الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر الأدبي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة: التكامل

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

مسألة اليوم صفحة 8	
	$f(x) = \int (3x^2 - 4x)dx = x^3 - 2x^2 + C$ لكن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,0)$ ، إذن: $C = 0$ ومنه فإن قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 - 2x^2$
أتحقق من فهمي صفحة 9	
a	$f(x) = 5x^4$ $G(x) = x^5 + C$
b	$f(x) = -9x^{-10}$ $G(x) = x^{-9} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 11	
a	$\int 6dx = 6x + C$
b	$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C$ $= \frac{1}{9}x^9 + C$
c	$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$ $= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$ $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

d	$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx$ $= -\frac{1}{4}x^{-4} + C$ $= -\frac{1}{4x^4} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right) dx = \int x^3 dx - 2\int x^{\frac{5}{3}} dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$ $= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + C$
b	$\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx = 3\int x^2 dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$ $= 3\int x^2 dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}} dx$ $= x^3 - 6\left(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right) + C$ $= x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 13
a	$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2}\right) dx$ $= \int (x^2 - 8x) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$
b	$\int (3x+2)(x-1) dx = \int (3x^2 - 3x + 2x - 2) dx$ $= \int (3x^2 - x - 2) dx$ $= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

c	$\int x(x^3-7)dx = \int (x^4-7x)dx$ $= \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 14
1	$f(x) = x^7$ $G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$
2	$f(x) = -2x^6$ $G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$
3	$f(x) = -10$ $G(x) = -10x + C$
4	$f(x) = 8x$ $G(x) = 4x^2 + C$
5	$\int 6x\,dx = 3x^2 + C$
6	$\int (7x-5)\,dx = \frac{7}{2}x^2 - 5x + C$
7	$\int (3-4x)\,dx = 3x - 2x^2 + C$
8	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $= 20x^{\frac{1}{2}} + C$ $= 20\sqrt{x} + C$
9	$\int 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
10	$\int (2x^4 - 5x + 10)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$
11	$\int (2x^3 - 2x)dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$

12	$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x^3}\right)dx=\int\left(3x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $=\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$
13	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x^{-2}-x^{-3})dx$ $=-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$
14	$\int\frac{4x^3-2}{x^3}dx=\int\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx$ $=\int(4-2x^{-3})dx$ $=4x+x^{-2}+C=4x+\frac{1}{x^2}+C$
15	$\int\frac{2x+8}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx$ $=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}+8x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+16x^{\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+16\sqrt{x}+C$
16	$\int(x-1)^2dx=\int(x^2-2x+1)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$
17	$\int\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$ $=\int(x^2-2x+4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

18	$\int \sqrt{x}(x-1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
19	$\int (2x-3)(3x-1)dx = \int (6x^2 - 2x - 9x + 3)dx$ $= \int (6x^2 - 11x + 3)dx$ $= 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + C$
20	$\int f(x) \times g(x)dx \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$ $\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2 - 2x + x - 1)dx$ $= \int (2x^2 - x - 1)dx$ $= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
21	$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ $= \int (1 + x^{-2})^2 dx$ $= \int (1 + 2x^{-2} + x^{-4})dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$

22	$\int (x-1)(x-3)(x+5)dx = \int (x^2-3x-x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^2-4x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^3+5x^2-4x^2-20x+3x+15)dx$ $= \int (x^3+x^2-17x+15)dx$ $= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{17}{2}x^2+15x+C$
23	$\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \frac{2}{x}+10x+C$ $\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \int \left(\frac{P}{2}x^{-2}+Q\right)dx$ $= -\frac{P}{2}x^{-1}+Qx+C$ $= -\frac{P}{2x}+Qx+C$ $\Longrightarrow -\frac{P}{2}=2$ و $Q=10$ $\Longrightarrow P=-4$ و $Q=10$

الدرس الثاني: الشرط الأولي

مسألة اليوم صفحة 15	
$s(t)=\int 500\sqrt[4]{t}dt$ $=\int 500t^{\frac{1}{4}}dt$ $=500\times\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}+C\ =400t^{\frac{5}{4}}+C$ بما أن $s(0)=0$ ، إذن $C=0$ ومنه $s(t)=400\sqrt[4]{t^5}$	
أتحقق من فهمي صفحة 16	
$f(x)=\int(6x^2+5)dx$ $f(x)=2x^3+5x+C$ $9=2(1)^3+5(1)+C$ $C=2$ $f(x)=2x^3+5x+2$	
أتحقق من فهمي صفحة 17	
$C(x)=\int(0.3x^2+2x)dx$ $C(x)=0.1x^3+x^2+K$ $2200=0.1(10)^3+(10)^2+K$ $2200=100+100+K$ $K=2000$ $C(x)=0.1x^3+x^2+2000$	
أتحقق من فهمي صفحة 18	
$s(t)=\int v(t)dt\ =\int(36t-3t^2)dt\ =18t^2-t^3+C$ $0=18(0)^2-(0)^3+C$ $C=0$ $s(t)=18t^2-t^3$ $s(3)=18(3)^2-(3)^3$ $=135$ إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $135\ m$	
أتحقق من فهمي صفحة 20	

$$v(t) = \int a(t)dt$$
$$= \int (4t - 4)dt$$
$$= 2t^2 - 4t + C_1$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فإن $v(0) = 5$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$5 = 2(0)^2 - 4(0) + C_1$$
$$C_1 = 5$$
$$v(t) = 2t^2 - 4t + 5$$
$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int (2t^2 - 4t + 5)dt$$
$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$
$$0 = \frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) + C_2$$
$$C_2 = 0$$
$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$$
$$s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3)$$
$$= 15$$

موقع الجسيم بعد 4 ثوان من بدء الحركة هو: $15\ m$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 20

1	$f(x) = \int (x-3)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ $9 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 3(2) + C$ $C = 13$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$
2	$f(x) = \int (x^2-4)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$ $7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C$ $C = 7$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$
3	$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$ $= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$ $9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$ $C = 7$ $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

4	$f(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + C$ $11 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(4)^3 + C$ $C = 11$ $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + 11$ $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{12}x^3 + 11$
5	$f(x) = \int (x+2)^2 dx$ $= \int (x^2 + 4x + 4) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$ $7 = \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C$ $C = \frac{2}{3}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{2}{3}$

6	$f(x) = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right) dx$ $= \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} - x\right) dx$ $= 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + C$ $= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ $0 = 6\sqrt{4} - \frac{1}{2}(4)^2 + C$ $C = -4$ $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 4$
7	$y = \int (0.4x + 3) dx$ $= 0.2x^2 + 3x + C$ $5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + C$ $C = 5$ $y = 0.2x^2 + 3x + 5$

8	$f(x) = \int \frac{x^2+10}{x^2} dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{10}{x^2}\right) dx$ $= \int (1 + 10x^{-2}) dx$ $= x - 10x^{-1} + C$ $= x - \frac{10}{x} + C$ $2 = 5 - \frac{10}{5} + C$ $C = -1$ $f(x) = x - \frac{10}{x} - 1$
9	$f(x) = \int (3x^2 - 3) dx$ $= x^3 - 3x + C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,2)$ إذن: $2 = (0)^3 - 3(0) + C$ $C = 2$ $f(x) = x^3 - 3x + 2$
10	$y = \int 4t^{-\frac{2}{3}} dt$ $= 12t^{\frac{1}{3}} + C$ $= 12\sqrt[3]{t} + C$ $30 = 12\sqrt[3]{8} + C$ $C = 6$ $y = 12\sqrt[3]{t} + 6$

11	$y = 12\sqrt[3]{27} + 6$ $= 42$ إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: $42\ cm$
12	$h(t) = \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}\right) dt$ $= \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$ $= 0.12t^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$ $= 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$ بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها $2\ ft$، فإن $h(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $2 = 0.12\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + C$ $C = 2$ $h(t) = 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$
13	$s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (2t+3)dt$ $= t^2 + 3t + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $s(t) = t^2 + 3t + C$ $0 = (0)^2 + 3(0) + C$ $C = 0$ $s(t) = t^2 + 3t$ $s(3) = (3)^2 + 3(3)$ $= 18$ موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: $18\ m$

14	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int t^2 dt$ $= \frac{1}{2}t^3 + C_1$ بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$ ، فإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1$ $C_1 = \frac{1}{2}$ $v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right)dt$ $= \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ $3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2$ $C_2 = 3$ $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3$ $s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3$ $= 5$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $5\ m$

15	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int (9-2t)dt$ $= 9t - t^2 + C_1$ بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $2\ m/s$ ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $v(t) = 9t - t^2 + C_1$ $2 = 9(0) - (0)^2 + C_1$ $C_1 = 2$ $v(t) = 9t - t^2 + 2$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (9t - t^2 + 2)dt$ $= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$ بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$ $0 = \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) + C_2$ $C_2 = 0$ $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t$ $s(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)$ $= \frac{58}{3}$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $\frac{58}{3}\ m$

16	$f'(x) = ax + b$ $f(x) = \int (ax+b)dx$ $= \frac{a}{2}x^2 + bx + C$ ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7 معناها: $f'(-2) = 7$ وكذلك $f(-2) = 8$ منحنى الاقتران يقطع محور y عند النقطة $(0, 18)$ معناه: $f(0) = 18$ $f'(-2) = 7 \quad \Rightarrow a(-2) + b = 7$ $\Rightarrow -2a + b = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $f(-2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2 + b(-2) + C = 8$ $\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $f(0) = 18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$ $\Rightarrow C = 18$ نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على: $2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$ $\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على: $-a = 2 \Rightarrow a = -2$ نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$ قاعدة الاقتران هي: $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

17	$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$ $f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$ $= \int (4 - 100x^{-2}) dx$ $= 4x + 100x^{-1} + C$ $= 4x + \frac{100}{x} + C$ للاقتران f نقطة حرجة عن $(a, 10)$ إذن: $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$ $f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$ $\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2}$ $\Rightarrow 4a^2 = 100$ $\Rightarrow a^2 = 25$ $\Rightarrow a = \pm 5$ لكن $a > 0$ إذن $a = 5$، ومنه $f(5) = 10$ $10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$ $\Rightarrow C = -30$ وتكون قاعدة الاقتران: $f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

الدرس الثالث: التكامل المحدود

<table>
<tr><th colspan="2">مسألة اليوم صفحة 22</th></tr>
<tr><td></td><td>

$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$

مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهريًا هو:

$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$

$f(600) - f(300) = \int_{300}^{600} \left(500 - \frac{x}{3}\right) dx$

$= \left(500x - \frac{x^2}{6}\right)\Big|_{300}^{600}$

$= \left(500(600) - \frac{(600)^2}{6}\right) - \left(500(300) - \frac{(300)^2}{6}\right)$

$= 105000$

إذن، عند زيادة الإنتاج من 300 إلى 400 دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 105000 دينار.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 23</th></tr>
<tr><td>a</td><td>

$\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4$

$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4$

$= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)$

$= \frac{166}{3}$

</td></tr>
</table>

b	$\int_{-1}^{2}(1-x)(1+3x)dx = \int_{-1}^{2}(1+3x-x-3x^2)dx$ $= \int_{-1}^{2}(1+2x-3x^2)dx$ $= (x+x^2-x^3)\|_{-1}^{2}$ $= (2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$ $= -3$
أتحقق من فهمي صفحة 24	
	$\int_{0}^{k} 6x^2 dx = 2$ $2x^3\|_{0}^{k} = 2$ $2k^3 - 2(0)^3 = 2$ $2k^3 = 2$ $k^3 = 1$ $k = 1$
أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} 3h(x)dx$ $= \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= 5 + 3(7)$ $= 26$
b	$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$ $= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{4}^{1} f(x)dx$ $= 5 - 2$ $= 3$

c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$ $= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= -4(7)$ $= -28$
أتحقق من فهمي صفحة 27	
a	بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (1+x)dx + \int_{1}^{2} 2xdx$ $= \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-2}^{1} + x^2\Big\vert_{1}^{2}$ $= \left(1 + \frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}(-2)^2\right) + (2^2 - 1^2)$ $= \frac{9}{2}$
b	أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = \vert x-3\vert = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3} (3-x)dx + \int_{3}^{4} (x-3)dx$ $= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big\vert_{3}^{4}$ $= \left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2 - 3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right)$ $= \frac{17}{2}$
أتحقق من فهمي صفحة 29	

	$P'(x) = 165 - 0.1x$ مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400 دراجة إلى 1500 جهاز هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(1500) - f(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx$ $= (165x - 0.05x^2)\Big\|_{1400}^{1500}$ $= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2)$ $= 2000$ إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400 جهاز إلى 1500 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهريًا بمقدار 2000 دينار.
أتدرب وأحل المسائل صفحة 29	
1	$\int_{-1}^{3} 3x^2dx = x^3\Big\|_{-1}^{3}$ $= (3)^3 - (-1)^3$ $= 28$
2	$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x\Big\|_{-3}^{-2}$ $= 6(-2) - 6(-3)$ $= 6$
3	$\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)\right) - \left((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0)\right)$ $= 22$

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx$ $= 6x^{\frac{4}{3}}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{x^4}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{0^4}$ $= 96$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
6	$\int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\|_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right)$ $= -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2 - 4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right)$ $= \frac{2}{3}$

8	$\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx = \left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^{3}$ $= \left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $= 36$
9	$\int_{1}^{4}\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_{1}^{4}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $= \int_{1}^{4}\left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_{1}^{4}$ $= \left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big\vert_{1}^{4}$ $= \left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$ $= \frac{5}{2}$
10	$\int_{1}^{4}x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1}^{4}x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$ $= \int_{1}^{4}\left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx$ $= \left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{1}^{4}$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{1}^{4}$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= \frac{1211}{9}$

11	$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{5}}\right)dx \quad = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}\right)-\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4}\right)$ $= 10+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}$
12	$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 (4+4\sqrt{x}+x)dx$ $= \int_1^9 \left(4+4x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx$ $= \left(4x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^9$ $= \left(4(9)+\frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(9)^2\right)-\left(4(1)+\frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= \frac{424}{3}$
13	$\int_{-1}^4 \|3x-6\|dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\|3x-6\| = \begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x\geq 2 \end{cases}$ ، فإنني أجزئ التكامل عنده:2بما أن الاقتران تشعب عند $\int_{-1}^4 \|3x-6\|dx = \int_{-1}^2 (6-3x)dx + \int_2^4 (3x-6)dx$ $= \left(6x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^2 + \left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)\Big\|_2^4$ $= \left(6(2)-\frac{3}{2}(2)^2\right)-\left(6(-1)-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(\frac{3}{2}(4)^2-6(4)\right)-\left(\frac{3}{2}(2)^2-6(2)\right)$ $= \frac{39}{2}$

14	$\int_0^3 \lvert x-2\rvert dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\lvert x-2\rvert = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x\geq 2 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^3 \lvert x-2\rvert dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx$ $= \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big\rvert_2^3$ $= \left(2(2)-\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(2(0)-\frac{1}{2}(0)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(3)^2-2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2-2(2)\right)$ $= \frac{5}{2}$
15	$\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$ $= \int_2^3 (x-1)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big\rvert_2^3$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2-3\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2-2\right) = \frac{3}{2}$
16	بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (2x+1)dx + \int_3^4 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\rvert_0^3 + \left(10x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_3^4$ $= ((3)^2+3) - ((0)^2+0) + \left(10(4)-\frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(10(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)$ $= \frac{37}{2}$

17	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(-x^2+5)dx + \int_{0}^{2}(x+5)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(0)^3+5(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3+5(-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(2)^2+5(2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2+5(0)\right)$ $= \frac{50}{3}$
18	$\int_{2}^{2} g(x)dx = 0$
19	$\int_{5}^{1}(g(x)-2)dx = \int_{5}^{1} g(x)dx - \int_{5}^{1} 2dx$ $= (-8) - \left((2x)\|_{5}^{1}\right)$ $= (-8) - \left((2(1)) - (2(5))\right)$ $= 0$
20	$\int_{1}^{2}(3f(x)+x)dx = \int_{1}^{2} 3f(x)dx + \int_{1}^{2} xdx$ $= 3\int_{1}^{2} f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{1}^{2}$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= -\frac{21}{2}$
21	$\int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx$ $= -(-4)+6$ $= 10$
22	$\int_{1}^{5}(f(x)-g(x))dx = \int_{1}^{5} f(x)dx - \int_{1}^{5} g(x)dx$ $= 6-8$ $= -2$

23	$\int_1^5 (4f(x)+g(x))dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6)+8$ $= 32$
24	$\int_1^m (6x-10)dx = 4$ $(3x^2-10x)\Big\|_1^m = 4$ $(3m^2-10m)-\left(3(1)^2-10(1)\right) = 4$ $3m^2-10m+7=4$ $3m^2-10m+3=0$ $(3m-1)(m-3)=0$ $3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3} \quad , \quad m-3=0 \Rightarrow m=3$
25	$C'(x) = 6x+1$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا هو: $f(b)-f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(20)-f(10) = \int_{10}^{20} (6x+1)dx$ $= (3x^2+x)\Big\|_{10}^{20}$ $= (3(20)^2+20)-(3(10)^2+10)$ $= 910$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًّا بمقدار 910 دينار.

26	$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$ $N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$ $= 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big\|_0^4$ $= 112\sqrt{t^5}\Big\|_0^4$ $= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5}$ $= 3584$ إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.
27	خالد لم يراعي ترتيب حدود التكامل عند التعويض. $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{14}{3}$
28	$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$ $= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$ $= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$ $= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

29	$\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$ $(ax^2+7x)\Big\vert_1^5 = 4a^2$ $\left(a(5)^2+7(5)\right)-\left(a(1)^2+7(1)\right) = 4a^2$ $25a+35-a-7=4a^2$ $24a+28=4a^2$ $4a^2-24a-28=0$ $a^2-6a-7=0$ $(a-7)(a+1)=0$ $a-7=0 \Rightarrow a=7 \quad , a+1=0 \Rightarrow a=-1$

الدرس الرابع: المساحة

مسألة اليوم صفحة 31

$f(x) = 4 - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies 4 - x^2 = 0$$
$$\implies (2 + x)(2 - x) = 0$$
$$\implies x = -2 \quad , \quad x = 2$$

وهي تمثل حدود التكامل

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$
$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

إذن، المساحة هي: 10.667 كيلومتر مربع.

أتحقق من فهمي صفحة 33

$f(x) = x + 3$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x + 3 = 0$$
$$\implies x = -3$$

بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1, 3]$، إذن نهملها.
نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 1)dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 1\right)$$
$$= 8$$

إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 34	
	$f(x) = x^2 - 4$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = 2 \ , \quad x = -2$ بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملهما. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x $A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)\,dx$ $= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\vert_{-1}^{1}$ $= -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right)$ $= \frac{22}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{22}{3}$ وحدات مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 36

$$f(x) = x^2 + 2x$$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$$
$$\Rightarrow x(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ , x = -2$$

بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين:

$[-3, -2]$ و $[-2, -1]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, -2]$، وليكن $-\frac{5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن $-\frac{3}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-2, -1]$

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right)\right)$$

$$= 2$$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 38	
$f(x) = x^2 + 5x + 4$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ $\Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -4 \ , x = -1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-4, -1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-4, -1]$ $A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$ $= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-4}^{-1}$ $= -\left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right)\right)$ $= \frac{9}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.	a

	$f(x) = x^3 - 9x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies x^3 - 9x = 0$ $\implies x(x^2 - 9) = 0$ $\implies x(x+3)(x-3) = 0$ $\implies x = 0 \ , x = -3 \ , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 0]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 3]$
b	$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{3}$ $= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2\right) - (0)\right)$ $= \frac{81}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 39	
1	$A=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big\|_{-2}^{1}$ $=\left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right)-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)$ $=9$
2	$A=\int_{4}^{9}x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big\|_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big\|_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right)-\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)$ $=\frac{422}{5}$
3	$A=-\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx=-\int_{2}^{4}(2x^{-2}-3)dx$ $=\int_{2}^{4}(-2x^{-2}+3)dx$ $=(2x^{-1}+3x)\Big\|_{2}^{4}$ $=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big\|_{2}^{4}$ $=\left(\frac{2}{4}+3(4)\right)-\left(\frac{2}{2}+3(2)\right)$ $=\frac{11}{2}$

4	$A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx$ $=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{1}$ $=(0)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(-\frac{1}{4}(1)^4+\frac{3}{2}(1)^2\right)-(0)$ $=\frac{5}{2}$
5	$A=\int_{0}^{3}(x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big\|_{0}^{3}$ $=\left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2+0\right)$ $=\frac{15}{2}$
6	$A=\int_{0}^{2}3x^2dx=x^3\Big\|_{0}^{3}$ $=(3^3)-(0^3)$ $=27$

7	$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 3x^2 - 2x + 2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2 نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 + 2(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 + 2(0)\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.
8	$f(x) = 9 - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 9 - x^2 = 0$ $\implies (3 + x)(3 - x) = 0$ $\implies x = -3 , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 9 - (0)^2 = 9 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 3]$ $A = \int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^3$ $= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $= 36$ إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

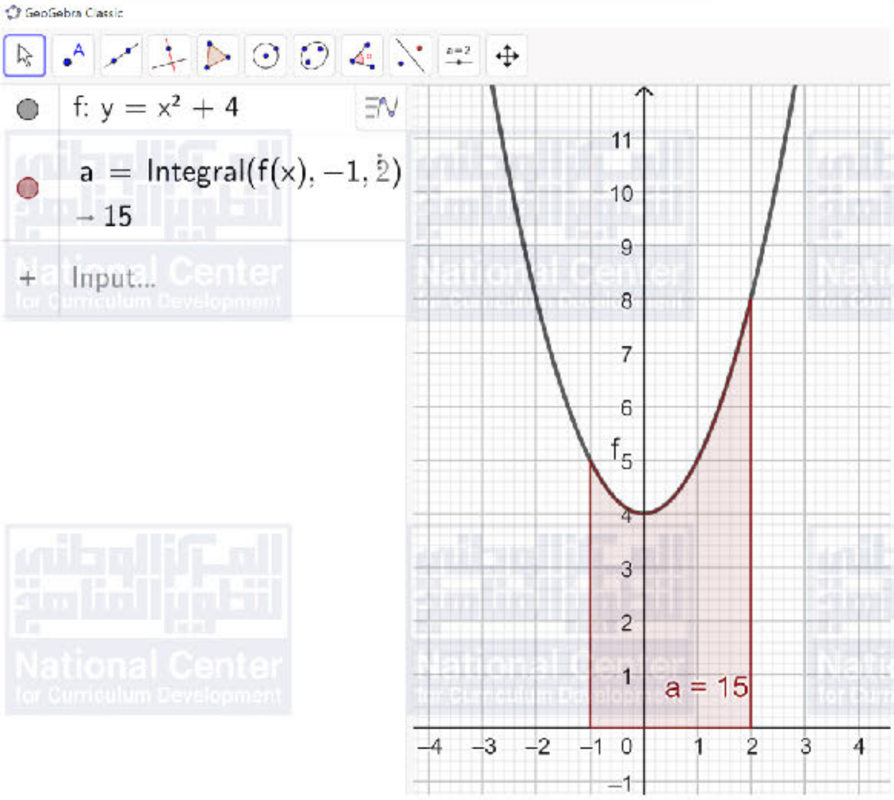
9	$f(x) = x^3 + 4x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 4x = 0$ $\Rightarrow x(x^2 + 4) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ مميز العبارة التربيعية $(x^2 + 4)$ سالب، لذا لا أصفار لها. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{2} < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 0]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = -\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$ $= \int_{-1}^{0} (-x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$ $= \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left((0) - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{4}(2)^4 + 2(2)^2\right) - (0)\right)$ $= \frac{25}{4}$ إذن، المساحة هي: $\frac{25}{4}$ وحدة مربعة.

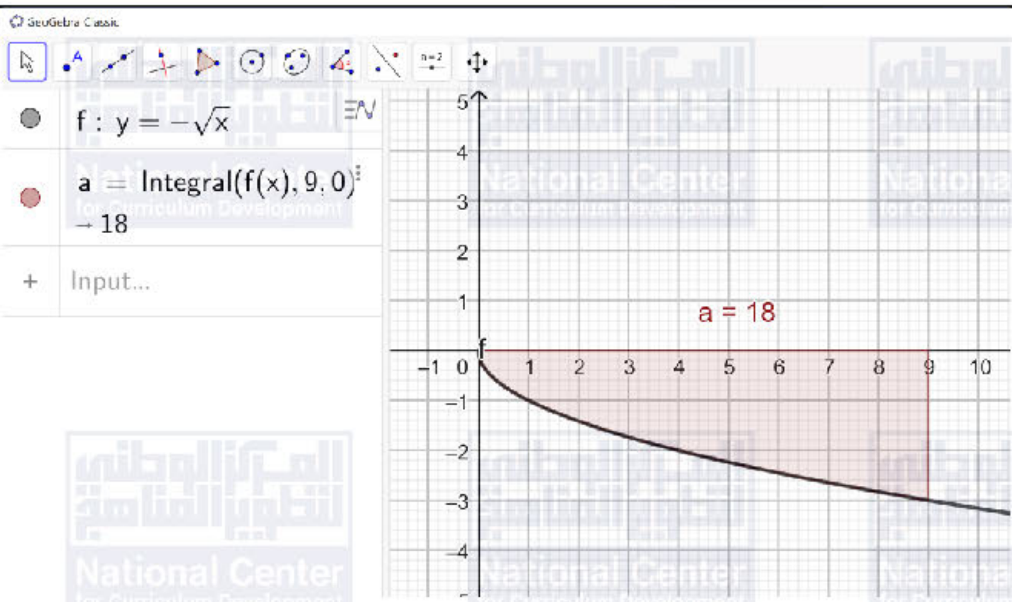
10	$f(x) = -7 + 2x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies -7 + 2x - x^2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عددًا ضمن الفترة $[1, 4]$، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = -7 + 2(1) - (1)^2 = -6 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1, 4]$ $A = -\int_1^4 (-7 + 2x - x^2)dx$ $= \int_1^4 (7 - 2x + x^2)dx$ $= \left(7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= 27$ إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.
11	$f(x) = 5 - x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 5 - x = 0$ $\implies x = 5$ نختار عددًا ضمن الفترة $[3, 5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3, 5]$ $A = \int_3^5 (5 - x)dx = \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\left(5(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(5(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right)$ $= 2$ إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

12	$f(x) = (x+1)(x-4)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$ $\Rightarrow x = -1 , x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,4]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0+1)(0-4) = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,4]$ $A = -\int_{-1}^{4} (x+1)(x-4)dx = -\int_{-1}^{4} (x^2 + x - 4x - 4)dx$ $= -\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)dx$ $= \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-1}^{4}$ $= \left(-\frac{1}{3}(4)^3 + \frac{3}{2}(4)^2 + 4(4)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right)$ $= \frac{125}{6}$ إذن، المساحة هي: $\frac{125}{6}$وحدة مربعة.
13	$f(x) = x^2 - 2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,2]$ $A = -\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)dx = \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2\right)$ $= \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.

14	$A=\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\|_{2}^{3}$ $=\left((9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)$ $=\frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
15	$A=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\|_{-1}^{0}$ $=(0)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)$ $=\frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
16	$A=\int_{0}^{4}(8+8\sqrt{x}-6x)dx=\int_{0}^{4}\left(8+8x^{\frac{1}{2}}-6x\right)dx$ $=\left(8x+\frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x^2\right)\Big\|_{0}^{4}$ $=\left(8x+\frac{16}{3}\sqrt{x^3}-3x^2\right)\Big\|_{0}^{4}$ $=\left(8(4)+\frac{16}{3}\sqrt{4^3}-3(4)^2\right)-(0)$ $=\frac{80}{3}$ إذن، مساحة سطح الجناح هي $\frac{80}{3}$ متر مربع

17	$y = kx(4-x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $y = 0 \Rightarrow \ kx(4-x) = 0$ $\Rightarrow \ x = 0 \ or \ x = 4$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$ $A = \int_0^4 (kx(4-x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx$ $= \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big\|_0^4$ $= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \ \Rightarrow \ k = 3$
18	$R_1 = 2 \ \Rightarrow -\int_{-1}^0 f(x)dx = 2$ $\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = -2$ $R_2 = 3 \ \Rightarrow -\int_3^4 f(x)dx = 3$ $\Rightarrow \int_3^4 f(x)dx = -3$ $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$ $\Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3)$ $\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$ $= -2 + 13$ $= 11$

<table>
<tr><th colspan="2">أتدرب صفحة 41</th></tr>
<tr><td>1</td><td>

إذن، المساحة هي 15 وحدة مربعة</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

إذن، المساحة هي 18 وحدة مربعة</td></tr>
</table>

الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

مسألة اليوم صفحة 42

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t) = \int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}\,dt = \int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$= \int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

$$= -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد طلاب الجامعة عند التأسيس 2000 طالب، إذن $P(0) = 2000$

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$P(0) = -10000(0+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$2000 = -10000 + C$$

$$C = 12000$$

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000$$

ثالثًا، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس:

$$P(3) = -10000(3+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000$$

$$\approx 7000$$

إذن، عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس هو 7000 طالبٍ.

أتحقق من فهمي صفحة 43

a	$\int (5x^2 + 7e^x)dx = \frac{5}{3}x^3 + 7e^x + C$
b	$\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right)dx = \int (9\cos x + 4x^{-3})dt$ $= 9\sin x - 2x^{-2} + C$ $= 9\sin x - \frac{2}{x^2} + C$
c	$\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin x\right)dx$ $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$
أتحقق من فهمي صفحة 45	
a	$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right)dx = \ln\|x\| + 8e^x + C$
b	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right)dx = -\cos x - 5\ln\|x\| + C$
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx$ $= \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right)dx$ $= x - 7\ln\|x\| - x^{-1} + C$ $= x - 7\ln\|x\| - \frac{1}{x} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 47	

a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C$ $= \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\, dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C$ $= \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$
d	$\int (\sin 5x + e^{2x}) dx = \frac{1}{5} \times -\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ $= -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
e	$\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) dx = 2x^3 - \frac{3}{7}e^{7x+1} + C$
f	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\ln\|3x+2\| + C$

أتحقق من فهمي صفحة 49

<table>
<tr><td></td><td>
أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t) = \int 105e^{0.03t}dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t} + C$$
$$= 3500e^{0.03t} + C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0) = 3500$

$P(t) = 3500e^{0.03t} + C$

$P(0) = 3500e^{0} + C$

$3500 = 3500 + C$

$C = 0$

$P(t) = 3500e^{0.03t}$

ثالثًا، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات):

$P(10) = 3500e^{0.03(10)}$

≈ 4725

إذن، عدد سكان المدينة عام 2020 هو 4725 ساكنًا.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 50</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \ln|x^2+3x| + C$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>
$\int \frac{9x^2}{x^3+8}dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8}dx$

$= 3\int \frac{3x^2}{x^3+8}dx$

$= 3\ln|x^3+8| + C$
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>
$\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}dx$

$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}dx$

$= \frac{1}{8}\ln|4x^2+8x| + C$
</td></tr>
</table>

d	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert e^{3x}+5\rvert + C$
أتحقق من فهمي صفحة 51	
a	$\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big\rvert_0^2$ $= \left(2e^{2(2)}+7(2)\right) - \left(2e^{2(0)}+7(0)\right)$ $= 2e^4+12$
b	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\rvert_0^4$ $= \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\,\Big\rvert_0^4$ $= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(4)+1}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(0)+1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
c	$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\ln\lvert x^2+1\rvert\,\Big\rvert_0^4$ $= \left(4\ln\lvert(4)^2+1\rvert\right) - \left(4\ln\lvert(0)^2+1\rvert\right)$ $= 4\ln 17$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 52	
1	$\int \left(\frac{1}{2}e^x+3x\right)dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2 + C$
2	$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int\left(1+\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx = x + 2\ln\lvert x\rvert - x^{-1} + C$

3	$\int (e^x+1)^2 dx = \int (e^{2x}+2e^x+1)dx$ $= \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$
4	$\int \frac{1}{x}(x+2)dx = \int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ $= x+2\ln\|x\|+C$
5	$\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx = \int \left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$ $= -2x^{-2}+5\ln\|x\|+C$
6	$\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{6x}-7\ln\|x\|+C$
7	$\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right)dx = 3\ln\|x+1\|+\frac{5}{2}e^{-2x}+C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= (2x-3)^{\frac{1}{2}}+C$
9	$\int (\sin(2x-3)+e^{6x-4})dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3)+\frac{1}{6}e^{6x-4}+C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\,dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1)+C$
11	$\int \frac{\sin x+3\cos x}{4}dx = \int \left(\frac{\sin x}{4}+\frac{3\cos x}{4}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{4}\cos x\right)dx$ $= -\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\sin x+C$
12	$\int (e^{6x-4}+(1-2x)^6)dx = \frac{1}{6}e^{6x-4}-\frac{1}{14}(1-2x)^7+C$

13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$
16	$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{7}{e^x}\right)dx$ $= \int (1+7e^{-x})dx$ $= x-7e^{-x}+C$
17	$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = \int \frac{-4\left(-\frac{1}{4}\right)}{5-\frac{1}{4}x}dx$ $= -4\ln\left\lvert 5-\frac{1}{4}x\right\rvert + C$
18	$\int (4x^3+2+3\sin(5-3x))dx = x^4+2x+\cos(5-3x)+C$

19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx$ $= \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C$ $= \frac{3}{4(1-4x)} + C$
21	$\int \frac{1+xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{xe^x}{x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx$ $= \ln\lvert x\rvert + e^x + C$
22	$\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = (x^2+3e^x-4\ln\lvert x\rvert)\Big\rvert_1^2$ $= ((2)^2+3e^2-4\ln\lvert 2\rvert) - ((1)^2+3e^1-4\ln\lvert 1\rvert)$ $= 3+3e^2-4\ln 2-3e$
23	$\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}dx = \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+10\rvert\Big\rvert_1^2$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert(2)^2+10\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert(1)^2+10\rvert$ $= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11$

24	$\int_3^4 (2x-6)^4 dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5 \Big\|_3^4$ $= \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5$ $= \frac{32}{10}$
25	$v(t) = e^{-2t}$ $s(t) = \int e^{-2t} dt$ $= -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ $s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ إذن $s(0) = 2$: $s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2} + C$ $C = \frac{5}{2}$ $\Longrightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$

26	$f(x) = \int 5e^x dx$ $= 5e^x + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$: $f(x) = 5e^x + C \Rightarrow f(0) = 5e^0 + C$ $\Rightarrow \frac{1}{2} = 5 + C$ $\Rightarrow C = -\frac{9}{2}$ $f(x) = 5e^x - \frac{9}{2}$
27	$f(x) = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(\frac{2}{x} - x^{-2}\right) dx$ $= 2\ln\|x\| + x^{-1} + C$ $= 2\ln\|x\| + \frac{1}{x} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1, -1)$: $f(x) = 2\ln\|x\| + \frac{1}{x} + C \Rightarrow f(1) = 2\ln 1 + 1 + C$ $\Rightarrow -1 = 1 + C$ $\Rightarrow C = -2$ $f(x) = 2\ln\|x\| + \frac{1}{x} - 2$

28	$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx$ $= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, 4)$: $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow f(0) = -e^0 + \frac{1}{3}(0)^3 + C$ $\Rightarrow \quad 4 = -1 + C$ $\Rightarrow C = 5$ $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$
29	$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right) dx$ $= x^2 + 3\ln\|x + e\| + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\|x + e\| + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\|e + e\| + C$ $\Rightarrow \quad e^2 = e^2 + 3\ln 2e + C$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e$ $f(x) = x^2 + 3\ln\|x + e\| - 3\ln 2e$
30	$P(t) = \int 0.51e^{-0.03t}dt$ $= -\frac{0.51}{0.03}e^{-0.03t} + C$ $= -17e^{-0.03t} + C$ بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن $P(0) = 1000$ ومنه: $P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C$ $1000 = -17 + C$ $C = 1017$ $P(t) = -17e^{-0.03t} + 1017$

31	$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$ عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 1004 سمكة تقريبًا.
32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t}dt$ $= \frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t} + C$ $= 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$ إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C$ $9 = 9 + C$ $C = 0$ $A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5\ cm^2$ مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي $5.5\ cm^2$ تقريبًا.
34	$\int \frac{1}{2x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2)}{2x}dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\|2x\| + C$
35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx$ $= \int e^{\frac{1}{2}x}dx$ $= 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

36	$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2\cos x)}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\lvert 3+2\sin x\rvert + C$
37	$\int (x^2+2x+1)^5 dx = \int ((x+1)^2)^5 dx$ $= \int (x+1)^{10} dx$ $= \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$
38	$\int \frac{1}{x+1}dx$ هذا التكامل هو المختلف $\int \frac{1}{x+1}dx$ كونه الوحيد الذي يُحل باللوغاريتم الطبيعي.

الدرس السادس: التكامل بالتعويض

مسألة اليوم صفحة 54

أولًا نجد تكامل الاقتران:

$$C(t)=\int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$$

$$u=t^2+16 \Longrightarrow \frac{du}{dt}=2t$$

$$\Longrightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$$C(t)=\int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$$

$$=\int \frac{0.3t}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2t}$$

$$=0.15\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=2u^{\frac{1}{2}}+K$$

$$=2\sqrt{u}+K$$

$$=2\sqrt{t^2+16}+K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:

$$C(t)=2\sqrt{t^2+16}+K$$

$$C(0)=2\sqrt{0^2+16}+K$$

$$0=8+K$$

$$K=-8$$

$$C(t)=2\sqrt{t^2+16}-8$$

$$C(3)=2\sqrt{(3)^2+16}-8=2$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثلاث الأولى من حقنه هو $2\ mg/cm^2$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a	$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$ $u = 2x^3 - 3 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 6x^2$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{6x^2}$ $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx = \int 6x^2u^4 \times \dfrac{du}{6x^2}$ $= \int u^4du$ $= \dfrac{1}{5}u^5 + C$ $= \dfrac{1}{5}(2x^3-3)^5 + C$
b	$\int xe^{x^2+1}dx$ $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\int xe^{x^2+1}dx = \int xe^u \times \dfrac{du}{2x}$ $= \int \dfrac{1}{2}e^u du$ $= \dfrac{1}{2}e^u + C$ $= \dfrac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

c	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx$ $u = 2x^2+8x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x+8$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4x+8}$ $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx = \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$ $= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du$ $= \int u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2\sqrt{2x^2+8x} + C$
d	$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{u^2}{x} \times xdu$ $= \int u^2du$ $= \frac{1}{3}u^3 + C$ $= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

e	$\int x^3\cos(x^4-5)\,dx$ $u = x^4 - 5 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 4x^3$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{4x^3}$ $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx = \int x^3 \cos u \times \dfrac{du}{4x^3}$ $= \int \dfrac{1}{4}\cos u\,du$ $= \dfrac{1}{4}\sin u + C$ $= \dfrac{1}{4}\sin(x^4-5) + C$
f	$\int \cos^4 x \sin x\,dx$ $u = \cos x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\int \cos^4 x \sin x\,dx = \int u^4 \sin x \times \dfrac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\dfrac{1}{5}u^5 + C$ $= -\dfrac{1}{5}cos^5 x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 60

أولًا نجد تكامل الاقتران:

$$P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}} dx$$

$$u = 36 + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}} dx = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= -150 \int u^{-\frac{3}{2}} du$$

$$= 300u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{u}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

بما أن سعر القطعة الواحدة هو 75 دينارًا عندما يكون عدد القطع المبيعة *800* قطعة،

إذن $P(8) = 75$ ومنه:

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

$$P(8) = \frac{300}{\sqrt{36+4^2}} + C$$

$$75 = \frac{300}{\sqrt{52}} + C$$

$$C = 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$$

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 62	
a	$$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx$$ $$u = x^3 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$ $$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$ $$x = 0 \Rightarrow u = (0)^3 - 1 = -1$$ $$x = 1 \Rightarrow u = (1)^3 - 1 = 0$$ $$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx = \int_{-1}^0 x^2 u^4 \frac{du}{3x^2}$$ $$= \int_{-1}^0 \frac{1}{3} u^4 du$$ $$= \frac{1}{15}u^5 \Big\|_{-1}^0$$ $$= \left(\frac{1}{15}(0)^5\right) - \left(\frac{1}{15}(-1)^5\right)$$ $$= \frac{1}{15}$$

b	$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx$ $u = 2 - x^4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-4x^3}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 2 - (0)^4 = 2$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = 2 - (-1)^4 = 1$ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx = \int_{1}^{2} \frac{x^3}{u^7} \times \frac{du}{-4x^3}$ $= \int_{1}^{2} -\frac{1}{4}u^{-7}du$ $= \frac{1}{24}u^{-6}\Big\vert_{1}^{2}$ $= \frac{1}{24u^6}\Big\vert_{1}^{2}$ $= \left(\frac{1}{24(2)^6}\right) - \left(\frac{1}{24(1)^6}\right)$ $= -\frac{21}{512}$

c	$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 \frac{u}{x} xdu$ $= \int_0^1 u\, du$ $= \frac{1}{2}u^2 \Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 62	

1	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ $u = x^2 + 4 \implies \frac{du}{dx} = 2x$ $\implies dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}du$ $= \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{1}{2}} + C$ $= \sqrt{x^2 + 4 + C}$
2	$\int x^2(2x^3+5)^4dx$ $u = 2x^3 + 5 \implies \frac{du}{dx} = 6x^2$ $\implies dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int x^2(2x^3+5)^4dx = \int x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int \frac{1}{6}u^4du$ $= \frac{1}{30}u^5 + C$ $= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$

3	$\int 3x\sqrt{x^2+7}dx$ $u = x^2+7 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\int 3x\sqrt{x^2+7}dx = \int 3x\sqrt{u} \times \dfrac{du}{2x}$ $= \int \dfrac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \sqrt{(x^2+7)^3} + C$
4	$\int x^6 e^{1-x^7}dx$ $u = 1-x^7 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -7x^6$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-7x^6}$ $\int x^6 e^{1-x^7}dx = \int x^6 e^u \times \dfrac{du}{-7x^6}$ $= \int -\dfrac{1}{7}e^u du$ $= -\dfrac{1}{7}e^u + C$ $= -\dfrac{1}{7}e^{1-x^7} + C$

5	$\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3} dx$ $u = x^5 + 9 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$ $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3} dx = \int \frac{x^4}{u^3} \times \frac{du}{5x^4}$ $= \int \frac{1}{5} u^{-3} du$ $= -\frac{1}{10} u^{-2} + C$ $= -\frac{1}{10(x^5+9)^2} + C$
6	$\int (3x^2 - 1) e^{x^3 - x} dx$ $u = x^3 - x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2 - 1}$ $\int (3x^2 - 1) e^{x^3 - x} dx = \int (3x^2 - 1) e^u \frac{du}{3x^2 - 1}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^3 - x} + C$

7	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $u = x^2 - 2x + 4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x-2}$ $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx = \int \frac{3x-3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x-2}$ $= \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2(x-1)}$ $= \int \frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 3u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 3\sqrt{x^2-2x+4} + C$
8	$\int \frac{1}{x \ln x}dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $\int \frac{1}{x \ln x}dx = \int \frac{1}{xu} \times xdu$ $= \int \frac{1}{u}du$ $= \ln\|u\| + C$ $= \ln\|\ln x\| + C$

9	$\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx$ $u = 1+\cos x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx = \int \sin x\, u^4 \times \dfrac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\dfrac{1}{5}u^5 + C$ $= -\dfrac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$
10	$\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx$ $u = \sin 2x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2\cos 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2\cos 2x}$ $\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx = \int u^5 \cos 2x \times \dfrac{du}{2\cos 2x}$ $= \int \dfrac{1}{2}u^5 du$ $= \dfrac{1}{12}u^6 + C$ $= \dfrac{1}{12}(\sin 2x)^6 + C$

11	$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$ $u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int -\sin u \, du$ $= \cos u + C$ $= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$
12	$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx$ $u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx = \int \frac{\cos x}{e^u} \times \frac{du}{\cos x}$ $= \int \frac{1}{e^u} du$ $= \int e^{-u} du$ $= -e^{-u} + C$ $= -e^{-\sin x} + C$ $= -\frac{1}{e^{\sin x}} + C$

13	$\int e^x(2+e^x)^5dx$ $u=2+e^x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=e^x$ $\Rightarrow dx=\dfrac{du}{e^x}$ $\int e^x(2+e^x)^5dx=\int e^x u^5 \times \dfrac{du}{e^x}$ $=\int u^5 du$ $=\dfrac{1}{6}u^6+C$ $=\dfrac{1}{6}(2+e^x)^6+C$
14	$\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx$ $u=\ln x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow dx=x du$ $\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx=\int \dfrac{\cos(u)}{x}\times x du$ $=\int \cos u \, du$ $=\sin u+C$ $=\sin(\ln x)+C$

15	$\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$ $u = x^3-x^2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2-2x-1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-2x-1}$ $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$ $= \int (3x^2-2x-1)u^4 \times \frac{du}{3x^2-2x-1}$ $= \int u^4 du$ $= \frac{1}{5}u^5 + C$ $= \frac{1}{5}(x^3-x^2-x)^5 + C$
16	$\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx$ $u = x^2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x-1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x-1}$ $x = 2 \Rightarrow u = (2)^2-2 = 2$ $x = 0 \Rightarrow u = (0)^2-0 = 0$ $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx = \int_0^2 (2x-1)e^u \frac{du}{2x-1}$ $= \int_0^2 e^u du$ $= e^u\vert_0^2$ $= e^2 - e^0$ $= e^2 - 1$

17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 1 \Rightarrow u = 1$ $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int_1^{\frac{1}{2}} -e^u du$ $= -e^u \big\|_1^{\frac{1}{2}}$ $= -e^{\frac{1}{2}} + e$ $= -\sqrt{e} + e$

18	$\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x du$ $x = e^3 \quad \Rightarrow u = \ln e^3 = 3$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{u}}{x} x du$ $= \int_{1}^{3} u^{\frac{1}{2}} du$ $= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}$ $= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

19	$\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}dx$ $u = x^4+2x^2+1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3+4x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3+4x}$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = (1)^4+2(1)^2+1 = 4$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = (0)^4+2(0)^2+1 = 1$ $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}dx = \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4x^3+4x}$ $= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u}\times\frac{du}{4(x^3+x)}$ $= \int_1^4 \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}du$ $= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^4$ $= \frac{1}{6}\sqrt{u^3}\Big\|_1^4$ $= \frac{1}{6}\sqrt{4^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3}$ $= \frac{7}{6}$

20	$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = 3 \Rightarrow u = 10$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int_1^{10} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$ $= u^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^{10}$ $= \sqrt{u}\Big\|_1^{10}$ $= \sqrt{10} - 1$

21	$\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}dx$ $u = x^2+x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$ $x = 2 \Rightarrow u = (2)^2+2+4 = 10$ $x = 1 \Rightarrow u = (1)^2+1+4 = 6$ $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}dx = \int_6^{10} \frac{2x+1}{u^3} \times \frac{du}{2x+1}$ $= \int_6^{10} u^{-3}du$ $= -\frac{1}{2}u^{-2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2u^2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2(10)^2} + \frac{1}{2(6)^2}$ $= \frac{2}{225}$

22	$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$ هناك طريقتان للحل: إما بالتكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس. طريقة التكامل بالتعويض: $u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = 0 \Rightarrow u = (0)^2 + 1 = 1$ $x = -1 \Rightarrow u = (-1)^2 + 1 = 2$ $x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$ $A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$ $= -\int_{2}^{1} 6xu \times \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu \times \frac{du}{2x}$ $= -\int_{2}^{1} 3u\,du + \int_{1}^{2} 3u\,du$ $= -\frac{3}{2}u^2\Big\|_{2}^{1} + \frac{3}{2}u^2\Big\|_{1}^{2}$ $= -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2$ $= 9$ ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة

23	$A=-\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx+\int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $u=16-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $x=0 \Rightarrow u=16-(0)^2=16$ $x=-4 \Rightarrow u=16-(-4)^2=0$ $x=4 \Rightarrow u=16-(4)^2=0$ $A=-\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx+\int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $=-\int_{0}^{16} x\sqrt{u}\times\frac{du}{-2x}+\int_{16}^{0} x\sqrt{u}\times\frac{du}{-2x}$ $=\int_{0}^{16}\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du+\int_{16}^{0}-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du$ $=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{0}^{16}+-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{16}^{0}$ $=\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\vert_{0}^{16}+-\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\vert_{16}^{0}$ $=\frac{1}{3}\sqrt{(16)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(0)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(0)^3}+\frac{1}{3}\sqrt{(16)^3}$ $=\frac{128}{3}$ ومنه مساحة المنطقة المظللة هي $\frac{128}{3}$ وحدة مربعة

24	$f(x)=\int xe^{4-x^2}dx$ $u=4-x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\dfrac{du}{-2x}$ $f(x)=\int xe^{4-x^2}dx$ $=\int xe^u\dfrac{du}{-2x}$ $=\int -\dfrac{1}{2}e^u du$ $=-\dfrac{1}{2}e^u+C$ $=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2,1)$: $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+C \Rightarrow f(-2)=-\dfrac{1}{2}e^{4-(-2)^2}+C$ $\Rightarrow \quad 1=-\dfrac{1}{2}+C$ $\Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$ $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+\dfrac{3}{2}$

25	$f(x)=\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$ $u=1-x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $f(x)=\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$ $=\int \frac{2x}{u^2}\times\frac{du}{-2x}$ $=\int -u^{-2}du$ $=u^{-1}+C$ $=\frac{1}{1-x^2}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,-1)$: $f(x)=\frac{1}{1-x^2}+C \quad \Rightarrow f(0)=\frac{1}{1-0^2}+C$ $\Rightarrow \quad -1=1+C$ $\Rightarrow C=-2$ $f(x)=\frac{1}{1-x^2}-2$

26	$s(t)=\int\frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt$ $u=1+t^2\quad\Rightarrow\frac{du}{dt}=2t$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$ $\int\frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}dt=\int\frac{-2t}{\sqrt{u^3}}\times\frac{du}{2t}$ $=\int -u^{-\frac{3}{2}}du$ $=2u^{-\frac{1}{2}}+C$ $=2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $4\ m$ ، إذن، $s(0)=4$: $s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+C\quad\Rightarrow f(0)=\frac{2}{\sqrt{1+0^2}}+C$ $\Rightarrow\quad 4=2+C$ $\Rightarrow C=2$ $s(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+2$

27	أولًا نجد تكامل الاقتران: $V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dt$ $u=0.2t^4+8000 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$ $V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dx$ $=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}}\times\frac{du}{0.8t^3}$ $=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du$ $=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينارٍ، إذن $V(0)=5000$ ومنه: $V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ $V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C$ $5000=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(8000)^2}+C$ $5000=\frac{400}{3}+C$ $C=\frac{14600}{3}$ $V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$

28	$\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt$ $u = 4+e^{0.2t} \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0.2e^{0.2t}$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $t = 10 \quad \Rightarrow u = 4+e^{0.2(10)} = 4+e^2$ $t = 0 \quad \Rightarrow u = 4+e^{0.2(0)} = 5$ $\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt = \int_5^{4+e^2} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $= \int_5^{4+e^2} 20u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 40u^{\frac{1}{2}}\Big\|_5^{4+e^2}$ $= 40\sqrt{u}\Big\|_5^{4+e^2}$ $= 40\sqrt{4+e^2} - 40\sqrt{5}$ ≈ 46 إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 إلى 2025.
29	المختلف هو $\int x(x^3+1)dx$ لأنه الوحيد الذي لا يحل بطريقة التكامل بالتعويض.
30	الخطأ الذي ارتكبته سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل. $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx$ $u = x^2+1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = 1^2+1 = 2$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 0^2+1 = 1$ $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx = \int_1^2 8xu^3\frac{du}{2x}$ $= \int_1^2 4u^3du$ $= u^4\Big\|_1^2$ $= (2)^4 - (1)^4$ $= 15$

31	$\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx$ $u = x^3 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = 3x^2$ $\Rightarrow dt = \dfrac{du}{3x^2}$ $x = k \quad \Rightarrow u = k^3$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 0^3 = 0$ $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx = \int_0^{k^3} kx^2 e^u \dfrac{du}{3x^2}$ $= \int_0^{k^3} \dfrac{k}{3} e^u\,du$ $= \dfrac{k}{3} e^u \Big\|_0^{k^3}$ $= \dfrac{k}{3} e^{k^3} - \dfrac{k}{3} e^0$ $= \dfrac{k}{3} e^{k^3} - \dfrac{k}{3}$ $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1) \quad \Rightarrow \dfrac{k}{3} e^{k^3} - \dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1)$ $\Rightarrow \dfrac{k}{3}\left(e^{k^3} - 1\right) = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1)$ $\Rightarrow k = 2$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 65	
1	$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int (x - x^{-2})dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C$ $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \ldots\ldots\ldots. (b)$
2	$\int_0^2 kx\,dx = 6 \quad \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big\vert_0^2 = 6$ $\Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6$ $\Rightarrow 2k = 6$ $\Rightarrow k = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
3	$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_0^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3+\frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3+\frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{9}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
4	$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\vert_0^2$ $= \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)}$ $= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$

5	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $= 2x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4$ $= 2\sqrt{x}\Big\|_1^4$ $= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$ $= 2$ ………………………… (d)
6	$f(x) = 4x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 4x - x^2 = 0$ $\implies x(4 - x) = 0$ $\implies x = 0\,, x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 4]$ والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$
7	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$
8	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$
9	$\int \frac{5}{x^3}\,dx = \int 5x^{-3}\,dx$ $= -\frac{5}{2}x^{-2} + C$ $= -\frac{5}{2x^2} + C$

10	$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx$ $= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$ $= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$
11	$\int (5x^2 - 2e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$
12	$\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$
13	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{6}{2x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\|x\| + C$
14	$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx$ $= -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$ $= -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$
15	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x + 4\| + C$

16	$\int 2xe^{x^2-1}dx$ $u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^{u} \times \frac{du}{2x}$ $= \int e^{u} du$ $= e^{u} + C$ $= e^{x^2-1} + C$
17	$\int 4e^{x}(3 + e^{2x})dx = \int (12e^{x} + 4e^{3x})dx$ $= 12e^{x} + \frac{4}{3}e^{3x} + C$
18	$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx$ $u = 4 + 2x + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 + 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x}$ $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx = \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2+2x}$ $= \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2(1+x)}$ $= \int \frac{1}{2}u^{-8}du$ $= -\frac{1}{14}u^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14(4+2x+x^2)^7} + C$

19	$\int x\sin(3+x^2)\,dx$ $u = 3+x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\int x\sin(3+x^2)\,dx = \int x\sin u \times \dfrac{du}{2x}$ $= \int \dfrac{1}{2}\sin u\,du$ $= -\dfrac{1}{2}\cos u + C$ $= -\dfrac{1}{2}\cos(3+x^2) + C$
20	$\int (3\sin 3x - 4\cos x)dx = -\cos 3x - 4\sin x + C$
21	$\int (x - \sin(7x+2))dx = \int x dx - \int \sin(7x+2)\,dx$ $= \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{7}\cos(7x+2) + C$
22	$\int (e^{3x} - e^{-3x})dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} + \dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$
23	$\int \dfrac{2}{1-5x}dx = \int \dfrac{\frac{2}{-5}(-5)}{1-5x}dx$ $= -\dfrac{2}{5}\int \dfrac{-5}{1-5x}dx$ $= -\dfrac{2}{5}\ln\lvert 1-5x\rvert + C$
24	$y = \int (4x-2)dx$ $= 2x^2 - 2x + C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,3)$ إذن: $3 = 2(0)^2 - 2(0) + C$ $C = 3$ $y = 2x^2 - 2x + 3$

25	$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx$ $= 2x^2 - 0.4x^3 + C$ بما أن $R(20) = 30000$ إذن: $30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C$ $C = 54000$ $R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$
26	$v(t) = \int \cos(3t - \pi)\, dx$ $= \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$
27	$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx$ $= -4 + 10$ $= 6$
28	$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx$ $= 7 \times 4$ $= 28$
29	$\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx$ $= 3(-4) - (-11)$ $= -1$
30	$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big\|_{-2}^{3}$ $= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2)$ $= 30$

31	$\int_1^3 \frac{x^3+2x^2}{x}dx = \int_1^3 \left(\frac{x^3}{x}+\frac{2x^2}{x}\right)dx$ $= \int_1^3 (x^2+2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3+(3)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2\right)$ $= \frac{50}{3}$
32	$\int_1^5 \|3-x\|dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\|3-x\| = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_1^5 \|3-x\|dx = \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\|_3^5$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(3(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(5)^2-3(5)\right)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= 4$
33	$\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 20x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 40x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4$ $= 40\sqrt{x}\Big\|_1^4$ $= 40\sqrt{4}-40\sqrt{1}$ $= 40$

34	$\int_2^5 3x(x+2)dx = \int_2^5 (3x^2+6x)dx$ $= (x^3+3x^2)\Big\|_2^5$ $= ((5)^3+3(5)^2) - ((2)^3+3(2)^2)$ $= 180$
35	$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx$ $u = -x^2 \quad \Longrightarrow \dfrac{du}{dx} = -2x$ $\Longrightarrow dx = \dfrac{du}{-2x}$ $x = 3 \quad \Longrightarrow u = -9$ $x = 2 \quad \Longrightarrow u = -4$ $\int_2^3 2xe^{-x^2}dx = \int_{-4}^{-9} 2xe^u \times \dfrac{du}{-2x}$ $= \int_{-4}^{-9} -e^u du$ $= -e^u\Big\|_{-4}^{-9}$ $= -e^{-9} + e^{-4}$ $= -\dfrac{1}{e^9} + \dfrac{1}{e^4}$

36	$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx$ $u = x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$ $x = 2 \Rightarrow u = 9$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx = \int_1^9 \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2}$ $= \int_1^9 u^{-5}du$ $= -\frac{1}{4}u^{-4}\Big\|_1^9$ $= -\frac{1}{4u^4}\Big\|_1^9$ $= -\frac{1}{4(9)^4} + \frac{1}{4(1)^4}$ $= \frac{1640}{6561}$
37	$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{3(2x)}{x^2+1}dx$ $= 3\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= 3\ln\|x^2+1\|\Big\|_0^1$ $= 3\ln\|2\| - 3\ln\|1\|$ $= 3\ln 2$

38	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(x^2+4)dx + \int_{0}^{1}(4-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big\|_{-2}^{0} + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{1}$ $= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right) + \left(4(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right) - (0)$ $= \frac{85}{6}$
39	$v(t) = 5+e^{t-2}$ $s(t) = \int (5+e^{t-2})dt$ $= 5t+e^{t-2}+C$ $s(t) = 5t+e^{t-2}+C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$: $s(0) = 5(0)+e^{0-2}+C$ $0 = e^{-2}+C$ $C = -e^{-2}$ $C = -\frac{1}{e^2}$ $\Rightarrow s(t) = 5t+e^{t-2}-\frac{1}{e^2}$ موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من الحركة هو: $s(3) = 5(3)+e^{3-2}-\frac{1}{e^2}$ $= 15+e-\frac{1}{e^2}\ m$

40	$f(x) = \int (3x^2 + 6x - 2)dx$ $= x^3 + 3x^2 - 2x + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 6)$ إذن: $6 = (0)^3 + 3(0)^2 - 2(0) + C$ $C = 6$ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$
41	$f(x) = \int \frac{\sqrt{20}}{x^2} dx$ $= \int \sqrt{20}x^{-2} dx$ $= -\sqrt{20}x^{-1} + C$ $= -\frac{\sqrt{20}}{x} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1, 400)$ إذن: $400 = -\frac{\sqrt{20}}{1} + C$ $C = 400 + \sqrt{20}$ $f(x) = -\frac{\sqrt{20}}{x} + 400 + \sqrt{20}$
42	$f(x) = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(\frac{2}{x} + x^{-2}\right) dx$ $= 2\ln\lvert x\rvert - x^{-1} + C$ $= 2\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{x} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1, 1)$ إذن: $1 = 2\ln\lvert 1\rvert - \frac{1}{1} + C$ $C = 2$ $f(x) = 2\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{x} + 2$

43	$f(x) = \int (5e^x - 4)dx$ $= 5e^x - 4x + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, -1)$ إذن: $-1 = 5e^0 - 4(0) + C$ $C = -6$ $f(x) = 5e^x - 4x - 6$
44	$f(x) = \int x\sqrt{x^2+5}\, dx$ $u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+5}\, dx = \int xu^{\frac{1}{2}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(2, 10)$ إذن: $10 = \frac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3} + C$ $C = 1$ $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + 1$

45	$f(x) = x^2 - x - 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = -1 , x = 2$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (-1.5+1)(-1.5-2) = 1.75 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2, -1]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 1]$ العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله $A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - x - 2)dx$ $= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 + x + 2)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big\|_{-1}^{1}$ $= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$ $= \frac{31}{6}$ إذن، المساحة هي: $\frac{31}{6}$ وحدة مربعة.

46	أولًا نجد تكامل الاقتران: $C(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}} dt$ $u = t^2 + 36 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $C(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}} dt$ $= \int \frac{3t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$ $= \int \frac{3}{2} u^{-\frac{3}{2}} du$ $= -3u^{-\frac{1}{2}} + K$ $= -\frac{3}{\sqrt{u}} + K$ $= -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} + K$ بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0) = 0$ ومنه: $C(t) = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} + K$ $C(0) = -\frac{3}{\sqrt{0+36}} + K$ $0 = \frac{1}{2} + K$ $K = -\frac{1}{2}$ $C(t) = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} - \frac{1}{2}$ $C(8) = -\frac{3}{\sqrt{64+36}} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{10}$

	مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $-0.8\ mg/cm^2$
47	$f(x) = 3x^2 - 3x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$ $\Rightarrow 3x(x-1) = 0$ $\Rightarrow x = 0\ , x = 1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 1]$، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 1]$ $A = -\int_0^1 (3x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x)dx$ $= \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^1$ $= \left(-(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2\right) - \left(-(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

48	$A = -\int_{-3}^{-1}(x^2+4x+3)dx + \int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx$ $= \int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)dx + \int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right)\Big\|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right)\Big\|_{-1}^{0}$ $= \left(\frac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)+(0)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.
49	$A = \int_{0}^{1}x^3dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{1}$ $= \left(\frac{1}{4}(1)^4\right)-\left(\frac{1}{4}(0)^4\right)$ $= \frac{1}{4}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{4}$ وحدة مربعة.
50	$A = -\int_{0}^{2}-x^2dx$ $= \int_{0}^{2}x^2dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51	$A=-\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx+\int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $=\int_{-1}^{0} -xe^{x^2}dx+\int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $u=x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt}=2x$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{2x}$ $x=0 \quad \Rightarrow u=0$ $x=-1 \quad \Rightarrow u=1$ $x=2 \quad \Rightarrow u=4$ $A=\int_{1}^{0} -xe^{u}\times\frac{du}{2x}+\int_{0}^{4} xe^{u}\times\frac{du}{2x}$ $=\int_{1}^{0} -\frac{1}{2}e^{u}du+\int_{0}^{4}\frac{1}{2}e^{u}du$ $=\left(-\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\|_{1}^{0}+\left(\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\|_{0}^{4}$ $=\left(-\frac{1}{2}e^{0}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{1}\right)+\left(\frac{1}{2}e^{4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{0}\right)$ $=-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{4}$ إذن، المساحة هي: $\left(-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{4}\right)$ وحدة مربعة.

إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر الأدبي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات

الدرس الأول: التوزيع الهندسي

<table>
<tr><th colspan="2">مسألة اليوم صفحة 70</th></tr>
<tr><td></td><td>$$\begin{aligned} P(X=7) &= (0.05)(1-0.05)^{7-1} \\ &= (0.05)(0.95)^{6} \\ &\approx 0.04 \end{aligned}$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 72</th></tr>
<tr><td>a</td><td>نبحث في تحقق الشروط الأربعة:
- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة لكن عدد المرات محدد (تم رمي النرد 4 مرات) ومستقلة (رمي حجر النرد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميه في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول غير محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل، هذا الشرط غير محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو $\frac{1}{6}$ ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح غير محقق، لأن ريّان توقف بعد الرمية الرابعة بغض النظر عن النتائج التي حصل عليها في كل مرة، ولم يتوقف بعد أول نجاح.
إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.</td></tr>
<tr><td>b</td><td>نبحث في تحقق الشروط الأربعة:
- الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء قطعة النقد 4 مرات) ومستقلة (إلقاء قطعة النقد في كل مرة لا يؤثر في نتيجة رميها في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق
- الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (ظهور صورة) أو فشل (عدم ظهور صورة)، هذا الشرط محقق
- الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو $\frac{1}{2}$ ، هذا شرط محقق
- الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح محقق، لأن حنان توقفت بعد ظهور الصورة أول مرّة.
إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.</td></tr>
</table>

	أتحقق من فهمي صفحة 74
a	$P(X=2)=(0.4)(1-0.4)^{2-1}$ $=(0.4)(0.6)$ $=0.24$
b	$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=(0.4)(1-0.4)^{1-1}+(0.4)(1-0.4)^{2-1}+(0.4)(1-0.4)^{3-1}$ $=(0.4)+(0.4)(0.6)^1+(0.4)(0.6)^2$ $=0.784$
c	$P(X>4)=1-P(X\leq 4)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\right)$ $=1-\left((0.4)+(0.4)(0.6)^1+(0.4)(0.6)^2+(0.4)(0.6)^3\right)$ $=0.1296$
	أتحقق من فهمي صفحة 75
a	$P(X=10)=(0.1)(1-0.1)^{10-1}$ $=(0.1)(0.9)^9$ ≈ 0.04
b	$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left((0.1)+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2+(0.1)(0.9)^3\right)$ $=0.6561$
	أتحقق من فهمي صفحة 76
	$E(X)=\dfrac{1}{\frac{1}{6}}=6$ إذن، يُتوقّع أن يرمي ريّان حجر النرد 6 مرات حتى يظهر العدد 4 أول مرّة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 77	
1	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تجيب أسماء عن عدة أسئلة) ومستقلة (الإجابة عن سؤال بشكل صحيح أو غير صحيح لا يؤثر في صحة الإجابة عن الأسئلة الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (الإجابة بشكل صحيح)أو فشل (الإجابة بشكل غير صحيح)، هذا الشرط محقق - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.2 ، هذا شرط محقق الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو غير محقق، لأن أسماء ستتوقف بعد الإجابة عن الأسئلة جميعها. إذن، هذه التجربة العشوائية لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.
2	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم رمي كرة السلة عدة مرات) ومستقلة (إصابة الهدف أو عدمه في كل مرة لا يؤثر في نتيجة إصابته في المرات الأخرى)، إذن الشرط الأول محقق - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح (إحراز الهدف)أو فشل (عدم إحراز الهدف)، هذا الشرط محقق - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل مرة، وهو 0.3 ، هذا شرط محقق - الشرط الرابع: التوقف عند أول نجاح، وهو محقق، لأن اللاعب سيتوقف بعد إصابته الهدف لأول مرّة. إذن، هذه التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية.
3	$P(X=2)=(0.2)(1-0.2)^{2-1}$ $=(0.2)(0.8)^{1}$ ≈ 0.16

4	$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= (0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2$ ≈ 0.488
5	$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$ $= 1 - \left(P(X = 1) + P(X = 2)\right)$ $= 1 - \left((0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1\right)$ $= 0.64$
6	$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ $= (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^4$ ≈ 0.312
7	$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= (0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2$ ≈ 0.488
8	$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 3)$ $= 1 - \left(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\right)$ $= 1 - \left((0.2)(0.8)^0 + (0.2)(0.8)^1 + (0.2)(0.8)^2\right)$ $= 0.512$
9	$P(1 < X < 3) = P(X = 2)$ $= (0.2)(0.8)^1$ $= 0.16$
10	$P(4 < X \leq 6) = P(X = 5) + P(X = 6)$ $= (0.2)(0.8)^4 + (0.2)(0.8)^5$ ≈ 0.147
11	$P(X < 1) = P(X = 0) = 0$

12	$P(X=6)=\left(\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)^{6-1}$ $=\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^{5}$ $=\frac{16807}{262144}$
13	$E(X)=\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}\approx 3$
14	$E(X)=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}\approx 2$
15	$E(X)=\frac{1}{0.45}=\frac{100}{45}\approx 2$
16	$P(X=5)=(0.1)(1-0.1)^{5-1}$ $=(0.1)(0.9)^{4}$ ≈ 0.066 احتمال أن يجد مراقب الجودة أول وحدة إنارة معيبة بعد فحص 5 وحدات إنارة هو 0.066 تقريبًا
17	$P(X>4)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left((0.1)(0.9)^{0}+(0.1)(0.9)^{1}+(0.1)(0.9)^{2}\right)$ $=0.729$ احتمال أن يجد مراقب الجودة أكثر من 4 وحدات إنارة حتى إيجاد أول وحدة إنارة معيبة هو 0.729
18	$E(X)=\frac{1}{0.10}=10$ إذن، يُتوقَّع أن يفحص مراقب الجودة 10 وحدات إنارة حتى يجد أول وحدة إنارة معيبة.

19	$P(X=3)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1}$ $=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$ $=\frac{25}{216}$
20	$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$ $=1-\left(\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{0}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{1}+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)$ $=\frac{125}{216}$
21	$P(X=2)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)^{2-1}$ $=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{1}$ $=\frac{6}{25}$
22	$P(X>3)=1-P(X\leq 3)$ $=1-\frac{819}{1331}$ $=\frac{512}{1331}$
23	$P(X=1)=p(1-p)^{1-1}$ $\Rightarrow 0.2=p(1-p)^{0}$ $\Rightarrow p=0.2$ $E(X)=\frac{1}{0.2}=5$

الدرس الثاني: توزيع ذي الحدين

	مسألة اليوم صفحة 79
	$P(X=2)=\binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^3$ $=0.2048$
	أتحقق من فهمي صفحة 80
a	نبحث في تحقق الشروط الأربعة: - الشرط الأول: اشتمال التجربة على محاولات متكررة (تم إلقاء حجر النرد 20 مرة) وبما أن إلقاء أي حجر منها لا يؤثر في نتيجة إلقاء الحجر في المرات الأخرى)، فإن هذه المحاولات مستقلة. - الشرط الثاني: فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 1) أو الفشل (عدم ظهور العدد 1) - الشرط الثالث: ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$ - الشرط الرابع: وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة وهو 20 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
B	تتضمن هذه التجربة محاولات متكررة (اختيار 7 أشخاص)، وبما أن اختيار كل شخص يتأثر بنتائج اختيار الأشخاص السابقين له، فإن هذه المحاولات غير مستقلة. إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
	أتحقق من فهمي صفحة 82
a	$P(X=4)=\binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1$ $=0.00045$
b	$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5+\binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4+\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3$ $=0.99144$

c	$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$ $= 1 - 0.99144$ $= 0.00856$
	أتحقق من فهمي صفحة 83
a	$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^2$ $= 0.12$ احتمال أن تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة هو 0.12 تقريبًا.
B	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^5$ ≈ 0.8141 احتمال أن يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا هو 0.8141 تقريبًا.
	أتحقق من فهمي صفحة 84
	$E(X) = 400 \times 0.3 = 120$ إذن، يُتوقّع وجود 120 من الإناث في هذه العينة.
	أتحقق من فهمي صفحة 85
a	$E(X) = 400 \times \frac{3}{8} = 150$
b	$Var(X) = 400 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{375}{4}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 86

1	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء قطعة النقد 80 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء قطعة النقد لا تؤثر في نتيجة إلقائها في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الكتابة)، أو الفشل (عدم ظهور الكتابة). 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 80 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
2	نبحث في تحقق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية ذات الحدين: 1- اشتمال التجربة على محاولات متكررة (إلقاء حجر النرد 20 مرّة)، وبما أن نتيجة إلقاء حجر النرد لا تؤثر في نتيجة إلقائه في المحاولات اللاحقة، فإن هذه المحاولات مستقلة. 2- فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 4)، أو الفشل (عدم ظهور العدد 4). 3- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$ 4- وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة، هو 20 إذن، تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
3	بما أن عدد المحاولات في هذه التجربة غير محدد، إذن، لا تمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدين.
4	$X \sim B(17, 0.64)$
5	$P(X=2) = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8$ $= 0.302$
6	$P(X=5) = \binom{10}{5}(0.2)^5(0.8)^5$ $= 0.026$

7	$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10}+\binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9+\binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^8$ $=0.678$
8	$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=\frac{2}{9}$
9	$P(X>1)=1-P(X\le 1)$ $=1-(P(X=0)+P(X=1))$ $=1-\left(\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ $=\frac{20}{27}$
10	$P(0\le X<2)=P(X=0)+P(X=1)$ $=\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=\frac{7}{27}$
11	$P(X=7)=\binom{12}{7}(0.6)^7(0.4)^5$ $=0.227$
12	$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ $=\binom{12}{0}(0.6)^0(0.4)^{12}+\binom{12}{1}(0.6)^1(0.4)^{11}+\binom{12}{2}(0.6)^2(0.4)^{10}$ $=0.003$
13	$E(X)=5(0.1)=0.5$ $Var(X)=5(0.1)(0.9)=0.45$

14	$E(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right) = 7.5$ $Var(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 4.6875$
15	$P(X = 3) = \binom{50}{3}(0.12)^3(0.88)^{47}$ $= 0.083$
16	$E(X) = 50(0.12) = 6$
17	$Var(X) = 50(0.12)(0.88) = 5.28$
18	$E(X) = np \quad \Rightarrow 10 = n(0.04)$ $\Rightarrow n = 250$ عدد الأشخاص الذين يلزم إشراكهم في العينة العشوائية من السكان هو 250 شخصًا.
19	$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$ $= 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$ $\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$ $\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - (1-p)^3$ $\Rightarrow (1-p)^3 = 1 - \frac{215}{216}$ $\Rightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{216}$ $\Rightarrow 1 - p = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow p = 1 - \frac{1}{6}$ $\Rightarrow p = \frac{5}{6}$ $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1$ $= \frac{75}{216}$

20	$Var(X) = 100p(1-p)$ $\Rightarrow 24 = 100p(1-p)$ $\Rightarrow 24 = 100p - 100p^2$ $\Rightarrow 100p^2 - 100p + 24 = 0$ $\Rightarrow 25p^2 - 25p + 6 = 0$ $\Rightarrow (5p-3)(5p-2) = 0$ $\Rightarrow p = \frac{3}{5}$, $p = \frac{2}{5}$
21	بما أن لكل فقرة 4 علامات، وحصل رامي على العلامة 76، معناه أن رامي قد أجاب بشكل صحيح على 19 فقرة من أصل 25 فقرة في هذا الاختبار. بما أن كل فقرة لها 4 بدائل واحدة منها فقط صحيحة، إذن احتمال اختيار البديل الصحيح هو $\frac{1}{4}$ $P(X = 19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$ $= 0.00000011467$

الدرس الثالث: التوزيع الطبيعي

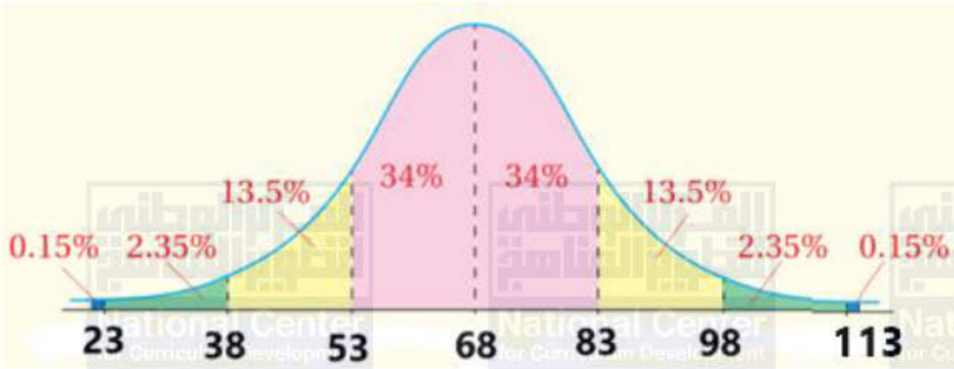
	مسألة اليوم صفحة 88
	$\mu = 18.5 \quad ,\sigma = 2.5$ $P(16 < X < 21) = P(18.5 - 2.5 < X < 18.5 + 2.5)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 0.34 + 0.34$ $= 0.68$ احتمال أن يتراوح طول الشجرة بين 16 مترًا و21 مترًا هو 68%
	أتحقق من فهمي صفحة 92
a	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50%
b	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
c	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
d	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 97.35%
	أتحقق من فهمي صفحة 94
a	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 55$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = \sqrt{121} = 11$ $P(X < 55) = P(X < \mu)$ $= 0.5$
b	$P(55 < X < 66) = P(55 < X < 55 + 11)$ $= P(\mu < X < \mu + \sigma)$ $= 0.34$

c	$P(X>77)=P(X>55+2(11))$ $=P(X>\mu+2\sigma)$ $=2.35\%+0.15\%$ $=3.5\%$ $=0.035$
	أتحقق من فهمي صفحة 95
a	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 178$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = 7$ $P(X>178)=P(X>\mu)$ $=50\%$ $=0.5$
b	$P(171<X<192)=P(178-7<X<178+2(7))$ $=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)$ $=34\%+34\%+13.5\%$ $=81.5\%$ $=0.815$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 96
1	النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي هي 50%
2	النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
3	النسبة المئوية للعلامات الذين تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
4	النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية هي 83.85%

5	$P(\mu - 3\sigma < X < \mu - \sigma) = 2.35\% + 13.5\%$ $= 15.85\%$
6	$P(\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) + P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) = 13.5\% + 13.5\%$ $= 27\%$
7	$P(\mu < X < \mu + 2\sigma) = 34\% + 13.5\%$ $= 47.5\%$
8	$P(\mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma) + P(\mu < X < \mu + \sigma) = 13.5\% + 34\%$ $= 47.5\%$
9	$A: \mu = 15 \quad , \sigma = 3$ $B: \mu = 12 \quad , \sigma = 3$
10	$\mu = 79 \quad , \sigma = \sqrt{144} = 12$ $P(X < 79) = P(X < \mu)$ $= 0.5$
11	$P(67 < X < 91) = P(79 - 12 < X < 79 + 12)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 0.34 + 0.34$ $= 0.68$
12	$P(X > 91) = P(X > 79 + 12)$ $= P(X > \mu + \sigma)$ $= 13.5\% + 2.35\% + 0.15\%$ $= 16\%$ $= 0.16$

13	$P(X > 103) = P(X > 79 + 2(12))$ $= P(X > \mu + 2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\%$ $= 2.5\%$ $= 0.025$
14	$P(43 < X < 115) = P(79 - 3(12) < X < 79 + 3(12))$ $= P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ $= 99.7\%$ $= 0.997$
15	$P(X < 43) = P(X < 79 - 3(12))$ $= P(X < \mu - 3\sigma)$ $= 0.15\%$ $= 0.0015$
16	$\mu = 30 \quad ,\sigma = \sqrt{0.4^2} = 0.4$ $P(X > 30) = P(X > \mu)$ $= 0.5$
17	$P(29.6 < X < 30.4) = P(30 - 0.4 < X < 30 + 0.4)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 34\% + 34\%$ $= 68\%$ $= 0.68$
18	$P(29.2 < X < 30) = P(30 - 2(0.4) < X < 30)$ $= P(\mu - 2\sigma < X < \mu)$ $= 34\% + 13.5\%$ $= 47.5\%$ $= 0.475$

19	$P(29.2 < X < 30.4) = P(30 - 2(0.4) < X < 30 + 0.4)$ $= P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 34\% + 13.5\% + 34\%$ $= 81.5\%$ $= 0.815$
20	$\mu = 50 \quad, \sigma = 2$ $P(X > 54) = P(X > 50 + 2(2))$ $= P(X > \mu + 2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\%$ $= 2.5\%$ $= 0.025$ احتمال أن تكون كتلة الكيس أكثر من $54\ kg$ هو0.025
21	$P(44 < X < 52) = P(50 - 3(2) < X < 50 + 2)$ $= P(\mu - 3\sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 2.35\% + 13.5\% + 34\% + 34\%$ $= 83.85\%$ $= 0.8385$ احتمال أن تتراوح كتلة الكيس بين $44\ kg$ و $52\ kg$ هو0.8385
22	إن $X \sim N(4^2, t^2)$ متغير عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 16 ، وانحرافه المعياري t
23	$P(93 < X < 107) = P(100 - 7 < X < 100 + 7)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ $= 68\%$ ومنه فإن: $\sigma^2 = (7)^2 = 49$

<table>
<tr><td>24</td><td>

نعتمد العلامات كما هي موضحة في الشكل أعلاه، حيث الوسط الحسابي 68 والانحراف المعياري 15
نبدأ بجمع النسب المئوية من أقصى يسار الشكل حتى نحصل على النسبة 16%
فنجد: $0.15\% + 2.35\% + 13.5\% = 16\%$
بما أن هذه النسبة تمثل جميع الراسبين، إذن علامة النجاح هي 53</td></tr>
</table>

الدرس الرابع: التوزيع الطبيعي المعياري

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 98</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(Z > 2.64) = 1 - P(Z < 2.64)$
$= 1 - 0.9959$
$= 0.0040$
احتمال أن تكون درجة الحرارة المسجلة في المحطة أكثر من 2.64°C هو 0.004</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 100</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$P(Z < 0.69) = 0.7549$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$P(Z < 3.05) = 0.9989$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67)$
$= 0.9525$</td></tr>
</table>

d	$P(Z > -2.88) = P(Z < 2.88)$ $= 0.9980$
أتحقق من فهمي صفحة 101	
a	$P(Z > 2.56) = 1 - P(Z < 2.56)$ $= 1 - 0.9948$ $= 0.0052$
b	$P(Z > 1.01) = 1 - P(Z < 1.01)$ $= 1 - 0.8438$ $= 0.1562$
c	$P(Z < -0.09) = 1 - P(Z < 0.09)$ $= 1 - 0.5359$ $= 0.4641$
d	$P(Z < -1.52) = 1 - P(Z < 1.52)$ $= 1 - 0.9357$ $= 0.0643$
أتحقق من فهمي صفحة 102	
a	$P(0 < Z < 0.33) = P(Z < 0.33) - P(Z < 0)$ $= 0.6293 - 0.5$ $= 0.1293$
b	$P(-1 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 1.25) - \left(1 - P(Z < 1)\right)$ $= 0.8944 - (1 - 0.8413)$ $= 0.8944 - 0.1587$ $= 0.7357$
أتحقق من فهمي صفحة 106	

a	$P(Z < a) = 0.9788$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.9788 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 2.03$ $\Rightarrow a = 2.03$
b	$P(Z < a) = 0.25$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z < a) = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.25 = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.25 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.25$ $P(Z < z) = 0.75$ $\Rightarrow z = 0.67$ $\Rightarrow a = -0.67$
c	$P(Z > a) = 0.9738$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.9738 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.9738 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.9738$ $\Rightarrow z = 1.94$ $\Rightarrow a = -1.94$

d	$P(Z > a) = 0.2$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z > a) = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2 = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8$ $\Rightarrow z = 0.84$ $\Rightarrow a = -0.84$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 107
1	$P(Z < 0.68) = 0.7517$
2	$P(Z < 1.54) = 0.9382$
3	$P(Z > 0.27) = 1 - P(Z < 0.27)$ $= 1 - 0.6064$ $= 0.3936$
4	$P(0.49 < Z < 2.9) = P(Z < 2.9) - P(Z < 0.49)$ $= 0.9981 - 0.6879$ $= 0.3102$
5	$P(-0.08 < Z < 0.8) = P(Z < 0.8) - P(Z < -0.08)$ $= P(Z < 0.8) - \left(1 - P(Z < 0.08)\right)$ $= 0.7881 - (1 - 0.5319)$ $= 0.9981 - 0.4681$ $= 0.5300$
6	$P(0 < Z < 1.07) = P(Z < 1.07) - P(Z < 0)$ $= 0.8577 - 0.5$ $= 0.3577$

7	$P(Z < -0.08) = 1 - P(Z < 0.08)$ $= 1 - 0.5319$ $= 0.4681$
8	$P(Z > -1.99) = P(Z < 1.99)$ $= 0.9767$
9	$P(-0.5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0.5))$ $= 0.5 - (1 - 0.6915)$ $= 0.5 - 0.3085$ $= 0.1915$
10	$P(Z < 0.43) = 0.6664$
11	$P(Z > 3.08) = 1 - P(Z < 3.08)$ $= 1 - 0.9990$ $= 0.0010$
12	$P(Z < -2.03) = 1 - P(Z < 2.03)$ $= 1 - 0.9788$ $= 0.0212$
13	$P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2)$ $= 1 - 0.9861$ $= 0.0139$
14	$P(-0.72 < Z < 3.26) = P(Z < 3.26) - P(Z < -0.72)$ $= P(Z < 3.26) - (1 - P(Z < 0.72))$ $= 0.9994 - (1 - 0.7642)$ $= 0.9994 - 0.2358$ $= 0.7636$

15	$P(1.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$ $= 0.9938 - 0.9332$ $= 0.0606$
16	$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$
17	$P(-2.25 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -2.25)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2.25))$ $= 0.5 - (1 - 0.9878)$ $= 0.5000 - 0.0122$ $= 0.4878$
18	$P(Z < a) = 0.7642$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.7642 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 0.72$ $\Rightarrow a = 0.72$

19	$P(Z < a) = 0.13$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z < a) = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.13 = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.13 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.13$ $P(Z < z) = 0.87$ $\Rightarrow z = 1.12$ $\Rightarrow a = -1.12$
20	$P(Z > a) = 0.8531$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.8531 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.8531 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.8531$ $\Rightarrow z = 1.05$ $\Rightarrow a = -1.05$

21	$P(Z > a) = 0.372$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z > a) = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.372 = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.372 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.372$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.628$ $\Rightarrow z = 0.32$ $\Rightarrow a = -0.32$
22	$Z \sim N(0, 1)$
23	$P(-a < Z < a) = P(Z < a) - P(Z < -a)$ $= P(Z < a) - (1 - P(Z < a))$ $= P(Z < a) - 1 + P(Z < a)$ $= 2P(Z < a) - 1$
24	$P(0 < Z < a) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < 0) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - 0.5 = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) = 0.95$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.95 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow a = 1.64$

25	$P(-a < Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - 1 + P(Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) - 1 = 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) = 1.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) = 0.5636$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a موجبة، وأنه يمكن استبدال القيمة z بها $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.5636 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 0.16$ $\Rightarrow a = 0.16$

الدرس الخامس: احتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

	مسألة اليوم صفحة 108
	$X \sim N(127, 16^2)$ $P(X < 123) = P\left(Z < \frac{123-127}{16}\right)$ $= P(Z < -0.25)$ $= 1 - P(Z < 0.25)$ $= 1 - 0.5987$ $= 0.4013$ احتمال أن يكون ضغط دمه الانقباضي أقل من $123\ mmHg$ هو 0.4013
	أتحقق من فهمي صفحة 109
a	$z = \frac{24-15}{4}$ $= 2.25$
b	$z = \frac{10-15}{4}$ $= -1.25$
	أتحقق من فهمي صفحة 110
a	$X \sim N(7, 0.5^2)$ $P(X < 7.7) = P\left(Z < \frac{7.7-7}{0.5}\right)$ $= P(Z < 1.4)$ $= 0.9192$
b	$P(X > 6.1) = P\left(Z > \frac{6.1-7}{0.5}\right)$ $= P(Z > -1.8)$ $= P(Z < 1.8)$ $= 0.9641$

c	$P(6 < X < 7.1) = P\left(\frac{6-7}{0.5} < Z < \frac{7.1-7}{0.5}\right)$ $= P(-2 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -2)$ $= P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 2))$ $= 0.5793 - (1 - 0.9772)$ $= 0.5793 - 0.0228$ $= 0.5565$
أتحقق من فهمي صفحة 112	
a	$X \sim N(90, 5^2)$ $P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{5}\right)$ $= P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ نسبة ثمار البندورة التي تقل كتلة كل منها عن $80\ g$ هي 0.0228
b	$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-90}{5}\right)$ $= P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ نسبة ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن $100\ g$ هي 0.0228 $n = 200 \times 0.0228 = 4.56 \approx 5$ عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن $100\ g$ هو 5 حبات تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 112	
1	$z = \dfrac{239 - 224}{6}$ $= 2.5$
2	$z = \dfrac{200 - 224}{6}$ $= -4$
3	$z = \dfrac{224 - 224}{6}$ $= 0$
4	$X \sim N(30, 10^2)$ $P(X < 35) = P\left(Z < \dfrac{35 - 30}{10}\right)$ $= P(Z < 0.5)$ $= 0.6915$
5	$P(X > 38) = P\left(Z > \dfrac{38 - 30}{10}\right)$ $= P(Z > 0.8)$ $= 1 - P(Z < 0.8)$ $= 1 - 0.7881$ $= 0.2119$
6	$P(35 < X < 40) = P\left(\dfrac{35 - 30}{10} < Z < \dfrac{40 - 30}{10}\right)$ $= P(0.5 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$ $= 0.8413 - (1 - 0.6915)$ $= 0.5793 - 0.3085$ $= 0.2708$

7	$P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20-30}{10}\right)$ $= P(Z < -1)$ $= 1 - P(Z < 1)$ $= 1 - 0.8413$ $= 0.1587$
8	$P(15 < X < 32) = P\left(\frac{15-30}{10} < Z < \frac{32-30}{10}\right)$ $= P(-1.5 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5)$ $= P(Z < 0.2) - \left(1 - P(Z < 1.5)\right)$ $= 0.5793 - (1 - 0.9332)$ $= 0.5793 - 0.0668$ $= 0.5125$
9	$P(17 < X < 19) = P\left(\frac{17-30}{10} < Z < \frac{19-30}{10}\right)$ $= P(-1.3 < Z < -1.1)$ $= P(Z < -1.1) - P(Z < -1.3)$ $= 1 - P(Z < 1.1) - \left(1 - P(Z < 1.3)\right)$ $= 1 - 0.8643 - (1 - 0.9032)$ $= 0.1357 - 0.0968$ $= 0.0389$
10	$X \sim N(154, 12^2)$ $P(X < 154) = P\left(Z < \frac{154-154}{12}\right)$ $= P(Z < 0)$ $= 0.5$

11	$P(X>160)=P\left(Z>\frac{160-154}{12}\right)$ $=P(Z>0.5)$ $=1-P(Z<0.5)$ $=1-0.6915$ $=0.3085$
12	$P(140<X<155)=P\left(\frac{140-154}{12}<Z<\frac{155-154}{12}\right)$ $=P(-1.17<Z<0.08)$ $=P(Z<0.08)-P(Z<-1.17)$ $=P(Z<0.08)-(1-P(Z<1.17))$ $=0.5319-(1-0.8790)$ $=0.1357-0.1210$ $=0.0147$
13	$X\sim N(78,5^2)$ $P(X<70)=P\left(Z<\frac{70-78}{5}\right)$ $=P(Z<-1.6)$ $=1-P(Z<1.6)$ $=1-0.9452$ $=0.0548$ نسبة الأشخاص الذين يقل محيط الخصر لكل منهم عن $70\ cm$ هي 0.0548

14	$P(70 < X < 80) = P\left(\frac{70-78}{5} < Z < \frac{80-78}{5}\right)$ $= P(-1.6 < Z < 0.4)$ $= P(Z < 0.4) - P(Z < -1.6)$ $= P(Z < 0.4) - (1 - P(Z < 1.6))$ $= 0.6554 - (1 - 0.9452)$ $= 0.6554 - 0.0548$ $= 0.6006$ نسبة الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكل منهم بين $70\ cm$ و $80\ cm$ هي 0.6006 $n = 1200 \times 0.6006 = 720.72 \approx 721$ عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكل منهم بين $70\ cm$ و $80\ cm$ هو 721 شخصًا.
15	$X \sim N(25, 1.5^2)$ $P(X > 28) = P\left(Z > \frac{28-25}{1.5}\right)$ $= P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 28 ساعة هو 0.0228
16	$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-25}{1.5}\right)$ $= P(Z > -3.33)$ $= 1 - P(Z < 3.33)$ $= 1 - 0.9996$ $= 0.0004$ احتمال أن يكون عمر البطارية أكثر من 20 ساعة هو 0.0004

17	$P(22 < X < 25) = P\left(\frac{22-25}{1.5} < Z < \frac{25-25}{1.5}\right)$ $= P(-2 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -2)$ $= P(Z < 0) - \left(1 - P(Z < 2)\right)$ $= 0.5 - (1 - 0.9772)$ $= 0.5000 - 0.0228$ $= 0.4772$ احتمال أن يتراوح عمر البطارية بين 22 ساعة و25 ساعة هو 0.4772
18	$X \sim N(68.5, 5^2)$ $P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70 - 68.5}{5}\right)$ $= P(Z > 0.3)$ $= 1 - P(Z < 0.3)$ $= 1 - 0.6179$ $= 0.3821$ $n = 1300 \times 0.3821 = 496.73 \approx 497$ العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم هو 497 سيارة.

19	$P(75 < X < 85) = P\left(\frac{75-68.5}{5} < Z < \frac{85-68.5}{5}\right)$ $= P(1.3 < Z < 3.3)$ $= P(Z < 3.3) - P(Z < 1.3)$ $= 0.9995 - 0.9032$ $= 0.0963$ $n = 1300 \times 0.0963 = 125.19 \approx 125$ عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الأولى في هذا اليوم هو 125 مخالفة تقريبًا. $P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-68.5}{5}\right)$ $= P(Z > 3.3)$ $= 1 - P(Z < 3.3)$ $= 1 - 0.9995$ $= 0.0005$ $n = 1300 \times 0.0005 = 0.65 \approx 1$ عدد المخالفات التي سجلت من الدرجة الثانية في هذا اليوم هو مخالفة واحدة تقريبًا.
20	$3.2 = \frac{14-\mu}{\sigma} \Rightarrow 3.2\sigma = 14 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $-1.8 = \frac{-6-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1.8\sigma = -6 - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ بضرب المعادلة (2) بسالب واحد، تنتج لدينا المعادلة: $1.8\sigma = 6 + \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$ بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفًا إلى طرف، نحصل على: $5\sigma = 20 \Rightarrow \sigma = 4$ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على: $1.8(4) = 6 + \mu \Rightarrow \mu = 1.2$ إذن، الوسط الحسابي هو 1.2 ، والانحراف المعياري هو 4

21	نفرض a هو المعدل المطلوب. نفرض p هو احتمال أن يكرم الطالب، أي احتمال أن يحصل على معدل أعلى من a أو يساويه. $n = 600 \times p = 50 \quad \Rightarrow p = \frac{50}{600} \approx 0.0833$ إذن، احتمال أن يتم تكريم الطالب (أي أن يحصل على معدل يفوق a أو يساويه) هو 0.0833 $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-73}{8}\right)$ $= 1 - P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$ $\Rightarrow 0.0833 = 1 - P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right)$ $\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 1 - 0.0833$ $\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-73}{8}\right) = 0.9167$ $\Rightarrow \frac{a-73}{8} = 1.38$ $\Rightarrow a - 73 = 11.04$ $\Rightarrow a = 84.04$ إذن، أقل معدل للطلبة الخمسين هو 84.04

اختبار نهاية الوحدة الخامسة

1	$X \sim B(4, 0.4)$ $P(X = 3) = \binom{4}{3}(0.4)^3(0.6)^1 = 0.1536 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
2	$E(X) = np$ $\Rightarrow 60 = 320p$ $\Rightarrow p = \frac{60}{320} = \frac{3}{16} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
3	$X \sim B(8, 0.1)$ $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $= \binom{8}{0}(0.1)^0(0.9)^8 + \binom{8}{1}(0.1)^1(0.9)^7 = 0.8131 \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$
4	$X \sim B(n, p)$ $E(X) = 8 \Rightarrow np = 8$ $Var(X) = np(1-p) \Rightarrow np(1-p) = \frac{20}{3}$ بتعويض قيمة np في المعادلة الثانية، نحصل على: $8(1-p) = \frac{20}{3} \Rightarrow 1 - p = \frac{5}{6}$ $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$ $np = 8 \Rightarrow n\left(\frac{1}{6}\right) = 8 \Rightarrow n = 48 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$
5	$99.7\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
6	$P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80 - 83}{4}\right)$ $= P(Z < -0.75)$ $= 1 - P(Z < 0.75)$ $= 1 - 0.7734$ $= 0.2266$ $n = 2000 \times 0.2266 = 453.2 \approx 453$ عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 80 هو 453 تقريبًا.................................(a)

7	$X \sim Geo(0.3)$ $P(X=4) = (0.3)(0.7)^3$ $= 0.1029$
8	$P(3 < X \leq 5) = P(X=4) + P(X=5)$ $= (0.3)(0.7)^3 + (0.3)(0.7)^4$ $= 0.17493$
9	$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$ $= 1 - \left(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right)$ $= 1 - \left((0.3)(0.7)^0 + (0.3)(0.7)^1 + (0.3)(0.7)^2 + (0.3)(0.7)^3\right)$ $= 0.2401$
10	$E(X) = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$
11	$X \sim B(6, 0.3)$ $P(X=2) = \binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4 = 0.324135$
12	$P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6)$ $= \binom{6}{5}(0.3)^5(0.7)^1 + \binom{6}{6}(0.3)^6(0.7)^2$ $= 0.01056321$
13	$P(2 \leq X < 3) = P(X=2)$ $= \binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4$ $= 0.324135$
14	$E(X) = 6(0.3) = 1.8$
15	$P(Z < 1.93) = 0.9732$
16	$P(Z < 0.72) = 0.7642$
17	$P(Z > -1.04) = P(Z < 1.04) = 0.8508$

18	$P(-1.7 < Z < 3.3) = P(Z < 3.3) - P(Z < -1.7)$ $= P(Z < 3.3) - (1 - P(Z < 1.7))$ $= 0.9995 - (1 - 0.9554)$ $= 0.9995 - 0.0446$ $= 0.9549$
19	$X \sim N(55, 4^2)$ $P(X \le 50) = P\left(Z \le \frac{50-55}{4}\right)$ $= P(Z \le -1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25)$ $= 1 - 0.8944$ $= 0.1056$
20	$P(50 < X < 58) = P\left(\frac{50-55}{4} < Z < \frac{58-55}{4}\right)$ $= P(-1.25 < Z < 0.75)$ $= P(Z < 0.75) - P(Z < -1.25)$ $= P(Z < 0.75) - (1 - P(Z < 1.25))$ $= 0.7734 - (1 - 0.8944)$ $= 0.7734 - 0.1056$ $= 0.6678$
21	$P(56 < X < 59) = P\left(\frac{56-55}{4} < Z < \frac{59-55}{4}\right)$ $= P(0.25 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.25)$ $= 0.8413 - 0.5987$ $= 0.2426$

22	$P(X>55)=P\left(Z>\frac{55-55}{4}\right)$ $=P(Z>0)$ $=1-P(Z\le 0)$ $=1-0.5$ $=0.5$
23	$P(0<Z<1.5)=P(Z<1.5)-P(Z<0)$ $=0.9332-0.5$ $=0.4332$
24	$P(0.1<Z<0.31)=P(Z<0.31)-P(Z<0.1)$ $=0.6217-0.5398$ $=0.0819$
25	$X\sim B(100,0.17)$ $E(X)=100(0.17)=17$ العدد المتوقع من المصابيح التالفة هو 17 مصباحًا.
26	$X\sim Geo(0.1)$ $P(X>5)=1-P(X\le 5)$ $=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\big)$ $=1-\big((0.1)(0.9)^0+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2+(0.1)(0.9)^3+(0.1)(0.9)^4\big)$ $=0.59049$
27	$P(X>3)=1-P(X\le 3)$ $=1-\big(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big)$ $=1-\left((0.1)(0.9)^0+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2\right)$ $=0.729$
28	$P(Z<a)=0.638\Rightarrow z=0.35$

29	$P(Z > a) = 0.6$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة a سالبة، وأنه يمكن استبدال القيمة $-z$ بها $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.6 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.6 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.6$ $\Rightarrow z = 0.25$ $\Rightarrow a = -0.25$
30	$X \sim N(250, 4^2)$ $P(X > 260) = P\left(Z > \frac{260-250}{4}\right)$ $= P(Z > 2.5)$ $= 1 - P(Z < 2.5)$ $= 1 - 0.9938$ $= 0.0062$
31	$P(240 < X < 250) = P\left(\frac{240-250}{4} < Z < \frac{250-250}{4}\right)$ $= P(-2.5 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -2.5)$ $= P(Z < 0) - \left(1 - P(Z < 2.5)\right)$ $= 0.5 - (1 - 0.9938)$ $= 0.5 - 0.0062$ $= 0.4938$
32	$X \sim B(20, 0.3)$ $P(X = 4) = \binom{20}{4}(0.3)^4(0.7)^{16} = 0.1304$

33	$P(X \geq 2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right)$ $= 1 - \left(\binom{20}{0}(0.3)^0(0.7)^{20} + \binom{20}{1}(0.3)^1(0.7)^{19}\right)$ $= 0.9924$
34	$X \sim N(506, 3^2)$ $0.5\ L = 500\ mL$ $P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-506}{3}\right)$ $= P(Z < -2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772$ $= 0.0228$ $n = 100 \times 0.0228 = 2.28 \approx 2$ عدد القوارير التي تحوي كل منها زيتًا أقل من نصف لتر هو 2 تقريبًا.