = 8798.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 144

23 **ملاحةٌ بحريــةٌ:** تبعدُ ســفينةٌ عنْ قاعدةِ مَنارةٍ مســافةَ 80 km، وقدْ رصدَ قبطانُ السفينةِ قمَّةَ المَنارةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 60°، ثمَّ ســارَتِ السفينةُ بخطٍّ مستقيمٍ في اتجاهِ الشرقِ، فوجدَ أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ المَنارةِ هيَ 45°. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَتْها السفينةُ.

الحل :



$$\tan 60 = \frac{h}{80}$$

$$h = 80 \times \tan 60 = 138.6$$

$$\tan 45 = \frac{h}{80 + x} = \frac{138.6}{80 + x}$$

$$80 + x = \frac{138.6}{\tan 45} = 138.6$$

$$80 + x = \frac{138.6}{\tan 45} = 138.6$$

$$x = 138.6 - 80 = 58.6$$

رياضيات العاشر : كتاب الطالب الوحدة الرابعة الدرس : اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة : 144

ركب شـــخصٌ طائرةً عموديةً ترتفعُ 700 m عنْ ســـطحِ البحرِ، فشاهدَ السفينتيْنِ A وَ B. إذا كانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 45°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 40°، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 24، 25، 26.

24 اعتمادًا على زوايا الانخفاضِ، أختارُ العبارةَ الصحيحةَ:

a) موقعُ السفينةِ A بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ B.

b) موقعُ السفينةِ B بالنسبةِ إلى الطائرةِ أبعدُ منْهُ منَ السفينةِ A.

c) بُعْدُ السفينتيْنِ عنِ الطائرةِ متساوٍ.

d) لا يُمكِنُ معرفةُ أيُّ السفينتيْنِ أبعدُ منْ زوايا الانخفاضِ.

25 المسافةُ بينَ السفينتيْنِ A وَ B مُقرَّبةً إلى أقربِ مترٍ هيَ:

a) 134 b) 700

c) 834 d) 1534

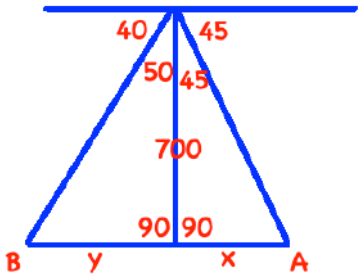
26 أُوضِّحُ كيفَ أجبْتُ عنِ السؤالِ 24.

الحل :

24

b

25



$$x = 700 \times \tan 45 = 700$$
$$y = 700 \times \tan 50 = 834.2$$
$$AB = 700 + 834.2 = 1534.2$$

d

26

الشيء الذي زاوية انخفاضه أكبر هو الأقرب إلى الناظر

في الرسم، النقطة B هي أقرب إلى النقطة A من بين النقاط B، وC ، وD ، وE ، وزاوية انخفاضها هي الكبرى