تطبيقات التفاضل

حلول أسئلة الوحدة الثانية للفرع العلمي

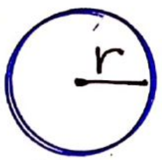
الدرس الاول

تحقق من فهمي

①

أتحقَّق من فهمي

تنفخ ماجدة بالونًا على شـــكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر $6\ cm$.



حجم V

نصف قطر r

المعدل المعطى $\frac{dV}{dt} = 80\ cm^3/s$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=6}$

العلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ((الحجم))

اشتق $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

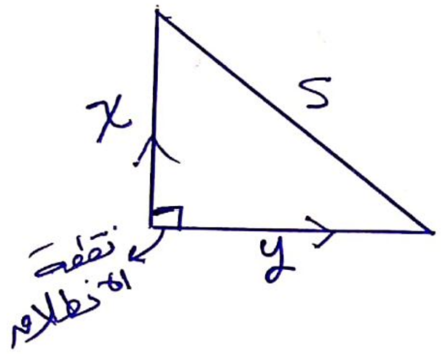
عوض $80 = 4\pi (6)^2 \frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{80}{144\pi} = \frac{5}{9\pi}\ cm/s$$

2

أتحقَّق من فهمي

تحرَّكت السـيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشـمال بسرعة 45 km/h، واتَّجَهت السـيّارة B نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.



المعدل المعطى

$$\frac{dx}{dt} = 45\ km/h$$

$$\frac{dy}{dt} = 40\ km/h$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2h}$$

العلاقة

$$s = \sqrt{x^2+y^2}$$

المشتقة

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

x و y تمثل مسافة

المسافة = السرعة × الزمن

$$x = (45)(2) = 90$$

$$y = (40)(2) = 80$$

نحتاج الى x و y ←

نعوض

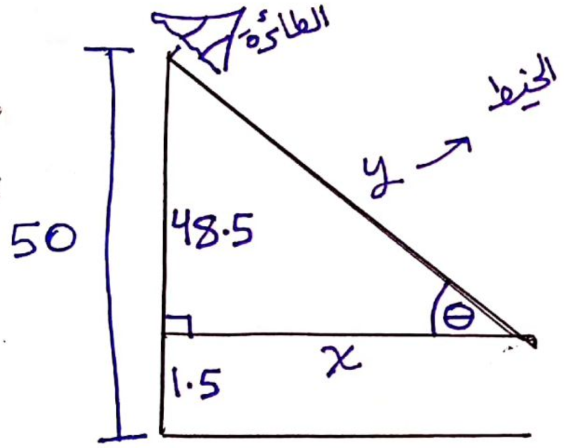
$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2)(90)(45) + (2)(80)(40)}{2\sqrt{(90)^2+(80)^2}}$$

$$= \frac{14500}{2\sqrt{14500}} = \frac{725}{\sqrt{145}}\ km/h$$

3

أتحقّق من فهمي

أمســك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تُحلِّق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط والمســتوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علمًا بأنَّ ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m



المعدل المعطى

$$\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=100}$$

العلاقة

$$\tan\theta = \frac{48.5}{x}$$

اشتق

$$\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{-48.5}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

نحتاج $\sec^2\theta$ و x^2

$\sec\theta = \frac{y}{x}$ الوتر / المجاور

$$\sec^2\theta = \frac{y^2}{x^2} = \frac{(100)^2}{x^2}$$ عوض

ملاحظة: لم يتم حساب x^2 لأننا نستطيع حذفها عند التعويض

عوض

$$\frac{(100)^2}{\cancel{x^2}}\frac{d\theta}{dt} = \frac{(-48.5)}{\cancel{x^2}}(2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(-48.5)(2)}{(100)^2}$$

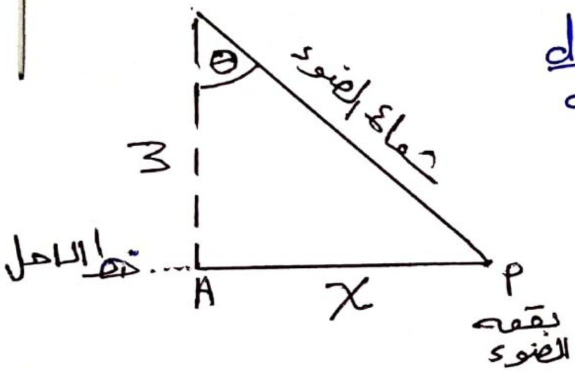
$$= \frac{-97}{10000}$$

$$= -0.0097\ rad/s$$

أتحقَّق من فهمي

4

أُنشِــئت منارة على جزيرة صغيرة، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة 3 km عن أقرب نقطة على ســاحل مســتقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 4 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 1 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.



المعدل المعطى

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = \frac{8\pi}{1} = 8\pi \text{ rad/min}$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}$$

العلاقة

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$

اشتق

$$\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

نحتاج الى $\sec^2\theta$ ←

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$ عوض $x=1$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$= \frac{1}{9} + 1$$

$$= \frac{10}{9}$$

عوض:

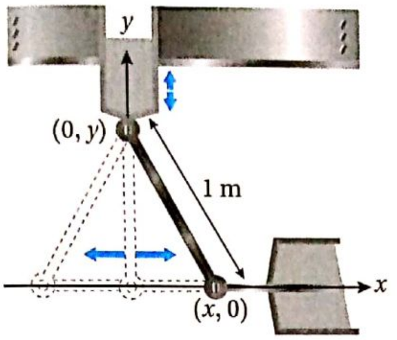
$$(8\pi)\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{80\pi}{9}\right)(3)$$

$$= \frac{80\pi}{3} \text{ Km/min}$$

5

أتحقّق من فهمي

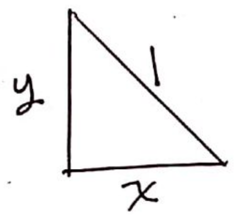


هندسة ميكانيكية: يُبيِّن الشكل المجاور ذراعًا معدنيةً مُتحرِّكةً طولها 1 m، وإحداثيات نهايتيها $(x, 0)$ و $(0, y)$. ويُمثِّل الاقتران: $x(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x، حيث t الزمن بالثواني:

a) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع.

b) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$.

a) يصل الطرف العلوي للذراع الى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسياً وتكون النقطة المطلوبة هي $(0,1)$



المعدل المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

العلاقة $x^2+y^2=1$ "فيثاغورس"

$y^2=1-x^2$

$y=\sqrt{1-x^2}$ نشتق

$\frac{dy}{dt}=\frac{-\cancel{2}x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{-x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$

نحتاج $\frac{dx}{dt}$

(معطى) $x=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$

نحتاج الى t :-

$x=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ نعوض $x=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$

$\sin\frac{\pi t}{6}=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi t}{6}=\frac{\pi}{6}\longrightarrow t=1$

$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

نعوض

$\frac{dy}{dt}=\frac{\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}=\frac{-\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$

$=\frac{-\pi\sqrt{5}}{120}\ m/s$

(6)

أتحقَّق من فهمي

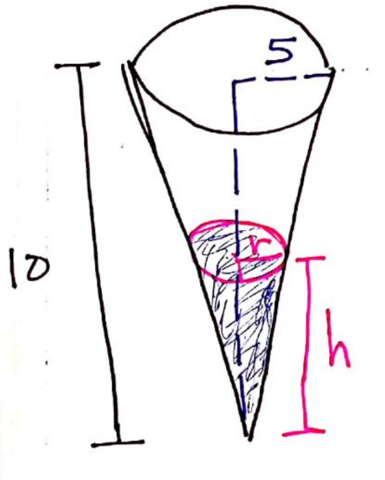
خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه $10\ m$، ونصف قُطْر قاعدته $5\ m$. صُبَّ الماء في الخزّان بمُعدَّل $\pi\ m^3/min$. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه $8\ m$؟

المعدل المعطى $\frac{dV}{dt} = \pi\ m^3/min$ حيث V حجم الماء

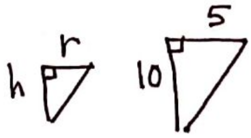
المعدل المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}$

العلاقة $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ حيث V حجم الماء

نتخلص من r لعدم اعطاء متغيرها



تشابه المثلثات



$\frac{10}{h} = \frac{5}{r}$

$10r = 5h$

$r = \frac{h}{2}$

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$

نشتق

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$

نعوض

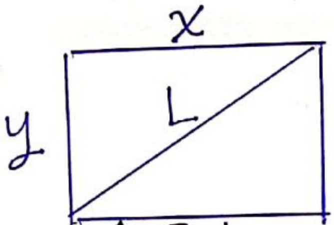
$\pi = \frac{1}{4}\pi(64)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}\ m/min$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 2 cm/s، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدَّل 3 cm/s، بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل 20 cm، وطول الضلع الثاني 50 cm:

1. ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟
2. ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟
3. ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطر المستطيل في تلك اللحظة؟
4. أيُّ الكمّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي.



A: مساحة
C: محيط

المعدلات المعطاة

$$\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\ cm/s$$

١) المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20,\ y=50}$$

العلاقة

$$A = xy$$

اشتق عوض

$$\frac{dA}{dt} = (x)\frac{dy}{dt} + (y)\frac{dx}{dt}$$

$$= (20)(-3) + (50)(2) = 40\ cm^2/s$$

٢) المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{x=20,\ y=50}$$

العلاقة

$$C = 2x + 2y$$

اشتق

$$\frac{dc}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

عوض

$$= (2)(2) + (2)(-3)$$

$$= -2\ cm/s$$

٣) المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dt}{dt}\right|_{x=20,\ y=50}$$

العلاقة

$$L = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اشتق

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt} + \cancel{2}y\frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

عوض

$$= \frac{(20)(2) + (50)(-3)}{\sqrt{400 + 2500}} = \frac{-110}{\sqrt{2900}} = \frac{-11}{\sqrt{29}}\ cm/s$$

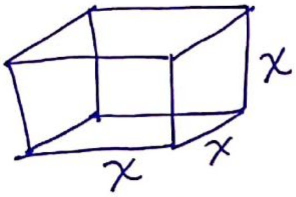
٤) في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة لأن معدل تغيرها موجب بينما تتناقص كل من المحيط وطول القطر لأن معدل تغير كل منهما سالب

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

5 أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.

6 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

5) المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$



المعدل المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=4}$

العلاقة $V = x^3$

اشتق $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

نحتاج الى x

نريد ان نعرف طول ضلع المكعب كم يصبح بعد مرور 4 ثوان

$x = 10 + \underbrace{(6(4))}_{\text{سرعة}\times\text{زمن}}$

$= 34\ cm$

طول ضلع المكعب مع مرور الزمن

$x = 10 + 6t$

نعوض $\frac{dV}{dt} = 3(34)^2(6)$

$= 20808\ cm^3/s$

---

6) المعدل المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=6}$ حيث A مساحة السطح ((الكلية))

العلاقة $A = 6x^2$

اشتق $\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$

$x = 10 + (6(6))$
$= 46$

عوض $= 12(46)(6)$
$= 3312\ cm^2/s$

تدريب 1) مكعب من الجليد يذوب بمعدل $8\ cm^3/s$ جد معدل تناقص مساحة سطحه عندما يكون طول ضلعه $5\ cm$

$\frac{-32}{5}$

2) مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول ضلعه بمعدل $0.01\ cm/s$ وحجمه بمعدل $12\ cm^3/s$ جد معدل تغير مساحته الكلية

2.4

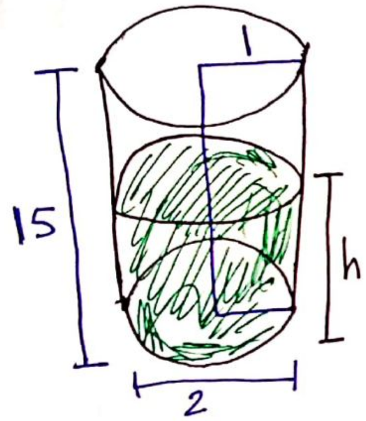
وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:

7 أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أيِّ لحظة.

8 أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود عند أيِّ لحظة.

ملاحظة

نصف قطر خزان الوقود لا تتغير مع مرور الزمن في حين الارتفاع والحجم تتغير



المعدل المعطى

$$\frac{dV}{dt} = 500 \text{ L/min}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$$

7 المعدل المطلوب

$$\frac{dh}{dt}$$

العلاقة

$$V = \pi r^2 h$$ "حجم الوقود"

نوحد وحدات القياس حيث الحجم باللتر والابعاد بالمتر
$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

عوض $r=1$
اشتق

$$V = \pi h$$
$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$
$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \text{ m/min} = \frac{1}{2\pi} \text{ m/min}$$

8 المعدل المطلوب $\frac{dA}{dt}$ حيث A المساحة الجانبية

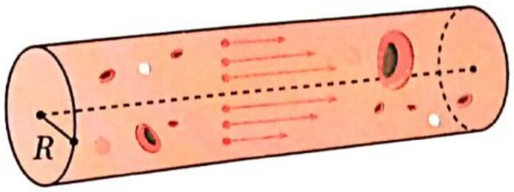
العلاقة

$$A = 2\pi r h$$
$$A = 2\pi h$$

عوض $r=1$
اشتق

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$
$$= (2\pi)\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$
$$= 1 \text{ m}^2/\text{min}$$

9 طب: تُمثِّل المعادلة:



$$V = \frac{3125}{6}\left(R^2 - (0.0005)^2\right)$$

سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالملّيمتر لكل ثانية، حيث R طول نصف قُطْر الوعاء بالملّيمتر. إذا كان الوعاء ينقبض بحيث ينقص نصف قطره بمُعدَّل 0.0002 mm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قُطْره 0.075 mm

المعدل المعطى $\frac{dR}{dt} = -0.0002 \text{ mm/s}$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{R=0.075}$

العلاقة $V = \frac{3125}{6}\left(R^2 - (0.005)^2\right)$ جاهزه في السؤال

اشتق $\frac{dV}{dt} = \frac{3125}{6}\left(2R\frac{dR}{dt}\right)$

عوض $= \frac{3125}{6}\left(2(0.075)(-0.0002)\right)$

$= -0.0156 \text{ mm/s}$

10 علوم: يُمثِّل الاقتران: $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعْد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدَّل 2 m/s، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعْد 5 m من النار.

$$\frac{dx}{dt} = 2\,m/s$$ المعدل المعطى

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5}$$ المعدل المطلوب

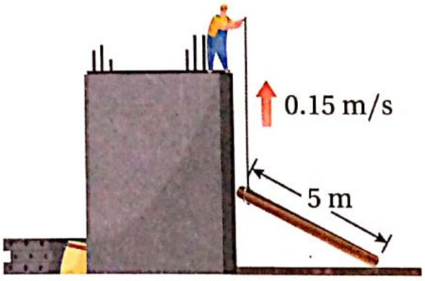
$$T = \frac{200}{1+x^2}$$ العلاقة

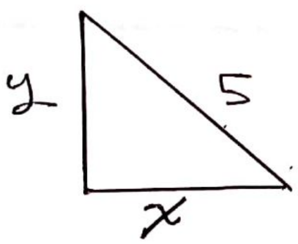
$$\frac{dT}{dt} = \frac{-200\left(2x\frac{dx}{dt}\right)}{(1+x^2)^2}$$ اشتق

عوض

$$= \frac{-200(2(5)(2))}{(1+25)^2} = -5.9\,m/s$$

11 بناء: يســحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشــاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبــل رُبِط به أحد طرفــي اللوح كما في الشــكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل 0.15 m/s، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًــا للجدار، فما ســرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكــون على بُعْد 3 m من جدار المبنى؟





المعدل المعطى $\frac{dy}{dt}=0.15$ m/s

المعدل المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$

العلاقة $x^2+y^2=25$ فيثاغورس

$x^2=25-y^2$

$x=\sqrt{25-y^2}$ نشتق

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{25-y^2}}$$

نحتاج الى y

$x^2+y^2=25$

نعوض $x=3$

$9+y^2=25$

$y^2=16$

$y=4$

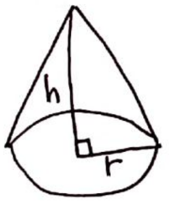
نعوض $\frac{dx}{dt}=\frac{-\cancel{2}(4)(0.15)}{\cancel{2}\sqrt{25-16}}$

$=\frac{-0.6}{3}=-0.2$ m/s

آلات: يســـقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ m^3/min$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 سرعة تغيُّر ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

13 سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.



$\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$ المعدل المعطى

12 المعدل المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$

العلاقة $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

نتخلص من r ← معطى

$h = \frac{3}{8}(2r)$

$h = \frac{3}{4}r$

$r = \frac{4h}{3}$

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4h}{3}\right)^2 h$

اشتق $V = \frac{16\pi}{27}h^3$

عوض $\frac{dV}{dt} = \left(\frac{16\pi}{27}\right)(3h^2)\frac{dh}{dt}$

$10 = \frac{16\pi}{27}(3)(16)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{90}{256\pi} = \frac{45}{128\pi}\ m/min$

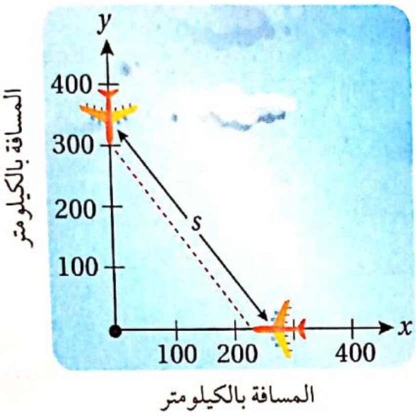
13 المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4}$

العلاقة $r = \frac{4h}{3}$

اشتق $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$

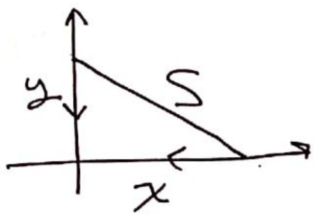
$= \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{45}{128\pi}\right) = \frac{15}{32\pi}\ m/min$

طيران: رصد مُراقِب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت إحدى الطائرتين تبعد مسافة 225 km عن النقطة، وتسير بسرعة 450 km/h، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة 300 km عن النقطة، وتسير بسرعة 600 km/h:



14 أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

15 هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.



المعدلت المعطاه

$$\frac{dx}{dt} = -450 \text{ km/h}$$

$$\frac{dy}{dt} = -600 \text{ km/h}$$

(14) المعدل المطلوب

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{\substack{x=225 \\ y=300}}$$

العلاقة

$$S = \sqrt{x^2+y^2}$$

فيثاغورس

اشتق وعوض

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt} + \cancel{2}y\frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{(225)(-450)+(300)(-600)}{\sqrt{(225)^2+(300)^2}}$$

$$= -750 \text{ km/s}$$

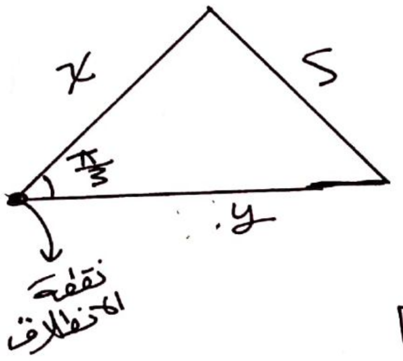
(15) لنجد زمن وصول الطائرتين لنقطة الالتقاء

الاولى $t_1 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{225}{450} = \frac{1}{2} h$

الثانية $t_2 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2} h$

الطائرتان ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد $\frac{1}{2}$ ساعة ما يعني اصطدامهما متوقع لذا يجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار احداهما أو في سرعتهما

16 **درّاجات نارية:** تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad . إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.



المعدل المعطى

$$\frac{dx}{dt} = 15\ Km/h$$

$$\frac{dy}{dt} = 20\ Km/h$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2}$$

العلاقة

$\boxed{\text{قانون جيوب التمام}}$

$$S^2 = x^2 + y^2 - \cancel{2}(x)(y)\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}$$

اشتق

$$S = \sqrt{x^2+y^2-xy}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}}$$

نحتاج الى x و y

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (15)(2) \\ &= 30 \\ y &= (20)(2) \\ &= 40 \end{aligned}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2)(30)(15) + (2)(40)(20) - (30)(20) - (40)(15)}{2\sqrt{(30)^2+(40)^2-(30)(40)}}$$

$$= 5\sqrt{13}\ km/s$$

حل آخر

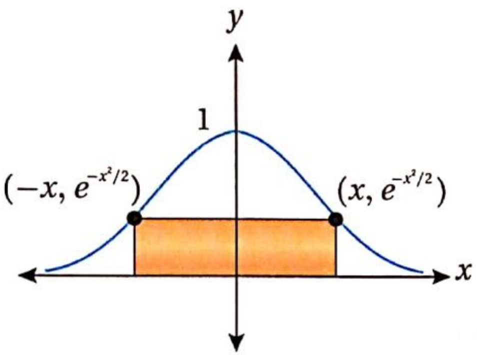
اذا انطلقا في نفس الوقت مع اعطاء الزمن في نهاية السؤال يفضل التحويل x و y بدلالة t

$$x = 15t$$
$$y = 20t$$

وتصبح العلاقة

$$S^2 = (15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\cos\frac{\pi}{3}$$

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان x يتغيَّر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



17 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

18 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$ cm، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

(17) $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(18) المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = 4$ cm/min

المعدل المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}$ حيث A المساحة

العلاقة $A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

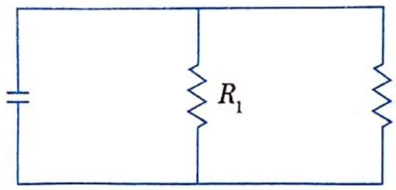
اشتق

$$\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-\frac{2x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$

عوض

$$= (8)(-4e^{-8})(4) + (e^{-8})(2)(4)$$

$$= -128e^{-8} + 8e^{-8} = -120e^{-8} = \frac{-120}{e^8} \text{ cm}^3/\text{min}$$



19 كهرباء: تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمُعدَّل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $R_1 = 80\ \Omega$، و $R_2 = 100\ \Omega$.

المعدلات المعطاة

$$\frac{dR_1}{dt} = 0.3$$

$$\frac{dR_2}{dt} = 0.2$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{\substack{R_1 = 80 \\ R_2 = 100}}$$

العلاقة

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$ ((معطى))

اشتق

$$\frac{-\frac{dR}{dt}}{R^2} = \frac{-\frac{dR_1}{dt}}{(R_1)^2} + \frac{-\frac{dR_2}{dt}}{(R_2)^2}$$

نحتاج الى R

عوض

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{80} + \frac{1}{100} = \frac{18}{800} \\ R &= \frac{800}{18} = \frac{400}{9} \end{aligned}}$$

$$\frac{-\frac{dR}{dt}}{\left(\frac{400}{9}\right)^2} = \frac{-0.3}{(80)^2} + \frac{-0.2}{(100)^2}$$

$$\frac{dR}{dt} \simeq 0.13\ \Omega/s$$

20 قوارب: يســحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باســتعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبــل الســحب بســرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

المعدل المعطى $\frac{ds}{dt} = -1 \, m/s$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}$

العلاقة $x^2 + 1 = s^2$

$x^2 = s^2 - 1$

اشتق $x = \sqrt{s^2 - 1}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{2}s \frac{ds}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{s^2-1}}$$

نحتاج s

$x^2 + 1 = s^2$

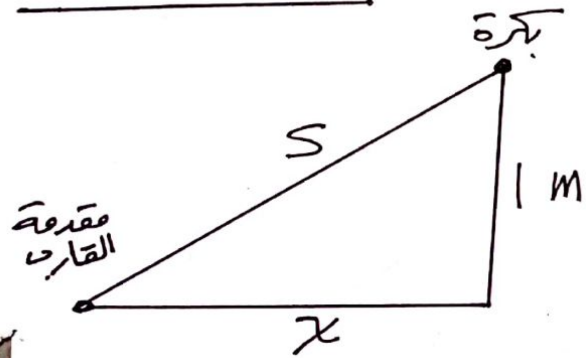
عوض $x = 8$

$64 + 1 = s^2$

$s = \sqrt{65}$

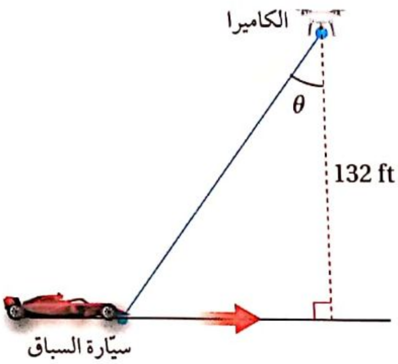
عوض

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{65}}{\sqrt{65-1}} = -\frac{\sqrt{65}}{8} \, m/s$$



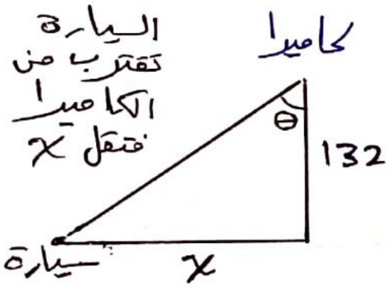
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور:



21 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

22 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.



المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = -264$ ft/s

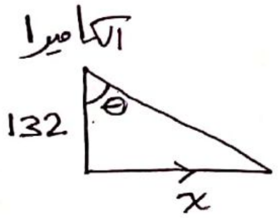
المعدل المطلوب $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0}$

21 العلاقة $\tan\theta = \frac{x}{132}$

اشتق $\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$

عوض $\frac{d\theta}{dt}\sec^2 0 = \frac{1}{132}(-264)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(-264) = -2$ rad/s



22 المعدل المطلوب $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=\frac{1}{2}}$

لكن قيمة x تزداد بعد تجاوز السيارة الكاميرا وعليه تصبح $\frac{dx}{dt} = 264$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{2} \\ x &= (264)(\tfrac{1}{2}) = 132 \\ \tan\theta &= \tfrac{132}{132} = 1 \\ \sec^2\theta &= \tan^2\theta + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}}$$

العلاقة $\tan\theta = \frac{x}{132}$

اشتق

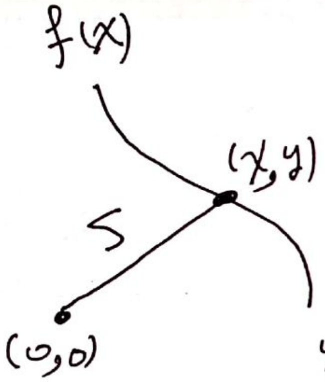
$\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$ $\longrightarrow$ 2. نجد $\sec^2\theta$

عوض $2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(264)$

$2\frac{d\theta}{dt} = 2$

$\frac{d\theta}{dt} = 1$ rad/s

23 **فيزياء:** يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الجُسَيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.



المعدل المعطى: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$ cm/s

المعدل المطلوب: $\frac{ds}{dt}\Big|_{x=\frac{1}{3},\ y=1}$

عوض مكان y

العلاقة ("المسافة بين النقطتين"): $S = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

اشتق: $S = \sqrt{x^2 + (2\sin\frac{\pi x}{2})^2}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt} + \cancel{2}(2\sin\frac{\pi x}{2})(2)(\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

عوض:

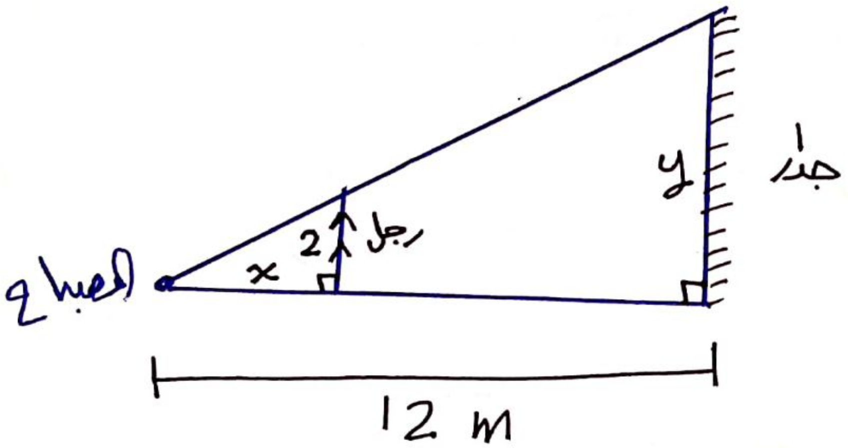
$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{10} + (2\sin\frac{\pi}{6})(2)(\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{6}(\sqrt{10})}{\sqrt{\frac{1}{9}+(2\sin\frac{\pi}{6})^2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{10}}{3} + 2(\frac{1}{2})(2)(\frac{\pi}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{10}}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

وزع بسط على مقام

$$= \frac{\frac{\sqrt{10}}{3} + (\sqrt{3}\sqrt{10}\,\pi)\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} \text{ unit/s}$$

24 ضوء: مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.



المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = 1.6\ m/s$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=12-4=8}$

العلاقة (تشابه المثلثات) $\frac{y}{2} = \frac{12}{x}$

اشتق $\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = \frac{-12\frac{dx}{dt}}{x^2}$

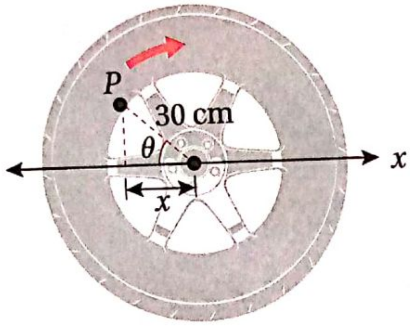
عوض $\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = \frac{-12(1.6)}{64}$

$\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = -0.3$

$\frac{dy}{dt} = (-0.3)(2)$

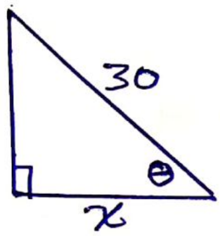
$= -0.6\ m/s$

سيّارات: عجلة سيّارة طول نصف قُطرها الداخلي 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:



25 أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

26 أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45°$.



$$w = \frac{\theta}{t} = \frac{10(2\pi)}{1}$$

المعدل المعطى $\frac{d\theta}{dt} = 20\pi \text{ rad/s}$

25 العلاقة $\cos\theta = \frac{x}{30}$ ضرب تبادلي

اشتق $x = 30\cos\theta$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -30(20\pi)\sin\theta$$

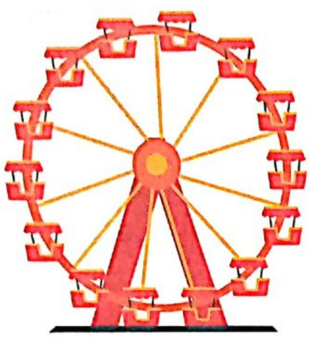
$$= -600\pi\sin\theta$$

26 عوض $\frac{dx}{dt} = -600\pi\sin 45°$

$$\frac{dx}{dt} = (-600\pi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm/s}$$

$$= -300\sqrt{2}\pi \text{ cm/s}$$



27 **مدينـــة ألعاب:** عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطْرها 10 m، وهي تدور بمُعدَّل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغيُّر ارتفاع راكب فيها عندما يكــون على ارتفاع 16 m فوق ســطح الأرض (أُهمِل ارتفاع العربة عن الأرض).

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.

المعدل المعطى

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{2}$$

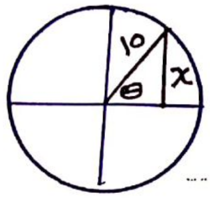
$$= \pi \text{ rad/min}$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=16-10=6}$$

حالة (1)

العربة وهي صاعدة



العلاقة $\sin\theta = \frac{x}{10}$

اشتقاق

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\theta = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$$

نحتاج $\cos\theta$

عند $x=6$

فإن $\sin\theta = \frac{6}{10}$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ و $-\frac{4}{5}$

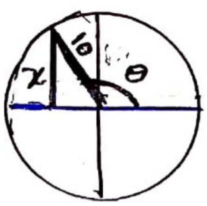
نعوض:

$$(\pi)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{4\pi}{5}\right)(10)$$

$$= 8\pi \text{ m/min}$$

حالة (2)



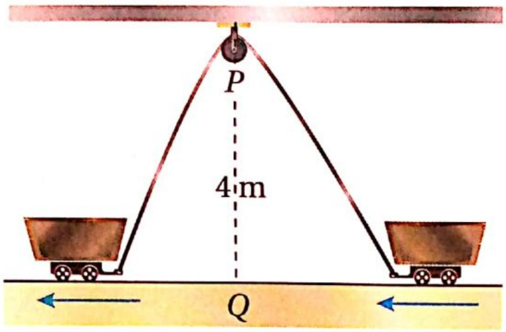
العربة وهي نازلة بعد اكمال نصف دورة وعندها

لأن $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ تكون θ زاوية منفرجة

$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{4}{5}\right)\pi(10)$$

$$= -8\pi \text{ m/min}$$

28 تبرير: رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.

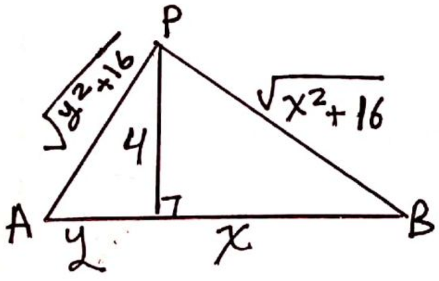


المعدل المعطى $\frac{dy}{dt} = 0.5\ m/s$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{y=3}$

العلاقة :-

$PA + PB = 12$ طول الحبل



$\sqrt{y^2+16} + \sqrt{x^2+16} = 12$ اشتق

$$\frac{\cancel{2}y\frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{y^2+16}} + \frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+16}} = 0$$

نحتاج الى x

$$\boxed{\begin{gathered} \text{عند } y=3 \\ \sqrt{9+16}+\sqrt{x^2+16}=12 \\ \sqrt{x^2+16}=7 \\ x^2+16=49 \\ x^2=33 \\ x=\sqrt{33},\ -\sqrt{33} \end{gathered}}$$

مرفوض

نعوض :-

$$\frac{3(0.5)}{\sqrt{9+16}} + \frac{\sqrt{33}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{33+16}} = 0$$

$$\frac{1.5}{5} + \frac{\sqrt{33}\frac{dx}{dt}}{7} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\left(\frac{1.5}{5}\right)\left(\frac{7}{\sqrt{33}}\right)$$

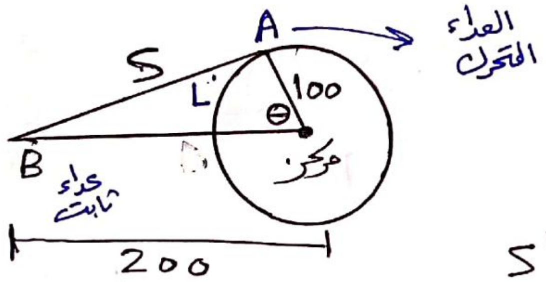
$$= -\frac{2.1}{\sqrt{33}}\ m/s$$

29 تبرير: يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسـرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عَدّاء آخر علـى بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسـافة بين العَدّاءين عندما تكون المسـافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.

حالة (1)

العداء A الى يمين B ((في هذه الحالة L تتناقص))



المعدل المعطى $\frac{dL}{dt} = -7\ m/s$

المعدل المطلوب $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=200}$

العلاقة $S^2 = (100)^2+(200)^2-2(100)(200)\cos\theta$

$S^2 = 50000-40000\cos\theta$

طول القوس $L = 100\theta$

$\theta = \frac{L}{100}$

اشتق

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dL}{dt} = \frac{-7}{100}$ rad/m

$S = \sqrt{50000-40000\cos\theta}$

$200 = \sqrt{50000-40000\cos\theta}$

تربيع

$40000 = 50000-40000\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{10000}{40000} = \frac{1}{4}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$

$\frac{1}{16}+\sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

اشتق

$S = \sqrt{50000-40000\cos\theta}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(40000)\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}}{2\sqrt{50000-40000\cos\theta}}$$

نحتاج الى $\cos\theta \,/\, \sin\theta \,/\, \frac{d\theta}{dt} \leftarrow$

عوض

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(40000)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{-7}{100}\right)}{2\sqrt{50000-40000\left(\frac{1}{4}\right)}}$$

$$= \frac{-700\sqrt{15}}{2\sqrt{40000}} = \frac{-700}{400}\sqrt{15}$$

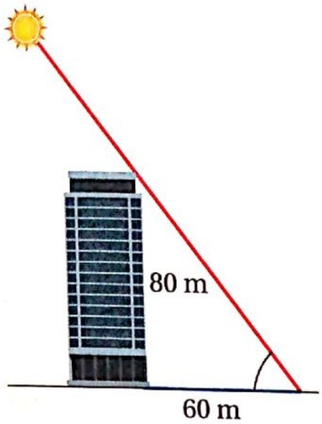
$$= \frac{-7\sqrt{15}}{4}\ m/s$$

حالة (2)

يكون العداء A الى يسار B

وعندها تتزايد طول القوس L ويكون $\frac{dL}{dt} = 7\ m/s$

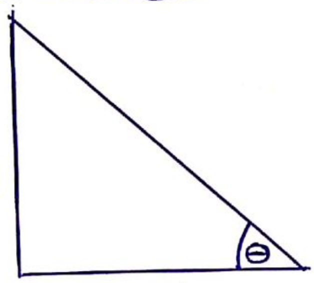
وبإتباع نفس الخطوات $\frac{ds}{dt} = \frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s$ لكن المعدل موجب



30 **تحدٍّ**: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m، فكان طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علمًا بأنَّ الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.

إرشاد: تُكمِل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

تحول الى min حسب طلب السؤال



ظل المبنى ← x

الارض تكمل دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{24\,h} = \frac{\pi}{12\,h} = \frac{\pi}{(12)(60)} = \frac{\pi}{720}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{720}\ rad/min$$ المعدل المعطى

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60\,m}$$ المعدل المطلوب

العلاقة $$\tan\theta = \frac{80}{x}$$

اشتق $$\frac{d\theta}{dt}\sec^2\theta = \frac{-80\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

نحتاج $\sec^2\theta$ ←

عوض $x=60$

$$\tan\theta = \frac{80}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{80}{60}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$
$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$
$$= \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9}$$

عوض

$$\frac{\pi}{720}\left(\frac{25}{9}\right) = \frac{-80\frac{dx}{dt}}{3600}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-25\pi}{144}\ m/min$$
$$= \frac{-2500\pi}{144}\ cm/min$$
$$\simeq -54.5\ cm/min$$

تحول الى cm نضرب في 100

$1\,m = 100\,cm$

كتاب التمارين

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. عندما يكون طول نصف قُطْره 12 cm.
2. عندما يكون حجمه $1435\ cm^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).
3. إذا مُلِئَ مدَّة 33.5 s.

المعدل المعطى $\frac{dv}{dt} = 8\ cm^3/s$

① المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=12}$

العلاقة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

اشتق

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

عوض

$8 = 4\pi (12)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{4\pi(144)} = \frac{1}{72\pi}\ cm/s$

② المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{V=1435}$

هنا مشتقة r غير موجودة

$V = 1435$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1435$

$r^3 = (1435)\left(\frac{3}{4\pi}\right)$

$r = \sqrt[3]{\frac{4305}{4\pi}} \simeq 7cm$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ "من فرع ①"

$8 = 4\pi(49)\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{196\pi} \simeq 0.01\ cm/s$

③ المعدل المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=33.5}$ بعد مضي

هنا نحتاج r حيث نجد الحجم اولاً

$V = (8)(33.5) = 268\ cm^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$268 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r^3 = (268)\left(\frac{3}{4\pi}\right) = \frac{210}{\pi}$

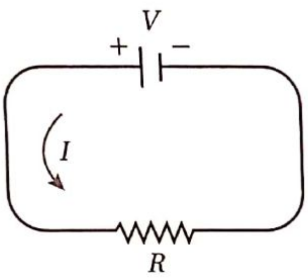
$r = \sqrt[3]{\frac{210}{\pi}} \simeq 4\ cm$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$8 = 4\pi(16)\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi}\ cm/s$

4 تُمثِّل المعادلة: $V = IR$ جُهْد الدارة الكهربائية (بالفولت) المُبيَّنة في الشكل المجاور، حيث I شِدَّة التيار بالأمبير، وR المقاومة بالأوم. إذا كان جُهْد الدارة يزداد بمُعدَّل 1 volt/sec، وشِدَّة التيار تقل بمُعدَّل $\frac{1}{3}$ amp/sec، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $V = 12$، و$I = 2$.



الحل:

المعدل المعطى $\frac{dV}{dt} = 1$ و $\frac{dI}{dt} = \frac{-1}{3}$

المعدل المطلوب $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{\substack{I=2 \\ V=12}}$

العلاقة $V = IR$

اشتق $\frac{dV}{dt} = (I)\frac{dR}{dt} + (R)\frac{dI}{dt}$

نحتاج الى R $\leftarrow$

عوض $V = IR$

$12 = 2R$

$R = 6$

عوض $1 = 2\frac{dR}{dt} + (6)\left(\frac{-1}{3}\right)$

$1 = 2\frac{dR}{dt} - 2$

$2\frac{dR}{dt} = 3$

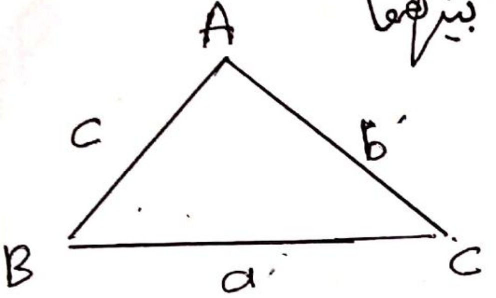
$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2}\ \Omega/sec$

رأفت صابح

5 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2} s^2 \sin\theta$.

6 إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

(5) نعلم سابقاً ان مساحة أي مثلث هو حاصل ضرب طول ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما



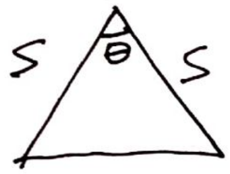
$$A = \frac{1}{2} a b \sin C$$

اذا كانت $C = \theta$ و $a = b = s$ فان

$$A = \frac{1}{2} s^2 \sin\theta$$

---

(6) المعدل المعطى $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$ rad/min



المعدل المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta = \frac{\pi}{6}}$

العلاقة $A = \frac{1}{2} s^2 \sin\theta$ حيث s ثابت

نشتق $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$

عوض $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{1}{2} s^2\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} s^2 \ \text{cm}^2/\text{min}$$

7 يتحرَّك جُسَـيْم على منحنـى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هــو 3 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$.

المعدل المعطى $\frac{dx}{dt} = 3$ cm/s

المعدل المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}$

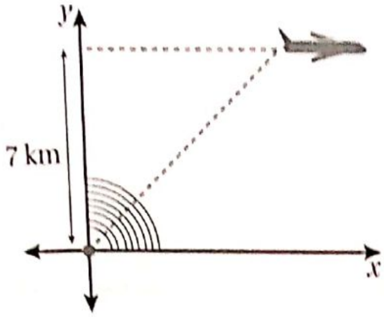
العلاقة $y = \frac{10}{1+x^2}$

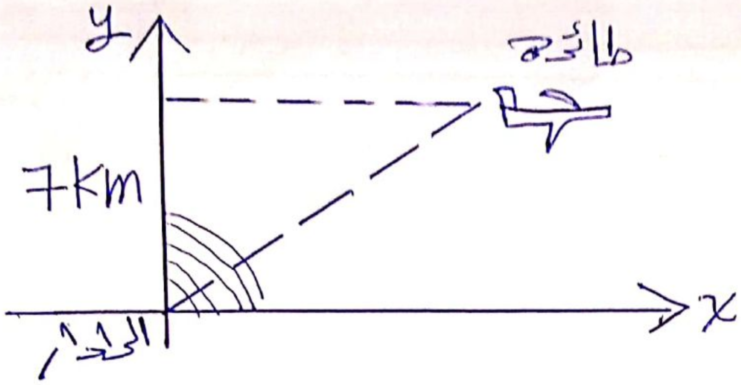
نشتق
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-10(2x)\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

عوض
$$= \frac{-20(20)(3)}{(1+400)^2} = \frac{-1200}{(401)^2}$$

$\simeq -0.007$ cm/s

8 حلّقت طائرة على ارتفاع 7 km، ومرّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البُعد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



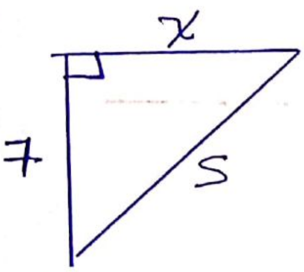


$\frac{ds}{dt} = 300 \, km/h$ المعدل المعطى

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10}$ المعدل المطلوب

فيثاغورس

$S^2 = (7)^2 + x^2$ العلاقة



$x^2 = S^2 - 49$ أشتق

$x = \sqrt{S^2 - 49}$ أشتق

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{2} S \frac{ds}{dt}}{\cancel{2} \sqrt{S^2 - 49}}$$ عوض

$$= \frac{10 (300)}{\sqrt{100 - 49}} = \frac{3000}{\sqrt{51}}$$

$$\simeq 420 \, km/h$$

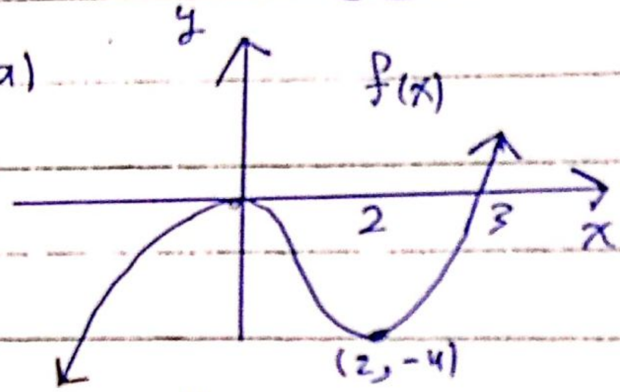
الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

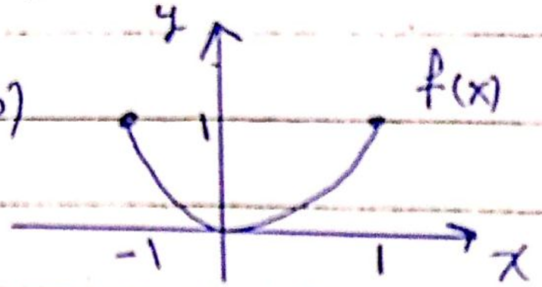
التحقق من فهمي

1) جد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (ان وجدت) للاقتران الممثل تمثيله البياني في كل مما يأتي:

a)



b)



الحل:

a) لا يوجد قيم قصوى مطلقة

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=2$ وهي $f(2)=-4$

b) للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=1$ و $x=-1$ وهي $f(1)=1$ ، $f(-1)=1$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

2) جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة

a) $f(x)=x^3-6x^2+5 \ , \ [-3,5]$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x} \ , \ [-8,8]$

c) $f(x)=\sin^2 x+\cos x \ , \ [0,2\pi]$

الحل:

عندما يطلب ايجاد المطلقة وهنا لا داعي لدراسة اشارة $f'(x)$

a) $f'(x)=3x^2-12x$

نضع $f'(x)=0$

$3x^2-12x=0$

$3x(x-4)=0$

$x=0 \qquad x=4$

القيم الحرجة $x=0, x=4$ وهما ضمن الفترة

نجد صور الحرجة والاطراف

$f(0)=0-0+5=\boxed{5}$

$f(4)=64-96+5=-27$

$f(-3)=-27-54+5=\boxed{-76}$

$f(5)=125-150+5=-20$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-3$ وهي $f(-3)=-76$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=5$

رافت ضامن

b)

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

اصفار البسط ← $f'(x) \neq 0$

اصفار المقام ← $f'(x)$ غير موجودة عند $x=0$

القيم الحرجة هي $x=0$ فقط

$f(0) = 0$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$

$f(-8) = \sqrt[3]{-8} = \boxed{-2}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-8$ وهي $f(-8)=-2$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=8$ وهي $f(8)=2$

---

c)

$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x$

ضع $f'=0$ $\quad 2\sin x\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0 \quad \boxed{x=\pi}$

$2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3} , \frac{5\pi}{3}}$

القيم الحرجة

$f(\pi) = \sin^2\pi + \cos\pi = \boxed{-1}$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{4}}$

$f(\frac{5\pi}{3}) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{4}}$

$f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 = 1$

$f(2\pi) = \sin^2 2\pi + \cos 2\pi = 1$

عند $x=\pi$ صغرى محلية مطلقة وهي $f(\pi) = -1$

عند $x=\frac{\pi}{3}$ عظمى محلية مطلقة هي $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$

عند $x=\frac{5\pi}{3}$ عظمى محلية مطلقة وهي $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5}{4}$

---

3) جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) للاقتران $f(x) = (x-1)e^x$

الحل:

$f'(x) = (x-1)e^x + e^x$

ضع $f'(x) = 0$

$(x-1)e^x + e^x = 0$

$e^x(x-1+1) = 0$

$xe^x = 0$

$x = 0 \qquad e^x \neq 0$

القيم الحرجة هي $x = 0$

ندرس اشارة

$f'(x)$: $- - - \; 0 \; + + + +$

عند $x=0$ صغرى محلية هي $f(0) = -1$ وهي مطلقة

4) جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) للاقتران

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$$

الحل:

$$f(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=3$

القيم الحرجة هي $x=3$

f': $+ + + +$ | 3 | $+ + + +$

الاقتران $f(x)$ متزايد على R و لا يوجد له قيم قصوى محلية و مطلقة لانه حول $x=3$ لم تتغير اشارة المشتقة حولها

5) جد فترات التقعر للاعلى وللاسفل ونقاط الانعطاف (ان وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي

a) $f(x)=(x-2)^3(x-1)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

الحل:

a) $f'(x)=(x-2)^3+(x-1)\,3(x-2)^2$

$f'(x)=(x-2)^3+3(x-1)(x-2)^2$

$f''(x)=3(x-2)^2+3(x-1)\,2(x-2)+(x-2)^2(3)$

$f''(x)=3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)+3(x-2)^2$

ضع $f''=0$

$3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)+3(x-2)^2=0$

$3(x-2)[x-2+2x-2+x-2]=0$

$3(x-2)[4x-6]=0$

$x=2$

$4x=6$

$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

f'': $-\infty$ $++$ $\frac{3}{2}$ $--$ 2 $++$ ∞

$f(x)$ مقعر على في $(-\infty,\frac{3}{2})$ و $(2,\infty)$

$f(x)$ مقعر لأسفل في $(\frac{3}{2},2)$

عند $x=\frac{3}{2}$ يوجد نقطة انعطاف هي $(\frac{3}{2},\frac{-1}{16})$

عند $x=2$ يوجد نقطة انعطاف هي $(2,0)$

b) $f'=\dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ انتبه المجال $R-\{1\}$

$f''=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(x)\neq 0$

$f''(x)$ غير موجودة عند $x=1$

f'': $-\infty$ $---$ 1 $+++$ ∞

$f(x)$ مقعر لأسفل $(-\infty,1)$

$f(x)$ مقعر على $(1,\infty)$

لا يوجد نقط انعطاف على الرغم من أن المنحنى تغير تقعره حول $x=1$ وذلك لانها خارج المجال للاقتران $f(x)$ ((غير متصل))

6) اذا كان $f(x)=xe^{x}$
استعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$

الحل :-

$f'(x)=xe^{x}+e^{x}$

نضع $f'(x)=0$

$xe^{x}+e^{x}=0$

$e^{x}(x+1)=0$

$e^{x}\neq 0$, $x=-1$

القيم الحرجة $x=-1$

$f''(x)=xe^{x}+e^{x}+e^{x}$

$f''(x)=xe^{x}+2e^{x}$

$f''(-1)=-e^{-1}+2e^{-1}=e^{-1}$

$f''(-1)=\frac{1}{e}>0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-1$
وهي $f(-1)=-e^{-1}$
$=\frac{-1}{e}$

---

7) يمثل الاقتران $s(t)=t^{3}-3t+3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

a) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب

b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

الحل :-

a) $v(t)=3t^{2}-3$

$v(t)=0$

$3t^{2}-3=0$

$t^{2}=1$

$t=1,-1\longrightarrow$ مرفوض لا يوجد زمن سالب

$v(t)$: 0 − − − 1 + + + ∞

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترة $(1,\infty)$ ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(0,1)$

---

b) $a(t)=6t$

$a(t)=0$

$6t=0$

$t=0$

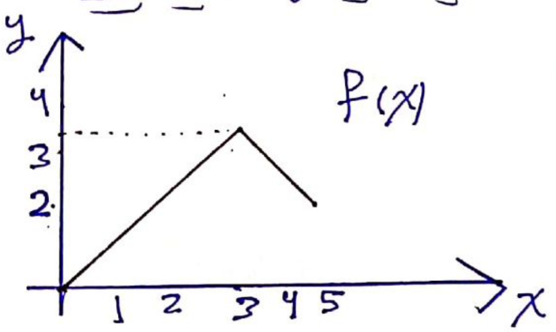
$a(t)$: 0 + + + + + + ∞

سرعة الجسم تتزايد في الفترة $(0,\infty)$ ولا تتناقص أبداً

التدرب وحل المسائل

جد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (ان وجدت) للاقتران الممثل بيانياً في كل مما يأتي

(1)

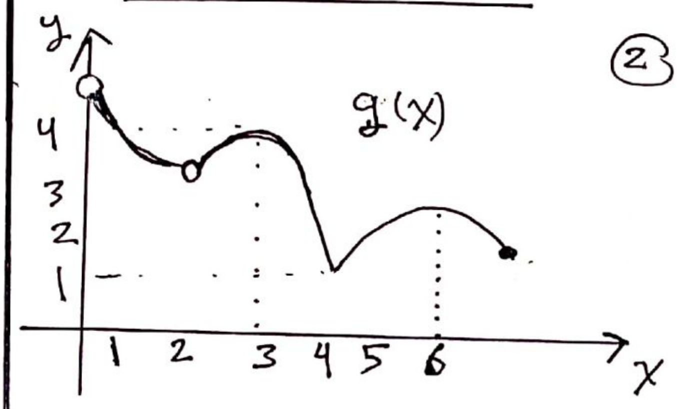


القيم الحرجة عند $x=3$ لأن المشتقة غير موجودة

عند $x=3$ توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة وهي $f(3)=3.5$

عند $x=0$ صغرى مطلقة وهي $f(0)=0$

(2)



عند 6 و $x=3$ المشتقة صفراً

عند $x=4$ المشتقة غير موجودة

انتبه عند $x=2$ خارج المجال

قيم x الحرجة هي 3 و 6 و 4

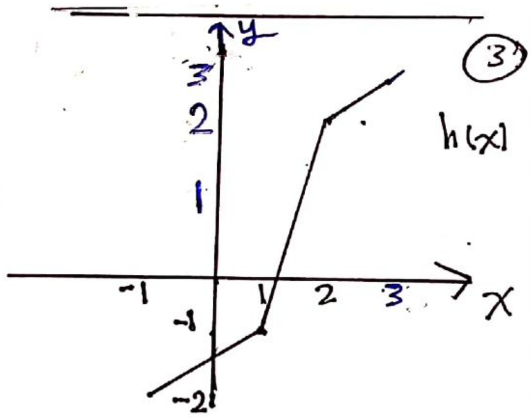
توجد قيمة صغرى محلية مطلقة عند $x=4$ وهي $g(4)=1$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x=3$ وعند $x=6$ وهي $g(3)=4$ وهي $g(6)=3$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة حيث عند $x=0$ خارج المجال

(3)

متزايد على مجاله



عند $x=1$ و $x=2$ المشتقة غير موجودة

القيم الحرجة هي $x=2$ و $x=1$

توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x=-1$ وهي $h(-1)=-2$

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ وهي $h(3)=3$

لا توجد قيم قصوى محلية حيث المنحنى مستمر بالصعود

جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة

④ $f(x) = 1+6x-3x^2$ ، $[0,4]$

⑤ $f(x) = (x+3)^{\frac{2}{3}} - 5$ ، $[-3,3]$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ ، $[-2,2]$

⑦ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $[8,64]$

⑧ $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$ ، $[0,\frac{\pi}{2}]$

⑨ $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ ، $[0,3]$

⑩ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ ، $[\frac{1}{2},4]$

⑪ $f(x) = \sec x$ ، $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

⑫ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، $[-2,2]$

الحل :

④

$f'(x) = 6-6x$

ضع $f'=0$

$6-6x=0$

$6x=6$

$x=1$

القيم الحرجة هي $x=1$

$f(0) = 1+0-0 = 1$

$f(1) = 1+6-3 = \boxed{4}$

$f(4) = 1+24-48 = \boxed{-23}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=4$ وهي $f(4)=-23$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=1$ وهي $f(1)=4$

⑤ $f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x+3)}}$

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=-3$ ← طرف

وعليه لا توجد قيم حرجة

$f(-3) = (-3+3)^{\frac{2}{3}} - 5 = 0-5 = -5$

$f(3) = (3+3)^{\frac{2}{3}} - 5 = (6)^{\frac{2}{3}} - 5 = \sqrt[3]{36} - 5$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-3$ وهي $f(-3)=-5$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ وهي $f(3)=\sqrt[3]{36}-5$

---

⑥ $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ عند $2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غير موجودة ← اصفار المقام لا توجد

لأن $x^2+1 \neq 0$

القيم الحرجة هي $x=0$

$f(0) = \frac{0}{1} = 0$

$f(-2) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

$f(2) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$
محلية

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$ و $x=-2$ وهي $\frac{4}{5}$

(7)

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)\neq 0$

$f'(x)$ غير موجود عند $x=0$

وهي خارج المجال وعليه لا توجد قيم حرجة

$f(8)=\sqrt[3]{8}=2$

$f(64)=\sqrt[3]{64}=4$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=64$ وهي $f(64)=4$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=8$ وهي $f(8)=2$

---

(8) $f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x$

نضع $f'(x)=0$

نقسم على -2

$-2\sin x+2\cos 2x=0$

$\sin x-\cos 2x=0$

نوحد الزوايا

$\sin x-[1-2\sin^2 x]=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$2\sin x=1$ $\sin x=-1$

$\sin x=\frac{1}{2}$ $x=\frac{3\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$ مهمل

القيم الحرجة هي $x=\frac{\pi}{6}$

$f(0)=2\cos 0+\sin 0=2$

$f(\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi=0$

$f(\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2})=0$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=\frac{\pi}{6}$ وهي $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

---

(9) $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$

عند $f'(x)=0$

$e^x(x^2-2x+1)=0$

$e^x(x-1)(x-1)=0$

$e^x\neq 0$ $x=1$

$f'(x)$ غير موجود ← لا توجد

لأن $1+x^2\neq 0$

القيم الحرجة هي $x=1$

$f(1)=\frac{e}{2}$

$f(0)=\frac{e^0}{1+0}=1$

$f(3)=\frac{e^3}{10}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=1$ وله قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\frac{e^3}{10}$

القيم الحرجة هي $x=0$

$f(0)=\sec 0 = 1$

$f(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\cos -\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

دالة زوجية

$f(\frac{\pi}{3}) = \sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة
عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند
$x=\frac{\pi}{3}$ وهي $f(\frac{\pi}{3})=2$

---

(12) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

عند $f'(x)=0$ $-x=0$

$x=0$

القيم الحرجة هي $x=0$

$f(0)=\sqrt{4-0}=2$

$f(-2)=\sqrt{4-4}=0$

$f(2)=\sqrt{4-4}=0$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=2$ / $x=-2$
وهي 0

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة
عند $x=0$ وهي $f(0)=2$

(10) $f'(x) = \frac{(x^2)(\frac{1}{x}) - 2x\ln x}{x^4}$

$f'(x) = \frac{x-2x\ln x}{x^4}$

عند $f'(x)=0$ $x-2x\ln x=0$

$x(1-2\ln x)=0$

$x=0$ وهي خارج المجال

$1-2\ln x=0$

$\ln x=\frac{1}{2}$

$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f'(x)$ غير موجودة ← $x^4=0$
وهي $x=0$

القيم الحرجة هي $x=\sqrt{e}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 4\ln\frac{1}{2} = 4(-\ln 2)$
$= -4\ln 2$

$f(4)=\frac{\ln 4}{16}$

$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{e} = \frac{\frac{1}{2}\ln e}{e} = \frac{1}{2e}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{1}{2}$
وهي $f(\frac{1}{2})=-4\ln 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عليه عند
$x=\sqrt{e}$ وهي $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$

---

(11) $f'(x)=\sec x\tan x$

نضع $f'(x)=0$

$\sec x\tan x=0$

$\sec x\neq 0$ دائمًا

$\tan x=0$

$x=0$

حل آخر

$f'=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}$

$f'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$x=0$ عند $f'=0$

جد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم جد القيم القصوى المحلية

(13) $f(x)=x^3-6x^2-135$

(14) $f(x)=\frac{2x}{x^2+9}$

(15) $f(x)=x^2\ln x$

(16) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

(17) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

(18) $f(x)=\sin^2 x+\sin x$ ، $[0,2\pi]$

(19) $f(x)=x+\sin x$ ، $[0,2\pi]$

الحل:

(13)

$f'(x)=3x^2-12x$

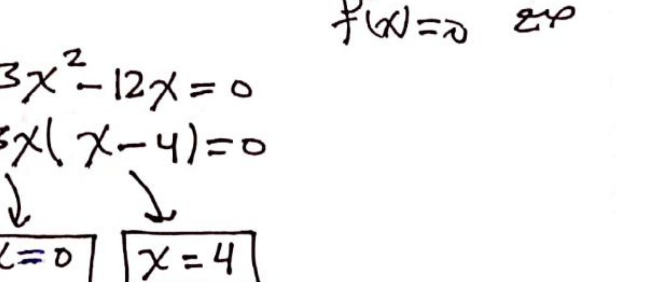
ضع $f'(x)=0$

$3x^2-12x=0$

$3x(x-4)=0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=4}$

القيم الحرجة هي $x=0$ ، $x=4$



$f(x)$ متزايد على الفترة $(-\infty,0)$ ، $(4,\infty)$

$f(x)$ متناقص على الفترة $(0,4)$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=-135$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=4$ وهي $f(4)=-167$

(14)

$$f'(x)=\frac{(x^2+9)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+18-4x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2}$$

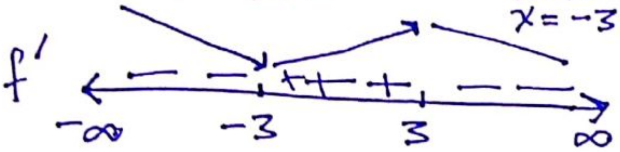
$f'(x)=0$ عند $18-2x^2=0$

$2x^2=18$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

القيم الحرجة $x=3$ ، $x=-3$



$f(x)$ متزايد على الفترة $(-3,3)$

$f(x)$ متناقص على الفترة $(-\infty,-3)$ ، $(3,\infty)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=-3$

وهي $f(-3)=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3}$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=3$

وهي $f(3)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

(15) انتبه: ما داخل اللوغاريتم $x>0$

المجال $(0,\infty)$

$f'(x)=(x^2)(\frac{1}{x})+2x\ln x$

$=x+2x\ln x$

ضع $f'(x)=0$

$x+2x\ln x=0$

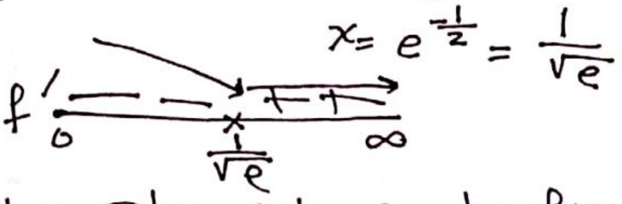
$x(1+2\ln x)=0$

$x=0$ مرفوض

$1+2\ln x=0$

$\ln x=\frac{-1}{2}$

$x=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$



$f(x)$ متزايد $(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty)$ ومتناقص $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

وهي $f(\frac{1}{\sqrt{e}})=\frac{-1}{2e}$

(16) ما داخل الجذر المميز سالب

المجال $\leftarrow R$ (دائماً موجب)

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$f'(x)=0$ عند $2x-2=0$

$2x=2$

$\boxed{x=1}$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x^2-2x+2=0$

المميز سالب

f': $-\infty$ $\quad - - \quad$ 1 $\quad + + \quad$ ∞

$f(x)$ متزايد $(1,\infty)$

$f(x)$ متناقص $(-\infty,1)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=1$

وهي $f(1)=\sqrt{1-2+2}=1$

---

(17) $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}$

$f' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{-1}{3}}$

توحيد مقامات

$$f' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}x - 2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}x-2}{\sqrt[3]{x}}$$

$\frac{5}{3}x-2=0$ عند $f'(x)=0$

$\frac{5}{3}x=2$

$x=(2)(\frac{3}{5})=\frac{6}{5}$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=0$

f': $-\infty$ $\quad + + \quad$ 0 $\quad - - \quad$ $\frac{6}{5}$ $\quad + + \quad$ ∞

$f(x)$ متزايد $(-\infty,0)$ و $(\frac{6}{5},\infty)$

$f(x)$ متناقص $(0,\frac{6}{5})$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=0$

وهي $f(0)=0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{6}{5}$

وهي $f(\frac{6}{5})=(\frac{6}{5})^{\frac{2}{3}}(\frac{6}{5}-3)$

$$= \frac{-9}{5}\sqrt[3]{(\frac{6}{5})^2}$$

---

(18) $f'(x)=2\sin x\cos x+\cos x$

ضع $f'(x)=0$

$2\sin x\cos x+\cos x=0$

$\cos x(2\sin x+1)=0$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$2\sin x+1=0$

$\sin x=\frac{-1}{2}$

$x=\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

القيم الحرجة هي

$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

f': 0 $\quad + + \quad$ $\frac{\pi}{2}$ $\quad - - \quad$ $\frac{7\pi}{6}$ $\quad + + \quad$ $\frac{3\pi}{2}$ $\quad - - \quad$ $\frac{11\pi}{6}$ $\quad + + \quad$ 2π

$f(x)$ متزايد $(0,\frac{\pi}{2})$، $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$، $(\frac{11\pi}{6},2\pi)$

$f(x)$ متناقص $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$، $(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{7\pi}{6}$

وهي

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{7\pi}{6}+\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{-1}{2}=\frac{-1}{4}$$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{11\pi}{6}$

وهي

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{-1}{2}=\frac{-1}{4}$$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$

وهي

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=1+1=2$$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{3\pi}{2}$

وهي

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=1-1=0$$

---

(19) $f'(x)=1+\cos x$

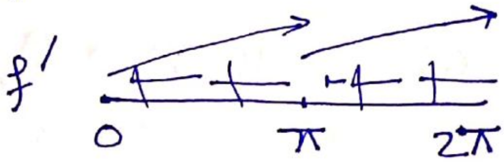
نضع $f'(x)=0$

$1+\cos x=0$

$\cos x=-1$

$x=\pi$

القيم الحرجة هي $x=\pi$



لا يوجد قيم قصوى محلية لأنه عند $x=\pi$ لا تتغير إشارة

$f(x)$ متزايد $(0, 2\pi)$

جد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

(20) $f(x)=x^3-12x+1$

(21) $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ، $[0,\pi]$

(22) $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$

(23) $f(x)=\ln(x^2+5)$

(24) $f(x)=\sqrt{x}\,(x+3)$

(25) $f(x)=xe^x$

الحل:

(20) $f'(x)=3x^2-12$

$f''(x)=6x$

نضع $f''(x)=0$

$6x=0$

$x=0$

$f(x)$ مقعر للأعلى في $(0,\infty)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(-\infty,0)$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=0$ وهي $(0,1)$

---

(21) $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

$$f''(x)=\frac{-2\sqrt{\sin x}\,\sin x-(\cos x)\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)}{4\sin x}$$

$$=\frac{-2\sqrt{\sin x}\,\sin x-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}}{4\sin x}$$

توحيد مقامات

$$f''(x) = \frac{\frac{-2\sin^2 x - \cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}}{4\sin x}$$

$$= \frac{-2\sin^2 x - \cos^2 x}{4\sin x\sqrt{\sin x}}$$

عند $f''(x)=0$ ‏ $-2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

مستحيل $2\sin^2 x + \cos^2 x \neq 0$

وعليه $f''(x) \neq 0$

f'' : 0 ‏ $- - - -$ ‏ π

$f(x)$ مقعر للأسفل في الفترة $(0,\pi)$

وليس له نقط انعطاف

(22) $f' = \frac{(-3)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$$f'' = \frac{(x^2+1)^2(-6) + 6x(2(x^2+1))(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f'' = \frac{-6(x^2+1)^2 + 24x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-6(x^2+1)[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-6(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

عندما $f''(x)=0$ ‏ $1-3x^2=0$

$3x^2=1$

$x^2=\frac{1}{3}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

f'' : $-\infty$ ‏ $++$ ‏ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ‏ $- - -$ ‏ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ‏ $++$ ‏ ∞

$f(x)$ مقعر للأسفل $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ مقعر للأعلى $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند

$x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ وهي $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ وهي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

(23) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+5)(2) - 2x(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2+10-4x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+5)^2}$$

عند $f''(x)=0$ ‏ $10-2x^2=0$

$2x^2=10$

$x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

$f''(x)$: $-\infty$ ‏ $- - -$ ‏ $-\sqrt{5}$ ‏ $+++$ ‏ $\sqrt{5}$ ‏ $- - -$ ‏ ∞

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(-\infty, -\sqrt{5})$ و $(\sqrt{5}, \infty)$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند

$x=\sqrt{5}$ وهي $(\sqrt{5}, \ln 10)$

$x=-\sqrt{5}$ وهي $(-\sqrt{5}, \ln 10)$

المجال $x>0$

(24) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}(x+3)$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ نوحد مقامات

$= \frac{3}{4}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)$

عند $f''(x)=0$: $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0$

نربع $\sqrt{x^3} = \sqrt{x}$

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$x=0,\ x=1,\ -1 \rightarrow$ يهمل

f'': 0 − − − 1 + + + ∞

$(0,1)$ مقعر لأسفل $f(x)$

$(1,\infty)$ مقعر لأعلى $f(x)$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=1$ وهي $(1,4)$

(25) $f' = xe^x + e^x$

$f'' = xe^x + e^x + e^x$

$= xe^x + 2e^x$

نضع $f''=0$

$xe^x + 2e^x = 0$

$e^x(x+2) = 0$

$e^x \neq 0$

$x+2=0$

$x=-2$

f'': $-\infty$ − − − -2 + + + ∞

$(-2,\infty)$ مقعر لأعلى $f(x)$

$(-\infty,-2)$ مقعر لأسفل $f(x)$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=-2$ وهي $\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$

جد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستخدماً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن)

(26) $f(x) = 6x - x^2$

(27) $f(x) = \cos x - x,\ [0, 4\pi]$

(28) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

(29) $f(x) = x\ln x$

(30) $f(x) = \frac{x}{2^x}$

(31) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$

الحل: (26) $f' = 6 - 2x$

نضع $f'=0$

$6 - 2x = 0$

$x = 3$

القيم الحرجة هي $x=3$

$f''(x) = -2$

$f''(3) = -2 < 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=3$ هي $f(3)=9$

(27) $f'(x) = -\sin x - 1$

ضع $f' = 0$

$-\sin x - 1 = 0$

$\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} \, , \, \frac{7\pi}{2}$ نزيد دورة

القيم الحرجة هي $x = \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{2}$

$f''(x) = -\cos x$

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -\cos \frac{7\pi}{2} = 0$

هنا يفشل اختبار المشتقة الثانية

نلجأ الى اختبار المشتقة الاولى

f': − − − − (0) − − − ($\frac{3\pi}{2}$) − − − ($\frac{7\pi}{2}$) − − − (4π)

هنا لم يتغير اشارة f' وعليه

لا توجد قيم قصوى محلية

---

(28) $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x) - x^2}{(x-1)^2}$

المجال $R - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$x^2 - 2x = 0$ عند $f' = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 2$

القيم الحرجة هي

$x = 0$

$x = 2$

$f''(x) = \dfrac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x)(2(x-1))}{(x-1)^4}$

$f''(0) = \dfrac{(0-1)^2(0-2) - (0-0)(2(0-1))}{(0-1)^2}$

$= \dfrac{-2-0}{1} = -2 < 0$

$f''(2) = \dfrac{(2-1)^2(4-2) - (4-4)\,2(2-1)}{(2-1)^2}$

$= \dfrac{2-0}{1} = 2 > 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

وهي $f(0) = 0$.

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

وهي $f(2) = 4$

---

(29) $f' = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$

$1 + \ln x$

ضع $f' = 0$

$1 + \ln x = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

القيم الحرجة هي $x = \frac{1}{e}$

$f'' = \frac{1}{x}$

$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{1}{e}$

وهي $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}$

$= \frac{-1}{e}$

(30) $f' = \frac{2^x - (x)(2^x)\ln 2}{(2^x)^2}$

نضع $f'=0$

$2^x - x2^x\ln 2 = 0$

$2^x(1-x\ln 2)=0$

$2^x \neq 0$

$1-x\ln 2=0$

$x\ln 2 = 1$

$x=\frac{1}{\ln 2}$ القيم الحرجة

$f' = \frac{\cancel{2^x}(1-x\ln 2)}{(2^x)^{\cancel{2}}}$

$f' = \frac{1-x\ln 2}{2^x}$

$f'' = \frac{(2^x)(-\ln 2) - (1-x\ln 2)2^x\ln 2}{(2^x)^2}$

عامل مشترك 2^x مختصر مع المقام

$f'' = \frac{-\ln 2-(1-x\ln 2)\ln 2}{2^x}$

$f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{-\ln 2 - \left(1-\frac{1}{\cancel{\ln 2}}\cancel{(\ln 2)}\right)\ln 2}{\left(2^{\frac{1}{\ln 2}}\right)}$

$= \frac{-\ln 2 - 0}{2^{\frac{1}{\ln 2}}} < 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{1}{\ln 2}$

وهي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

(31) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) \neq 0$ هنا نفشل الاختبار

نعود الى اختبار المشتقة الاولى

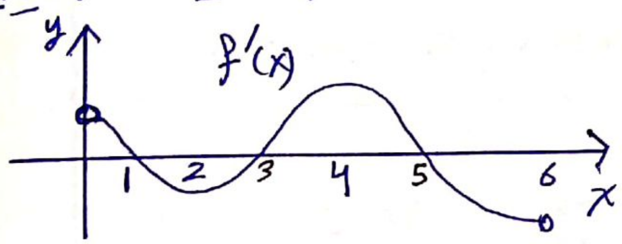
$f'(x)$ غير موجودة عند $x=0$

f': - - - | + + + (عند 0)

يوجد للاقتران قيمة صغرى محلية

عند $x=0$ وهي $f(0)=-3$

يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0,6]$ استعمل التمثيل البياني لايجاد كل مما يلي



(32) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مبيناً نوعها

(33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

الحل:

نقاط التقاطع مع محور x حرجة وفوق محور x متزايد وتحت محور x متناقص

f: + + + (0 إلى 1)، - - - (1 إلى 3)، + + + (3 إلى 5)، - - - (5 إلى 6)

0   1   3   5   6

(32) عند $x=1$ للاقتران قيمة عظمى محلية

عند $x=3$ للاقتران قيمة صغرى محلية

عند $x=5$ للاقتران قيمة عظمى محلية

(33) $f(x)$ متزايد في الفترة $(0,1)$ و $(3,5)$

$f(x)$ متناقص في الفترة $(1,3)$ و $(5,6)$

(34) اذا كان الاقتران:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

متقعة عظمى محلية عندما $x=-3$ ومتقعة صغرى محلية عند النقطة $(-14 ,1)$ جد قيمة كل من الثوابت a و b و c

الحل:

عند $x=-3$ عظمى $\longleftarrow f'(-3)=0$

$(1, -14)$ صغرى محلية

$f(1)=-14$ $f'(1)=0$

نشكل 3 معادلات لوجود 3 مجاهيل

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(-3)=0$$

$$27-6a+b=0$$

$$-6a+b=-27 \longrightarrow (1)$$

$$f'(1)=0$$

$$3+2a+b=0$$

$$2a+b=-3 \longrightarrow (2)$$

$$f(1)=-14$$

$$1+a+b+c=-14$$

$$a+b+c=-15 \longrightarrow (3)$$

نقوم بحل المعادلات حيث نبدأ بالمعادلات الأقل مجاهيل

نطرح

$$-6a+b=-27$$

$$2a+b=-3$$

$$-8a=-24$$

$$\boxed{a=3}$$

نعوض في معادلة (1) أو معادلة (2)

$$6+b=3$$

$$\boxed{b=-9}$$

نعوض قيم a و b في معادلة (3)

$$3+-9+c=-15$$

$$c-6=-15$$

$$\boxed{c=-9}$$

(35) اذا كان الاقتران $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$

نقطة انعطاف عندما $x=3$ جد الثابت b

الحل:-

عند $x=3$ انعطاف $\longleftarrow f''(3)=0$

$$f'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{b}{x^2}$$

$$f''=\frac{(-1)\left(\frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right)}{(2\sqrt{x+1})^2}+\frac{2xb}{x^4}$$

$$f''=\frac{-1}{(2\sqrt{x+1})^2\sqrt{x+1}}+\frac{2b}{x^3}$$

نعوض $x=3$

$$f''(3)=0$$

$$\frac{-1}{(16)(2)}+\frac{2b}{27}=0$$

$$\frac{2b}{27}=\frac{1}{32}$$

تبادلي

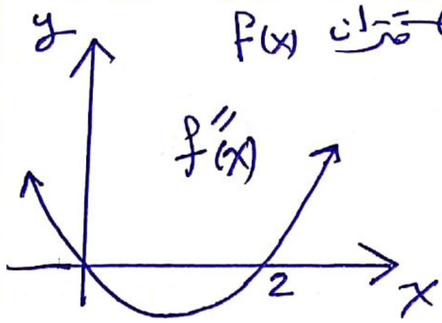
$$64b=27$$

$$\boxed{b=\frac{27}{64}}$$

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لايجاد كل مما يأتي

(36) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $f(x)$

(37) الاحداثي x لنقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران $f(x)$



الحل:

من منحنى f'' يكون $f(x)$ مقعر للأعلى اذا وقع المنحنى فوق محور x
ومقعر للأسفل اذا وقع تحت محور x

(36) $f(x)$ مقعر للأعلى $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(0, 2)$

f'': $+++$ | 0 | $---$ | 2 | $+++$

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad \infty$

نقاط تقاطع f'' مع محور x هي نقاط انعطاف بشرط عندها يكون جزء من المنحنى فوق محور x والجزء الآخر تحت محور x

(37) توجد نقط انعطاف عند

$x=0$

$x=2$

(38) يمثل الاقتران:

$B(x)=305x^2-1830x^3$ ، $0\le x\le 0.16$

ضغط الدم الممتص بوحدة mmgh والناتج من تناول جرعة دواء مقدارها $x\ cm^3$ جد الحد الأقصى لضغط الدم الناتج من هذا الدواء محدداً جرعة الدواء التي يحدث عندها.

الحل:

المطلوب هو القيم المطلقة

$B'(x)=610x-5490x^2$

نضع $B'(x)=0$

$610x-5490x^2=0$

$x(610-5490x)=0$

$x=0$ ، $610-5490x=0$

$5490x=610$

$x=\frac{610}{5490}=\frac{61}{549}\approx\frac{1}{6}$

القيم الحرجة $x=\frac{1}{9}$

نجدها من خلال اختبار المشتقة الأولى

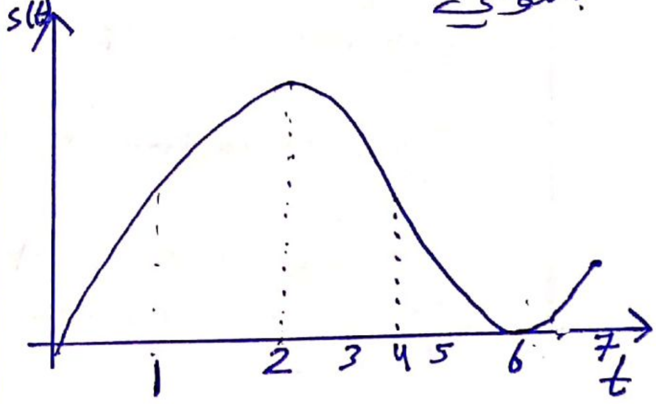
f': 0 | $+++$ | $\frac{1}{9}$ | $---$ | 0.16

عند $x=\frac{1}{9}\ cm^3$ يكون الحد الأقصى لضغط الدم وقيمته

$B(\frac{1}{9})=(305)(\frac{1}{9})^2-1830(\frac{1}{9})^3$

$\simeq \underline{1.26}$ ← الحد الأقصى لضغط الدم

يمثل الاقتران $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني



(39) جد قيم t التي تكون عندها الجسم في حالة سكون.

(40) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب

(41) اذا كان تسارع الجسم صفراً عند $t=4$ فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

الحل:

في رسمة $s(t)$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي عند المماس الافقي حيث $V(t)=0$

(39) $t = 2$ و 6 "القمة والقاع"

اعتبر $s(t) \leftarrow f(x)$ معطيا رسمة $f(x)$

$V(t) \leftarrow f'(x)$

$a(t) \leftarrow f''(x)$

$V(t)$: + + + (0) ... − − − (2) ... (6) + + +

نتعامل مع صاعد + + +

هابط − − −

(40) يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترات (6 و 7) و (0 و 2)

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة (2 و 6)

(41) لتحديد اشارة $a(t)$ من $s(t)$ حسب اتجاه التقعر

$a(t)$: − − − (0) ... (4) + + + (7)

تتزايد السرعة المتجهة في الفترة (4 و 7)

وتتناقص السرعة المتجهة في الفترة (0 و 4)

---

(42) يمثل الاقتران $f(x)= \frac{1500}{x^2-6x+10}-150$

الربح الاسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من انتاجه، حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة، جد عدد مكبرات الصوت التي تحقق اكبر ربح ممكن

الحل: المطلوب قيمة x التي عندها عظمى مطلقة

لاحظ المقام مميزه سالب وعليه

43

الحل:

$V(t) = 3t^2 - 10t + 4$

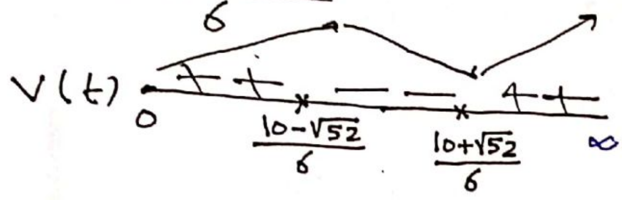
نضع $V = 0$

$3t^2 - 10t + 4 = 0$

نحل على المميز

$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(3)(4)}}{(2)(3)}$

$t = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6}$



يتحرك في الاتجاه الموجب في الفترة

$\left(0, \frac{10-\sqrt{52}}{6}\right)$ و $\left(\frac{10+\sqrt{52}}{6}, \infty\right)$

يتحرك في الاتجاه السالب في الفترة

$\left(\frac{10-\sqrt{52}}{6}, \frac{10+\sqrt{52}}{6}\right)$

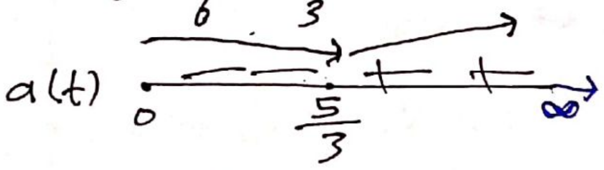
44 $a(t) = 6t - 10$

نضع $a(t) = 0$

$6t - 10 = 0$

$6t = 10$

$t = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$



السرعة تتزايد في الفترة $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$

وتتناقص في الفترة $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

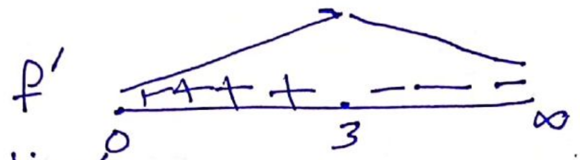
$f'(x) = \frac{(-1500)(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2} = 0$

$f'(x) = 0$ عند $(-1500)(2x-6) = 0$

$2x - 6 = 0$

$2x = 6$

$\boxed{x = 3}$



صفر

بدأ

اذا كانت x

تمثل عدد كميات

للاقتران قيمة عظمى عند $x = 3$

وعليه عدد مكبرات الصوت اللازم

انتاجها وبيعها لتحقيق اكبر ربح

اسبوعيا ممكن هو 3

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$, $t \geq 0$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

حيث s الموقع بالامتار و t الزمن

بالثواني

43 ما الفترات الزمنية التي يتحرك

فيها الجسم في الاتجاه الموجب

والاتجاه السالب

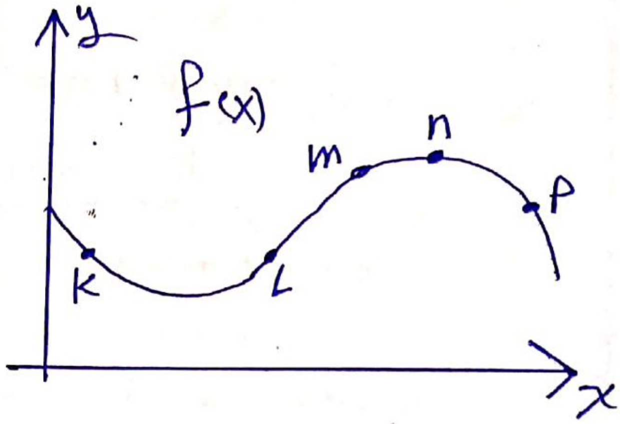
44 ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة

الجسم المتجهة، وما الفترات التي

تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

مهارات التفكير العليا

يبين الشكل المجاور منحنى $f(x)$. احدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط $\{k, L, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تحقق كلاً من الشروط الآتية، مبرراً اجابتي



(45) ان تكون اشارة $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة

(46) ان تكون اشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة

(47) ان تكون اشارة $f'(x)$ سالبة واشارة $f''(x)$ موجبة

الحل:

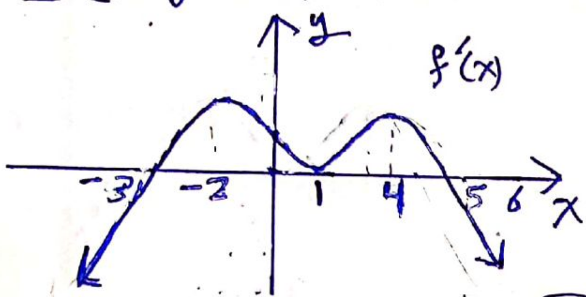
منحنى $f(x)$ صاعد (متزايد) تكون $f'(x)>0$ وهابطاً $f'(x)<0$ وكذلك منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى $\cup$ تكون $f''(x)>0$ ومقعر للأسفل $\cap$ تكون $f''(x)<0$

(45) L صاعد/مقعر للأعلى

(46) P هابط ومقعر للأسفل

(47) K هابط/مقعر للأعلى

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لايجاد كل مما يأتي



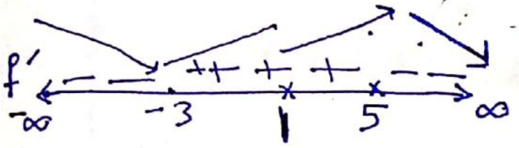
(48) قيم x التي تكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية مبيناً نوعها

(49) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

(50) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى f

(51) الاحداثي x لنقاط الانعطاف

الحل:



(48) للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=-3$ وقيمة عظمى محلية عند $x=5$

(49) $f(x)$ متزايد في الفترة $(-3, 5]$

$f(x)$ متناقص في الفترات $(-\infty, -3]$ و $[5, \infty)$

(50) من رسمه $f'(x)$

صاعد تقعر للأعلى

هابط تقعر للأسفل

القمة والقاع

نقاط الانعطاف

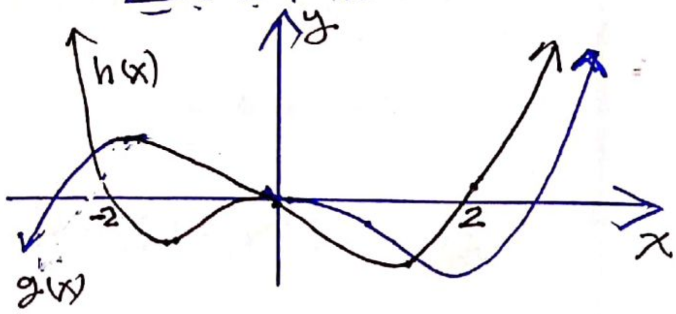
f'': $+++$ على $(-\infty, -2)$ ، $---$ على $(-2, 1)$ ، $+++$ على $(1, 4)$ ، $---$ على $(4, \infty)$

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\infty, -2)$ و $(1, 4)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(-2, 1)$ و $(4, \infty)$

(51) عند $x = -2$ و 1 و 4 نقاط انعطاف

(52) استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يمثل مشتقة للآخر، مبررًا إجابتي



الحل: $h(x) = g'(x)$ «معطى بالسؤال احدهما مشتقة لآخر»

السبب:

عند $x < -2$ $g(x)$ متزايد و $h(x) > 0$ وهذا ينسجم مع كون h مشتقة $g(x)$

بينما في هذه الفترة نفسها h متناقصة و g يحافظ على الاشارة السالبة وهذا يؤكد ان g ليست مشتقة h وبالنظر لباقي الفترات نستنتج نفس ما حدث عند $x < 2$ وكذلك للاقتران g قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ ونلاحظ ان $h(-2) = 0$ ما يؤكد ان $g'(x) = h(x)$

(53) اذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، جد القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x) = x^a(1-x)^b$ في الفترة $[0, 1]$

الحل:

$$f'(x) = (x^a)(-b(1-x)^{b-1}) + (1-x)^b a x^{a-1}$$

ضع $f' = 0$

$$-b x^a (1-x)^{b-1} + (1-x)^b a x^{a-1} = 0$$

عامل مشترك

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x) - bx) = 0$$

$x = 0$ ، $x = 1$

$$a - ax - bx = 0$$
$$ax + bx = a$$
$$x(a+b) = a$$
$$x = \frac{a}{a+b}$$

$\boxed{0 < a < a+b \quad \text{قسمة على } a+b}$

بما أن a و b موجبان فإن

$$0 < \frac{a}{a+b} < 1$$

$f(0) = 0$

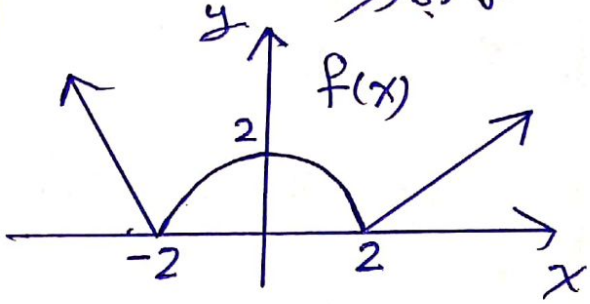
$f(1) = 0$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b$$
$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\frac{\cancel{a}+b-\cancel{a}}{a+b}\right)^b$$
$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\frac{b}{a+b}\right)^b > 0$$

اذن القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي $f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\frac{b}{a+b}\right)^b$

كتاب التمارين

① جد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران $f(x)$ الممثل بيانياً في الشكل المجاور



الحل :-

القيم الحرجة هي $x = -2$ و 2 و 0

غير موجودة — مماس أفقي

للاقتران قيمة صغرى محلية مطلقة عند $x = -2$ هي $f(-2) = 0$ و $x = 2$: $f(2) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ وهي $f(0) = 2$

جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة

② $f(x) = 1 + \cos^2 x$ ، $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

③ $f(x) = (x^2 - 4)^3$ ، $[-2, 3]$

④ $f(x) = x - 2\sin x$ ، $[-2\pi, 2\pi]$

⑤ $f(x) = x\ln(x+3)$ ، $[0, 3]$

⑥ $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ، $[-8, -1]$

⑦ $f(x) = 5e^x - e^{2x}$ ، $[-1, 2]$

الحل :-

② $f'(x) = -2\cos x \sin x$

نضع $f'(x) = 0$

$-2\cos x \sin x = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ، $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi$

القيم الحرجة هي $x = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$f(\pi) = 1 + \cos^2\pi = 1 + 1 = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = 2$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ وهي محلية

③ $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2(2x)$

نضع $f' = 0$

$6x(x^2 - 4)^2 = 0$

$x = 0$ ، $x = \pm 2$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = 2$

$f(0) = (0 - 4)^3 = -64$

$f(2) = (4 - 4)^3 = 0$

$f(-2) = (4 - 4)^3 = 0$

$f(3) = (9 - 4)^3 = 125$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ وهي $f(0) = -64$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ وهي $f(3) = 125$

$f(0) = 0\ln 3 = 0$

$f(3) = 3\ln 6$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ وهي $f(3)=3\ln 6$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

---

⑥ $f' = 1-\frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x)=0$ عند $x^2-4=0$

$x = 2$ و -2

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=0$ خارج المجال

القيم الحرجة هي -2

$f(-8) = -8+\frac{4}{-8} = -8-\frac{1}{2} = -\frac{17}{2}$

$f(-1) = -1-4 = -5$

$f(-2) = -2-2 = -4$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=-2$ وهي $f(-2)=-4$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-8$ وهي $f(-8)=-\frac{17}{2}$

---

⑦ $f'(x) = 5e^{x}-2e^{2x}$

نضع $f'(x)=0$

$5e^{x}-2e^{2x}=0$

$e^{x}(5-2e^{x})=0$

$e^{x}\neq 0$

$5-2e^{x}=0$

$e^{x}=\frac{5}{2} \longrightarrow x=\ln\frac{5}{2}$

القيم الحرجة هي $x=\ln\frac{5}{2}$

④ $f'(x) = 1-2\cos x$

نضع $f'(x)=0$

$1-2\cos x=0$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{5\pi}{3}$

عند وجود فترة سالبة وخاصية عند هنا $\cos x$ نأخذ القيم السالبة

$f(-2\pi) = -2\pi-2\sin(-2\pi) = -2\pi$

$f(2\pi) = 2\pi-2\sin 2\pi = 2\pi$

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}-\sqrt{3} = \frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}-2\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}+\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$

$f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5\pi}{3}-2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}+\sqrt{3} = \frac{5\pi+3\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{5\pi}{3}) = -\frac{5\pi}{3}-2\sin(-\frac{5\pi}{3}) = -\frac{5\pi}{3}-\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}-5\pi}{3}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=\frac{5\pi}{3}$ وهي $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5\pi+3\sqrt{3}}{3}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-\frac{5\pi}{3}$ وهي $f(-\frac{5\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}-5\pi}{3}$

---

⑤ $f'(x) = x\frac{1}{x+3}+\ln(x+1)$

$f'>0$ $= \frac{x}{x+3}+\ln(x+1)$

هنا $f'(x)\neq 0$ حيث موجب + موجب $\neq 0$

وكذلك عند $x=-3$ غير موجودة وهي خارج المجال

وعليه لا توجد قيم حرجة

الحل:

(8) $f' = \cos x - \sin x$

نضع $f' = 0$

نقسم على $\cos x$

$\cos x - \sin x = 0$

$1 - \tan x = 0$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

القيم الحرجة هي $x = \frac{\pi}{4}$ ، $x = \frac{5\pi}{4}$

f': $0 \;\; + + \;\; \frac{\pi}{4} \;\; - - \;\; \frac{5\pi}{4} \;\; + + \;\; 2\pi$

$f(x)$ متزايد $(0, \frac{\pi}{4}]$ و $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$

$f(x)$ متناقص $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{4}$ وهي $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{5\pi}{4}$ وهي $f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

(9) المجال $R - \{5\}$

$f' = \frac{(x-5) - x}{(x-5)^2} = \frac{-5}{(x-5)^2}$

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x = 5$ خارج المجال

f': $-\infty \;\; - - - \;\; 5 \;\; - - - \;\; \infty$

$f(x)$ متناقص $(-\infty, 5)$ و $(5, \infty)$

ولا توجد قيم قصوى محلية

$f(-1) = 5e^{-1} - e^{-2} = \frac{5}{e} - \frac{1}{e^2}$

$= \frac{5e - 1}{e^2}$

$f(2) = 5e^2 - e^4$

$f(\ln \frac{5}{2}) = 5e^{\ln \frac{5}{2}} - e^{2\ln \frac{5}{2}}$

$= \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \ln \frac{5}{2}$ وهي $f(\ln \frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 2$ وهي $f(2) = 5e^2 - e^4$

جد فترات التزايد والتناقص، ثم جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي

(8) $f(x) = \sin x + \cos x$ ، $[0, 2\pi]$

(9) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

(10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

(11) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$

(12) $f(x) = e^{-x^2}$

(13) $f(x) = 2^{x^2 - 3}$

المجال R
جذر فردي

(10) $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x)$

$= \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

$f'(x)=0$ عند $2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x^2-1=0$

$x=\pm 1$

	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$- - -$		$- - -$		$+ + +$		$+ + +$	

$(0, \infty)$ متزايد $f(x)$

$(-\infty, 0)$ متناقص $f(x)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=0$

وهي $f(0)=-1$

المجال R لأن ما داخل اللوغاريتم موجب حيث المميز سالب

(11) $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$

$f'(x)=0$ عند $2x-3=0$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

القيم الحرجة هي $x=\frac{3}{2}$

	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
f'		$- - -$		$+ + +$	

$(\frac{3}{2}, \infty)$ متزايد $f(x)$

$(-\infty, \frac{3}{2})$ متناقص $f(x)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{3}{2}$ وهي $f(\frac{3}{2})=\ln\frac{7}{4}$

---

(12) $f'(x) = -2x e^{-x^2}$

ضع $f'=0$

$-2x e^{-x^2}=0$

$x=0$ ، $e^{-x^2}\neq 0$

القيم الحرجة هي $x=0$

	$-\infty$		0		∞
f'		$+ + +$		$- - -$	

$(-\infty, 0)$ متزايد $f(x)$

$(0, \infty)$ متناقص $f(x)$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

---

(13) $f' = (2x)(\ln 2)(2^{x^2-3})$

ضع $f'=0$

$(2x)(\ln 2)(2^{x^2-3})=0$

$x=0$ ، $2^{x^2-3}\neq 0$

القيم الحرجة هي $x=0$

	$-\infty$		0		∞
f'		$- - -$		$+ + +$	

$(0, \infty)$ متزايد $f(x)$

$(-\infty, 0)$ متناقص $f(x)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=0$ وهي $f(0)=2^{-3}$

$=\frac{1}{8}$

جد فترات التقعر الى الاعلى والى الاسفل ونقاط الانعطاف (ان وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي

(14) $f(x)=4x^3-3x^2-6x+12$

(15) $f(x)=x^6-3x^4$

(16) $f(x)=(2+2x-x^2)^2$

(17) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

(18) $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

(19) $f(x)=2x-\tan x$ ، $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

الحل :-

(14) $f'(x)=12x^2-6x-6$

$f''(x)=24x-6$

نضع $f''=0$

$24x-6=0$

$24x=6$

$x=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

f'' : $-\infty$ — — — $\frac{1}{4}$ + + + ∞

$f(x)$ مقعر للأعلى $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=\frac{1}{4}$ وهي $\left(\frac{1}{4},\frac{83}{8}\right)$

(15) $f'(x)=6x^5-12x^3$

$f''(x)=30x^4-36x^2$

نضع $f''=0$

$30x^4-36x^2=0$

$6x^2(5x^2-6)=0$

$x=0$

$5x^2=6$

$x^2=\frac{6}{5}$

$x=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

f'' : $-\infty$ + + $-\sqrt{\frac{6}{5}}$ — — 0 — — $\sqrt{\frac{6}{5}}$ + + ∞

$f(x)$ مقعر للأعلى $\left(\sqrt{\frac{6}{5}},\infty\right)$ و $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند $x=\sqrt{\frac{6}{5}}$ ، $x=-\sqrt{\frac{6}{5}}$ وهي

$\left(\sqrt{\frac{6}{5}},\frac{-324}{125}\right)$

$\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},\frac{-324}{125}\right)$

---

(16) $f'=2(2+2x-x^2)(2-2x)$

$f'=(4+4x-2x^2)(2-2x)$

$f''=(4+4x-2x^2)(-2)+(2-2x)(4-4x)$

$f''=-8-8x+4x^2+8-8x-8x+8x^2$

$f''=12x^2-24x$

نضع $f''=0$

$12x^2-24x=0$

$12x(x-2)=0$

$x=0$ ، $x=2$

f'' : $-\infty$ + + 0 — — 2 + + ∞

$f(x)$ مقعر للأعلى $(2,\infty)$ ، $(-\infty,0)$ ومقعر للأسفل $(0,2)$

للاقتران $f(x)$ نقط انعطاف عند $x=0$ ، $x=2$

وهي $(0,4)$ ، $(2,4)$

(17)

$$f'(x) = (x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right) + \sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{4-x^2}$$ نوحد مقامات

$$f'(x) = \frac{-x^2+4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'' = \frac{(\sqrt{4-x^2})(-4x) - (4-2x^2)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)}{4-x^2}$$

$$f'' = \frac{-4x\sqrt{4-x^2} + \frac{4x-2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$ نوحد مقامات

$$f'' = \frac{-4x(4-x^2)+4x-2x^3}{(4-x^2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$f'' = \frac{-16x+4x^3+4x-2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'' = \frac{2x^3-12x}{(4-x^2)(\sqrt{4-x^2})}$$

مجال $f(x)$ هو $[-2,2]$ نأخذ المنطقة الموجبة للجذر الزوجي

$f''(x)=0$ عند $2x^3-12x=0$

$2x(x^2-6)=0$

$x=0$ ، $x=\pm\sqrt{6}$ مهمل خارج المجال

f'': $+ + +$ | $- - -$; $-2 \quad 0 \quad 2$

$f(x)$ مقعر لأعلى في $(-2,0)$

ومقعر لأسفل في $(0,2)$

للاقتران نقطة انعطاف عند $x=0$

وهي $(0,0)$

(18)

$$f' = 2x + \frac{2x}{x^4}$$ المجال $R-\{0\}$

$$f' = 2x + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{(2)(3x^2)}{x^6} = 2 - \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x^4-6}{x^4}$$

$2x^4-6=0$ عند $f''(x)=0$

$x^4=3$

$x=\sqrt[4]{3}$ ، $-\sqrt[4]{3}$

f'': $++$ | $- - -$ | $- - -$ | $++$; $-\infty \quad -\sqrt[4]{3} \quad 0 \quad \sqrt[4]{3} \quad \infty$

$f(x)$ مقعر لأعلى $(-\infty,-\sqrt[4]{3})$ و $(\sqrt[4]{3},\infty)$

$f(x)$ مقعر لأسفل $(-\sqrt[4]{3},0)$ ، $(0,\sqrt[4]{3})$

للاقتران نقط انعطاف عند $x=\sqrt[4]{3}$ و $-\sqrt[4]{3}$

وهما $\left(\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(-\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(19)

$$f' = 2 - \sec^2 x$$

$$f'' = -2\sec^2 x \tan x$$

نضع $f''=0$

$-2\sec^2 x\tan x = 0$

$\sec^2 x \neq 0$; $\tan x = 0$, $x=0$

f'': $+ + +$ | $- - -$; $-\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2}$

$f(x)$ مقعر لأعلى $(-\frac{\pi}{2},0)$ ولأسفل $(0,\frac{\pi}{2})$

للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف عند $x=0$

وهي $(0,0)$

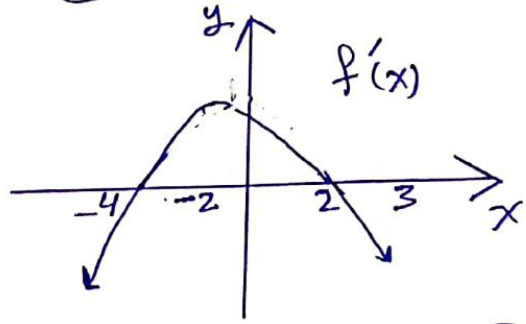
ملاحظة: كل معادلة مثلثية الأفضل تحويلها بدلالة $\cos x / \sin x$

$$-2\sec^2 x\tan x = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

0 اصفار البسط

$\frac{\pi}{2}$ اصفار المقام

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي



(20) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مبيناً نوعها

(21) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

الحل:

f' : $- - -$ ، -4 ، $+ + +$ ، 2 ، $- - -$

$-\infty \quad -4 \quad 2 \quad \infty$

(20)

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=2$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=-4$

(21) $f(x)$ متزايد على $(-4,2)$

$f(x)$ متناقص على $(2,\infty)$ و $(-\infty,-4)$

جد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن)

(22) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, $[0,2\pi]$

(23) $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$

(24) $f(x)=(x^2-3)e^x$

الحل:

(22) $f'=2\cos x-2\sin 2x$

نضع $f'=0$

$$2\cos x-2\sin 2x=0$$
$$2\cos x-4\sin x\cos x=0$$
$$2\cos x(1-2\sin x)=0$$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$1-2\sin x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

القيم الحرجة هي $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$

$$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\pi=-2+4=2>0$$
$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{3\pi}{2}-4\cos 3\pi=2+4=6>0$$
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{6}-4\cos\frac{\pi}{3}=-1-2=-3<0$$
$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{5\pi}{6}-4\cos\frac{5\pi}{3}=-1-2=-3<0$$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{\pi}{2}$ وهي $f(\frac{\pi}{2})=1$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{3\pi}{2}$ وهي $f(\frac{3\pi}{2})=-3$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{6}$ وهي $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{5\pi}{6}$ وهي $f(\frac{5\pi}{6})=\frac{3}{2}$

(23) المجال $R-\{0\}$

$f'(x)=3x^2-\frac{48}{x^2}$

$f'(x)=\frac{3x^4-48}{x^2}$

$f'(x)=0$ عند $3x^4-48=0$

$x^4=16$

$x=2$ و -2

أس زوجي عند جذر الطرفين نوجد قيمتان

القيم الحرجة هي $x=-2$ و $x=2$

$f''(x)=6x+\frac{(48)(2x)}{x^4}$

$f''(x)=6x+\frac{96}{x^3}$

$f''(2)=12+\frac{96}{8}=12+12=24>0$

$f''(-2)=-12+\frac{96}{-8}=-12-12=-24<0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=2$

وهي $f(2)=-32$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=-2$

وهي $f(-2)=-32$

(24) $f'(x)=(x^2-3)e^x+2xe^x$

نضع $f'=0$

$(x^2-3)e^x+2xe^x=0$

$e^x(x^2-3+2x)=0$

$e^x\neq 0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ و $x=1$

$f''(x)=(x^2-3)e^x+2xe^x+2xe^x+2e^x$

$f''(1)=-2e+2e+2e+2e=4e>0$

$f''(-3)=6e^{-3}-6e^{-3}-6e^{-3}+2e^{-3}=-4e^{-3}<0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=-3$

وهي $f(-3)=\frac{6}{e^3}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x=1$

وهي $f(1)=-2e$

(25) اذا كان للاقتران $f(x)=ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(3,12)$ وقطع المحور y في النقطة $(0,1)$ جد قيمة كل من الثوابت a و b و c

الحل:

$(3,12)$ عظمى محلية $\rightarrow f'(3)=0$ ، $f(3)=12$

$f(x)$ يمر بـ $(0,1)$ $\rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=2ax+b$

$f'(3)=0$

$6a+b=0$ —— (1)

$f(3)=12$

$9a+3b+c=12$ —— (2)

$f(0)=1$

$\boxed{c=1}$

نعوض $c=1$ في معادلة (2) لتصبح

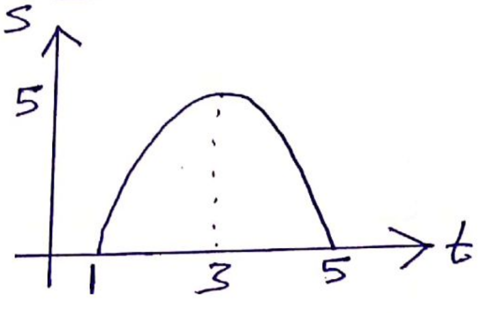
$9a+3b+1=12$

$9a+3b=11$ —— (3)

بحل المعادلتان (2) و (3) ينتج

$a=\frac{-11}{9}$ و $b=\frac{22}{3}$

يمثل الاقتران $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني



(26) جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون

(27) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب

(28) ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

الحل:

(26) عند المماس الأفقي $t = 3$

(27) $s(t)$ صاعد $+++$

$s(t)$ هابط $---$

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب $(1, 3)$

يتحرك الجسم في الاتجاه السالب $(3, 5)$

(28) نلاحظ منحنى $s(t)$ مقعر للأسفل

وعليه سرعة الجسم تتناقص في $(1, 5)$

ولا تتزايد

اذا كان الاقتران

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

اجب عن الأسئلة الثلاثة تباعاً

(29) اذا كان لمنحنى الاقتران f مماس افقي عند كل من $(-2, -73)$ والنقطة $(0, -9)$ جد قيمة كل من الثوابت a و b و c و d

(30) اذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي جد احداثيي هذه النقطة

(31) صنف كلاً من النقاط الثلاث الى صغرى محلية وعظمى محلية (ان امكن)

الحل:

(29) مماس أفقي عند

$f'(-2)=0$
$f(-2)=-73$ $(-2, -73)$

$f'(0)=0$
$f(0)=-9$ $(0, -9)$

$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0$

$\boxed{c = 0}$

$f'(-2) = 0$

$-96 + 12a - 4b = 0$ نقسم على 4

$3a - b = 24$ —— (1)

$f(0) = -9$

$\boxed{d = -9}$

$f(-2) = -73$

$48 - 8a + 4b - 2c + d = -73$

نعوض مكان c و d

$48 - 8a + 4b - 9 = -73$

$-8a + 4b = -112$

$-2a + b = -28$ —— (2)

بحل المعادلتين (1) و (2) ينتج

$a = -4$ و $b = -36$

(30) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 - 9$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

نضع $f' = 0$

$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \quad /12$

$x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x^2 - x - 6) = 0$

$x(x-3)(x+2) = 0$

$x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -2$

في السؤال موجودات

وعليه عند $x=3$ منحنى $f(x)$ له مماس أفقي معه $(3, -198)$

(31) نستخدم اختبار المشتقة الثانية أو الأول

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$

$f''(0) = -72 < 0$

$f''(-2) = 144 + 48 - 72 = 120 > 0$

$f''(3) = 324 - 72 - 72 = 180 > 0$

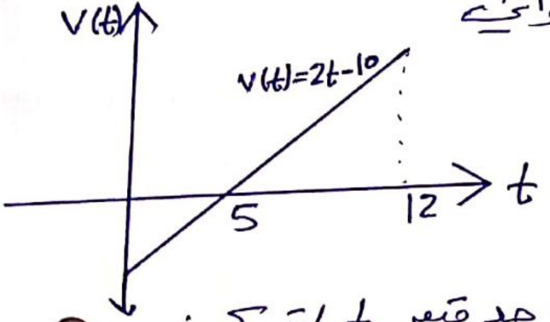
وعليه:

النقطة $(-2, -73)$ نقطة صغرى محلية

النقطة $(0, -9)$ نقطة عظمى محلية

النقطة $(3, -198)$ نقطة صغرى محلية

يمثل الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني



(32) جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون

(33) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب

(34) ما الفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة

الحل :-

(32)
رسمة $V(t)$ نقاط التقاطع مع محور x
عندها الجسم في حالة سكون حيث $V(t)=0$
وعليه $t = 5$

---

(33) رسمة $V(t)$ فوق محور x
يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب
تحت محور x يتحرك الجسم في الاتجاه السالب
وعليه :-
يتحرك في الاتجاه الموجب في الفترة $(5,12)$
يتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(0,5)$

---

(34) رسمة $V(t)$ صاعد هنا السرعة تتزايد أما هابط هنا السرعة تتناقص وبما أنه متصاعد دائماً
وعليه السرعة تتزايد على الفترة $(0,12)$

---

(35) اذا كان للاقتران $f(x)=ax^3+bx^2+c$
قيمة قصوى محلية عند النقطة $(2,11)$ ونقطة انعطاف عند $(1,5)$ جد الثوابت a و b و c

الحل :-

$f'(2)=0$ ، $f(2)=11$ ← $(2,11)$ قصوى محلية

$(1,5)$ انعطاف ← $f''(1)=0$ ، $f(1)=5$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$
$$f''(x)=6ax+2b$$

$$f''(1)=0$$
$$6a+2b=0$$
$$3a+b=0 \quad (1)$$

$$f(2)=11$$
$$8a+4b+c=11 \quad (2)$$

$$f'(2)=0$$
$$12a+4b=0$$
$$3a+b=0 \quad (1)$$ مكرر

$$f(1)=5$$
$$a+b+c=5 \quad (3)$$

نقوم بحل المعادلات حيث نأخذ معادلة (2) مع (3) ونطرح

$$7a+3b=6 \quad (4)$$

نحل معادلة (1) مع (4)

$$3a+b=0 \xrightarrow{\text{اضرب بـ } 3} 9a+3b=0$$
$$7a+3b=6 \longrightarrow 7a+3b=6$$
$$2a=-6$$
$$\boxed{a=-3}$$

نعوض في (1) :-

$$-9+b=0$$
$$\boxed{b=9}$$

نعوض في (2)

$$-24+36+c=11$$
$$\boxed{c=-1}$$

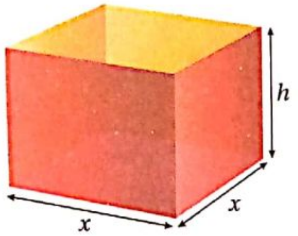
الدرس الثالث
تطبيقات القيم القصوى

بحسب الاقتران.

①

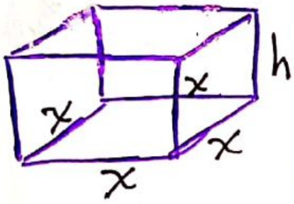
أتحقَّق من فهمي

ترغب شـركة في تصميم صنـدوق مفتوح مـن الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080\ cm^2$ كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.



الاقتران المطلوب :-

$V = x^2 h$ «حجم الصندوق»



علاقة مساعدة :-

$A = 4xh + x^2$ «مساحة سطح الصندوق»

$1080 = 4xh + x^2$

اجعل h موضوع قانون

$4xh = 1080 - x^2$

$h = \frac{1080}{4x} - \frac{x^2}{4x}$

$h = \frac{270}{x} - \frac{x}{4}$

نعوضها في الاقتران المطلوب

$V = x^2\left(\frac{270}{x} - \frac{x}{4}\right)$

اشتق $V = 270x - \frac{1}{4}x^3$

$V' = 0$ ضع $V' = 270 - \frac{3}{4}x^2$

$270 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$x^2 = 360$

نهمل السالب $x = \sqrt{360} = \sqrt{(36)(10)}$

$x = 6\sqrt{10}$

القيم الحرجة هي $x = 6\sqrt{10}$

توضيح

مساحة السطح = مساحة الجانبية + القاعدة

$x^2 + 4xh =$

المجال هنا هو بحيث إشارة الحجم واختيار المنطقة الموجبة

$0 \le x < \sqrt{1080}$

V': 0 (+ +) $6\sqrt{10}$ (− −) $\sqrt{1080}$

باستخدام اختبار المشتقة الأولى عند $x = 6\sqrt{10}$ عظمى مطلقة

يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}\ cm$ وعندها يكون الارتفاع

$h = \frac{270}{6\sqrt{10}} - \frac{6\sqrt{10}}{4}$

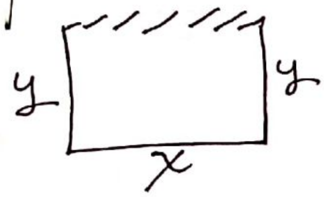
$h = 3\sqrt{10}\ cm$

2

أتحقَّق من فهمي

خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



M طول السياج

A مساحة الحظيرة

الاقتران المطلوب :-

$M = 2y + x$ «طول السياج»

علاقة مساعدة :-

$A = xy$ «المساحة»

$245000 = xy$

اجعل y موضوع قانون

$y = \frac{245000}{x}$

عوضنا في الاقتران المطلوب

$M = 2\left(\frac{245000}{x}\right) + x$

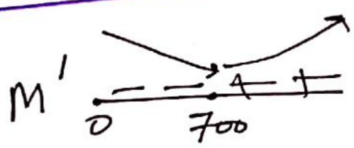
$M = \frac{490000}{x} + x$

$M' = \frac{-490000}{x^2} + 1$

$M' = \frac{x^2 - 490000}{x^2}$ توحيد مقامات

عند $M' = 0$ $x^2 - 490000 = 0$ «اساوي البسط بالصفر»

$x = \sqrt{490000} = 700$ نهمل السالب



باستخدام اختبار المشتقة الاولى

عند $x = 700$ صغرى مطلقة

يكون طول السياج اقل ما يمكن عندما $x = 700\,m$

$y = \frac{245000}{700}$

$= 350\,m$

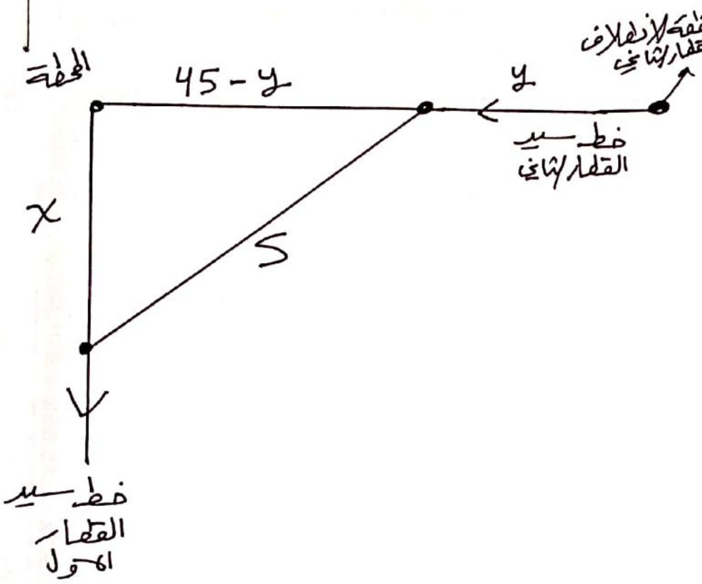
3

أتحقَّق من فهمي

انطلـق قطار مـن إحـدى المحطّات السـاعة 10:00 a.m.، وتحـرَّك في اتجـاه الجنوب بسـرعة 60 km/h، حيـث المحطَّـة التالية. وفـي الوقت نفسـه، انطلق قطار آخـر نحو الغرب بسـرعة 45 km/h، ثم وصل إلى محطَّة انطلاق القطار الأوَّل الساعة 11:00 a.m.. في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

الحل :-

القطار الثاني وصل الى محطة انطلاق الاول بعد مرور ساعة وعليه المسافة $(45)(1)=45$



الاقتران المطلوب

$$S=\sqrt{x^2+(45-y)^2}$$

نحول بدلالة الزمن

$$x=60t$$
$$y=45t$$

$$S=\sqrt{(60t)^2+(45-45t)^2}$$

$$S=\sqrt{3600t^2+(45-45t)^2}$$

$$S'=\frac{7200t+2(45-45t)(-45)}{2\sqrt{3600t^2+(45-45t)^2}}$$

فك أقواس وتبسيط

$$S'=\frac{11250t-4050}{2\sqrt{3600t^2+(45-45t)^2}}$$

نضع $S'=0$ «نساوي البسط بالصفر»

$$11250t-4050=0$$

$$t=\frac{4050}{11250}=0.36$$

S': 0 — — 0.36 + + 1

باستخدام اختبار المشتقة الاولى عند $t=0.36$ صغرى مطلقة

يكون القطاران اقرب ما يمكن الى بعضهما عندما $t=0.36\ h$ أي بعد 21 دقيقة و 36 ثانية وتكون الساعة حينئذٍ 10:21:36

توضيح

$$0.36\ h=(0.36)(60)=21.6\ min$$

$$(0.6)(60)=36\ s$$

أتحقَّق من فهمي

(4)

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًا بسعر 350 JD للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره 10 JD من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.

الحل: سعر بيع الشاشة $(350-10x)$

عدد الشاشات المباعة $(200+20x)$

الايراد = عدد الشاشات المبيعة × سعر بيع الشاشة بعد الخصم

$$R(x)=(350-10x)(200+20x)$$

$$R'(x)=(350-10x)(20)+(200+20x)(-10)$$

$$R'(x)=7000-200x-2000-200x$$

$$R'(x)=-400x+5000$$

عند $R'(x)=0$

$$-400x+5000=0$$

$$400x=5000$$

$$x=\frac{5000}{400}$$

$$x=12.5$$

R': $+ + \quad -- $ (0, 12.5)

باستخدام اختبار المشتقة الاولى عند $x=12.5$ [illegible]

يحقق المتجر اعلى ايراد عندما يكون بيع الشاشة الواحدة

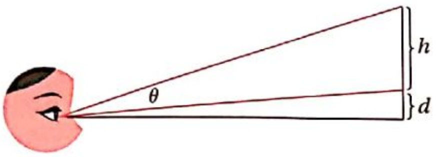
$$350-10(12.5)$$

$$350-125=225$$

الثانية؟ أبرر إجابتي.

5 **أتحقَّق من فهمي**

نظرت سـارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور.



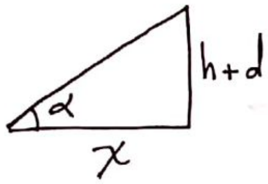
كم مترًا يجب أنْ تبتعد سـارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟

علاقة مساعدة
$\theta = \alpha - \beta$

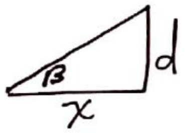
الاقتران المطلوب

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)(\tan\beta)}$$



$$\tan\theta = \frac{\frac{h+d}{x} - \frac{d}{x}}{1 + \left(\frac{h+d}{x}\right)\left(\frac{d}{x}\right)}$$



$$\tan\theta = \frac{\frac{h}{x}}{1 + \frac{hd+d^2}{x^2}}$$

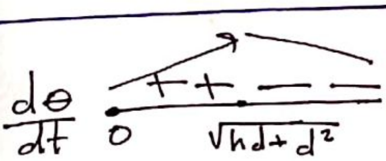
$$\tan\theta = \frac{\frac{h}{x}}{\frac{x^2+hd+d^2}{x^2}}$$

اشتق

$$\tan\theta = \frac{hx}{x^2+hd+d^2}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+hd+d^2)(h) - (hx)(2x)}{(x^2+hd+d^2)^2}$$

$$= \frac{x^2h + h^2d + d^2h - 2hx^2}{(x^2+hd+d^2)^2}$$



باستخدام اختبار المشتقة الأولى عند $x = \sqrt{hd+d^2}$ عظمى مطلقة

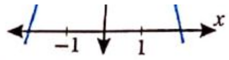
عند $\frac{d\theta}{dx} = 0$ ، $x^2h + h^2d + d^2h - 2hx^2 = 0$ نقسم على h (المساوي البسط بالصفر)

$$x^2 + hd + d^2 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = hd + d^2$$

$$x = \sqrt{hd + d^2}$$

يجب ان تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{hd+d^2}$ لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن.



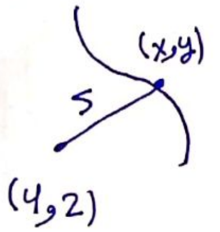
(6)

أتحقَّق من فهمي

أجـد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = \sqrt{8x}$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(4, 2)$.

الحل :-

الاقتران المطلوب



هنا (x,y) نقطة تقع على $f(x)$ والمسافة بينهما هي S

((البعد بين النقطتين)) $S = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

العلاقة المساعدة

$y = f(x) = \sqrt{8x}$

$$S = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\cancel{2}(x-4) + \cancel{2}(\sqrt{8x}-2)\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\sqrt{8x}}\right)}{\cancel{2}\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$= \frac{x - \cancel{4} + \cancel{4} - \frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

عندما $\frac{ds}{dx} = 0$ $x - \frac{8}{\sqrt{8x}} = 0$

$$\frac{x\sqrt{8x} - 8}{\sqrt{8x}} = 0$$

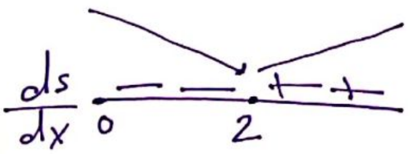
$$x\sqrt{8x} - 8 = 0$$

نربع $x\sqrt{8x} = 8$

$$8x^3 = 64$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$



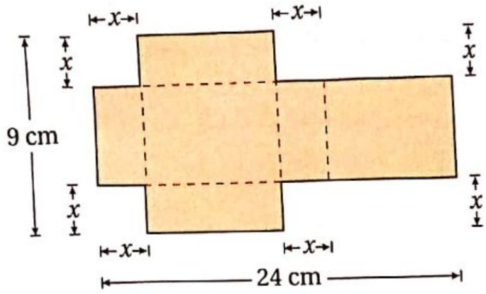
باستخدام اختبار المشتقة الاولى عند $x=2$ صغرى مطلقة

عند $x=2$ فان $y = \sqrt{8x} = \sqrt{16} = 4$

وعليه اقرب نقطة من نقاط المنحنى $f(x)$ للنقطة $(4,2)$ هي $(2,4)$

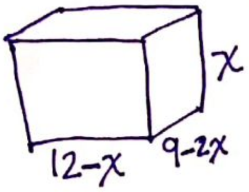
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

قطعة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:



1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أُحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

الحل :-



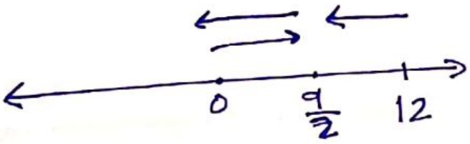
① $V = x(9-2x)(12-x)$

$V = (9x-2x^2)(12-x)$

$= 108x - 9x^2 - 24x^2 + 2x^3$

$= 2x^3 - 33x^2 + 108x$

② لتحديد المجال : الأبعاد يجب ان تكون موجبة



$x > 0$

$12 - x > 0$

$x < 12$

$9 - 2x > 0$

$2x < 9$

$x > \frac{9}{2}$

وبتحديد المنطقة المشتركة تكون المجال

$0 < x < \frac{9}{2}$

③

$V'(x) = 6x^2 - 66x + 108$

ضع $V' = 0$

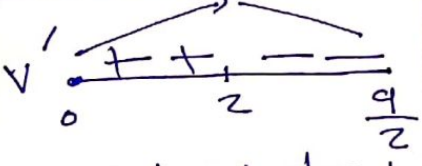
$6x^2 - 66x + 108 = 0$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$(x-2)(x-9) = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = 9$ تهمل

عند $x = 2$ حرجة



باستخدام اختبار المشتقة الأولى عند $x=2$ عظمى مطلقة.

وعليه فان حجم الصندوق يكون اكبر ما يمكن عندما تكون ابعاده

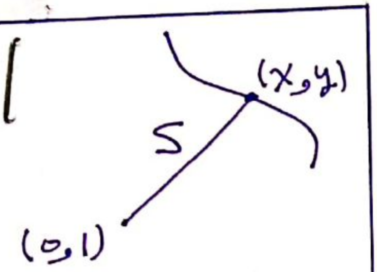
$x = 2$

$12 - x = 10$

$9 - 2x = 5$

4 أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2 + y^2 = 4$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 1)$.

الاقتران المطلوب



النقطة (x,y) تقع على منحنى العلاقة والمسافة بينها وبين النقطة $(0,1)$ هي S

"مسافة بين نقطتين"

$$S=\sqrt{(y-1)^2+(x-0)^2}$$

$$S=\sqrt{(y-1)^2+x^2}$$

علاقة مساعدة

اجعل x^2 موضوع قانون

$$y^2+4x^2=4$$

$$4x^2=4-y^2$$

نقسم على 4

$$x^2=1-\frac{y^2}{4}$$

اشتق

$$S=\sqrt{(y-1)^2+1-\frac{y^2}{4}}$$

$$S'=\frac{2(y-1)-\frac{2y}{4}}{2\sqrt{(y-1)^2+1-\frac{y^2}{4}}}$$

عند $S'=0$

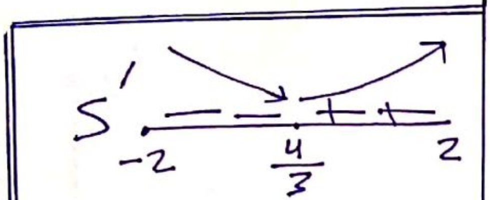
(لتساوي البسط بالصفر!!)

$$2(y-1)-\frac{y}{2}=0$$

$$2y-2-\frac{y}{2}=0$$

$$\frac{3}{2}y=2$$

$$y=\frac{4}{3}$$



عند $y=\frac{4}{3}$ صغرى مطلقة

عند $y=\frac{4}{3}$ فإن

$$x^2=1-\frac{y^2}{4}$$

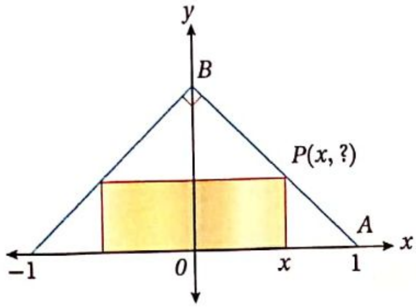
$$x^2=1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

وعليه أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0,1)$ هما $\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$ و $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسـومًا داخل مثلث قائم الزاوية.

وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:



5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

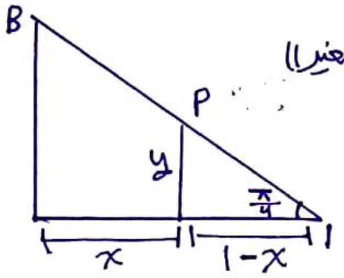
6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يُمكِن.

الحل :-

(5) المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين وعليه قياس زوايا القاعدة $\frac{\pi}{4}$



((المثلث الصغير)) $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{1-x}$

$y = (1-x)\tan\frac{\pi}{4}$

$y = 1-x$

---

(6)

$A = 2xy$

$A = 2x(1-x)$

$A = 2x - 2x^2$ حيث $0 < x < 1$

---

(7)

$A' = 2 - 4x$

$A' = 0$ عند $2-4x = 0$

$4x = 2$

$x = \frac{1}{2}$

$A(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2})^2$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

A': $+ + + +$ على $(0, \frac{1}{2})$ ، $- - -$ على $(\frac{1}{2}, 1)$

عند $x = \frac{1}{2}$ عظمى محلية مطلقة حسب اختبار المشتقة الأولى

---

(8) الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

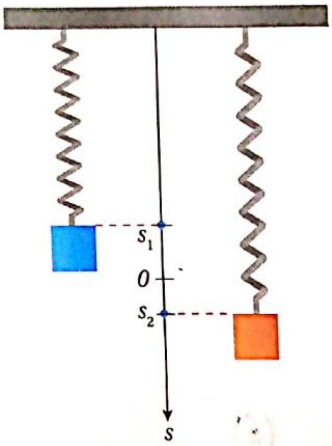
الطول $2x = 2(\frac{1}{2})$

$= 1$

العرض $y = 1-x$

$y = 1 - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$



يُبيِّن الشكل المجاور كتلتين مُعلَّقتين جنبًا إلى جنب في زنبركين. ويُمثِّل الاقتــران: $s_1 = 2\sin t$ والاقتــران: $s_2 = \sin 2t$ موقعي الكتلتين على الترتيب، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

9 أجــد قيمة (قِيَم) t التــي تكون عندها الكتلتان في الموقع نفســه، حيث: $0 < t$.

10 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها المســافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يُمكِن، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.

(9)

$S_1 = S_2$

$2\sin t = \sin 2t$

$2\sin t - \sin 2t = 0$

$2\sin t - 2\sin t\cos t = 0$

$2\sin t(1 - \cos t) = 0$

$2\sin t = 0$ ، $\sin t = 0$

$1 - \cos t = 0$ ، $\cos t = 1$

قيم t هي $t = n\pi$

حيث n عدد طبيعي

(10) نفرض y المسافة الرأسية بين الكتلتين

$y = |S_1 - S_2| = |2\sin t - \sin 2t|$

هنا ندرس اشارة y على الفترة $[0, 2\pi]$

y: 0 $+++$ π $---$ 2π

حالة (1)

$y = 2\sin t - \sin 2t$

$0 \le t \le \pi$

$y' = 2\cos t - 2\cos 2t$

$y' = 0$

$2\cos t - 2\cos 2t = 0$

$2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$

$2\cos t - 4\cos^2 t + 2 = 0$ نقسم على -2

$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$

$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$

$\cos t = \frac{-1}{2}$ ، $t = \frac{2\pi}{3}$

$\cos t = 1$ ، $t = 0$

y': 0 $+++$ $\frac{2\pi}{3}$ $---$ π

$t = \frac{2\pi}{3}$ اختبار المشتقة الاولى عند عظمى مطلقة

$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}$

$y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

اكبر قيمة لـ y في الفترة $[0, \pi]$ هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

حالة (2)

$y = \sin 2t - 2\sin t$

$\pi \le t \le 2\pi$

$y' = 2\cos 2t - 2\cos t$

$y' = 0$

$2\cos 2t - 2\cos t = 0$ نقسم على 2

$\cos 2t - \cos t = 0$

$2\cos^2 t - 1 - \cos t = 0$ نرتب

$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$

$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$

$2\cos t + 1 = 0$ ، $\cos t = \frac{-1}{2}$ ، $t = \frac{4\pi}{3}$

$\cos t = 1$ ، $t = 2\pi$

y': π $+++$ $\frac{4\pi}{3}$ $---$ 2π

$t = \frac{4\pi}{3}$ عظمى مطلقة عند

$y = \sin\frac{8\pi}{3} - 2\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

وعليه قيم t التي تكون عندها المسافة بين الكتلتين اكبر ما يمكن هي

$t = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$

يُمثِّل الاقتران: $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حدَّدته إحدى الشركات، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

11 أجد اقتران الإيراد.

12 أجد اقتران الربح.

13 أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

14 أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أعلى ربح مُمكِن.

الحل :-

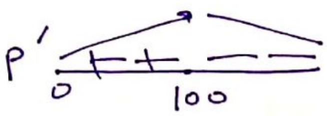
الايراد = عدد القطع $\times$ سعر القطعة

(11)
$$R(x) = x\,p(x)$$
$$R(x) = x(150 - 0.5x)$$
$$R(x) = 150x - 0.5x^2$$

(12)
$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$$
$$P(x) = 150x - 0.75x^2 - 4000$$

(13)
$$P'(x) = 150 - 1.5x$$

عند $P'(x) = 0$
$$150 - 1.5x = 0$$
$$1.5x = 150$$
$$x = 100$$



$x = 100$ عظمى عليه مطلقة

لتحقيق اكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة وعندها الربح اكبر ما يمكن

لمعرفة اكبر ربح عوض 100 في اقتران الربح
$P(100) = 3500$

(14) عند $x = 100$ فان سعر البدلة الواحدة
$$P(100) = 150 - (0.5)(100)$$
$$= 150 - 50$$
$$= 100 \text{ JD}$$

15 تُنتِج مزرعة للتفّاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فَدّان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فَدّان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فَدّان لتحقيق أكبر إنتاج مُمكِن؟

الحل: x عدد الاشجار المضافة

يقل انتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة اضافية

لكل x من الاشجار الاضافية يقابله نقص x من الصناديق

$$P(x) = (20 + x)(30 - x)$$

$$P'(x) = (20 + x)(-1) + (30 - x)$$

$$P'(x) = -20 - x + 30 - x$$

$$P'(x) = -2x + 10$$

$P'(x) = 0$ عندما $-2x + 10 = 0$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

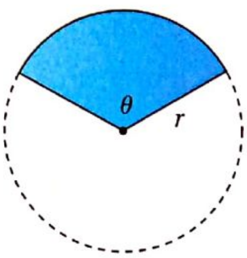
P': 0 + + 5 − −

اختبار المشتقة الاولى

عند $x = 5$ عظمى محلية مطلقة

وعليه عدد الاشجار في كل فدان

$$20 + 5 = 25$$

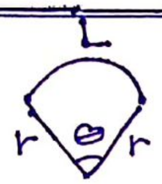


لدى مُزارِع P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْي على شـكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

16 أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

17 أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

18 أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.



محيط القطاع هو نصفي القطر مضاف اليه طول القوس

$L = \theta r$ قانون طول القوس

الحل :-

(16) $P = r + r + L$ (المحيط)

$P = 2r + \theta r$

$P = r(2 + \theta)$

---

(17) $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ (مساحة القطاع)

هنا نتخلص من θ حيث نستفيد من فرع (16)

$P = 2r + \theta r$

$\theta r = P - 2r$

$\theta = \frac{P}{r} - 2$

$A = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2} Pr - r^2$

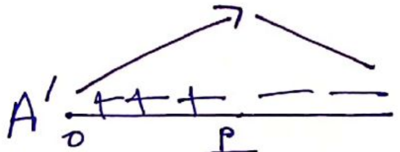
---

(18) $A' = \frac{1}{2} P - 2r$

$\frac{1}{2} P - 2r = 0$ عند $A' = 0$

$2r = \frac{1}{2} P$

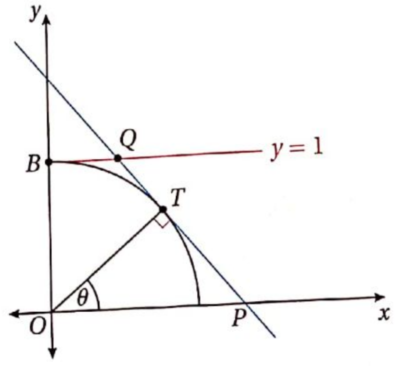
$r = \frac{1}{4} P$



عند $r = \frac{P}{4}$ عظمى محلية مطلقة

مساحة الحقل اكبر ما يمكن عند $r = \frac{1}{4} P$

تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$، عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:



19 أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

20 أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

21 أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

الحل :-

(19) لكتابة معادلة المستقيم نحتاج الى ميل ونقطة تقع عليه وعليه احداثي $T(\cos\theta, \sin\theta)$

نشتق $2x + 2yy' = 0$

$y' = \frac{-x}{y}$

نعوض النقطة $y' = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

نكتب معادلة المستقيم $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$

$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

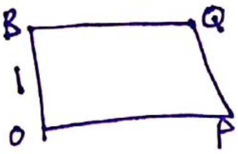
اضرب في $\sin\theta$

$y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$

$y\sin\theta + x\cos\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$y\sin\theta + x\cos\theta = 1$

(20)



$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$

مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ (طول القاعدتين) × الارتفاع

نحتاج الى معرفة طول القاعدتين

P نقطة تقاطع المستقيم PT مع محور x

عند $y = 0$ فان $x\cos\theta + 0 = 1$

$x = \frac{1}{\cos\theta}$

Q نقطة تقاطع $y = 1$ مع المستقيم PT

عند $y = 1$ فان $x\cos\theta + \sin\theta = 1$

$x = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

وعليه طول القاعدة السفلية $\frac{1}{\cos\theta}$

طول القاعدة العلوية $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)(1)$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$

(21)

$A' = \frac{1}{2}\left(\frac{(\cos\theta)(-\cos\theta) - (2 - \sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos^2\theta + 2\sin\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

نضع $A' = 0$

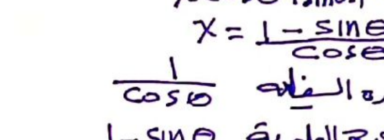
$-\cos^2\theta + 2\sin\theta - \sin^2\theta = 0$

$-(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\sin\theta = 0$

$-1 + 2\sin\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

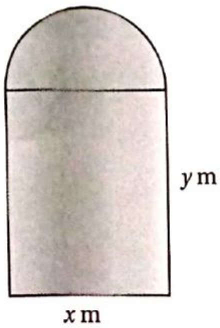


اختبار المشتقة الاولى فان $x = \frac{\pi}{6}$ صغرى محلية

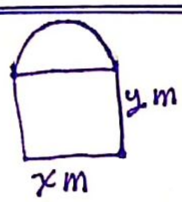
وعليه مساحة شبه المنحرف اقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

22 يُبيِّن الشـكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شـكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m.

صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسـمح بمـرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء السـفلي من زجاج شفّاف يسـمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربـع. أجد قيمة كلٍّ من x وy التي تجعل كميـة الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.



الحل :- A تمثل كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة



xy مساحة المستطيل

$\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2$ نصف دائرة

الاقتران المطلوب

$$A = \underbrace{3xy}_{\text{المستطيل}} + \underbrace{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{\text{نصف الدائرة}}$$

الجزء السفلي يدخل 3 وحدات ضوء

علاقة مساعدة (محيط النافذة 10)

$$C = \underbrace{2x + 2y}_{\text{المستطيل}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\text{الجزء المنحني العلوي}}$$

$10 = 2x + 2y + \frac{\pi}{2}x$ ((اجعل y موضوع قانون)) فينتج $y = 5 - x - \frac{\pi}{4}x$

$A = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$ ((اعوض مكان y))

$A = 3x(5 - x - \frac{\pi}{4}x) + \frac{1}{8}\pi x^2$

$A = 15x - 3x^2 - \frac{3\pi}{4}x^2 + \frac{1}{8}\pi x^2$

$A' = 15 - 6x - \frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{4}\pi x$

ضع $A' = 0$ $\quad 15 - 6x - \frac{3}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi x = 0$

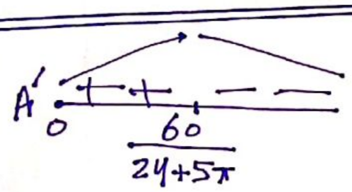
$6x + \frac{3\pi}{2}x - \frac{1}{4}\pi x = 15$

$x(6 + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\pi) = 15$

$x = \frac{15}{6 + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\pi} = \frac{15}{\frac{24+5\pi}{4}} = \frac{60}{24+5\pi}$

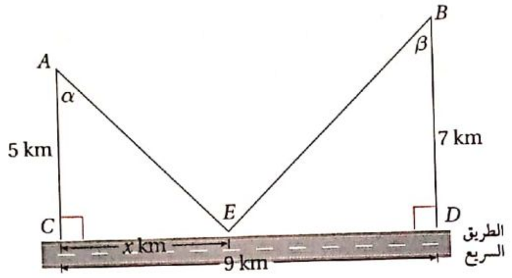
$y = 5 - (\frac{60}{24+5\pi}) - \frac{\pi}{4}(\frac{60}{24+5\pi})$

بالتبسيط $\quad y = \frac{60+10\pi}{24+5\pi}$



حسب اختبار المشتقة الأولى عند $x = \frac{60}{24+5\pi}$ عظمى مطلقة

وعليه تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما $x = \frac{60}{24+5\pi}$ و $y = \frac{60+10\pi}{24+5\pi}$



يُمارِس يوسف هواية ركوب الدرّاجات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

23 إذا كان الاقتران L يُمثِّل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

24 أُثبِت أنَّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin\alpha = \sin\beta$.

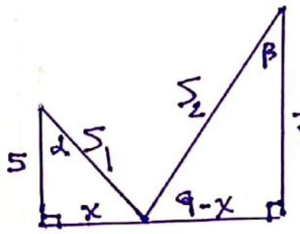
25 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

الحل :-

(23)

$$L = S_1 + S_2$$

(فيثاغورس) $L = \sqrt{25+x^2} + \sqrt{49+(9-x)^2}$



(24)

$$\frac{dL}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{25+x^2}} + \frac{-2(9-x)}{2\sqrt{49+(9-x)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{49+(9-x)^2}}$$

$\frac{dL}{dx} = 0$ نضع

$$\frac{x}{\sqrt{25+x^2}} = \frac{9-x}{\sqrt{49+(9-x)^2}}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

(25)

$\frac{dL}{dx} = 0$ نضع

(تربيع الطرفين)

$$\frac{x^2}{25+x^2} = \frac{81-18x+x^2}{49+(9-x)^2}$$

(الضرب تبادلي)

$$\frac{x^2}{25+x^2} = \frac{81-18x+x^2}{x^2-18x+130}$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{18x^3} + 130x^2 = 2025 - 450x + 25x^2 + 81x^2 - \cancel{18x^3} + \cancel{x^4}$$

$$24x^2 + 450x - 2025 = 0$$

$$8x^2 + 150x - 675 = 0$$

نستخدم القانون العام وينتج $x = \frac{15}{4}$, $\frac{-45}{2}$ مرفوض

وعليه قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي $\frac{15}{4}$ KM

L': $- - -$ | $+ + +$ (0, $\frac{15}{4}$)

حسب اختبار المشتقة الأولى عند $x = \frac{15}{4}$ صغرى محلية مطلقة

حل آخر

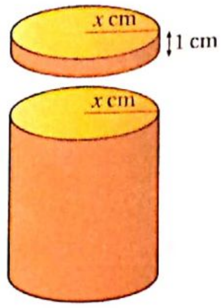
$$\sin\alpha = \sin\beta$$

وعليه $\alpha = \beta$

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

$$\frac{x}{5} = \frac{9-x}{7}$$

ومنه $x = \frac{15}{4}$



علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء مُحكَم يتداخل مع العلبة بمقدار 1 cm كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قُطْر العلبة والغطاء x cm، وصُنِعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة مُلائِمة للأغذية، مساحتها $80\pi\ cm^2$ من دون أيِّ هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

26. أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة المغلقة أكبر ما يُمكِن.

27. أجد أكبر حجم مُمكِن للعلبة.

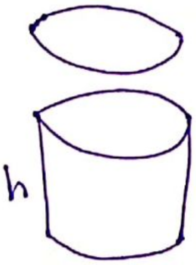
28. أجد النسبة المئوية للجزء الذي استُعمِل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يُمكِن.

(26)

L: ارتفاع العلبة كاملة وعليه $L = h+1$

V: حجم العلبة كاملة

A: المساحة الكلية للعلبة كاملة «مع الغطاء»



الاقتران المطلوب «الحجم»

$V = \pi x^2 h$ «علاقة الحجم بالغطاء»

علاقة مساعدة «مساحة العلبة» ← نهتم بالغطاء

$$A = \underbrace{2\pi x L}_{\text{الجانبية}} + \underbrace{2\pi x^2}_{\text{القاعدتين}}$$

اجعل h موضوع قانون حيث نقسم على 2π

$$80\pi = 2\pi x(h+1) + 2\pi x^2$$
$$40 = x(h+1) + x^2$$
$$h+1 = \frac{40-x^2}{x} = \frac{40}{x} - x$$
$$h = \frac{40}{x} - x - 1$$
$$V = \pi x^2\left(\frac{40}{x} - x - 1\right)$$
$$V = 40\pi x - \pi x^3 - \pi x^2$$
$$V' = 40\pi - 3\pi x^2 - 2\pi x$$

عند $V' = 0$: $40\pi - 3\pi x^2 - 2\pi x = 0$ نقسم على $-\pi$

$$3x^2 + 2x - 40 = 0$$
$$(3x-10)(x+4) = 0$$
$$x = \frac{10}{3}$$

V': 0 + + + $\frac{10}{3}$ − − −

عند $x = \frac{10}{3}$ عظمى مطلقة وعندها حجم العلبة أكبر ما يمكن

(27)

$$V = \pi\left(\frac{10}{3}\right)^2\left(\frac{40}{\frac{10}{3}} - \frac{10}{3} - 1\right)$$
$$V = \frac{2300}{27}\pi\ cm^3$$

(28)

مساحة الغطاء = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

$$M = \pi x^2 + 2\pi x(1)$$

عوضنا $x = \frac{10}{3}$

$$M = \frac{100}{9}\pi + 2\pi\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{160\pi}{9}$$

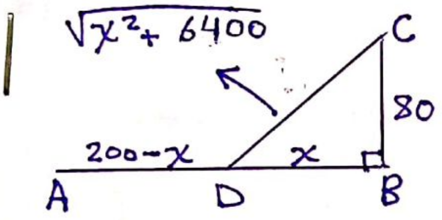
النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة

$$\frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \times 100\% \simeq \frac{200}{9}\%$$

إشارة ضرب

29 أجد اقترانًا بدلالة x يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

30 بافتراض أنَّ x قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يُمكِن.



الحل :- الاقتران المطلوب

(29)

$$T = T_{AD} + T_{DC}$$

الزمن من A الى D

الزمن من D الى C

الزمن = المسافة / السرعة

$$T = \frac{200-x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+6400}}{6}$$

---

(30) المشتقة

$$T' = \frac{-1}{10} + \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+6400}}}{6}$$

$$T' = \frac{-1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$$

نضع $T' = 0$

$$\frac{-1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} = 0$$

نربع

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$$

تبادلي ثم نبسط

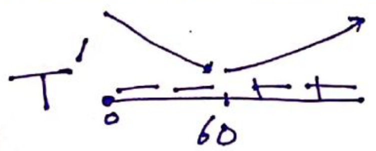
$$\frac{1}{100} = \frac{x^2}{36(x^2+6400)}$$

$$100x^2 = 36x^2 + 230400$$

$$64x^2 = 230400$$

$$x^2 = 3600$$

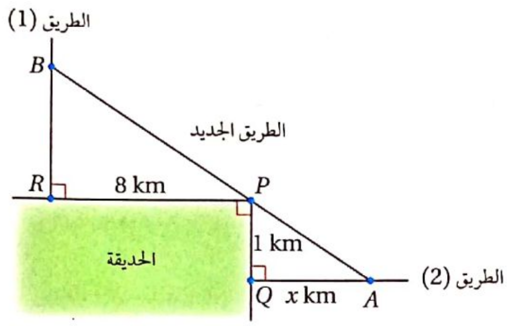
$$x = 60$$

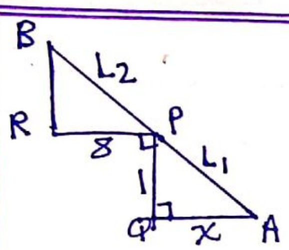


باستعمال اختبار المشتقة الأولى عند $x = 60$ صغرى مطلقة

وعليه قيمة x التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي $x = 60\,m$

31 يُبيِّن الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن.





تشابه المثلثات

$$\frac{BR}{1} = \frac{8}{x}$$

$$BR = \frac{8}{x}$$

$$\sqrt{64+\frac{64}{x^2}} = \sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$\sqrt{\frac{64(x^2+1)}{x^2}} = \frac{8}{x}\sqrt{x^2+1}$$

الاقتران المطلوب

L طول AB حيث $L = L_1 + L_2$

(فيثاغورس) $L = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64+\frac{64}{x^2}}$

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{-128}{x^3}}{2\sqrt{64+\frac{64}{x^2}}}$$

نضع $L'=0$

$$L' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{64}{x^3\sqrt{64+\frac{64}{x^2}}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{64}{(x^3)\left(\frac{8}{x}\sqrt{x^2+1}\right)}$$

ضرب تبادلي:

$$8x^3\cancel{\sqrt{x^2+1}} = 64\cancel{\sqrt{1+x^2}}$$

$$8x^3 = 64$$

$$x^3 = 8$$

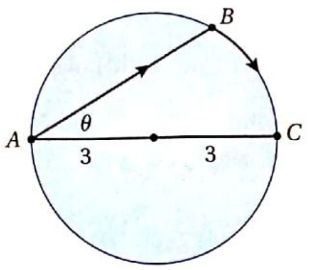
$$x = 2$$

L': $-\ -\ |\ +\ +$ (0, 2)

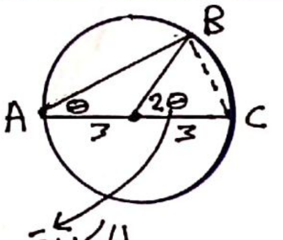
عند $x=2$ صغرى محلية مطلقة

وعليه قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي $x = 2$ Km

32 تبريـــر: يقف رجل عند النقطة A على شـــاطئ بحيـــرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيـــرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشـــكل المجاور. يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بســـرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بســـرعة 6 km/h. أُحـــدِّد موقـــع النقطة B ليصل الرجل مـــن النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟ أُبرِّر إجابتي.



الحل :- الزاوية ABC محيطية مرسومة على قطر الدائرة وقياسها 90° وعليه المثلث ABC قائم الزاوية في B



المركزية ضعف المحيطية المرسومة على نفس القوس

علاقة مساعدة
لحساب BC (الطول مقوس)
$BC = r\theta = 6\theta$
لحساب AB نأخذ المثلث ABC
$\cos\theta = \frac{AB}{6}$
$AB = 6\cos\theta$

الاقتران المطلوب

T الزمن الكلي للوصول الى C حيث $T = T_1 + T_2$

T_1: زمن الوصول من A الى B

T_2: زمن الوصول من B الى C

$$T = \frac{AB}{3} + \frac{BC}{6}$$

$$T = \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{6\theta}{6}$$

$$T = 2\cos\theta + \theta$$

$T' = 0$ نضع $T'(\theta) = -2\sin\theta + 1$

$$-2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

T': 0 ــ ــ ــ $\frac{\pi}{6}$ ــ ــ ــ $\frac{\pi}{2}$

عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ صغرى مطلقة

لأن :.

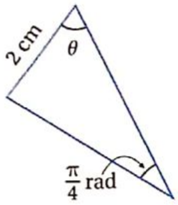
$T(0) = 2$

$T(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ⟵ الأقل

$T(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$

القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\overset{\frown}{AB}$ كاملاً راكضاً على اليابسة دون تجديف في الماء

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ rad، ومُقابِلها ضلع طوله 2 cm:



33 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

34 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

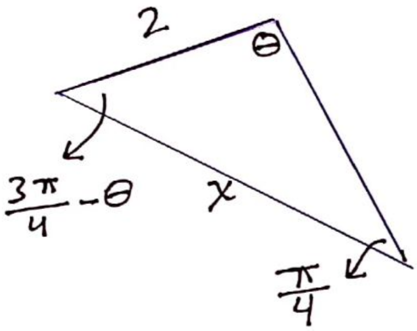
35 أُثبِت أنَّ أكبر مساحة مُمكِنة للمثلث هي: $(1 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2$.

الحل :- قياس الزاوية الثالثة في المثلث

$180 - (\theta + \frac{\pi}{4})$ ((مجموع زوايا المثلث 180))

$\pi - \theta - \frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4} - \theta$



(33)

نظراً لوجود زاوية وطول ضلع نفكر بالحصول على مساحة مثلث بمعرفة طول ضلعين وزاوية محصورة بينهما

قانون الجيوب $\frac{\sin\theta}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}$

$2\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}x$

$x = 2\sqrt{2}\sin\theta$

$A = (\frac{1}{2})(2)(x)\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$

$A = x\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$ متطابقة فرق زاويتين

$A = x\left[\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right]$

$A = x\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]$

$A = 2\sqrt{2}\sin\theta\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]$

$A = \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta \text{ متطابقة}} + \underbrace{2\sin^2\theta}_{\text{من متطابقة } \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta}$

$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

(34)

$0 < \theta < (180 - 45)$

$0 < \theta < \frac{3\pi}{4}$

(35)

$A' = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta$

ضع $A' = 0$

$2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$

نقسم على $2\cos 2\theta$

$1 + \tan 2\theta = 0$

$\tan 2\theta = -1$

$2\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{8}$

$0 \quad + + \quad \frac{3\pi}{8} \quad - - \quad \frac{3\pi}{4}$

عظمى

عوضنا الزاوية $\frac{3\pi}{8}$

$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

$A = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$

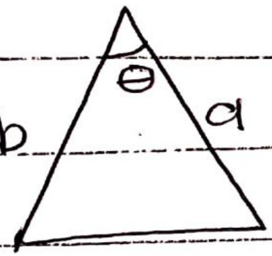
$= \sqrt{2} + 1$

كتاب التمارين

1 إذا كان a cm وb cm همـــا طولـــي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ، فأجد قيمة θ التي تجعل مســـاحة المثلث أكبر ما يُمكِن.

/1) اذا كانت a cm و b cm هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث وكانت الزاوية بينهما θ فاوجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

الحل:



العلاقة الاساسية

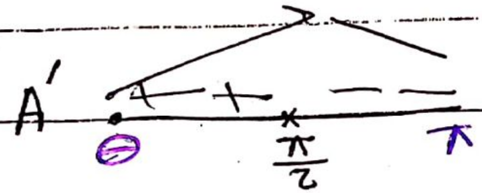
$A = \frac{1}{2}(a)(b)\sin\theta$ اشتق

$A' = \frac{1}{2}ab\cos\theta$ ضع $A' = 0$

$\frac{1}{2}ab\cos\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

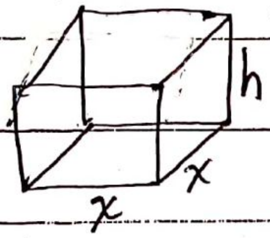


عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ عظمى وعندها مساحة المثلث اكبر ما يمكن

2 ترغب شركة في تصميم خزّان من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $500\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

الحل:

الاقتران المطلوب



المساحة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$A = 4xh + x^2$$

x طول ضلع القاعدة
h الارتفاع
A مساحة سطح
V حجم

علاقة مساعدة "قانون الحجم"

$$V = x^2 h$$

$$500 = x^2 h$$

$$h = \frac{500}{x^2}$$

$$A = 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) + x^2$$

$$A = \frac{2000}{x} + x^2$$

$$A' = \frac{-2000}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2000}{x^2}$$

نضع $A' = 0$

$$2x^3 - 2000 = 0$$

$$x^3 = 1000$$

$$x = 10$$

A' : 0 ، $- - -$ ، 10 ، $+ + +$

عند $x = 10$ صغرى والمساحة أصغر أقل ما يمكن

$$h = \frac{500}{100} = 5$$

الأبعاد 5 و 10 و 10

راقت ضباعين

يُمثِّل الاقتران: $s_1 = \sin t$ والاقتران: $s_2 = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ موقعي جُسَيْمين يتحرَّكان في مسار مستقيم، حيث s_1 وs_2 الموقعان بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

3 أجد قيمة (قِيَم) t التي يلتقي فيها الجُسَيْمين.

4 أجد أكبر مسافة بين الجُسَيْمين في الفترة الزمنية: $0 \le t \le 2\pi$.

(3)

$S_1 = S_2$

$S_1 - S_2 = 0$

متطابقة

$\sin t - \sin(t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$2\sin\left(\frac{t - t - \frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{t + t + \frac{\pi}{3}}{2}\right) = 0$

$2\sin -\frac{\pi}{6}\ \cos(t + \frac{\pi}{6}) = 0$

$-\cos(t + \frac{\pi}{6}) = 0$

$\cos(t + \frac{\pi}{6}) = 0$

$t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ اطرح $\frac{\pi}{6}$

$t = \frac{\pi}{3} + n\pi$

حيث n عدد صحيح غير سالب

(4)

$S = |S_2 - S_1|$

$S = |\sin(t + \frac{\pi}{3}) - \sin t|$

$S = |\cos(t + \frac{\pi}{6})|$

$S(t) = \pm\cos(t + \frac{\pi}{6})$

$S'(t) = \mp\sin(t + \frac{\pi}{6})$

ضع $S' = 0$

$\sin(t + \frac{\pi}{6}) = 0$

$t + \frac{\pi}{6} = \pi$ و 2π

$t = \frac{5\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$

$S(0) = |\cos(0 + \frac{\pi}{6})| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S(\frac{5\pi}{6}) = |\cos(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6})| = 1$

$S(\frac{11\pi}{6}) = |\cos(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6})| = 1$

$S(2\pi) = |\cos(2\pi + \frac{\pi}{6})| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وعليه أكبر مسافة بين الجسمين هي 1 m

سلك يبلغ طوله 24 cm، ويراد قَصُّه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:

5 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكِن.

6 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكِن.

الاقتران المطلوب

(5)

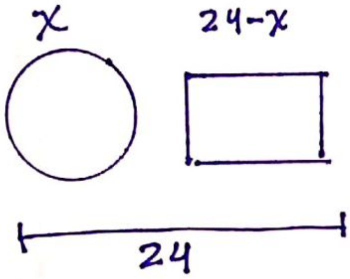
$A = A_1 + A_2$ حيث A مجموع مساحتي الدائرة والمربع

A_1 الدائرة

A_2 المربع

ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة x

وعليه المربع $24-x$



$C = 2\pi r$ (المحيط الدائرة)

$x = 2\pi r$

$r = \frac{x}{2\pi}$

$C = 4$ (طول الضلع) (المحيط المربع)

$24-x = 4$ (طول الضلع)

$\frac{24-x}{4}$ = طول الضلع

$A = \pi r^2 + L^2$ حيث L طول ضلع المربع

$A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-x}{4}\right)^2$

$A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(24-x)^2}{16}$

$A' = \frac{2x}{4\pi} + \frac{-2(24-x)}{16}$

ضع $A' = 0$

$\frac{x}{2\pi} + \frac{x-24}{8} = 0$

$\frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - 3 = 0$

$x\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) = 3$

$x = \frac{3}{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}} = \frac{24\pi}{\pi+4}$

A': 0 — — $\frac{24\pi}{\pi+4}$ + + 24

مجموع مساحتي الدائرة والمربع اصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولاً مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}$ cm.

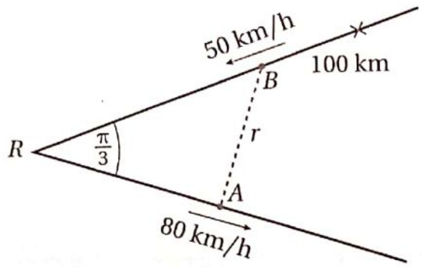
(6) للحصول على الحد الأكبر مطلق للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$

وعليه $A(0) = 36$

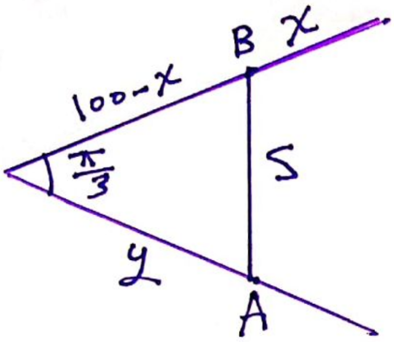
$A(24) = \frac{144}{\pi} \approx 45$

اذن للحصول على اكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة ولا نقطع للمربع شيئاً منه

7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80 km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيّارة B بسرعة 50 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 100 km، فأجد أقصر مسافة مُمكِنة بين السيّارتين.



الحل: الاقتران المطلوب



$$S^2 = y^2 + (100-x)^2 - 2y(100-x)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$S^2 = y^2 + (100-x) - y(100+x)$$

نحول x و y بدلالة الزمن

$$y = 80t \quad \text{و} \quad x = 50t$$

$$S^2 = (80t)^2 + (100-50t)^2 - 80t(100-50t)$$

$$S = \sqrt{(80t)^2 + (100-50t)^2 - 8000t + 4000t^2}$$

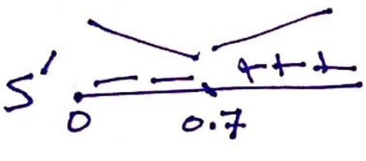
$$S' = \frac{12800t - 10000 + 5000t - 8000 + 8000t}{2\sqrt{(80t)^2 + (100-50t)^2 - 8000t + 4000t^2}}$$

عندما $S' = 0$:

$$12800t - 10000 + 5000t - 8000 + 8000t = 0$$

$$25800t = 18000$$

$$t = \frac{18000}{25800} \simeq 0.7$$



عند $t=0.7$ صغرى وعندها اقصر مسافة

$$S(0.7) = \sqrt{(80(0.7))^2 + (100-50(0.7))^2 - 8000(0.7) + 4000(0.7)^2}$$

$\simeq 61$ KM

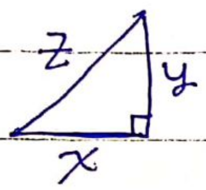

اسئلة نهاية
الوحدة

اختبار نهاية الوحدة

1) مثلث قائم الزاوية ، ساقاه x و y ووتره z اذا كان $\frac{dz}{dt}=1$ وكان $\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}$ فان $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=4$ و $y=3$

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) C d) 5

الحل :-



العلاقة $z=\sqrt{x^2+y^2}$

اشتق $\frac{dz}{dt}=\frac{\cancel{2}x\frac{dx}{dt}+\cancel{2}y\frac{dy}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$

عوض

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3\frac{dy}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\end{aligned}}$$

$$1=\frac{(4)\left(\frac{dx}{dt}\right)+(3)\left(\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{16+9}}$$

$$1=\frac{5\frac{dx}{dt}}{5}$$

$$5\frac{dx}{dt}=5$$

$$\frac{dx}{dt}=1$$

الجواب (b)

---

2) القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)=4x-x^2+6$ في الفترة $[0,4]$

a) 6 b) 2 c) 10 d) 12

الحل :- $f'(x)=4-2x$

عندما $f'(x)=0$ $4-2x=0$

$x=2$

القيم الحرجة هي $x=2$

$f(0)=0-0+6=6$

$f(4)=16-16+6=6$

$f(2)=8-4+6=\boxed{10}$ الأكبر

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$ وهي $f(2)=10$

الجواب (c)

رأفت صافي

③ الاحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران :

$f(x)=x^5-5x^4+3x+7$ هو :

a) 0   b) 1   c) 3   d) -1

الحل :

$f'=5x^4-20x^3+3$

$f''=20x^3-60x^2$

عند $f''=0$ $20x^3-60x^2=0$

$20x^2(x-3)=0$

$x=0$ و $x=3$

f'': − − − (0) − − − (3) + + +

لم يتغير تقعره

عند $x=3$ توجد نقطة انعطاف

الجواب (c)

④ قيمة x التي عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هي

a) 3   b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

الحل :

$f'=(x-2)\,2(x-3)+(x-3)^2$

$f'=0$

$2(x-2)(x-3)+(x-3)^2=0$

$(x-3)[2x-4+x-3]=0$

$(x-3)[3x-7]=0$

$x=3$ $x=\frac{7}{3}$

f': + + + ($\frac{7}{3}$) − − − (3) + + +

عند $x=\frac{7}{3}$ للاقتران قيمة عظمى محلية

الجواب (b)

⑤ اذا كانت الفترة [1,25] هي مجال الاقتران المتصل f الذي مداه [3,30] وكان $f'(x)<0$ لجميع قيم x بين 1 و 25 فان $f(25)$ تساوي

a) 1   b) 3   c) 25   d) 30

الحل :

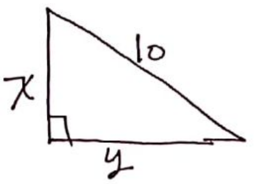
f': (1) − − − − − − (25)

$f(25)$ صغرى مطلقة وعليه

$f(25)=3$ الجواب فرع (b)

⑥ القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية طول وتره 10 وحدات هي

a) 24 b) 25 c) 48 d) 50



الحل :-

الاقتران المطلوب

$A=\frac{1}{2}xy$ اقتران المساحة

علاقة مساعدة (فيثاغورس)

$x^2+y^2=100$

$y^2=100-x^2$

يجوز ادخال x لداخل الجذر كونه x موجب $\longrightarrow x^2$

$A=\frac{1}{2}x\sqrt{100-x^2}$

$A=\frac{1}{2}\sqrt{100x^2-x^4}$

$A'=\frac{1}{2}\left(\frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}}\right)$

حيث نساوي البسط بالصفر $A'=0$

$200x-4x^3=0$

$4x(50-x^2)=0$

$x=0$ مرفوض $\qquad x=\sqrt{50}$ و $x=-\sqrt{50}$ مرفوض

A': 0 $+\ +$ $\sqrt{50}$ $-\ -$

$x=\sqrt{50}$ عظمى وعندها اكبر مساحة

$A(\sqrt{50})=\frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{100-50}=\frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{50}$
$=25$

الجواب (b)

---

⑦ اذا زاد حجم مكعب بمعدل $24\ cm^3/min$ وزادت مساحة سطحه بمعدل $12\ cm^2/min$ فان طول ضلعه في تلك اللحظة

a) 2 cm
b) $2\sqrt{2}$ cm
c) 4 cm
d) 8 cm

المعطيات

$\frac{dV}{dt}=24$ و $\frac{dA}{dt}=12$

العلاقة

$V=x^3$

اشتق

$\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

$24=3x^2\frac{dx}{dt}$ —— ①

نشكل علاقة اخرى

$A=6x^2$

$\frac{dA}{dt}=12x\frac{dx}{dt}$

$12=12x\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{12}{12x}=\frac{1}{x}$ —— ②

نعود الى معادلة ① ونعوض بدل $\frac{dx}{dt}$ بـ $\frac{1}{x}$

$24=3x^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$24=3x$

$x=8\ cm$

$f(0) = 0 - 0 = 0$
$f(1) = 3 - 2 = 1$
$f(-5) = 75 + 250 = 325$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = -5$ وهي $f(-5) = 325$
وقيمة صغرى محلية مطلقة عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

---

(10) $f'(x) = \frac{(x+3)(1) - x}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x = -3$ خارج المجال

لا توجد قيم حرجة

$f(-1) = \frac{-1}{-1+3} = \frac{-1}{2}$

$f(6) = \frac{6}{6+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 6$ وهي $f(6) = \frac{2}{3}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -1$ وهي $f(-1) = \frac{-1}{2}$

(8) عدد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = (x-2)^5 (x+3)^4$ هو :

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

الحل :-

$f'(x) = (x-2)^5 4(x+3)^3 + (x+3)^4 5(x-2)^4$

نضع $f' = 0$

$4(x-2)^5 (x+3)^3 + 5(x-2)^4 (x+3)^4 = 0$

$(x-2)^4 (x+3)^3 [4x - 8 + 5x + 15] = 0$

$(x-2)^4 (x+3)^3 [9x + 7] = 0$

$x = 2$ $x = -3$ $x = \frac{-7}{9}$

عدد النقاط الحرجة 3 الجواب c

جد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة

(9) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-5, 1]$

(10) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $[-1, 6]$

(11) $f(x) = x e^{\frac{x}{2}}$, $[-3, 1]$

(12) $f(x) = 3\cos x$, $[0, 2\pi]$

الحل :-

(9) $f'(x) = 6x - 6x^2$

$6x - 6x^2 = 0$ عند $f'(x) = 0$

$6x(1 - x) = 0$

0 1

القيم الحرجة هي $x = 0$

(11) $f'(x) = (x)(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}) + e^{\frac{x}{2}}$

نضع $f' = 0$

$\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = 0$

$e^{\frac{x}{2}}(\frac{1}{2}x+1) = 0$

$e^{\frac{x}{2}} \neq 0$ $\quad x = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

القيم الحرجة هي $x = -2$

$f(-3) = -3e^{\frac{-3}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{e^3}}$

$f(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$f(-2) = -2e^{\frac{-2}{2}} = \frac{-2}{e}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ وهي $f(1) = \sqrt{e}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = \frac{-2}{e}$

---

(12) $f'(x) = -3\sin x$

$-3\sin x = 0$ عند $f'(x) = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi$

القيم الحرجة هي $x = \pi$

$f(\pi) = 3\cos\pi = -3$

$f(0) = 3\cos 0 = 3$

$f(2\pi) = 3\cos 2\pi = 3$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$, $x = 2\pi$ وهي 3

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \pi$ وهي $f(\pi) = -3$

جد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي ثم جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) لكل اقتران:

(13) $f(x) = x^5 + x^3$

(14) $f(x) = x^4 e^{-x}$

(15) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

الحل:

(13) $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

$5x^4 + 3x^2 = 0$ عند $f'(x) = 0$

$x^2(5x^2+3) = 0$

$x = 0$ $\quad 5x^2 + 3 \neq 0$

القيم الحرجة $x = 0$

f': $-\infty$ + + + 0 + + + ∞

$f(x)$ متزايد $(-\infty, \infty)$ أو R

لا يوجد قيم قصوى محلية ولا مطلقة

(14) $f'(x) = (x^4)(-e^{-x}) + 4x^3e^{-x}$

$-x^4e^{-x} + 4x^3e^{-x} = 0$ عند $f'(x) = 0$

$x^3e^{-x}(-x+4) = 0$

$x = 0$ $\quad e^{-x} \neq 0$ $\quad x = 4$

القيم الحرجة هي $x = 0, x = 4$

f': $-\infty$ − − − 0 + + + 4 − − − ∞

$f(x)$ متزايد $(0,4)$ متناقص $(-\infty, 0)$, $(4, \infty)$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 4$ وهي $f(4) = 4^4e^{-4} = \frac{256}{e^4}$

(15) مجال $f(x)$ هو $x>0$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3-3}{3x}$$

عند $f'(x)=0$

$$3x^3-3=0$$

$$x^3=3$$

$$x=1$$

القيم الحرجة هي $x=1$

f': 0 $\quad - - - \quad$ 1 $\quad + + + \quad$ ∞

$f(x)$ متزايد $(1,\infty)$

$f(x)$ متناقص $(0,1)$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x=1$ وهي $f(1)=\frac{1}{3}$

جد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

(16) $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

(17) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

(18) $f(x)=(3-x^2)^2$

الحل:

(16) $f'=3x^2-6x-9$

$f''=6x-6$ $\qquad$ نضع $f''=0$

$$6x-6=0$$

$$x=1$$

f'': $-\infty$ $\quad - - - \quad$ 1 $\quad + + + \quad$ ∞

$f(x)$ مقعر للاعلى $(1,\infty)$ وللاسفل $(-\infty,1)$

$f(x)$ له نقطة انعطاف عند $x=1$ وهي $(1,-7)$

(17)
$$f' = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f' = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'' = \frac{(x^2+1)^2(2)-2x(2(x^2+1)(2x))}{(x^2+1)^4}$$

$$f'' = \frac{2(x^2+1)[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

عند $f''=0$

$$2-6x^2=0$$

$$x^2=\frac{1}{3}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

f'': $-\infty$ $\quad - - - \quad$ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ $\quad + + + \quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad - - - \quad$ ∞

$f(x)$ مقعر للاعلى $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ مقعر للاسفل $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ و $\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

للاقتران نقطة انعطاف عند

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ وهي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

$x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ وهي $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

(18) $f'(x) = 2(3-x^2)(-2x)$

$f'(x) = -4x(3-x^2)$

$f'(x) = -12x + 4x^3$

$f'' = -12 + 12x^2$

عند $f''=0$ $\quad -12+12x^2=0$

$12x^2=12$

$x^2=1$

$x = 1$ و -1

f'' : $++$ $-\infty$ ... -1 $--$ 1 $++$ ∞

$f(x)$ مقعر للأسفل $(-1, 1)$

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$

للاقتران نقطة انعطاف عند

$x=-1$ وهي $(-1, 4)$

$x=1$ وهي $(1, 4)$

(19) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f

(20) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f

الحل:

فوق محور x تقعر للأعلى

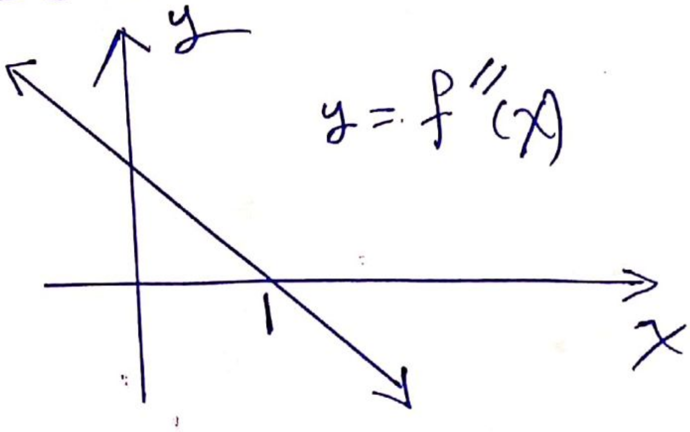
تحت محور x تقعر للأسفل

$f(x)$ مقعر للأعلى $(-\infty, 1)$

$f(x)$ مقعر للأسفل $(1, \infty)$

نقاط تقاطع مع محور x هي انعطاف بشرط عندها جزء من منحنى f'' فوق وتحت محور x وعليه عند $x=1$ نقطة انعطاف

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كل مما يأتي



يمثل الاقتران $p(x) = 5 - 0.002x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع من المنتج، ويمثل الاقتران $C(x) = 3 + 1.1x$ تكلفة انتاج x قطعة بالدينار

(21) جد اقتران الإيراد

(22) جد اقتران الربح

(23) جد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن ثم جد أكبر ربح ممكن

(24) جد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن

(21) $R(x) = x\,p(x)$

$= x(5 - 0.002x)$

$= 5x - 0.002x^2$

(22) $P(x) = R(x) - C(x)$

$= (5x - 0.002x^2) - (3 + 1.1x)$

$= 5x - 0.002x^2 - 3 - 1.1x$

$= 3.9x - 0.002x^2 - 3$

(23) $P'(x) = 3.9 - 0.004x$

$3.9 - 0.004x = 0$

$0.004x = 3.9$

$x = \dfrac{3.9}{0.004}$

$x = 975$

اكبر ربح ممكن تحقيقه عند انتاج وبيع 975

P': $+++$ $\;\;(0 \;\ldots\; 975)\;\;$ $---$

$P(975) = (3.9)(975) - (0.002)(975)^2 - 3$

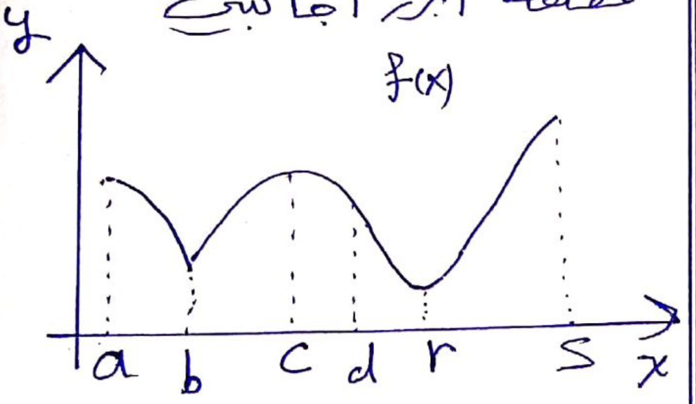
$= 1898.25$ JD

(24) $p(975) = 5 - 0.002(975)$

$= 5 - 1.95$

$= 3.05$

(25) يبين الشكل التالي منحنى $f(x)$ أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى او نقطة عظمى محلية، اي منها تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة ابرر اجابتي



الحل :-

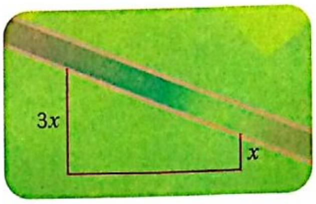
$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية

$(c, f(c))$ نقطة قيمة عظمى محلية

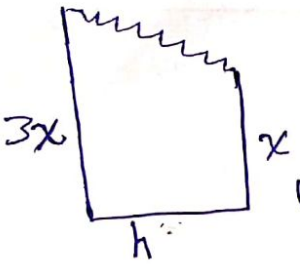
$(r, f(r))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(s, f(s))$ نقطة قيمة عظمى مطلقة

26 لدى مُزارِع 400 m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه مُنحرِف، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي. إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مساحة يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بهذا السياج، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



الحل :-



الاقتران المطلوب

(مساحة شبه المنحرف) $A = \frac{1}{2}\underbrace{(x+3x)}_{\text{مجموع القاعدتين}} h$ ← الارتفاع

$A = 2xh$

علاقة مساعدة

طول السياج $3x + x + h = 400$

$h = 400 - 4x$

$A = 2x(400 - 4x)$

$A = 800x - 8x^2$

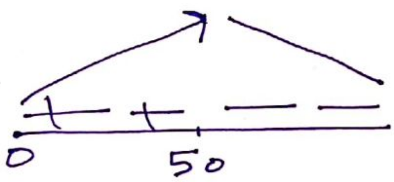
$A' = 800 - 16x$

نضع $A' = 0$

$800 - 16x = 0$

$16x = 800$

$x = 50$



باستخدام اختبار المشتقة الأولى عند $x = 50$ عظمى

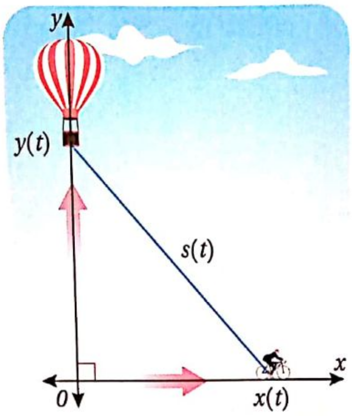
عند $x = 50$ عظمى وعندها المساحة أكبر ما يمكن

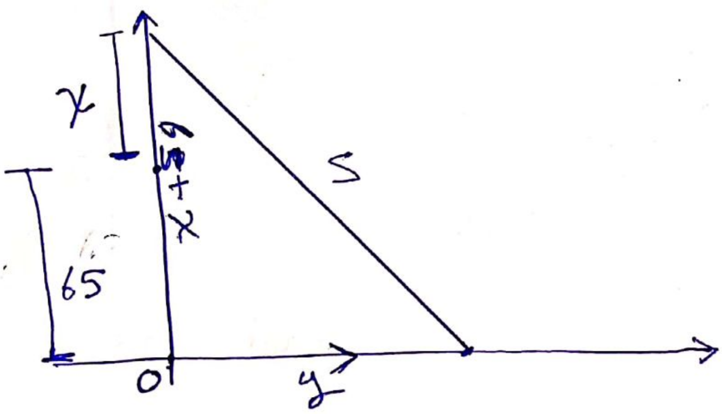
$A = 800x - 8x^2$

$A = (800)(50) - 8(50)^2$

$= 20000 \ m^2$

27 يرتفع بالون رأسـيًّا فوق مستوى طريق مستقيم بمُعدَّل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق سـطح الأرض، مَرَّت أسفله درّاجة تتحرَّك بسـرعة 17 ft/s كما في الشـكل التالي. أجد سرعة تغيُّر المسافة بين البالون والدرّاجة بعد 3 ثوانٍ من هذه اللحظة.





الحل :-

المعطيات :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ ft/s}$$

$$\frac{dy}{dt} = 17 \text{ ft}$$

المعدل المطلوب

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$$

العلاقة

$$S = \sqrt{y^2 + (x+65)^2}$$

نشتق

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}y\frac{dy}{dt} + \cancel{2}(x+65)\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{y^2+(x+65)^2}}$$

عند $t=3$

$x = (1)(3) = 3$

$y = (3)(17) = 51$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(51)(17) + (3+65)(1)}{\sqrt{(51)^2 + (3+65)^2}} = \frac{867+68}{\sqrt{2601+4624}}$$

$$= \frac{867+68}{\sqrt{7225}} = \frac{935}{85} = 11 \text{ ft/s}$$