National Center
for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

كتاب التمارين

الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبـه ماهـر التميمـي   يوسف سليمان جرادات   أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقـم (2022/3)، تاريـخ 2022/5/12 م، وقرار مجلس التربيـة والتعليم رقـم (2022/16) تاريـخ 2022/5/29 م بـدءًا مـن العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 335 - 7

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2013)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الثانـي عشـر: الفـرع العلمـي: كتـاب التماريـن (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.– عمـان: المركـز، 2022

(28) ص.

ر.إ.: 2022/4/2013

الواصفات:/ تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1443 هـ / 2022 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 التفاضل

قائمة المحتويات

الوحدة 2 تطبيقات التفاضل

الوحدة 3 الأعداد المُركَّبة

الوحدة 1: التفاضل

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد المشتقة باستعمال التعريف العام

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال التعريف العام للمشتقة:

1) $f(x) = 3x - 8$

2) $f(x) = 4x^3 + 3x$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

مثال: أجد مشتقة $f(x) = \sqrt{x}$ باستعمال التعريف العام للمشتقة.

التعريف العام للمشتقة
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بالتعويض: $f(x+h) = \sqrt{x+h}\,, f(x) = \sqrt{x}$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

بضرب كلٍّ من البسط والمقام في المرافق $(\sqrt{x+h}) + \sqrt{x})$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

بالتبسيط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

بالتبسيط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

بتعويض $h = 0$
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

بالتبسيط
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتقة اقتران القوَّة

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

4) $f(x) = 7x^3$

5) $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

6) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

7) $f(x) = -\frac{3}{x^7}$

8) $f(x) = x^2\,(x^3 - 2x)$

9) $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

مثال: أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2} = \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{7}{x^2}$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على x^2

$= 2x^{-1} - 7x^{-2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$f'(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة الفرق

$= -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{14}{x^3}$ تعريف الأُسِّ السالب

b) $f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$ قواعد مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$ الصورة الجذرية

- **مشتقة الاقتران:** $y = (ax+b)^n$

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

10) $y = (2x-3)^6$

11) $y = \sqrt{9-3x}$

12) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \dfrac{1}{\sqrt{8-x}}$.

$y = \dfrac{1}{\sqrt{8-x}} = (8-x)^{-\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}(8-x)^{-\frac{3}{2}} \times -1$ قاعدة مشتقة الاقتران المُركَّب

$= \dfrac{1}{2(8-x)^{\frac{3}{2}}}$ تعريف الأُسِّ السالب

$= \dfrac{1}{2\sqrt{(8-x)^3}}$ الصورة الجذرية

الوحدة 1: التفاضل

إيجاد معادلة المماس عند نقطة ما

إذا كان الاقتران: $f(x) = (3x + 2)^2$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

13 معادلة المماس عند النقطة $(-1, 1)$.

14 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(-1, 1)$.

مثال: إذا كان الاقتران: $f(x) = x^7 - x$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(1, 0)$.

$f(x) = x^7 - x$	الاقتران المعطى
$f'(x) = 7x^6 - 1$	مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة الفرق
$f'(1) = 7(1)^6 - 1$	بتعويض $x = 1$
$= 6$	بالتبسيط

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة
$y - 0 = 6(x - 1)$	بتعويض $x_1 = 1, y_1 = 0, m = 6$
$y = 6x - 6$	بالتبسيط

إذن، معادلة المماس هي: $y = 6x - 6$.

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, 0)$.

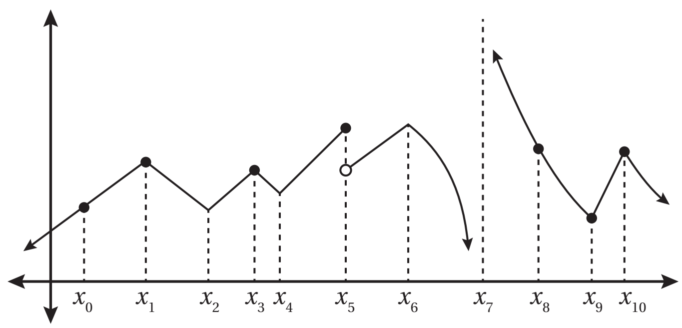
ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$. ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, 0)$ هي:

$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

الدرس 1

الاشتقاق
Differentiation



1 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2 $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

3 $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

4 $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x$

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

6 أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

7 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

8 أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

4) $f(x) = x \cot x$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

8) $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x)= x^2 \cos x , \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

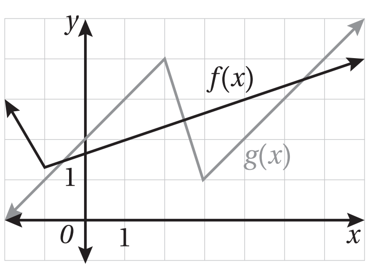
11) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

13) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

14) $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15) $u'(1)$

16) $v'(4)$

17) إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \sec x\,(1 + x \tan x)$.

18) إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}, t \geq 0$ السرعة المتجهة لسيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

19) أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.

20) أجد تسارع السيّارة عندما $t = 20$.

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

7) $f(x) = \log 2x$

8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

9) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$

11) $f(x) = \frac{\sin(2x + 1)}{e^{x^2}}$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \frac{\pi}{2}$

14) $f(x) = (x^2 + 2)^3,\ x = -1$

15) $f(x) = \tan 3x,\ x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16) أُثبِت أنَّ $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17) أجد $f''(x)$.

18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

20) أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

21) إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7,\ f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22) إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) = 4f(x)$.

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) + 16f(x) = 0$.

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2 \theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

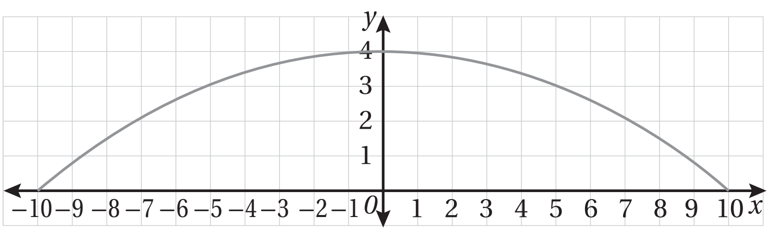
27 **سيّارة:** يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15t\,e^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيّارة تتحرَّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1,\ u = g(x) = \sqrt{x},\ x = 1$

29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u},\ u = g(x) = \pi x,\ x = \frac{1}{4}$

مرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t,\ y = 2 + 2\cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

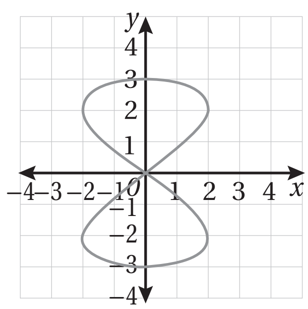
30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

32 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t,\ \ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.



الدرس 4

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^3 y^3 = 144$

2) $xy = \sin(x + y)$

3) $y^4 - y^2 = 10x - 3$

4) $x \sin y - y \cos x = 1$

5) $\cot y = x - y$

6) $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$, $(2, -1)$

8) $xe^y + y \ln x = 2$, $(1, \ln 2)$

9) $4xy = 9$, $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

10) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $(1, 2)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

11) $x^2 y - 4x = 5$

12) $x^2 + y^2 = 8$

13) $y^2 = x^3$

14) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$.

15) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x + y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

16) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17) $y = (x - 2)^{x+1}$

18) $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

19) $y = (\cos x)^x$

20) أجد معادلتي مماسي منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمرّان بالنقطة $(4, 0)$.

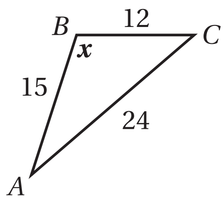
21) أجـد نقطتي تقاطع منحنى العلاقـة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثم أُثبِت أنَّ مماسـي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

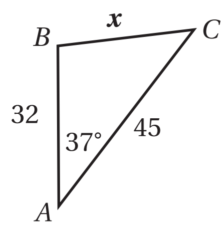
الوحدة 2: تطبيقات التفاضل

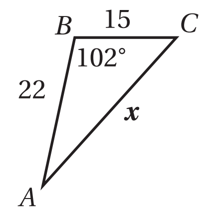
أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

حلُّ المثلث باستعمال قانون جيوب التمام

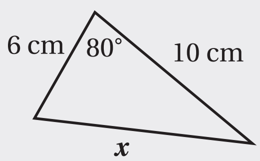
أجد قيمة x في كلٍّ من المثلثات الآتية:

1 

2 

3 

مثال: أجد قيمة x في المثلث المجاور.



قانون جيوب التمام	$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80°$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x^2 = 115.16$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = \pm\sqrt{115.16}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= \pm 10.7$

إذن، $x = 10.7$؛ لأنَّ x لا يُمكِن أنْ تكون سالبة.

حلُّ المعادلات المثلثية

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

4 $\tan 2x + 1 = 0$

5 $2\sin^2 x + \sin x = 0$

6 $1 - \cos x = \frac{1}{2}$

مثال: أَحُلُّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

المعادلة المعطاة	$\sin 2x - \cos x = 0$
متطابقات ضعف الزاوية	$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$
بإخراج $\cos x$ عاملًا مشتركًا	$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\cos x = 0$ or $2 \sin x - 1 = 0$
بحلِّ المعادلة الثانية لـ $\sin x$	$\cos x = 0$ or $\sin x = \frac{1}{2}$
بحلِّ كل معادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

تحديد فترات التزايد وفترات التناقص

أُحدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران ممّا يأتي:

9) $f(x) = x^2 - 8x^4$ 8) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ 7) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

مثال: أُحدِّد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران، ثم أُحدِّد أصفار المشتقة.

مشتقة الاقتران	$f'(x) = 2x + 2$
بمساواة المشتقة بالصفر	$2x + 2 = 0$
بطرح 2 من طرفي المعادلة	$2x = -2$
بقسمة الطرفين على 2	$x = -1$

إذن، صفر المشتقة هو: $x = -1$.

الخطوة 2: أدرس إشارة المشتقة.

أختار قيمة أقل من صفر المشتقة، ولتكن (-2)، وأختار قيمة أُخرى أكبر منه، ولتكن (0)، ثم أُحدِّد إشارة المشتقة عند كلٍّ منهما.

$$\underbrace{- - - - -}_{} \quad \underset{-1}{|} \quad \underbrace{+ + + + +}_{} \quad x$$

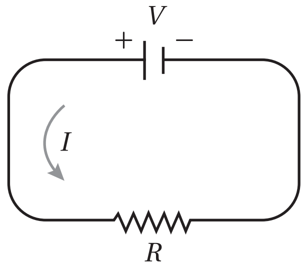
	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

إذن، $f(x)$ مُتناقِص في الفترة $(-\infty, -1)$، ومُتزايِد في الفترة $(-1, \infty)$.

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. عندما يكون طول نصف قُطْره 12 cm.
2. عندما يكون حجمه $1435\ \text{cm}^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).
3. إذا مُلِئَ مدَّة 33.5 s.
4. تُمثِّل المعادلة: $V = IR$ جُهْد الدارة الكهربائية (بالفولت) المُبيَّنة في الشكل المجاور، حيث I شِدَّة التيار بالأمبير، وR المقاومة بالأوم. إذا كان جُهْد الدارة يزداد بمُعدَّل 1 volt/sec، وشِدَّة التيار تقل بمُعدَّل $\frac{1}{3}$ amp/sec ، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $V = 12$، و$I = 2$.

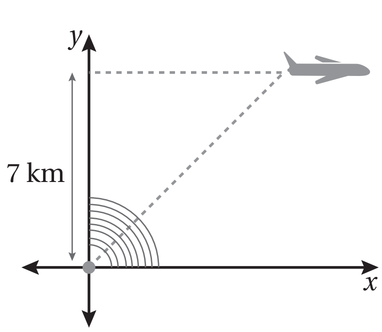


إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلٍّ منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

5. أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2} s^2 \sin \theta$.
6. إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min ، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

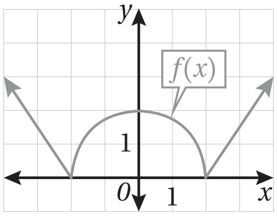
7. يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1 + x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هو 3 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$.

8. حلَّقت طائرة على ارتفاع 7 km، ومَرَّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البُعْد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



الدرس 2

القِيَم القصوى والتقعُّر
Extreme Values and Concavity



1 أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران $f(x)$ المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

2 $f(x) = 1+ \cos^2 x ,[\frac{\pi}{4},\pi]$

3 $f(x) = (x^2 -4)^3 ,[-2, 3]$

4 $f(x) = x - 2 \sin x, [-2\pi, 2\pi]$

5 $f(x) = x \ln(x+3), [0, 3]$

6 $f(x) = x + \frac{4}{x} ,[-8, -1]$

7 $f(x) = 5e^x - e^{2x} , [-1, 2]$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص، ثم أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = \sin x + \cos x, [0, 2\pi]$

9 $f(x) = \frac{x}{x-5}$

10 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 -1}$

11 $f(x) = \ln(x^2 -3x +4)$

12 $f(x)= e^{-x^2}$

13 $f(x)= 2^{x^2-3}$

أجد فترات التقعُّر إلى الأعلى وإلى الأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

14 $f(x) = 4x^3 -3x^2 -6x +12$

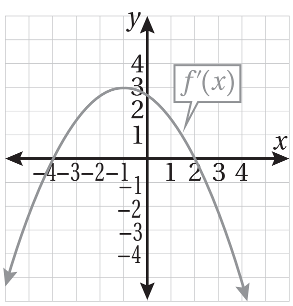
15 $f(x) = x^6 -3x^4$

16 $f(x) = (2 +2x - x^2)^2$

17 $f(x) = x\sqrt{4- x^2}$

18 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

19 $f(x) = 2x - \tan x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

20 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

21 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

22 $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x, [0, 2\pi]$

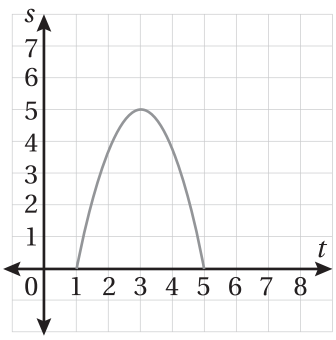
23 $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$

24 $f(x) = (x^2 -3)e^x$

القِيَم القصوى والتقعُّر
Extreme Values and Concavity

25 إذا كان للاقتــران: $f(x) = ax^2 + bx + c$ قيمـة عظمى محلية عند النقطة $(3, 12)$، وقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:



26 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

27 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسـم في الاتجـاه الموجب ؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

28 ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

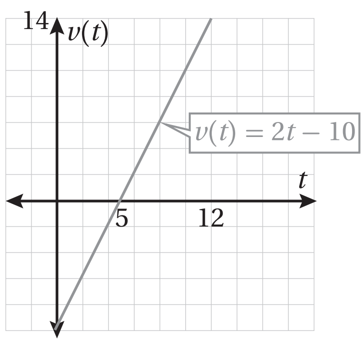
إذا كان الاقتران: $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

29 إذا كان لمنحنـى الاقتران f مماس أفقي عنـد كلٍّ من النقطة $(-2, -73)$ والنقطة $(0, -9)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc، وd.

30 إذا وُجِدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي، فأجد إحداثيي هذه النقطة.

31 أُصنِّف كُلًّا من النقاط الثلاث إلى صغرى محلية، وعظمى محلية (إنْ أمكن).

يُمثِّل الاقتران $v(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، وt الزمن بالثواني:



32 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

33 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسـم في الاتجـاه الموجب ؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

34 ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

35 إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ قيمة قصوى محلية عند النقطة $(2, 11)$، ونقطة انعطاف عندما $x = 1$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

1 إذا كان a cm وb cm هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يُمكِن.

2 ترغب شركة في تصميم خزّان من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، حجمه 500 m^3، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s_1 = \sin t$ والاقتران: $s_2 = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ موقعي جُسَيْمين يتحرَّكان في مسار مستقيم، حيث s_1 وs_2 الموقعان بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

3 أجد قيمة (قِيَم) t التي يلتقي فيها الجُسَيْمين.

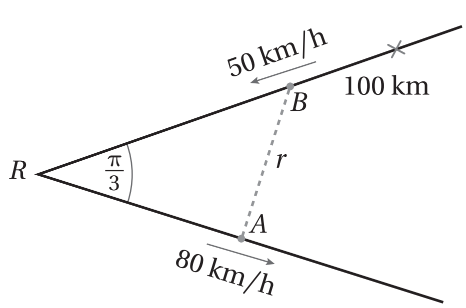
4 أجد أكبر مسافة بين الجُسَيْمين في الفترة الزمنية: $0 \leq t \leq 2\pi$.

سلك يبلغ طوله 24 cm، ويراد قَصُّه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:

5 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكِن.

6 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكِن.

7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80 km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيّارة B بسرعة 50 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 100 km، فأجد أقصر مسافة مُمكِنة بين السيّارتين.



الوحدة 3: الأعداد المُركَّبة

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

حلُّ معادلات كثيرات الحدود

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلتين الآتيتين:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2) $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$

مثال: أَحُلُّ المعادلة: $3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$

أستعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

المعادلة المعطاة $\quad 3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$

بطرح $(5x + 24)$ من طرفي المعادلة $\quad 3x^3 + 7x^2 - 14x - 24 = 0$

بتعويض $x = 2$ $\quad 3(2)^3 + 7(2)^2 - 14(2) - 24 \stackrel{?}{=} 0$

بالتبسيط $\quad 0 = 0 \checkmark$

إذن، $x = 2$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x - 2$ هو أحد عوامل المقدار: $(3x^3 + 7x^2 - 14x - 24)$.

لإيجاد العامل الآخر، أَقسِم هذا المقدار على $(x - 2)$:

	$3x^2$	$13x$	12	
x	$3x^3$	$13x^2$	$12x$	0
-2	$-6x^2$	$-26x$	-24	

بالتحليل وَفق نتيجة القسمة $\quad (x-2)(3x^2 + 13x + 12) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\quad 3x^2 + 13x + 12 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$

المعادلة التربيعية الناتجة $\quad 3x^2 + 13x + 12 = 0$

بالتحليل إلى العوامل $\quad (3x + 4)(x + 3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\quad x + 3 = 0, \quad \text{or} \quad 3x + 4 = 0$

بحلِّ كلٍّ من المعادلتين $\quad x = -3, \quad \text{or} \quad x = \frac{-4}{3}$

إذن، يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار)، هي: $2, -3, \frac{-4}{3}$.

تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها

3 إذا كانت $A(4, 2)$، وكانت $B(2, 6)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثم أجد مقداره.

4 إذا كانت $A(-2, 3)$، وكانت $B(0, 7)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثم أجد مقداره.

مثال: **إذا كانت $A(-5, 4)$، وكانت $B(2, 7)$، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$، ثم أجد مقداره.**

صيغة الصورة الإحداثية للمتجه	$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle$
بتعويض $A(-5, 4)$، و $B(2, 7)$، والتبسيط	$= \langle 2 - (-5), 7-4 \rangle = \langle 7, 3 \rangle$
صيغة مقدار المتجه $\boldsymbol{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle$	$\lvert \boldsymbol{a} \rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
بتعويض $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \langle 7, 3 \rangle$	$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{7^2 + 3^2}$
بالتبسيط	$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \sqrt{58}$

إذن، $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 3 \rangle$، ومقداره هو $\sqrt{58}$

معادلة الدائرة

5 أكتب معادلة دائرة مركزها $(-1, 8)$، وطول نصف قُطْرها 5 وحدات.

6 أكتب معادلة دائرة مركزها $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطة $(5, 4)$.

مثال: **أكتب معادلة دائرة مركزها $(3, -4)$، وتمرُّ بنقطة الأصل.**

أجد طول نصف القُطْر r؛ وهو المسافة بين المركز ونقطة تمرُّ بها الدائرة:

صيغة المسافة بين نقطتين	$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
بتعويض $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (3, -4)$	$= \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2}$
بالتبسيط	$= \sqrt{9 + 16} = 5$
صيغة معادلة دائرة مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
بتعويض $(h, k) = (3, -4)$، و $r = 5$	$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

الوحدة 3: الأعداد المُركّبة

حلُّ نظام متباينات خطِّية

7 أُمثِّل بيانيًّا منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحلِّ:

$$4x + 3y \leq 12$$

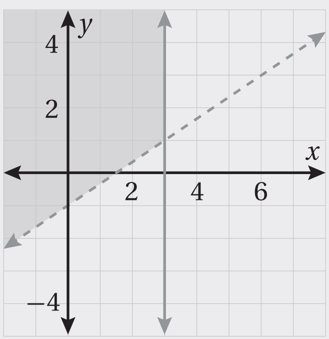
$$y - 2x < 0$$

مثال: **أُمثِّل بيانيًّا منطقة حلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحلِّ:**

$$x \leq 3$$

$$y > \frac{2}{3}x - 1$$

الخطوة 1: أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين.



أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين: $x = 3$، و $y = \frac{2}{3}x - 1$ في المستوى الإحداثي نفسه. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة الثانية، فإنَّني أرسم المستقيم: $y = \frac{2}{3}x - 1$ مُتقطِّعًا. أمّا المستقيم: $x = 3$ فأرسمه متصلًا؛ نظرًا إلى وجود مساواة في رمز المتباينة الأولى كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

أُظلِّل منطقة الحلِّ لكل متباينة. ومن ثَمَّ تكون المنطقة المشتركة بين منطقتي حلِّ المتباينتين هي حلَّ نظام المتباينات كما في الشكل المجاور.

الخطوة 3: أتحقَّق من صحة الحلِّ.

أتحقَّق من صحة الحلِّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حلِّ النظام، مثل $(0, 2)$، ثم أُعوِّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى	$x \leq 3$
بالتعويض	$0 \overset{?}{\leq} 3$
العبارة صحيحة	$0 \leq 3$ ✔
المتباينة الثانية	$y > \frac{2}{3}x - 1$
بالتعويض	$2 \overset{?}{>} \frac{2}{3}(0) - 1$
العبارة صحيحة	$2 > -1$ ✔

الأعداد المُركَّبة

Complex Numbers

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-128}$ 2) $\sqrt{-14}$ 3) $\sqrt{-81}$

4) $\sqrt{-125}$ 5) $3\sqrt{-32}$ 6) $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

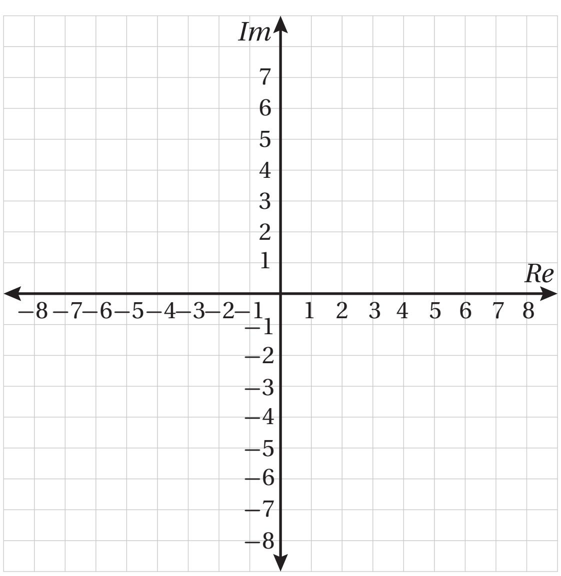
أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة، مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

7) i^7 8) i^{12} 9) i^{98} 10) i^{121}

11) أملأ الفراغ بما هو مُناسِب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

أُمثِّل كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية في المستوى المُركَّب المجاور:



12) 5 13) -4

14) $4i$ 15) $-3i$

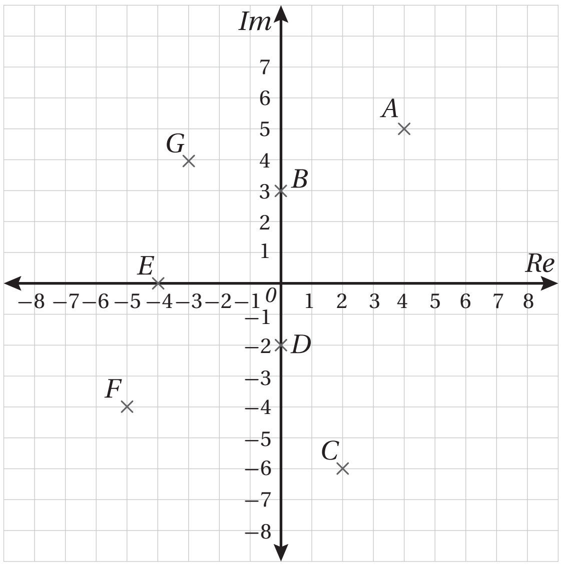
16) $4-2i$ 17) $-3+5i$

18) $-3-5i$ 19) i

20) $7-4i$ 21) $-5+4i$

22) $-7-2i$ 23) $5+5i$

24 أكتب كُلًّا من الأعـداد المُركَّبة المُمثَّلة بيانيًّا في المستوى المُركَّب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته.



أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة ممّا يأتي صحيحة:

25 $(2x+1)+4i=7-i\,(y-3)$

26 $i\,(2x-4y)+x+3y=26+32i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة المثلثية:

27 6

28 $-5i$

29 $-2\sqrt{3}-2i$

30 $-1+i$

31 $4-2i$

32 $2+8i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة القياسية:

33 $6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

34 $12(\cos\pi+i\sin\pi)$

35 $8(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

36 $3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$

أجد مُرافِق كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

37 $-1-i\sqrt{5}$

38 $9-i$

39 $2-8i$

40 $-9i$

41 12

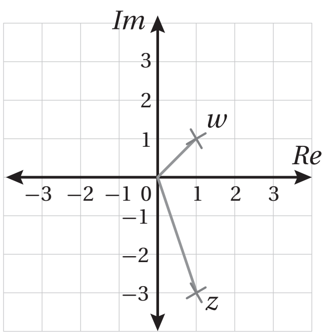
42 $i-8$

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations With Complex Numbers

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $(6 + 8i) + (3 - 5i)$
2. $(-6 - 3i) - (-8 + 2i)$
3. $4i(7 - 3i)$
4. $(8 - 6i)(8 + 6i)$
5. $(-2 + 2i\sqrt{3})^3$
6. $\dfrac{(2 + i)(1 - i)}{4 - 3i}$

مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين z و w، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



7. أكتب كُلًّا من العددين z و w بالصورة القياسية.
8. أجد السعة والمقياس لكلٍّ من العددين المُركَّبين wz و $\dfrac{w}{z}$
9. أُمثِّل العددين wz و $\dfrac{w}{z}$ في المستوى المُركَّب.

إذا كان: $z = -3 + 3i\sqrt{3}$، وكان: $|w| = 18, \mathrm{Arg}(w) = -\dfrac{\pi}{6}$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

10. $\mathrm{Arg}(z)$
11. $|z|$
12. $\mathrm{Arg}(zw)$
13. $|zw|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

14. $-15 + 8i$
15. $-7 - 24i$
16. $105 + 88i$

17. إذا كان: $\omega = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$، فأكتبه بالصورة المثلثية، مُبيِّنًا أنَّ $\omega^3 = -1$.

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations with Complex Numbers

إذا كان: $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$، وكان: $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

18 $z_1 z_2$

19 $z_1(\overline{z_1})$

20 z_2^3

21 $\frac{z_2}{z_1}$

22 إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$، فما قيمة u، علمًا بأنَّها سالبة؟

23 إذا كان: $(1+4i)$ جذرًا للمعادلة: $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

24 أجد قيمتي الجذر التربيعي: $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

25 أُثبِت أنَّ أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7+24i)$ هو $(4+3i)$، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

26 أُثبِت أنَّ سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$.

27 أُثبِت أنَّ مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$.

28 إذا كان: $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1-i$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb.

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

29 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

30 $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

31 إذا كان: $-2 + i$ هـو أحد جذور المعادلة: $z^4 + az^3 + bz^2 + 10z + 25 = 0$، فأجد قيمة a، وقيمة b، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة.

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب، وأجد معادلته الديكارتية:

1. $|z+5i|-3=1$
2. $|z-2+8i|=13$
3. $|z+4-3i|=7$
4. $|z+3+5i|=|z-i|$
5. $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$
6. $|6-2i-z|=|z+4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب:

7. $\operatorname{Arg}(z+3)=\dfrac{\pi}{4}$
8. $\operatorname{Arg}(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3}$
9. $\operatorname{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل متباينة ممّا يأتي:

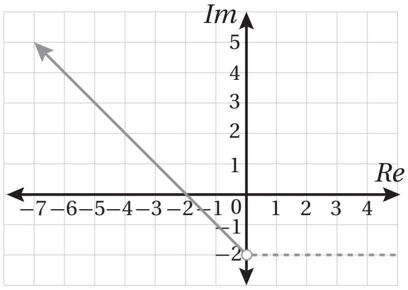
10. $0\le \arg(z-3i)\le \dfrac{3\pi}{4}$
11. $|z-2i|>2$
12. $|z|\le 8$

إذا كانت: $|z-5i|=3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

13. أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.
14. أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

15. أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-1+i|\le 1$، والمتباينة: $-\dfrac{\pi}{3}<\operatorname{Arg}(z)<0$.

16. أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط المُمثَّلة في المستوى المُركَّب المجاور.



17 إذا كانت: $u = -7 + 7i$، وكانت: $v = 7 + 7i$، فأجد بصيغة: $|z - z_1| = r$ معادلة الدائرة التي تمرُّ بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تُمثِّلان العددين المُركَّبين u، وv.

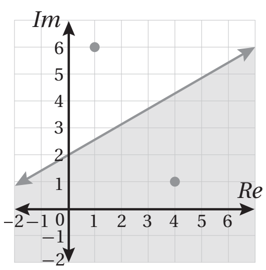
18 إذا كانت: $u = -1 - i$، فأجد u^2، ثم أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z| < 2$، والمتباينة: $|z - u| < |z - u^2|$.

19 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3i| = 13$، والمعادلة: $\text{Arg}(z - 4) = \frac{\pi}{4}$، ثم أجد العدد المُركَّب z الذي يُحقِّقهما معًا.

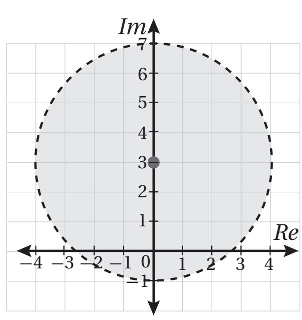
20 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3 - 2i| = 5$، والمعادلة: $|z - 6i| = |z - 7 + i|$، ثم أجد العددين المُركَّبين اللذين يُحقِّقان المعادلتين معًا.

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

21



22



23 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في الشكل الآتي: