الاسئلة الوزارية المقالية

٢٠٠٨ الى ٢٠٢١ تكميلي

المستوى الرابع

الفرع العلمي

رافت صافي ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١) جد $\int \frac{\text{٥ جا}^2\text{س} + \text{٥ جتا}^2\text{س}}{\text{٣} + \text{٣ جتا٢س}}$ دس

الحل: $\int \frac{\text{٥(جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س)}}{\text{٣(١} + \text{جتا٢س)}}$ دس $= \int \frac{\text{٥} \times \text{١}}{\text{٣} \times \text{٢جتا}^2\text{س}}$ دس

$= \int \frac{٥}{٦}$ قا^{2}س دس $= \frac{٥}{٦}$ ظاس + جـ

٢) اذا كان $\int$ ٢ق′(س) دس = ٢س + جاس − $\int$ جتاس ق′(س) دس
جد ق′(٠)

الحل: اشتقاق الطرفين:
٢ق′(س) = ٢ + جتاس − جتاس ق′(س) عند س = ٠
٢ق′(٠) = ٢ + جتا٠ − جتا٠ × ق′(٠)
٢ق′(٠) = ٢ + ١ − ق′(٠)
٣ق′(٠) = ٣ ومنه ق′(٠) = ١

٣) اذا كان ق″(س) = جاس ، ق′(π) = −١ ، ق(π) = صفراً
جد قاعدة ق(س).

الحل: ق″(س) = جاس تكامل الطرفين
ق′(س) = −جتاس + جـ١ لكن ق′(π) = −١
ق′(π) = −جتاπ + جـ١
−١ = ١ + جـ١ ← جـ١ = −٢
ق′(س) = −جتاس − ٢ تكامل الطرفين
ق(س) = −جاس − ٢س + جـ١ لكن ق(π) = ٠
ق(π) = −جاπ − ٢π + جـ١
٠ = −٠ − ٢π + جـ١ ← جـ١ = ٢π
وعليه ق(س) = −جاس − ٢س + ٢π

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤) إذا كان ∫ (ق′(س) + س²) دس = ٢س³ + هـ س² + ٢ وكان ق′(١) = ٤
ق(٢) = ٦ جد ق(-١) .

الحل :
نجد أولاً (هـ) ← نشتق الطرفين :

ق′(س) + س² = ٦س² + ٢هـ س   عند س = ١ :
ق′(١) + ١ = ٦ + ٢هـ   لكن ق′(١) = ٤
٤ + ١ = ٦ + ٢هـ
٥ = ٦ + ٢هـ ← هـ = $\frac{-١}{٢}$

رأفت صافي

∴ ∫ (ق′(س) + س²) دس = ٢س³ - $\frac{١}{٢}$ س² + ٢

ق(س) + $\frac{س^٣}{٣}$ + جـ١ = ٢س³ - $\frac{١}{٢}$ س² + ٢   عند س = ٢
ق(٢) + $\frac{٨}{٣}$ + جـ١ = ١٦ - ٢ + ٢   لكن ق(٢) = ٦
٦ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ١ = ١٦ ← جـ١ = $\frac{٢٢}{٣}$

ق(س) + $\frac{س^٣}{٣}$ + $\frac{٢٢}{٣}$ = ٢س³ - $\frac{١}{٢}$ س² + ٢   عند س = -١
ق(-١) + $\frac{-١}{٣}$ + $\frac{٢٢}{٣}$ = -٢ - $\frac{١}{٢}$ + ٢   بالتبسيط
ق(-١) = $\frac{-١٥}{٢}$

٥) إذا كان س ق(س) - ∫ ٣س ق(س) دس = ∫ ق′(س) دس
وكان ق(٢) = ٤ جد ق′(٢) .

الحل :
اشتق الطرفين :
س ق′(س) + ق(س) - ٣س ق(س) = ق′(س)   عند س = ٢
٢ ق′(٢) + ق(٢) - ٦ ق(٢) = ق′(٢)   لكن ق(٢) = ٤
٢ ق′(٢) + ٤ - ٦×٤ = ق′(٢)
٢ ق′(٢) + ٤ - ٢٤ = ق′(٢)
ق′(٢) - ٢٠ = ٠   ومنه ق′(٢) = ٢٠

١) جد $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س \, دس$

الحل:
$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} (\text{جا}س \times \text{جتا}س)^2 \, دس = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{1}{2}\text{جا}2س\right)^2 دس$

$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{4}\text{جا}^2 2س \, دس = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{جتا}4س\right) دس$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}س - \frac{1}{8}\text{جا}4س\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{8}\text{جا}0\right) - \left(\frac{-\pi}{6} - \frac{1}{8}\text{جا}\frac{-4\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[0 - \left(\frac{-\pi}{6} + \frac{1}{8}\text{جا}\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right] = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{64}$

---

٢) جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1 - \text{جتا}س}$

ملاحظة أو نستبدل $1 - \text{جتا}س$ بـ $2\text{جا}^2\frac{س}{2}$

رافت صافي

الحل:
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1 - \text{جتا}س} \times \frac{1 + \text{جتا}س}{1 + \text{جتا}س}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \text{جتا}س}{1 - \text{جتا}^2 س} دس = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \text{جتا}س}{\text{جا}^2 س} دس$ توزيع

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\text{جا}^2 س} + \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س} \times \frac{1}{\text{جا}س}\right) دس = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\text{قتا}^2 س + \text{ظتا}س \, \text{قتا}س\right) دس$

$= \left[-\text{ظتا}س - \text{قتا}س\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(-\text{ظتا}\frac{\pi}{3} - \text{قتا}\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\text{ظتا}\frac{\pi}{4} - \text{قتا}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right) = \frac{-3}{\sqrt{3}} + 1 + \sqrt{2}$

٣) جد $\int_{0}^{2} (س^2 - |س-1|)\, دس$

$$[\ 1-س \quad \underset{1}{\times} \quad س-1\ ]$$
(من ٠ إلى ٢)

الحل: $= \int_{0}^{1} \left(س^2 - (1-س)\right) دس + \int_{1}^{2} \left(س^2 - (س-1)\right) دس$

$$= \int_{0}^{1} (س^2 + س - 1)\, دس + \int_{1}^{2} (س^2 - س + 1)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} - س\right]_{0}^{1} + \left[\frac{س^3}{3} - \frac{س^2}{2} + س\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{3}$$

---

٤) اذا علمت ان $م \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}}\, دس \le ك$ جد قيمة م، ك

دون حساب قيمة التكامل.

حل ٢) عن طريق استخدام القيم القصوى صفحة ٢٨ (٣)

$\frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} =$

انت صاحي

الحل:

$1 \le س \le 3$ نربع

$1 \le س^2 \le 9$ نضرب بـ (٢)

$2 \le 2س^2 \le 18$ نضيف (٧)

$9 \le 2س^2 + 7 \le 25$ بأخذ الجذر التربيعي

$3 \le \sqrt{2س^2+7} \le 5$ نقلب

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} \le \frac{1}{3}$ نكامل

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{5}\, دس \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}}\, دس \le \int_{1}^{3} \frac{1}{3}\, دس$$

$\frac{2}{5} = م$

$ك = \frac{2}{3}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٥) اذا علمت ان $م \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\ دس \le ك$ جد قيمة م ، ك دون حساب قيمة التكامل

الحل :

$٠ \le س \le ٢$ نرفع للقوة (٤)

$٠ \le س^{٤} \le ١٦$ نضيف (٩)

$٩ \le س^{٤}+٩ \le ٢٥$ الجذر التربيعي

$٣ \le \sqrt{س^{٤}+٩} \le ٥$ ، تكامل

$\int_{٠}^{٢} ٣\ دس \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+٩}\ دس \le \int_{٠}^{٢} ٥\ دس$

$م = ٦$ $\qquad$ $ك = ١٠$

---

٦) م ، هـ معكوسان لمشتقة ق(س) ، $\int_{-١}^{٣} (م(س) - هـ(س))\ دس = ١٢$

جد $\int_{٠}^{٤} ٢س\ م(س)\ دس + \int_{٤}^{٠} ٢س\ هـ(س)\ دس$

الحل :

$م - هـ = ج$ (ثابت) الفرق بين المعكوسين عدد ثابت

$\therefore \int_{-١}^{٣} ج\ دس = ١٢ \leftarrow ٤ج = ١٢ \longrightarrow \boxed{ج = ٣}$ وعليه $م(س) - هـ(س) = ٣$

$\int_{٠}^{٤} ٢س\ م(س)\ دس + \int_{٤}^{٠} ٢س\ هـ(س)\ دس = \int_{٠}^{٤} ٢س\ م(س)\ دس - \int_{٠}^{٤} ٢س\ هـ(س)\ دس$

$= \int_{٠}^{٤} (٢س\ م(س) - ٢س\ هـ(س))\ دس = \int_{٠}^{٤} ٢س(م(س) - هـ(س))\ دس = \int_{٠}^{٤} ٢س \times ٣\ دس$

$= [٣س^{٢}]_{٠}^{٤} = ٣ \times ١٦ - ٠ = ٤٨$

الاستاذ ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٣٤٤٦٤

٧) اذا كان م كثير حدود من الدرجة الثانية وكان :.
م(٠) = م(١) = صفر ، $\int_{0}^{1}$ م(س) دس = ١ جد قاعدة م(س).

الحل :-

م(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

م(٠) = ٠ ⟵ ٠ + ٠ + جـ = ٠ ⟵ $\boxed{\text{جـ} = ٠}$

م(١) = ٠ ⟵ أ + ب + ٠ = ٠ ⟵ أ = -ب وعليه

م(س) = -ب س^{٢} + ب س لكن :.

$\int_{0}^{1}$ م(س) دس = ١

$\int_{0}^{1}$ (-ب س^{٢} + ب س) دس = ١ ⟵ $\left[\frac{-\text{ب س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{ب س}^{٢}}{٢}\right]_{0}^{1}$ = ١

$\frac{-\text{ب}}{٣} + \frac{\text{ب}}{٢}$ = ١ ⟵ $\frac{\text{ب}}{٦}$ = ١ ⟵ ب = ٦ وعليه أ = -٦

:. م(س) = -٦ س^{٢} + ٦ س

---

٨) اذا علمت أن م ≤ $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^{٣} + 1}}$ دس ≤ ك بدون حساب قيمة التكامل جد م ، ك.

الحل : ٠ ≤ س ≤ ٢ نكعب

٠ ≤ س^{٣} ≤ ٨ نضيف (١)

١ ≤ س^{٣} + ١ ≤ ٩ ناخذ الجذر

١ ≤ $\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}$ ≤ ٣ نقلب

$\frac{١}{٣}$ ≤ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}}$ ≤ ١ نكامل

$\int_{0}^{2} \frac{١}{٣}$ دس ≤ $\int_{0}^{2} \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}}$ دس ≤ $\int_{0}^{2}$ ١ دس

م = $\frac{٢}{٣}$

ك = ٢

اقترانات اللوغاريتم والأسي الطبيعي

١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ جتا س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} + \int^{\pi} \frac{\text{دس}}{\text{٢} + \text{جا س}}$ اذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{2}} = -\text{٢}$ جد (أ)

الحل :-

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{أ جا س هـ}^{\text{أ جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} + \text{٠}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{أ جا س هـ}^{\text{أ جتا س}} + \text{ظتا س}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{2}$ فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تساوي $-\text{٢}$

$-\text{٢} = -\text{أ جا}\frac{\pi}{2}\,\text{هـ}^{\text{أ جتا}\frac{\pi}{2}} + \text{ظتا}\frac{\pi}{2}$

$-\text{٢} = -\text{أ هـ}^{\text{٠}} + \text{٠} \leftarrow -\text{٢} = -\text{أ} \leftarrow \boxed{\text{أ} = \text{٢}}$

٢) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$ اذا كان $\text{ق}'(\text{١}) = \text{هـ}$ جد (أ).

الحل :-

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$ عند س = ١

$\text{ق}'(\text{١}) = -\text{١ هـ}^{\text{١}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{أ}$

$\text{هـ} = -\text{هـ} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{أ} \leftarrow \text{٢هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \text{٤هـ}$

٣) $\text{ص} = \text{أ هـ}^{\text{٢س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ جد (أ) حيث $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\text{١}} = \text{هـ}^{\text{٣}} + \text{١}$

الحل :-

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢أ هـ}^{\text{٢س}} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ عند س = ١

$\text{هـ}^{\text{٣}} + \text{١} = \text{٢أ هـ}^{\text{٢}} + \text{جتا٠}$

$\text{هـ}^{\text{٣}} + \text{١} = \text{٢أ هـ}^{\text{٢}} + \text{١} \leftarrow \text{٢أ هـ}^{\text{٢}} = \text{هـ}^{\text{٣}} \leftarrow \text{أ} = \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

٤) $\text{ق(س)} = \int (\text{هـ}^{\text{جتا٢س}} + \text{جا٢س})\,\text{دس}$ جد $\text{ق}''(\frac{\pi}{4})$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتا٢س}} + \text{جا٢س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = -\text{٢جا٢س هـ}^{\text{جتا٢س}} + \text{٢جتا٢س}$

$\text{ق}''(\frac{\pi}{4}) = -\text{٢جا}\frac{\pi}{2}\,\text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{2}} + \text{٢جتا}\frac{\pi}{2} = -\text{٢}\times\text{١}\times\text{١} + \text{٢}\times\text{٠} = -\text{٢}$

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \int \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$ جد $\text{ق}''(٠)$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٢}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)} = \frac{٢\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) \times ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}+٢}}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)\right)^٢}$$

رافت صافي

$$\text{ق}''(٠) = \frac{\text{لو}٢ \times ٢\,\text{هـ}^٠ - ٢\,\text{هـ}^٠ \times \frac{١}{٢}}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}٢\right)^٢} = \frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ١}{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}٢\right)^٢}$$

---

٦) $\text{م}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}$ اقتران معكوس لمشتقة $\text{ق}(\text{س})$ حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ وكان:

$$\int_{٠}^{٢}\left(٤\,\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^٢\right)\text{دس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^٢} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\,\text{دس} = ٢٨$$ جد (أ).

الحل: $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ لأن $\text{م}(\text{س})$ معكوس مشتقة $\text{ق}(\text{س})$

$$\int_{٠}^{٢}\left(٤\,\text{م}'(\text{س}) + \text{هـ}^٢\right)\text{دس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^٢} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\,\text{دس} = ٢٨$$ تكامل

$$\left[٤\,\text{م}(\text{س}) + \text{هـ}^٢\,\text{س}\right]^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-٢}\left(\text{هـ}^٢ - ٤\right) = ٢٨$$

$$\left(٤\,\text{م}(٢) + ٢\,\text{هـ}^٢\right) - \left(٤\,\text{م}(٠) + ٠\right) + \frac{\text{أ}}{\cancel{\text{هـ}-٢}} \times \cancel{(\text{هـ}-٢)}(\text{هـ}+٢) = ٢٨$$

$$\left(٤(٢\,\text{هـ}^٢ - \text{هـ}^٢) + ٢\,\text{هـ}^٢\right) - \left(٤(٠\times\text{هـ}^٠ - \text{هـ}^٠)\right) + \text{أ}(\text{هـ}+٢) = ٢٨$$

$$٨\,\text{هـ}^٢ - ٤\,\text{هـ}^٢ + ٢\,\text{هـ}^٢ + ٤ + \text{أ}(\text{هـ}+٢) = ٢٨$$ نبسط

$$٦\,\text{هـ}^٢ + ٤ - ٢٨ = -\text{أ}(\text{هـ}+٢)$$

$$٦\,\text{هـ}^٢ - ٢٤ = -\text{أ}(\text{هـ}+٢) \leftarrow -\text{أ} = \frac{٦\,\text{هـ}^٢ - ٢٤}{\text{هـ}+٢} = \frac{٦(\text{هـ}^٢-٤)}{\text{هـ}+٢} = \frac{٦(\text{هـ}-٢)\cancel{(\text{هـ}+٢)}}{\cancel{\text{هـ}+٢}}$$

$$-\text{أ} = ٦\,\text{هـ} - ١٢ \leftarrow \boxed{\text{أ} = ١٢ - ٦\,\text{هـ}}$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٣٤٤٦٤

٧) $ص = هـ^{٤س} + لو_{هـ} ظاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{دس}{١+جتا^٢س}$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}}$

الحل:- $\frac{دص}{دس} = ٤هـ^{٤س} + \frac{قا^٢س}{ظاس} + ٠$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$= ٤هـ^{\pi} + \frac{قا^٢\frac{\pi}{٤}}{ظا\frac{\pi}{٤}}$

$= ٤هـ^{\pi} + \frac{٢}{١} = ٤هـ^{\pi} + ٢$

انت صاحي

---

٨) $ص = \sqrt{١+هـ^{س}}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ٠$:.

الحل :-

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{٢\sqrt{١+هـ^{س}}}$ عند $س = ٠$

$= \frac{هـ^{٠}}{٢\sqrt{١+هـ^{٠}}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

---

٩) جد $\int_{٠}^{٢} \left| هـ^{٢س-١} - هـ \right| دس$

الحل :- اعادة التعريف :-

$هـ^{٢س-١} - هـ = ٠ \leftarrow هـ^{٢س-١} = هـ^{١} \leftarrow ٢س-١ = ١ \leftarrow س = ١$

$$\underset{٠}{\vdash}\ \ هـ - هـ^{٢س-١}\ \ \underset{١}{\bullet}\ \ هـ^{٢س-١} - هـ\ \ \underset{٢}{\dashv}$$

$= \int_{٠}^{١} (هـ - هـ^{٢س-١}) دس + \int_{١}^{٢} (هـ^{٢س-١} - هـ) دس$

$= \left[هـس - \frac{١}{٢}هـ^{٢س-١}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{١}{٢}هـ^{٢س-١} - هـس\right]_{١}^{٢}$

$= (هـ - \frac{١}{٢}هـ) - (٠ - \frac{١}{٢}هـ^{-١}) + (\frac{١}{٢}هـ^{٣} - ٢هـ) - (\frac{١}{٢}هـ - هـ)$

$= هـ - \frac{١}{٢}هـ + \frac{١}{٢}هـ^{-١} + \frac{١}{٢}هـ^{٣} - ٢هـ - \frac{١}{٢}هـ + هـ = -هـ + \frac{١}{٢}هـ^{-١} + \frac{١}{٢}هـ^{٣}$

١٠) اذا كان $\int \text{أ}\,\text{ص}'(\text{س})\,\text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢-٤\text{س}| - \int ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ص}'(\text{س})\,\text{د س}$ وكان $\text{ص}'(٠) = ٢$ جد (أ).

الحل :- اشتقاق الطرفين :-

$\text{أ}\,\text{ص}'(\text{س}) = \dfrac{-٤}{٢-٤\text{س}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ص}'(\text{س})$ عند $\text{س} = ٠$

$\text{أ}\,\text{ص}'(٠) = \dfrac{-٤}{٢} - ٢\text{هـ}^{٠}\,\text{ص}'(٠)$ لكن $\text{ص}'(٠) = ٢$

$٢\text{أ} = -٢ - ٢\times٢ \leftarrow ٢\text{أ} = -٦ \leftarrow \boxed{\text{أ} = -٣}$

١١) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{أس}}}$ وكان $\text{ص}'' + ٤\text{ص}' + ٤\text{ص} = ٠$ ∴ جد (أ).

الحل :-

$\sqrt{\text{هـ}^{\text{أس}}} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}} \leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{٢}\text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}}$ ، $\text{ص}'' = \frac{١}{٤}\text{أ}^٢\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}}$ نعوض :-

$\frac{١}{٤}\text{أ}^٢\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}} + ٤\times\frac{١}{٢}\text{أ}\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}} + ٤\,\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}} = ٠$ ∴ نقسم على $\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}}$

$\frac{١}{٤}\text{أ}^٢ + ٢\text{أ} + ٤ = ٠$ ∴ نضرب بـ(٤)

$\text{أ}^٢ + ٨\text{أ} + ١٦ = ٠ \leftarrow (\text{أ}+٤)(\text{أ}+٤) = ٠ \leftarrow \boxed{\text{أ} = -٤}$

١٢) جد $\int \dfrac{(٢-\text{س})^٣}{٢\text{س}}\,\text{د س}$ نفك التكعيب

الحل :- $\int \dfrac{(٨ - ١٢\text{س} + ٦\text{س}^٢ - \text{س}^٣)}{٢\text{س}}\,\text{د س}$ نوزع

$= \int \left(\dfrac{٤}{\text{س}} - ٦ + ٣\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^٢\right)\text{د س}$

$= ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - ٦\text{س} + \dfrac{٣\text{س}^٢}{٢} - \frac{١}{٦}\text{س}^٣ + \text{جـ}$

١٣) $ص = \sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س+١)}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٠$

الحل :-

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢هـ^{٢س} + \frac{١}{س+١}}{٢\sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س+١)}}$ نعوض :-

$= \frac{٢هـ^{٠} + ١}{٢\sqrt{هـ^{٠} + لو_{هـ}١}} = \frac{٣}{٢ \times ١} = \frac{٣}{٢}$

---

١٤) جد $\int_{٠}^{لو_{هـ}٢} هـ^{س}(٩ - ٤هـ^{س})\, دس$

الحل :- $\int_{٠}^{لو_{هـ}٢} (٩هـ^{س} - ٤هـ^{٢س})\, دس$

$= \left[٩هـ^{س} - ٢هـ^{٢س}\right]_{٠}^{لو_{هـ}٢} = \left(٩هـ^{لو_{هـ}٢} - ٢هـ^{٢لو_{هـ}٢}\right) - \left(٩هـ^{٠} - ٢هـ^{٠}\right)$

$= (٩ \times ٢ - ٢ \times ٤) - (٩ - ٢) = ١٠ - ٧ = ٣$

---

١٥) اذا كان $ق(س) = لو_{هـ}\left(\frac{\sqrt{٣س^{٢}+س+٢}}{س^{٣}}\right) + هـ^{٣-س^{٢}}$

جد $ق'(٢)$

الحل :- $ق(س) = لو_{هـ}\sqrt{٣س^{٢}+س+٢} - لو_{هـ}س^{٣} + هـ^{٣-س^{٢}}$

$ق(س) = \frac{١}{٢} لو_{هـ} (٣س^{٢}+س+٢) - ٣ لو_{هـ}س + هـ^{٣-س^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٢} \times \frac{٦س+١}{٣س^{٢}+س+٢} - ٣ \times \frac{١}{س} + -٢س\, هـ^{٣-س^{٢}}$

$ق'(٢) = \frac{١}{٢} \times \frac{١٣}{١٦} - \frac{٣}{٢} - ٤هـ^{-١}$

$= \frac{-٣٥}{٣٢} - \frac{٤}{هـ}$

١٦) اذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{ص}) + \text{هـ}^{٢}$ ، $\text{س} > ٠$ ، $\text{ص} > ٠$

اثبت ان $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١ - \text{ص}(\text{س}+\text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - ١}$

الحل :-

اشتق :-

$\text{هـ}^{\text{س ص}}(\text{س ص}' + \text{ص}) = \dfrac{١ + \text{ص}'}{\text{س}+\text{ص}} + ٠$

$\text{س ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = \dfrac{١ + \text{ص}'}{\text{س}+\text{ص}}$ تبادلي

$\text{س}^{٢}\text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س ص ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = ١ + \text{ص}'$

$\text{س}^{٢}\text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س ص ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{ص}' = ١ - \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}'(\text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - ١) = ١ - \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}$

$\text{ص}' = \dfrac{١ - \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{س ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - ١} = \dfrac{١ - \text{ص}(\text{س}+\text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - ١}$

---

١٧) اذا كان $\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} = ١ + \text{هـ}^{\text{ص}}$ اثبت ان $\text{ص}'' = \text{هـ}^{٢\text{ص}}$

الحل :-

حل آخر
اقسم على $\text{هـ}^{\text{ص}}$
ثم اشتق مرتان

اشتق

$\text{س} \times \text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{ص}}$ بالقسمة على $\text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{س ص}' + ١ = \text{ص}'$

$\text{س ص}' - \text{ص}' = -١$

$\text{ص}'(\text{س} - ١) = -١$

$\text{ص}' = \dfrac{-١}{\text{س} - ١}$ اشتق

$\text{ص}'' = \dfrac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ لكن

$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} = ١ + \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}} = ١$

$\text{هـ}^{\text{ص}}(\text{س} - ١) = ١$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \dfrac{١}{\text{س} - ١}$

$\text{ص}'' = \dfrac{١}{(\text{س} - ١)} \times \dfrac{١}{(\text{س} - ١)}$

$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{٢\text{ص}}$

١٨) اذا كان $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{٢س}^{٢} + \text{٨س}} + \text{هـ}^{\text{١} - \text{س}^{٢}}$

جد قَ(١) .

الحل :-

$$\text{ق(س)} = \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{٢س}^{٢} + \text{٨س}) + \text{هـ}^{\text{١} - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{٤س} + ٨}{\text{٢س}^{٢} + \text{٨س}} + \text{−٢س هـ}^{\text{١} - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{قَ(١)} = \frac{١}{٣} \times \frac{١٢}{١٠} - \text{٢ هـ}^{٠}$$

$$= \frac{٢}{٥} - ٢ = \frac{-٨}{٥}$$

---

١٩) اذا كان $\text{٤ص}^{٢} + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س ص}} + \text{٢ هـ}^{\text{٤} - \text{س}^{٢}}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند النقطة $(٢ ، \frac{١}{٢})$

الحل :- $\text{٤ص}^{٢} + ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{ص}} + \text{٢ هـ}^{\text{٤} - \text{س}^{٢}}$ ~~اشتق~~

$$\text{٨ص صَ} = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} + ٢ \times \text{−٢س هـ}^{\text{٤} - \text{س}^{٢}}$$ عوض النقطة

$$٨ \times \frac{١}{٢} \text{صَ} = \frac{١}{٢} + \frac{\text{صَ}}{\frac{١}{٢}} + \text{−٤} \times \text{٢ هـ}^{٤ - ٤}$$

$$\text{٤صَ} = \frac{١}{٢} + \text{٢صَ} - \text{٨هـ}^{٠}$$

$$\text{٤صَ} - \text{٢صَ} = \frac{١}{٢} - ٨$$

$$\text{٢صَ} = \frac{-١٥}{٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١٥}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-١٥}{٤}$$

* جد $\int_{0}^{\pi}(1+\text{جا}2س)\,\text{جتا}^2س\;دس$ (فك أقواس)

الحل :-

$$\int_{0}^{\pi}\text{جتا}^2س\;دس \quad + \quad \int_{0}^{\pi}\text{جا}2س\,\text{جتا}^2س\;دس$$

نجد كل تكامل لوحده :-

$$\int_{0}^{\pi}\text{جتا}^2س\;دس = \int_{0}^{\pi}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\text{جتا}2س\right)دس = \left[\tfrac{1}{2}س+\tfrac{1}{4}\text{جا}2س\right]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{4}\text{جا}2\pi\right)-\left(0+\tfrac{1}{4}\text{جا}0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}+0-0=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi}\text{جا}2س\,\text{جتا}^2س\;دس$$

$$= \int_{0}^{\pi}2\,\text{جا}س\,\text{جتا}^3س\;دس$$

$ص = \text{جتا}س$

$\frac{دص}{دس} = -\text{جا}س \leftarrow دس = \frac{دص}{-\text{جا}س}$

عند $س=0 \leftarrow ص=\text{جتا}0=1$ ، عند $س=\pi \leftarrow ص=\text{جتا}\pi=-1$

$$= \int_{1}^{-1}2\,\text{جا}س\,ص^3\,\frac{دص}{-\text{جا}س} = \int_{1}^{-1}-2ص^3\,دص = \left[\frac{-2}{4}ص^4\right]_{1}^{-1} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore \int_{0}^{\pi}(1+\text{جا}2س)\,\text{جتا}^2س\;دس = \frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$$

* جد $\int \text{قا}^4 3س\,\text{طا}^3 3س\;دس$

الحل :-

$ص = \text{طا}3س$

$\frac{دص}{دس} = 3\,\text{قا}^2 3س \leftarrow دس = \frac{دص}{3\,\text{قا}^2 3س}$

$\text{قا}^2 3س = \text{طا}^2 3س + 1 = ص^2+1$

$$= \int \text{قا}^4 3س\,ص^3\,\frac{دص}{3\,\text{قا}^2 3س} = \int \tfrac{1}{3}\text{قا}^2 3س\,ص^3\,دص$$

$$= \int \tfrac{1}{3}(ص^2+1)\,ص^3\,دص = \int \tfrac{1}{3}(ص^5+ص^3)\,دص$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[\frac{ص^6}{6}+\frac{ص^4}{4}\right] = \tfrac{1}{3}\left[\frac{\text{طا}^6 3س}{6}+\frac{\text{طا}^4 3س}{4}\right]+ج$$

$$\ast \quad \text{جد } \int \frac{\text{س}}{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

الحل :-

$$\int \text{س جتا}^2\text{س دس}$$

$$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{جتا}^2\text{س دس} = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\right)\text{دس}$$

$$\text{دق} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = \tfrac{1}{2}\text{س} + \tfrac{1}{4}\text{جا}2\text{س}$$

$$= \text{س}\left(\tfrac{1}{2}\text{س} + \tfrac{1}{4}\text{جا}2\text{س}\right) - \int\left(\tfrac{1}{2}\text{س} + \tfrac{1}{4}\text{جا}2\text{س}\right)\text{دس}$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{س}^2 + \tfrac{1}{4}\text{س جا}2\text{س} - \tfrac{1}{4}\text{س}^2 + \tfrac{1}{8}\text{جتا}2\text{س} + \text{ج}$$

$$= \tfrac{1}{4}\text{س}^2 + \tfrac{1}{4}\text{س جا}2\text{س} + \tfrac{1}{8}\text{جتا}2\text{س} + \text{ج}$$

$$\ast \quad \text{جد } \int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^3\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\text{الحل :} \int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جاس} \times \text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{س ظتاس قتا}^2\text{س دس}$$

تعويض

$$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{ظتاس قتا}^2\text{س دس}$$

$$\text{دق} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = \frac{-\text{ظتا}^2\text{س}}{2}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{قتا}^2\text{س}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$= \int \text{ص قتا}^2\text{س} \times \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$= -\int \text{ص دص}$$

$$= \frac{-\text{ص}^2}{2} = \frac{-\text{ظتا}^2\text{س}}{2}$$

$$= \frac{-\text{س}}{2}\text{ظتا}^2\text{س} + \int \tfrac{1}{2}\text{ظتا}^2\text{س دس}$$

$$= \frac{-\text{س}}{2}\text{ظتا}^2\text{س} + \tfrac{1}{2}\int\left(\text{قتا}^2\text{س} - 1\right)\text{دس}$$

$$= \frac{-\text{س}}{2}\text{ظتا}^2\text{س} + \tfrac{1}{2}\left[-\text{ظتاس} - \text{س}\right] + \text{ج}$$

رافت صافي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

$$\ast \quad \text{جد } \int (2\text{س} - 1)\,\text{جا}2\text{س دس}$$

$$\text{الحل :-} \qquad \text{ق} = (2\text{س} - 1) \qquad \text{دهـ} = \text{جا}2\text{س دس}$$

$$\text{دق} = 2\text{دس} \qquad \text{هـ} = \tfrac{-1}{2}\text{جتا}2\text{س}$$

$$\frac{-(2\text{س}-1)}{2}\text{جتا}2\text{س} + \int \text{جتا}2\text{س دس} = \frac{-(2\text{س}-1)}{2}\text{جتا}2\text{س} + \tfrac{1}{2}\text{جا}2\text{س} + \text{ج}$$

* جد $\int_{1}^{\text{هـ}} \frac{2\,\text{دس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-2)(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-3)}$

الحل :-

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \text{س}\ \text{دص}$

$\text{عند س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \text{هـ} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\int_{0}^{1} \frac{2\text{س}\ \text{دص}}{\text{س}(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)} = \int_{0}^{1} \frac{2\,\text{دص}}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}$

$\frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-3}$

$= \frac{\text{أ}(\text{ص}-3) + \text{ب}(\text{ص}-2)}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}$

بالمقارنة :-

$2 = \text{أ}(\text{ص}-3) + \text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{عند ص} = 2 \leftarrow \text{أ} = -2$

$\text{ص} = 3 \leftarrow \text{ب} = 2$

$= \int_{0}^{1} \left(\frac{-2}{\text{ص}-2} + \frac{2}{\text{ص}-3}\right)\text{دص}$

$= \left[-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3|\right]_{0}^{1} = 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{16}{9}$

---

* جد $\int_{0}^{4} \frac{2\,\text{دس}}{\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 3}$

الحل :-

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$\text{عند س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = 4 \leftarrow \text{ص} = 2$

$= \int_{0}^{2} \frac{4\text{ص}\ \text{دص}}{\text{ص}^2 - 4\text{ص} + 3}$

$\frac{4\text{ص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-1}$

$\frac{4\text{ص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}-1)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-1) + \text{ب}(\text{ص}-3)}{(\text{ص}-3)(\text{ص}-1)}$

بالمقارنة :-

$4\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-1) + \text{ب}(\text{ص}-3)$

$\text{عند ص} = 1 \leftarrow \text{ب} = -2$

$\text{عند ص} = 3 \leftarrow \text{أ} = 6$

رأفت صافي

$= \int_{0}^{2} \frac{4\text{ص}\ \text{دص}}{(\text{ص}-3)(\text{ص}-1)}$

$= \int_{0}^{2} \left(\frac{6}{\text{ص}-3} + \frac{-2}{\text{ص}-1}\right)\text{دص} = \left[6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-3| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1|\right]_{0}^{2}$

$= -6\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

* جد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}} \, دس$

الحل: $\int \frac{هـ^{س}}{\frac{1}{هـ^{س}} + هـ^{س}} \, دس = \int \frac{هـ^{س}}{\frac{هـ^{2س}+1}{هـ^{س}}} = \int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س}+1} \, دس$

$ص = هـ^{2س} + 1$

$\frac{دص}{دس} = 2هـ^{2س} \leftarrow دس = \frac{دص}{2هـ^{2س}}$

$= \int \frac{هـ^{2س}}{ص} \times \frac{دص}{2هـ^{2س}} = \int \frac{1}{2} \times \frac{دص}{ص} = \frac{1}{2} لو_{هـ} |ص| + ج$

$= \frac{1}{2} لو_{هـ} |هـ^{2س} + 1| + ج$

* جد $\int (س-1)^3 \sqrt{س^2 - 2س - 4} \, دس$

الحل:

$ص = س^2 - 2س - 4$

$\frac{دص}{دس} = 2س - 2 = 2(س-1)$

$دس = \frac{دص}{2(س-1)}$

$(س-1)^2 = س^2 - 2س + 1$

لكن:

$ص = س^2 - 2س - 4$ نضيف (5)

$ص + 5 = س^2 - 2س + 1$

$ص + 5 = (س-1)^2$

$= \int (س-1)^3 \sqrt{ص} \times \frac{دص}{2(س-1)}$

$= \frac{1}{2} \int (س-1)^2 ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$= \frac{1}{2} \int (ص+5) ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$= \frac{1}{2} \int (ص^{\frac{3}{2}} + 5ص^{\frac{1}{2}}) \, دص$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} ص^{\frac{3}{2}} \right] + ج$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} (س^2 - 2س - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} (س^2 - 2س - 4)^{\frac{3}{2}} \right] + ج$

* جد $\int \dfrac{دس}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^{٤}}$

الحل :-

$ص = ١ + \sqrt{س}$

$\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{١}{٢\sqrt{س}} \leftarrow دس = ٢\sqrt{س}\ دص$

$= \int \dfrac{٢\sqrt{س}\ دص}{\sqrt{س} \times ص^{٤}} = \int ٢ص^{-٤}\ دص = \dfrac{٢ص^{-٣}}{-٣} = \dfrac{-٢}{٣}(١+\sqrt{س})^{-٣} + جـ$

* جد $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جا٢س\ جتاس\ دس$ (نوحد الزوايا)

رافت صافي ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

الحل :- $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ٢جاس\ جتا^{٢}س\ دس$

عند $س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = ٠$

عند $س = \frac{\pi}{٤} \leftarrow ص = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$ص = جتاس$

$\dfrac{دص}{دس} = -جاس \leftarrow دس = \dfrac{دص}{-جاس}$

$= \int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠} ٢جاس\ ص^{٢} \dfrac{دص}{-جاس} = \int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠} -٢ص^{٢}دص = \left[\dfrac{-٢ص^{٣}}{٣}\right]_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{٠}$

$= ٠ + \dfrac{٢}{٣} \times \left(\dfrac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٣} = \dfrac{٢}{٣} \times \dfrac{١}{٢\sqrt{٢}} = \dfrac{١}{٣\sqrt{٢}}$

* جد $\int_{٠}^{١} \dfrac{-س}{(س+١) - \sqrt{س+١}}\ دس$

الحل :-

$ص = \sqrt{س+١}$ نربع

$ص^{٢} = س + ١$

$٢ص\ دص = دس$

عند $س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$س = ١ \leftarrow ص = \sqrt{٢}$

$= \int_{١}^{\sqrt{٢}} \dfrac{-س}{(س+١) - ص} \times ٢ص\ دص$ لكن $ص^{٢} = س + ١ \leftarrow -س = ١ - ص^{٢}$

$= \int_{١}^{\sqrt{٢}} \dfrac{١-ص^{٢}}{ص^{٢}-ص} \times ٢ص\ دص = \int_{١}^{\sqrt{٢}} \dfrac{(١-ص)(١+ص)}{\cancel{ص}(ص-١)} \times ٢\cancel{ص}\ دص$

$= \int_{١}^{\sqrt{٢}} (-٢ص-٢)\ دص = \left[-ص^{٢} - ٢ص\right]_{١}^{\sqrt{٢}} = (-٢-٢\sqrt{٢}) - (-١-٢) = -٢\sqrt{٢} + ١$

✳ جد $\int \text{هـ}^{\text{س}} (2\,\text{جتا}3\text{س}\,\text{جتا}\text{س} - \text{جتا}2\text{س})\,\text{دس}$ نوجد / نوزع ١

الحل: $\int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{جتا}4\text{س} + \cancel{\text{جتا}2\text{س}} - \cancel{\text{جتا}2\text{س}})\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دم} = \text{جتا}4\text{س}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{م} = \frac{1}{4}\,\text{جا}4\text{س}$ اجزاء

$\frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}4\text{س} - \int \frac{1}{4}\,\text{جا}4\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دم} = \text{جا}4\text{س}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \text{م} = -\frac{1}{4}\,\text{جتا}4\text{س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س}\,\text{دس} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}4\text{س} + \frac{1}{16}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س} - \int \frac{1}{16}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س}\,\text{دس}$

$\frac{17}{16}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س}\,\text{دس} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}4\text{س} + \frac{1}{16}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س} \qquad \times \frac{16}{17}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س}\,\text{دس} = \frac{4}{17}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}4\text{س} + \frac{1}{17}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}4\text{س} + \text{ج}$

✳ جد $\int_{2}^{5} \text{هـ}^{(1+\sqrt{\text{س}-1})}\,\text{دس}$

الحل :-

$\text{ص} = 1 + \sqrt{\text{س}-1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}-1}} \leftarrow \text{دس} = 2\sqrt{\text{س}-1}\,\text{دص}$

عند $\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{س} = 5 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{ص} = 1 + \sqrt{\text{س}-1}$

$\text{ص} - 1 = \sqrt{\text{س}-1}$

$= \int_{2}^{3} \text{هـ}^{\text{ص}} \times 2\sqrt{\text{س}-1}\,\text{دص}$

$= \int_{2}^{3} (2\text{ص}-2)\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$ اجزاء

$\text{ق} = (2\text{ص}-2) \qquad \text{دم} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دق} = 2\,\text{دص} \qquad \text{م} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= \left[(2\text{ص}-2)\,\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{2}^{3} - \int_{2}^{3} 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= 4\text{هـ}^{3} - 2\text{هـ}^{2} - \left[2\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{2}^{3}$

$= 4\text{هـ}^{3} - 2\text{هـ}^{2} - \left[2\text{هـ}^{3} - 2\text{هـ}^{2}\right] = 4\text{هـ}^{3} - 2\text{هـ}^{3} - 2\text{هـ}^{2} + 2\text{هـ}^{2}$

$= 2\text{هـ}^{3}$

جد $\int_{١}^{٨} \frac{٢دس}{\sqrt[٣]{س^٤} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^٢}} دس$

الحل :-

$ص = \sqrt[٣]{س}$

$ص^٣ = س$

$٣ص^٢ دص = دس$

عند $س = ١ \leftarrow ص = ١$

$س = ٨ \leftarrow ص = ٢$

$$\int_{١}^{٢} \frac{٦ص^٢ دص}{ص^٤ + ٤ص^٣ + ٣ص^٢} = \int_{١}^{٢} \frac{٦ دص}{ص^٢ + ٤ص + ٣}$$

$$= \int_{١}^{٢} \frac{٦ دص}{(ص+٣)(ص+١)}$$

$$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٣}{ص+١} - \frac{٣}{ص+٣} \right) دص$$

$$= \left[٣ لو_{هـ} |ص+١| - ٣ لو_{هـ} |ص+٣| \right]_{١}^{٢} = ٣ لو_{هـ} ٣ - ٣ لو_{هـ} ٥ - ٣ لو_{هـ} ٢ + ٣ لو_{هـ} ٤ = ٣ لو_{هـ} ١٫٢$$

$$\frac{٦}{(ص+١)(ص+٣)} = \frac{أ}{ص+١} + \frac{ب}{ص+٣}$$

$$\frac{٦}{(ص+١)(ص+٣)} = \frac{أ(ص+٣) + ب(ص+١)}{(ص+١)(ص+٣)}$$

بالمقارنة :-

$٦ = أ(ص+٣) + ب(ص+١)$

عند $ص = -١ \leftarrow أ = ٣$

عند $ص = -٣ \leftarrow ب = -٣$

جد $\int \frac{س^٣ - ١}{س^٢ + ٢س} دس$

الحل :-

$$\begin{array}{r} س - ٢ \\ س^٢ + ٢س \,\overline{)\, س^٣ - ١} \\ \underline{-\,(س^٣ + ٢س^٢)} \\ -٢س^٢ - ١ \\ \underline{-\,(-٢س^٢ - ٤س)} \\ ٤س - ١ \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{س^٣ - ١}{س^٢ + ٢س} دس = \int \left((س - ٢) + \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٢س} \right) دس$$

$$= \int \left((س-٢) + \frac{٤س - ١}{س(س+٢)} \right) دس$$

$$= \int \left((س-٢) + \frac{-\frac{١}{٢}}{س} + \frac{\frac{٩}{٢}}{س+٢} \right) دس$$

$$= \frac{س^٢}{٢} - ٢س - \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س| + \frac{٩}{٢} لو_{هـ} |س+٢| + جـ$$

$$\frac{٤س - ١}{س(س+٢)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٢}$$

$$\frac{٤س - ١}{س(س+٢)} = \frac{أ(س+٢) + ب س}{س(س+٢)}$$

بالمقارنة :-

$٤س - ١ = أ(س+٢) + ب س$

عند $س = ٠ \leftarrow أ = -\frac{١}{٢}$

عند $س = -٢ \leftarrow ب = \frac{٩}{٢}$

* جد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س} - 4} \, دس$

الحل :-

$ص = هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س} \leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}} = \frac{دص}{ص}$

$\int \frac{ص}{ص^2 - 4} \times \frac{دص}{ص} = \int \frac{دص}{ص^2-4}$

$= \int \frac{دص}{(ص-2)(ص+2)} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{ص-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{ص+2} \right) دص$

$= \frac{1}{4} لو_{هـ}|ص-2| - \frac{1}{4} لو_{هـ}|ص+2| + جـ$

$= \frac{1}{4} لو_{هـ}|هـ^{س}-2| - \frac{1}{4} لو_{هـ}|هـ^{س}+2| + جـ$

$\frac{1}{(ص-2)(ص+2)} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+2}$

$\frac{1}{(ص-2)(ص+2)} = \frac{أ(ص+2) + ب(ص-2)}{(ص-2)(ص+2)}$

$1 = أ(ص+2) + ب(ص-2)$

$ص = 2 \leftarrow أ = \frac{1}{4}$

$ص = -2 \leftarrow ب = \frac{-1}{4}$

رافت صافي

---

* جد $\int \frac{س^2}{س^2 - 4} \, دس$

الحل :-

$س^2 - 4 \,\big)\, \overline{س^2}$ ، الناتج 1

$-\,(س^2 - 4)$

الباقي 4

$= \int \left(1 + \frac{4}{س^2-4} \right) دس$

$= \int \left(1 + \frac{4}{(س-2)(س+2)} \right) دس$

$= \int \left(1 + \frac{1}{س-2} + \frac{-1}{س+2} \right) دس$

$= س + لو_{هـ}|س-2| - لو_{هـ}|س+2| + جـ$

$\frac{4}{(س-2)(س+2)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س+2}$

$\frac{4}{(س-2)(س+2)} = \frac{أ(س+2) + ب(س-2)}{(س-2)(س+2)}$

بالمقارنة :-

$4 = أ(س+2) + ب(س-2)$

عندما $س = 2 \leftarrow أ = 1$

$س = -2 \leftarrow ب = -1$

جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس (س + قتا³س) دس "فك الاقواس"

الحل: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ س جاس دس + $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ قتا²س دس بجذ كل تكامل لوحده

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ س جاس دس (اجزاء)

ع = س ، دهـ = جاس دس

دع = دس ، هـ = -جتاس

$[-$س جتاس$]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتاس دس

$-\frac{\pi}{2}$ جتا $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ + $[$جاس$]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$0 + \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ + (جا $\frac{\pi}{2}$ - جا $\frac{\pi}{4}$) $= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ قتا²س دس = $[-$ظتاس$]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ = -ظتا $\frac{\pi}{2}$ + ظتا $\frac{\pi}{4}$ = $0 + 1 = 1$

∴ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس (س + قتا³س) دس $= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 2 + \frac{\pi - 4}{4\sqrt{2}}$

اذا كان $\int_{0}^{\pi}$ $\frac{\text{جتاس}}{(\text{س}+2)^2}$ دس = م جد بدلالة (م) قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}+1}$ دس

الحل:

ص = ٢س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2$ ← دس = $\frac{\text{دص}}{2}$

عند س = ٠ ← ص = ٠

س = $\frac{\pi}{2}$ ← ص = π

= $\int_{0}^{\pi}$ $\frac{\text{جاص}}{\frac{\text{ص}}{2}+1} \times \frac{\text{دص}}{2}$ = $\int_{0}^{\pi}$ $\frac{\text{جاص}}{\text{ص}+2}$ دص اجزاء

ع = $\frac{1}{\text{ص}+2}$ ، دهـ = جاص دص

دع = $\frac{-1}{(\text{ص}+2)^2}$ دص ، هـ = -جتاص

$\left[\frac{-\text{جتاص}}{\text{ص}+2}\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جتاص}}{(\text{ص}+2)^2}$ دص = $\frac{-\text{جتا}\,\pi}{\pi+2} + \frac{\text{جتا}\,0}{0+2}$ - م

= $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2}$ - م

* جد $\int \frac{\text{س}^5+2}{\text{س}^2-1}\,\text{دس}$

الحل :-

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^3+\text{س} & \\ \hline \text{س}^5+2 & \text{س}^2-1 \\ -\text{س}^5-\text{س}^3 & \\ \hline \text{س}^3+2 & \\ -\text{س}^3-\text{س} & \\ \hline \text{س}+2 & \end{array}$$

$$= \int \left(\text{س}^3+\text{س}+\frac{\text{س}+2}{\text{س}^2-1}\right)\text{دس}$$

$$= \int \left(\text{س}^3+\text{س}+\frac{\text{س}+2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}\right)\text{دس}$$

$$= \int \left(\text{س}^3+\text{س}+\frac{\frac{3}{2}}{\text{س}-1}+\frac{\frac{-1}{2}}{\text{س}+1}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^4}{4}+\frac{\text{س}^2}{2}+\frac{3}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| - \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{جـ}$$

$$\frac{\text{س}+2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-1}+\frac{\text{ب}}{\text{س}+1}$$

$$\frac{\text{س}+2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+1)+\text{ب}(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}$$

بالمقارنة :-

$$\text{س}+2 = \text{أ}(\text{س}+1)+\text{ب}(\text{س}-1)$$

عند $\text{س}=1 \leftarrow \text{أ}=\frac{3}{2}$

عند $\text{س}=-1 \leftarrow \text{ب}=\frac{-1}{2}$

* جد $\int \frac{1}{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل :- $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$$

$$\int \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}+1)}\,\text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\text{ص}} - \frac{1}{1+\text{ص}}\right)\text{دص}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \text{جـ}$$

$$\frac{1}{\text{ص}(1+\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}}+\frac{\text{ب}}{1+\text{ص}}$$

$$\frac{1}{\text{ص}(1+\text{ص})} = \frac{\text{أ}(1+\text{ص})+\text{ب}\,\text{ص}}{\text{ص}(1+\text{ص})}$$

بالمقارنة :-

$$1 = \text{أ}(1+\text{ص})+\text{ب}(\text{ص})$$

عند $\text{ص}=0 \leftarrow \text{أ}=1$

عند $\text{ص}=-1 \leftarrow \text{ب}=-1$

* جد $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} (\text{لوهـ س})^{2} \, \text{دس}$ حيث $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \, \text{لوهـ س} \, \text{دس} = \frac{4\text{هـ}^{5}+1}{25}$

الحل :

$\text{م} = (\text{لوهـ س})^{2}$ ، $\text{دن} = \text{س}^{4} \, \text{دس}$

$\text{دم} = 2 \times \text{لوهـ س} \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{دس}$ ، $\text{ن} = \frac{\text{س}^{5}}{5}$

$$\left[\frac{\text{س}^{5}}{5} (\text{لوهـ س})^{2}\right]_{1}^{\text{هـ}} - \frac{2}{5}\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \, \text{لوهـ س} \, \text{دس}$$

$$\frac{\text{هـ}^{5}}{5}(\text{لوهـ هـ})^{2} - \frac{1}{5}(\text{لوهـ } 1)^{2} - \frac{2}{5} \times \int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \, \text{لوهـ س} \, \text{دس}$$

$$\frac{\text{هـ}^{5}}{5} \times 1 - \frac{1}{5} \times 0 - \frac{2}{5} \times \frac{4\text{هـ}^{5}+1}{25} = \frac{\text{هـ}^{5}}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{4\text{هـ}^{5}+1}{25}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{5}}{5} - \frac{8\text{هـ}^{5}+2}{125} = \frac{25\text{هـ}^{5}}{125} - \frac{8\text{هـ}^{5}+2}{125} = \frac{17\text{هـ}^{5}-2}{125}$$

* جد $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قتا س}} \, \text{دس}$

الحل : $\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} \, \text{دس}$ "اجزاء دوري"

$\text{م} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{دن} = \text{جا س} \, \text{دس}$

$\text{دم} = \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}$ ، $\text{ن} = -\text{جتا س}$

$$-\text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جتا س} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جتا س} \, \text{دس}$$

$\text{م} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{دن} = \text{جتا س} \, \text{دس}$

$\text{دم} = \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}$ ، $\text{ن} = \text{جا س}$

$$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} \, \text{دس} = -\text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جتا س} + \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} \, \text{دس}$$

$$2\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} \, \text{دس} = -\text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جتا س} + \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س}$$ تقسم على (٢)

$$\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س} \, \text{دس} = \frac{-\text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جتا س} + \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{جا س}}{2} + \text{ج}$$

* جد $\int \text{س}^{5} \, \text{هـ}^{\text{س}^{3}} \, \text{دس}$ مكرر ٢٠١٩

الحل : $\text{ص} = \text{س}^{3}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^{2} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^{2}}$

$$\int \text{س}^{5} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{3\text{س}^{2}} = \int \frac{1}{3} \text{س}^{3} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{3} \text{ص} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$$ اجزاء

$\text{م} = \frac{1}{3}\text{ص}$ ، $\text{دن} = \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$

$\text{دم} = \frac{1}{3} \, \text{دص}$ ، $\text{ن} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\frac{1}{3}\text{ص} \, \text{هـ}^{\text{ص}} - \int \frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$$

$$\frac{1}{3}\text{ص} \, \text{هـ}^{\text{ص}} - \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$$

$$\frac{1}{3}\text{س}^{3} \, \text{هـ}^{\text{س}^{3}} - \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^{3}} + \text{ج}$$

* جد $\int \text{قا}^2 \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

الحل :- $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$= \int 2\text{ص}\ \text{قا}^2\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ع} = 2\text{ص}$ ، $\text{ده} = \text{قا}^2\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{دع} = 2\ \text{دص}$ ، $\text{هـ} = \text{طا ص}$

$2\text{ص}\ \text{طا ص} - \int 2\ \text{طا ص}\ \text{دص} = 2\text{ص}\ \text{طا ص} - \int \frac{2\ \text{جا ص}}{\text{جتا ص}}\ \text{دص}$

$= 2\text{ص}\ \text{طا ص} + 2\ \text{لو}|\text{جتا ص}| + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\ \text{طا}\sqrt{\text{س}} + 2\ \text{لو}|\text{جتا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

* جد $\int \frac{\text{س}}{\text{جتا}2\text{س} + 1}\ \text{دس}$

الحل : $\int \frac{\text{س}}{2\ \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{1}{2}\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س}$ ، $\text{ده} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{1}{2}\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \text{طا س}$

$\frac{1}{2}\text{س}\ \text{طا س} - \int \frac{1}{2}\ \text{طا س}\ \text{دس}$

$\frac{1}{2}\text{س}\ \text{طا س} + \frac{1}{2}\ \text{لو}|\text{جتا س}| + \text{جـ}$

* جد $\int \text{س}^2\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$

الحل :

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ده} = \text{س}^2\ \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{\text{س}^3}{3}$

$\frac{\text{س}^3}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{3}\text{س}^2\ \text{دس}$

$\frac{\text{س}^3}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{9}\text{س}^3 + \text{جـ}$

* جد $\int_{-1}^{4} \frac{س}{\sqrt{س+5}}\, دس$

الحل :- $\int_{-1}^{4} س(س+5)^{-\frac{1}{2}}\, دس$

$ق = س$ ، $دق = دس$

$دهـ = (س+5)^{-\frac{1}{2}}\, دس$ ، $هـ = 2(س+5)^{\frac{1}{2}}$

$\left[2س(س+5)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{4} - \int_{-1}^{4} 2(س+5)^{\frac{1}{2}}\, دس$ ، $\frac{2(س+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$8(9)^{\frac{1}{2}} + 2\times(4)^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{4}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right]$

$24+4 - \left(\frac{4}{3}\times 27 - \frac{4}{3}\times 8\right) = 28 - \left(36 - \frac{32}{3}\right) = \frac{8}{3}$

* جد $\int س\, جتا\sqrt{س^2+1}\, دس$

احسب صافي

الحل :- $ص = \sqrt{س^2+1}$

$ص^2 = س^2+1$

$2ص\, دص = 2س\, دس \leftarrow دس = \frac{ص}{س}\, دص$

$\int س\, جتا ص \times \frac{ص}{س}\, دص = \int ص\, جتا ص\, دص$ اجزاء

$ق = ص$ ، $دهـ = جتا ص\, دص$

$دق = دص$ ، $هـ = جا ص$

$ص\, جا ص - \int جا ص\, دص = ص\, جا ص + جتا ص + ج$

$= \sqrt{س^2+1}\, جا\sqrt{س^2+1} + جتا\sqrt{س^2+1} + ج$

* جد $\int_{1}^{2} س^4 \sqrt{\left(\frac{2-س}{2س}\right)^3}\, دس$

الحل :- $\int_{1}^{2} س^4 \sqrt{\frac{(2-س)^3}{8س^3}}\, دس = \int_{1}^{2} \frac{س^4}{\sqrt{8}|س^3|} \sqrt{(2-س)^3}\, دس$

موجب

$= \int_{1}^{2} س(2-س)^{\frac{3}{2}}\, دس$

$ق = س$ ، $دق = دس$

$دهـ = (2-س)^{\frac{3}{2}}\, دس$ ، $هـ = \frac{-2}{5}(2-س)^{\frac{5}{2}}$

$\left[\frac{-2}{5}س(2-س)^{\frac{5}{2}}\right]_{1}^{2} + \frac{2}{5}\int_{1}^{2}(2-س)^{\frac{5}{2}}\, دس$ ، $\left[\frac{-4}{35}(2-س)^{\frac{7}{2}}\right]_{1}^{2}$

$= \frac{-4}{5}(0) + \frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + \frac{-4}{35}(0)^{\frac{7}{2}} - \frac{-4}{35}(1)^{\frac{7}{2}} = \frac{18}{35}$

* اذا كان $\int_{1}^{2} \left(3ق(س) + 2س - 4\right) دس = 3$ ، $\int_{3}^{1} \left(ق(س+1) - 3س^{2}\right) دس = 27$

جد $\int_{1}^{4} ق(س) دس$.

الحل :- نعالج المعطيات :-

$\int_{1}^{2} \left(3ق(س) + 2س - 4\right) دس = 3$ نوزع

$3\int_{1}^{2} ق(س) دس + \left[س^{2} - 4س\right]_{1}^{2} = 3 \leftarrow 3\int_{1}^{2} ق(س)دس + (4-8) - (1+4) = 3$

$3\int_{1}^{2} ق(س)دس - 9 = 3 \leftarrow 3\int_{1}^{2} ق(س)دس = 12 \leftarrow \int_{1}^{2} ق(س)دس = 4$

$\int_{3}^{1} \left(ق(س+1) - 3س^{2}\right) دس = 27$ نوزع

$\int_{3}^{1} ق(س+1) دس - \left[س^{3}\right]_{3}^{1} = 27$

$ص = س + 1$

$\frac{دص}{دس} = 1 \leftarrow دس = دص$

$س = 1$ فإن $ص = 2$

$س = 3$ فإن $ص = 4$

$\int_{4}^{2} ق(ص) دص - (1 - 27) = 27 \leftarrow \int_{4}^{2} ق(ص)دص = 1$

المطلوب :- $\int_{1}^{4} ق(س)دس = \int_{1}^{2} ق(س)دس + \int_{2}^{4} ق(س)دس = 4 + {}^{-}1 = 3$

---

* جد $\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{حا2س} دس$ نوعه/ زوايا

الحل :-

$\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{2حاس جتاس} دس$

$ص = لو_{هـ} ظاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{قا^{2}س}{ظاس} = \frac{1}{جتا^{2}س} \times \frac{جتاس}{حاس} = \frac{1}{حاس جتاس} \leftarrow دس = (حاس جتاس) دص$

$= \int \frac{ص}{2حاس جتاس} \times (حاس جتاس) دص = \int \frac{1}{2} ص دص$

$= \frac{1}{4} ص^{2} = \frac{1}{4} \left(لو_{هـ} ظاس\right)^{2} + جـ$

$$\text{جد } \int \frac{\sqrt{1+س}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}\, دس \times \frac{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}$$

الحل :-

$$\int \frac{1+س-1+س}{\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}\right)^2}\, دس = \int \frac{2س}{1+س+2\sqrt{1+س}\sqrt{1-س}+1-س}\, دس$$

$$= \int \frac{2س}{2+2\sqrt{1-س^2}}\, دس = \int \frac{س}{1+\sqrt{1-س^2}}\, دس$$

$$ص = \sqrt{1-س^2}$$

$$ص^2 = 1-س^2$$

$$2ص\, دص = -2س\, دس$$

$$دس = \frac{-ص}{س}\, دص$$

$$\int \frac{س}{1+ص} \times \frac{-ص}{س}\, دص = \int \frac{-ص}{1+ص}\, دص$$

$$-ص \div (ص+1) = -1, \quad -ص-1, \quad \text{الباقي } 1$$

$$= \int \left(-1+\frac{1}{ص+1}\right) دص = -ص + لو_{هـ}|ص+1| + جـ$$

$$= -\sqrt{1-س^2} + لو_{هـ}\left|\sqrt{1-س^2}+1\right| + جـ$$

$$\text{جد } \int \frac{دس}{س-\sqrt{س+2}}$$

الحل :-

$$ص = \sqrt{س+2}$$

$$ص^2 = س+2$$

$$2ص\, دص = دس$$

$$\int \frac{2ص\, دص}{ص^2-2-ص} = \int \frac{2ص\, دص}{ص^2-ص-2}$$

$$\frac{2ص}{(ص-2)(ص+1)} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+1}$$

$$\frac{2ص}{(ص-2)(ص+1)} = \frac{أ(ص+1)+ب(ص-2)}{(ص-2)(ص+1)}$$

$$2ص = أ(ص+1)+ب(ص-2)$$

$$\text{عند } ص=2 \leftarrow أ = \frac{4}{3}$$

$$ص=-1 \leftarrow ب = \frac{2}{3}$$

$$= \int \frac{2ص\, دص}{(ص-2)(ص+1)} = \int \left(\frac{\frac{4}{3}}{ص-2} + \frac{\frac{2}{3}}{ص+1}\right) دص$$

$$= \frac{4}{3} لو_{هـ}|ص-2| + \frac{2}{3} لو_{هـ}|ص+1| + جـ$$

$$= \frac{4}{3} لو_{هـ}\left|\sqrt{س+2}-2\right| + \frac{2}{3} لو_{هـ}\left|\sqrt{س+2}+1\right| + جـ$$

* جد $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{8-\text{ظا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل :-

$$\int \frac{\text{قاس ظاس}}{8-(\text{قا}^2\text{س}-1)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{قاس ظاس}}{9-\text{قا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \text{قاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}} \longrightarrow \int \frac{\text{قاس ظاس}}{9-\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}} = \int \frac{\text{دص}}{9-\text{ص}^2}$

$$= \int \frac{\text{دص}}{(3-\text{ص})(3+\text{ص})}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{3-\text{ص}} + \frac{\frac{1}{6}}{3+\text{ص}} \right) \text{دص}$$

$$= \frac{-1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{ص}| + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{قاس}| + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{قاس}| + \text{جـ}$$

$\frac{1}{(3-\text{ص})(3+\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{3-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{3+\text{ص}}$

$= \frac{\text{أ}(3+\text{ص}) + \text{ب}(3-\text{ص})}{(3-\text{ص})(3+\text{ص})}$

$1 = \text{أ}(3+\text{ص}) + \text{ب}(3-\text{ص})$

عند $\text{ص}=3 \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{6}$

$\text{ص}=-3 \leftarrow \text{ب} = \frac{1}{6}$

رافت صافي

* جد $\int \frac{1}{\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل :-

$$\int \frac{1}{\frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} - \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\frac{1-\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{هـ}^{2\text{س}}}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \int \frac{\text{دص}}{1-\text{ص}^2}$$

$$= \int \frac{\text{دص}}{(1-\text{ص})(1+\text{ص})} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\text{ص}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\text{ص}} \right) \text{دص}$$

$$= \frac{-1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{ص}| + \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1-\text{هـ}^{\text{س}}| + \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$$

$\frac{1}{(1-\text{ص})(1+\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{1+\text{ص}}$

$= \frac{\text{أ}(1+\text{ص}) + \text{ب}(1-\text{ص})}{(1-\text{ص})(1+\text{ص})}$

$1 = \text{أ}(1+\text{ص}) + \text{ب}(1-\text{ص})$

عند $\text{ص}=1 \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{2}$

$\text{ص}=-1 \leftarrow \text{ب} = \frac{1}{2}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

* اذا كان $\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ ، $\int_{0}^{3} \left(\text{م}\,\text{ق}(3-\text{س}) + 6\text{س} + 1\right)\text{دس} = 42$

جد قيمة (م)

الحل :-

$$\int_{0}^{3} \left(\text{م}\,\text{ق}(3-\text{س}) + 6\text{س} + 1\right)\text{دس} = 42$$ نوزع التكامل

$$\text{م}\int_{0}^{3} \text{ق}(3-\text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{3} (6\text{س}+1)\,\text{دس} = 42$$

$\text{ص} = 3 - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1 \leftarrow \text{دس} = -\text{دص}$

عند $\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 0$

رافت صافي

$$\text{م}\int_{3}^{0} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + \left[3\text{س}^2 + \text{س}\right]_{0}^{3} = 42$$

$$-\text{م} \times -4 + (27+3) - 0 = 42 \leftarrow 4\text{م} + 30 = 42 \leftarrow 4\text{م} = 12 \leftarrow \boxed{\text{م} = 3}$$

---

* جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\,\text{جتا}\text{س}}\;\text{دس}$ (نوحد زوايا)

الحل :-

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \frac{1}{2}\times 2\text{جا}\text{س}\,\text{جتا}\text{س}\,\text{جتا}\text{س}}\;\text{دس} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}\;\text{دس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}(1+\text{جا}\text{س})}\;\text{دس} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\text{جتا}\text{س}|\sqrt{1+\text{جا}\text{س}}\;\text{دس}$$

$|\text{جتا}\text{س}|$: من $\frac{\pi}{4}$ إلى $\frac{\pi}{2}$: $\text{جتا}\text{س}$ ، من $\frac{\pi}{2}$ إلى π : $-\text{جتا}\text{س}$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}\text{س}\sqrt{1+\text{جا}\text{س}}\;\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا}\text{س}\sqrt{1+\text{جا}\text{س}}\;\text{دس}$$

$\text{ص} = 1 + \text{جا}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\text{س}}$

عند $\text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

$\text{ص} = 1 + \text{جا}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\text{س}}$

عند $\text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{س} = \pi \leftarrow \text{ص} = 1$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}^{2} \text{جتا}\text{س}\sqrt{\text{ص}}\;\frac{\text{دص}}{\text{جتا}\text{س}} + \int_{2}^{1} -\text{جتا}\text{س}\sqrt{\text{ص}}\;\frac{\text{دص}}{\text{جتا}\text{س}}$$

$$= \left[\frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}^{2} + \left[\frac{-2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{1} = \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{-2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}$$

* جد $\int 4 هـ^{2س} جا س جتا س \, دس$

الحل: $\int 4 هـ^{2س} \times \frac{1}{2} جا2س \, دس = \int 2 هـ^{2س} جا2س \, دس$

$ق = جا2س \qquad دع = 2 هـ^{2س} دس$

$دق = 2 جتا2س \, دس \rightarrow ع = هـ^{2س}$

$= هـ^{2س} جا2س - \int 2 هـ^{2س} جتا2س \, دس$

$ق = جتا2س \quad , \quad دع = 2هـ^{2س} دس$

$دق = -2 جا2س \rightarrow ع = هـ^{2س}$

$\therefore \int 2هـ^{2س} جا2س \, دس = هـ^{2س} جا2س - جتا2س \, هـ^{2س} - \int 2هـ^{2س} جا2س \, دس$

$2\int 2هـ^{2س} جا2س \, دس = هـ^{2س} جا2س - هـ^{2س} جتا2س + جـ$

$\int 2هـ^{2س} جا2س \, دس = \frac{1}{2}\left(هـ^{2س} جا2س - هـ^{2س} جتا2س\right) + جـ$

* جد $\int \frac{(\sqrt{س}+2)^5}{س^4} \, دس$

$ص = \sqrt{س}$

$ص^2 = س$

$2ص \, دص = دس$

الحل: $\int \frac{(ص+2)^5}{ص^8} \times 2ص \, دص$

$= \int 2 \frac{(ص+2)^5}{ص^7} \, دص$

$2 \int \frac{(ص+2)^5}{ص^5 \times ص^2} \, دص = \int 2 \left(\frac{ص+2}{ص}\right)^5 \times \frac{1}{ص^2} \, دص$

$ع = \frac{ص+2}{ص} = 1 + \frac{2}{ص}$

$\frac{دع}{دص} = \frac{-2}{ص^2} \leftarrow دص = \frac{-ص^2}{2} دع$

$= \int 2 ع^5 \times \frac{1}{ص^2} \times \frac{-ص^2}{2} دع = \int -ع^5 \, دع = \frac{-ع^6}{6} + جـ$

$= -\frac{\left(\frac{ص+2}{ص}\right)^6}{6} + جـ = -\frac{\left(\frac{\sqrt{س}+2}{\sqrt{س}}\right)^6}{6} + جـ$

* جد $\int \text{جا}^3\text{س}\,(1+\text{جتاس})^5\,\text{دس}$

الحل :-

$\text{ص} = 1 + \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$$= \int \text{جا}^3\text{س}\;\text{ص}^5\,\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \int -\text{جا}^2\text{س}\;\text{ص}^5\,\text{دص}$$

$$= \int (\text{جتا}^2\text{س} - 1)\,\text{ص}^5\,\text{دص} = \int \left((\text{ص}-1)^2 - 1\right)\text{ص}^5\,\text{دص}$$

$$= \int (\text{ص}^2 - 2\text{ص})\,\text{ص}^5\,\text{دص} = \int (\text{ص}^7 - 2\text{ص}^6)\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^8}{8} - \frac{2}{7}\text{ص}^7 = \frac{(1+\text{جتاس})^8}{8} - \frac{2}{7}(1+\text{جتاس})^7 + \text{جـ}$$

---

* جد $\int \text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2 - 9)\,\text{دس}$

الحل : $\text{ع} = \text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9)$ $\qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{8\text{س}}{4\text{س}^2-9}\,\text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{س}$

$$= \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9) - \int \frac{8\text{س}^2}{4\text{س}^2-9}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 4\text{س}^2-9 & 8\text{س}^2 \\ & -(8\text{س}^2 - 18) \\ \hline & 18 \end{array}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9) - \int \left(2 + \frac{18}{4\text{س}^2-9}\right)\text{دس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9) - \int \left(2 + \frac{18}{(2\text{س}-3)(2\text{س}+3)}\right)\text{دس}$$

$$\frac{18}{(2\text{س}-3)(2\text{س}+3)} = \frac{\text{أ}}{2\text{س}-3} + \frac{\text{ب}}{2\text{س}+3}$$

$$18 = \text{أ}(2\text{س}+3) + \text{ب}(2\text{س}-3)$$

عند $\text{س} = \frac{3}{2} \leftarrow \text{أ} = 3$

عند $\text{س} = \frac{-3}{2} \leftarrow \text{ب} = -3$

$$= \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9) - \int \left(2 + \frac{3}{2\text{س}-3} - \frac{3}{2\text{س}+3}\right)\text{دس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}(4\text{س}^2-9) - 2\text{س} - \frac{3}{2}\text{لو}_\text{هـ}|2\text{س}-3| + \frac{3}{2}\text{لو}_\text{هـ}|2\text{س}+3| + \text{جـ}$$

* جد $\int \frac{هـ^{\sqrt[3]{س} + 2}}{\sqrt[3]{س}}\, دس$

الحل :-

$ص = \sqrt[3]{س}$

$ص^3 = س$

$3ص^2\, دص = دس$

$= \int \frac{هـ^{ص} \times هـ^{2}}{ص} \times 3ص^2\, دص = \int 3هـ^2\, ص\, هـ^{ص}\, دص$

$ع = 3هـ^2 ص \qquad دم = هـ^{ص}\, دص$

$دع = 3هـ^2\, دص \qquad م = هـ^{ص}$

$= 3هـ^2 ص \times هـ^{ص} - \int 3هـ^2 هـ^{ص}\, دص$

$= 3هـ^2 ص\, هـ^{ص} - 3هـ^2 هـ^{ص} + ج$

$= 3هـ^2 \sqrt[3]{س}\, هـ^{\sqrt[3]{س}} - 3هـ^2 هـ^{\sqrt[3]{س}} + ج$

---

* جد $\int \frac{جتاس}{جتا^2س + 3جاس - 3}\, دس$

الحل :-

$\int \frac{جتاس}{1 - جا^2س + 3جاس - 3}\, دس = \int \frac{-جتاس}{جا^2س - 3جاس + 2}\, دس$

$ص = جاس$

$\frac{دص}{دس} = جتاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{-جتاس}{ص^2 - 3ص + 2} \times \frac{دص}{جتاس}$

$\frac{-1}{(ص-1)(ص-2)} = \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص-2}$

$-1 = أ(ص-2) + ب(ص-1)$

عند $ص = 1 \leftarrow أ = 1$

عند $ص = 2 \leftarrow ب = -1$

$= \int \frac{-دص}{(ص-1)(ص-2)} = \int \left(\frac{1}{ص-1} - \frac{1}{ص-2}\right) دص$

$= لو_{هـ}|ص-1| - لو_{هـ}|ص-2| = لو_{هـ}|جاس-1| - لو_{هـ}|جاس-2| + ج$

* جد $\int \frac{3س^2+2}{س^2-س}\,دس$

$$\require{enclose}\begin{array}{r} 3 \\ س^2-س \enclose{longdiv}{3س^2+2} \\ \underline{-3س^2-3س} \\ 3س+2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{3س+2}{س(س-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} \\ = \frac{أ(س-1)+ب\,س}{س(س-1)} \\ 3س+2 = أ(س-1) + ب\,س \\ \text{عند } س=1 \leftarrow 5=ب \\ \text{عند } س=0 \leftarrow 2=-أ \leftarrow أ=-2 \end{array}}$$

الحل :-

$$= \int \left(3 + \frac{3س+2}{س^2-س}\right) دس$$

$$= \int \left(3 + \frac{3س+2}{س(س-1)}\right) دس$$

$$= \int \left(3 + \frac{-2}{س} + \frac{5}{س-1}\right) دس$$

$$= 3س - 2\,لو_هـ|س| + 5\,لو_هـ|س-1| + جـ$$

---

* جد $\int قتا^4 2س\ ظتا^3 2س\ دس$

الحل :-

$$ص = ظتا\,2س$$

$$\frac{دص}{دس} = -2\,قتا^2 2س$$

$$دس = \frac{دص}{-2\,قتا^2 2س}$$

$$= \int قتا^4 2س\ ص^3 \times \frac{دص}{-2\,قتا^2 2س}$$

$$قتا^2 2س = ظتا^2 2س + 1$$
$$= ص^2 + 1$$

$$= \frac{-1}{2} \int قتا^2 2س\ ص^3\ دص$$

$$= \frac{-1}{2} \int (ص^2+1)\,ص^3\ دص$$

$$= \frac{-1}{2} \int (ص^5 + ص^3)\ دص$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{ص^6}{6} + \frac{-1}{2} \times \frac{ص^4}{4} + جـ$$

نعيد متغير ص

$$= \frac{-1}{12}\,ظتا^6 2س - \frac{1}{8}\,ظتا^4 2س + جـ$$

* جد $\int هـ^{٢س} \text{جا} \, هـ^{س} \, دس$

الحل :-

$ص = هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

$دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int هـ^{٢س} \text{جا} ص \, \frac{دص}{هـ^{س}} = \int هـ^{س} \text{جا} ص \, دص = \int ص \, \text{جا} ص \, دص$

$ع = ص \quad\quad دهـ = \text{جا} ص \, دص$

$دع = دص \quad\quad هـ = -\text{جتا} ص$

$= - ص \, \text{جتا} ص + \int \text{جتا} ص \, دص$

$= - ص \, \text{جتا} ص + \text{جا} ص + جـ$

$= - هـ^{س} \text{جتا} هـ^{س} + \text{جا} هـ^{س} + جـ$

---

* جد $\int \frac{٢س + ١}{س^{٢} - ٢س - ٣} \, دس$

الحل :-

$\int \frac{٢س + ١}{(س - ٣)(س + ١)} \, دس$

$= \int \left(\frac{\frac{٧}{٤}}{س - ٣} + \frac{\frac{١}{٤}}{س + ١} \right) دس$

$= \frac{٧}{٤} \text{لو}_{هـ} |س - ٣| + \frac{١}{٤} \text{لو}_{هـ} |س + ١| + جـ$

$\frac{٢س + ١}{(س - ٣)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ١}$

$= \frac{أ(س + ١) + ب(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ١)}$

$٢س + ١ = أ(س + ١) + ب(س - ٣)$

عند $س = ٣ \leftarrow ٧ = ٤أ \leftarrow أ = \frac{٧}{٤}$

$س = -١ \leftarrow -١ = -٤ب \leftarrow ب = \frac{١}{٤}$

* جد $\int \text{جتا}^3 \text{س} \ \text{جا}^2 \text{س} \ \text{د}\text{س}$

الحل :-

$\text{ص} = \text{جا} \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا} \text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا} \text{س}}$

$\text{جتا}^2 \text{س} = 1 - \text{جا}^2 \text{س}$

$= 1 - \text{ص}^2$

$= \int \text{جتا}^3 \text{س} \ \text{ص}^2 \ \frac{\text{دص}}{\text{جتا} \text{س}} = \int \text{جتا}^2 \text{س} \ \text{ص}^2 \ \text{دص}$

$= \int (1 - \text{ص}^2) \text{ص}^2 \ \text{دص} = \int (\text{ص}^2 - \text{ص}^4) \ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^3 \text{س}}{3} - \frac{\text{جا}^5 \text{س}}{5} + \text{جـ}$

* جد $\int \text{جتا}^4 \text{س} \ \text{دس}$

الحل :-

$\int (\text{جتا}^2 \text{س})^2 \ \text{دس} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س}\right)^2 \text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س} + \frac{1}{4} \text{جتا}^2 2\text{س}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا} 4\text{س}\right) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س} + \frac{1}{4}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \text{جتا} 4\text{س}\right) \text{دس}$

$= \frac{1}{4} \text{س} + \frac{1}{4} \text{جا} 2\text{س} + \frac{1}{8} \text{س} + \frac{1}{32} \text{جا} 4\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{3}{8} \text{س} + \frac{1}{4} \text{جا} 2\text{س} + \frac{1}{32} \text{جا} 4\text{س} + \text{جـ}$

* جد $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ق} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{دق} = ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}$

$\frac{١}{٣}\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} - \int \frac{٢}{٣}\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس}$

اجزاء

$\text{ق} = \frac{٢}{٣}\text{س}$ ، $\text{دق} = \frac{٢}{٣}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}$

$\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{٢}{٩}\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \int \frac{٢}{٩}\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{٢}{٩}\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \frac{٢}{٢٧}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{جـ}$

---

* جد $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{لو}\,\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢}$ ، $\text{دق} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \text{س}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$= \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢}\right]_{١}^{\text{هـ}} - \int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ - \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{١}^{\text{هـ}}$

$= \cancel{٢}\times\frac{\text{هـ}^{٢}}{\cancel{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - \frac{١}{٢}\times ٠ - \left[\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\right]$

$= \text{هـ}^{٢}\times ١ - ٠ - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}$

$= \text{هـ}^{٢} - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}$

* جد $\int \frac{(س^3 - س)^5}{س^{18}} \, دس$

الحل :-

$\int \frac{(س^3-س)^5}{(س^3)^5 \times س^3} \, دس = \int \left(\frac{س^3-س}{س^3}\right)^5 \times \frac{1}{س^3} \, دس$

$= \int \left(1 - \frac{1}{س^2}\right)^5 \times \frac{1}{س^3} \, دس$

$= \int ص^5 \times \frac{1}{\cancel{س^3}} \times \frac{\cancel{س^3}}{2} \, دص$

$= \frac{1}{2} \int ص^5 \, دص = \frac{1}{2} \times \frac{ص^6}{6} + جـ$

$= \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{س^2}\right)^6 + جـ$

$ص = 1 - \frac{1}{س^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1 \times 2س}{س^4} = \frac{2}{س^3}$

$دس = \frac{س^3}{2} \, دص$

---

* جد $\int \frac{قا^2 س}{4 - ظا^2 س} \, دس$

الحل :-

$ص = ظا \, س$

$\frac{دص}{دس} = قا^2 س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int \frac{\cancel{قا^2 س}}{4 - ص^2} \cdot \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}}$

$= \int \frac{دص}{4 - ص^2}$

$\frac{1}{(2-ص)(2+ص)} = \frac{أ}{2-ص} + \frac{ب}{2+ص}$

$= \frac{أ(2+ص) + ب(2-ص)}{(2+ص)(2-ص)}$

بالمقارنة :-

$1 = أ(2+ص) + ب(2-ص)$

عند $ص = 2 \longleftarrow أ = \frac{1}{4}$

عند $ص = -2 \longleftarrow ب = \frac{1}{4}$

$= \int \frac{دص}{(2+ص)(2-ص)} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{2-ص} + \frac{\frac{1}{4}}{2+ص}\right) دص$

$= \frac{-1}{4} لو_هـ |2 - ص| + \frac{1}{4} لو_هـ |2 + ص| = \frac{-1}{4} لو_هـ |2 - ظا س| + \frac{1}{4} لو_هـ |2 + ظا س| + جـ$

✱ جد $\int_{1}^{3} \frac{(س^2 - 6س + 9)^{\frac{7}{2}}}{س^9} دس$

الحل :- $\int_{1}^{3} \frac{\left((س-3)^2\right)^{\frac{7}{2}}}{س^9} دس = \int_{1}^{3} \frac{|س-3|^7}{س^9} دس$

$\frac{س-3 \quad | \quad 3-س}{3}$

$= \int_{1}^{3} \frac{(3-س)^7}{س^9} دس = \int_{1}^{3} \frac{(3-س)^7}{س^7 \times س^2} دس$

$= \int_{1}^{3} \left(\frac{3-س}{س}\right)^7 \times \frac{1}{س^2} دس$

$ص = \frac{3-س}{س} = \frac{3}{س} - 1$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-3}{س^2} \leftarrow دس = \frac{س^2}{-3} دص$

عند $س = 1 \leftarrow ص = 2$

$س = 3 \leftarrow ص = 0$

$= \int_{2}^{0} ص^7 \times \frac{1}{س^2} \times \frac{س^2}{-3} دص = \int_{2}^{0} \frac{1}{-3} ص^7 دص$

$= \left[\frac{-1}{24} ص^8\right]_{2}^{0} = 0 + \frac{1}{24} \times 2^8 = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$

✱ جد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^4 2س دس$

الحل :- $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^2 2س \, ظا^2 2س دس = \int ظا^2 2س (قا^2 2س - 1) دس$

فك اقواس

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^2 2س \, قا^2 2س دس - \int ظا^2 2س دس$

$ص = ظا 2س$

$\frac{دص}{دس} = 2قا^2 2س$

$دس = \frac{دص}{2قا^2 2س}$

عند $س = 0 \leftarrow ص = 0$

$س = \frac{\pi}{8} \leftarrow ص = 1$

$= \int_{0}^{1} ص^2 \times قا^2 2س \times \frac{دص}{2قا^2 2س}$

$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} ص^2 دص = \left[\frac{1}{6} ص^3\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} (قا^2 2س - 1) دس$

$= \left[\frac{1}{2} ظا 2س - س\right]_{0}^{\frac{\pi}{8}}$

$= \left(\frac{1}{2} ظا \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) - 0$

$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^4 2س دس = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$

* جد $\int (\text{س}+٢)^{٣} \text{جا}(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣)\, \text{دس}$

الحل :-

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٤ = ٢(\text{س}+٢)$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢(\text{س}+٢)}$

$= \int (\text{س}+٢)^{٣}\, \text{جا ص} \times \frac{\text{دص}}{٢(\text{س}+٢)}$

$(\text{س}+٢)^{٢} = \underbrace{\text{س}^{٢}+٤\text{س}}_{\text{ص}-٣} + ٤$

$(\text{س}+٢)^{٢} = \text{ص} - ٣ + ٤ = \text{ص}+١$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{س}+٢)^{٢}\, \text{جا ص دص}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}+١)\, \text{جا ص دص}$ اجزاء

$\text{ق} = \text{ص}+١ \qquad \text{دهـ} = \text{جا ص دص}$

$\text{دق} = \text{دص} \longrightarrow \text{هـ} = -\text{جتا ص}$

$= -(\text{ص}+١)\,\text{جتا ص} + \int \text{جتا ص دص}$

$= -(\text{ص}+١)\,\text{جتا ص} + \text{جا ص} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٢}\left[-(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٤)\,\text{جتا}(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣) + \text{جا}(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣)\right] + \text{ج}$

---

* جد $\int_{٠}^{١} \frac{٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\, \text{دس}$

الحل :-

$\text{ق} = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دم} = (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{دس}$

$\text{دق} = (٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} \longrightarrow \text{م} = \frac{-١}{\text{س}+١}$

$= \left[\frac{-٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}\right]_{٠}^{١} + \int_{٠}^{١} \frac{٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}\,\text{دس}$

$= \frac{-٢\text{هـ}}{٢} - ٠ + \int_{٠}^{١} \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}}\cancel{(\text{س}+١)}}{\cancel{\text{س}+١}}\,\text{دس}$

$= -\text{هـ} + \int_{٠}^{١} ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= -\text{هـ} + \left[٢\text{هـ}^{\text{س}}\right]_{٠}^{١}$

$= -\text{هـ} + ٢\text{هـ} - ٢ = \text{هـ} - ٢$

٤/ وزاري

$$\ast \text{ جد } \int \frac{٢س + ٣ ظاس}{جتا^٢س} دس$$

الحل :-

$$\int \frac{٢س}{جتا^٢س} دس + \int \frac{٣ ظاس}{جتا^٢س} دس$$ ، نجد كل تكامل لوحده

$$\int \frac{٢س}{جتا^٢س} دس = \int ٢س قا^٢س دس$$ ، أجزاء

$$م = ٢س \qquad دهـ = قا^٢س دس$$

$$دم = ٢دس \qquad هـ = ظاس$$

$$٢س ظاس - \int ٢ ظاس دس = ٢س ظاس + ٢ لو_هـ |جتاس|$$

$$\int \frac{٣ ظاس}{جتا^٢س} دس = \int ٣ ظاس قا^٢س دس$$ ، تعويض

$$ص = ظاس$$

$$\frac{دص}{دس} = قا^٢س \leftarrow دس = \frac{دص}{قا^٢س}$$

$$= \int ٣ص قا^٢س \times \frac{دص}{قا^٢س} = \int ٣ص دص = \frac{٣}{٢} ص^٢ = \frac{٣}{٢} ظا^٢س$$

$$\therefore \int \frac{٢س + ٣ ظاس}{جتا^٢س} دس = ٢س ظاس + ٢ لو_هـ |جتاس| + \frac{٣}{٢} ظا^٢س + جـ$$

$$\ast \text{ جد } \int جا^٣س \, لو_هـ^{(١+جتاس)} دس$$

الحل : $ص = ١ + جتاس$

$$\frac{دص}{دس} = -جاس \leftarrow دس = \frac{دص}{-جاس}$$

$$\int جا^٣س \, لو_هـ^{ص} \times \frac{دص}{-جاس} = \int -جا^٢س \, لو_هـ^{ص} دص$$

$$جا^٢س = ١ - جتا^٢س$$
$$= ١ - (ص - ١)^٢$$
$$= ١ - (ص^٢ - ٢ص + ١)$$
$$= -ص^٢ + ٢ص$$

$$= \int (ص^٢ - ٢ص) لو_هـ^{ص} دص$$ ، أجزاء

$$م = لو_هـ^{ص} \qquad دهـ = (ص^٢ - ٢ص) دص$$

$$دم = \frac{١}{ص} دص \qquad هـ = \frac{ص^٣}{٣} - ص^٢$$

$$= \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) لو_هـ^{ص} - \int \left(\frac{ص^٢}{٣} - ص\right) دص$$

$$= \left(\frac{ص^٣}{٣} - ص^٢\right) لو_هـ^{ص} - \left[\frac{ص^٣}{٩} - \frac{ص^٢}{٢}\right] + جـ$$ نعوض بدل ص بـ $(١ + جتاس)$

رافت صافي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

* جد $\int \frac{\text{س}^3+2\text{س}-6}{\text{س}^2-4}\,\text{دس}$

$$\begin{array}{r|l} & \text{س} \\ \hline \text{س}^2-4 & \text{س}^3+2\text{س}-6 \\ & -\text{س}^3-4\text{س} \\ \hline & 6\text{س}-6 \end{array}$$

الحل :-

$= \int \left(\text{س} + \frac{6\text{س}-6}{\text{س}^2-4}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\text{س} + \frac{6\text{س}-6}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\text{س} + \frac{\frac{3}{2}}{\text{س}-2} + \frac{\frac{9}{2}}{\text{س}+2}\right)\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} + \frac{3}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \frac{9}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

$\frac{6\text{س}-6}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-2} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+2}$

$6\text{س}-6 = \text{أ}(\text{س}+2) + \text{ب}(\text{س}-2)$

عند $\text{س} = 2 \leftarrow \text{أ} = \frac{3}{2}$

عند $\text{س} = -2 \leftarrow \text{ب} = \frac{9}{2}$

---

* جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتاس}\,(2-2\,\text{جتا}2\text{س})^4\,\text{دس}$

الحل :- $= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتاس}\,\big(2(1-\text{جتا}2\text{س})\big)^4\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 16\,\text{جتاس} \times (2\,\text{جا}^2\text{س})^4\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (16)^2\,\text{جتاس} \times (\text{جا}^2\text{س})^4\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (16)^2\,\cancel{\text{جتاس}}\,\text{ص}^8\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \left[(16)^2\frac{\text{ص}^9}{9}\right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(16)^2}{9} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9 = \frac{16}{9\sqrt{2}}$

* جد $\int$ جا٢س لو$_{هـ}$(جتاس)^{٢} دس

الحل :-

$ص =$ جتا^{٢}س

$\frac{دص}{دس} = -٢$ جتاس جاس

$دس = \frac{-دص}{جا٢س}$

$= \int$ $\cancel{جا٢س}$ لو$_{هـ}$ص $\times \frac{-دص}{\cancel{جا٢س}} = \int -$لو$_{هـ}$ص دص

$ع = -$لو$_{هـ}$ص ، $دهـ = دص$

$دع = \frac{-١}{ص}$ دص $\longrightarrow$ $هـ = ص$

$= -$ص لو$_{هـ}$ص $+ \int$ دص $= -$ص لو$_{هـ}$ص $+ ص +$ جـ

$= -$جتا^{٢}س لو$_{هـ}$جتا^{٢}س $+$ جتا^{٢}س $+$ جـ

---

* جد $\int_{٣}^{٥} \frac{١}{س^{٢}+٢س-٣} \sqrt{\frac{س+٣}{س-١}}$ دس

الحل :- $\int_{٣}^{٥} \frac{١}{(س+٣)(س-١)} \sqrt{\frac{س+٣}{س-١}}$ دس

$ص = \frac{س+٣}{س-١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(س-١)-(س+٣)}{(س-١)^{٢}} = \frac{-٤}{(س-١)^{٢}}$

$دس = \frac{-(س-١)^{٢}}{٤}$ دص

حدود التكامل

$\boxed{\begin{array}{l} س=٣ \leftarrow ص=٣ \\ س=٥ \leftarrow ص=٢ \end{array}}$

$= \int_{٣}^{٢} \frac{١}{(س+٣)(س-١)} \sqrt{ص} \times \frac{-(س-١)^{٢}}{٤}$ دص

$= \int_{٣}^{٢} \frac{\sqrt{ص}}{-٤ص}$ دص $= \int_{٣}^{٢} \frac{ص^{-\frac{١}{٢}}}{-٤}$ دص $= \left[\frac{\sqrt{ص}}{-٢}\right]_{٣}^{٢}$

$= \frac{-\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}-\sqrt{٢}}{٢}$

* جد $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)\,\text{دس}$

الحل :-

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دص} = \dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2-1}\,\text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \dfrac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\,\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \left(2 + \dfrac{2}{\text{س}^2-1}\right)\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \left(2 + \dfrac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}\right)\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \left(2 + \dfrac{1}{\text{س}-1} + \dfrac{-1}{\text{س}+1}\right)\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - 2\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{جـ}$

$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \text{س}^2-1 & 2\text{س}^2 \\ & \mp 2\text{س}^2 \pm 2 \\ \hline & 2 \end{array}$

$\dfrac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \dfrac{\text{أ}}{\text{س}-1} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}+1}$

$\dfrac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \dfrac{\text{أ}(\text{س}+1) + \text{ب}(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}$

بالمقارنة :-

$2 = \text{أ}(\text{س}+1) + \text{ب}(\text{س}-1)$

$\text{س}=1 \leftarrow \text{أ}=1$

$\text{س}=-1 \leftarrow \text{ب}=-1$

* جد $\int_1^4 \dfrac{|\text{س}-1|}{\text{س}^2-5\text{س}+6}\,\text{دس}$

$1-\text{س} \quad \times_{1} \quad \text{س}-1 \quad |_{4}$

الحل :- $\int_1^4 \dfrac{\text{س}-1}{\text{س}^2-5\text{س}+6}\,\text{دس}$

$= \int_1^4 \dfrac{\text{س}-1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)}\,\text{دس}$

$= \int_1^4 \left(\dfrac{2}{\text{س}-3} + \dfrac{-1}{\text{س}-2}\right)\text{دس}$

$\left[2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2|\right]_1^4$

$\dfrac{\text{س}-1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)} = \dfrac{\text{أ}}{\text{س}-3} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}-2}$

$\dfrac{\text{س}-1}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)} = \dfrac{\text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)(\text{س}-2)}$

بالمقارنة :-

$\text{س}-1 = \text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}(\text{س}-3)$

عند $\text{س}=2 \leftarrow \text{ب}=-1$

عند $\text{س}=3 \leftarrow \text{أ}=2$

$= \left(2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}2\right) - \left(2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \text{لو}_{\text{هـ}}1\right) = -\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 = -3\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{1}{8}$

جد $\int \frac{4\,دس}{س^3+س}$

الحل:- $\int \frac{4\,دس}{س^3(1+\frac{1}{س^2})}$

$ص = 1 + \frac{1}{س^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1\times 2س}{س^4} = \frac{-2}{س^3} \leftarrow دس = \frac{س^3}{-2}\,دص$

$= \int \frac{4}{س^3 ص} \times \frac{س^3}{-2}\,دص = \int \frac{-2}{ص}\,دص = -2\,لو_هـ|ص| = -2\,لو_هـ\left|1+\frac{1}{س^2}\right| + جـ$

جد $\int ظتاس\ لو_هـ جاس\ دس$

الحل:-

$ص = لو_هـ جاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس \leftarrow دس = \frac{دص}{ظتاس}$

$= \int ظتاس \times ص\ \frac{دص}{ظتاس} = \int ص\,دص = \frac{ص^2}{2} = \frac{(لو_هـ جاس)^2}{2} + جـ$

اثبت ان $\int \frac{ظتا(لو_هـ س)}{س}\,دس = لو_هـ|جا(لو_هـ س)| + جـ$

الحل:- $ص = لو_هـ س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} \leftarrow دس = س\,دص$

$\int \frac{ظتاص}{س} \times س\,دص = \int ظتاص\,دص = \int \frac{جتاص}{جاص}\,دص = لو_هـ|جاص| + جـ$

$= لو_هـ|جا(لو_هـ س)| + جـ$

جد $\int \frac{س^2}{س^6+س^3}\,دس$ ، $س > 0$

الحل:- $\int \frac{س^2}{س^2(س^4+س)}\,دس = \int \frac{دس}{س^4+س} = \int \frac{دس}{س^4(1+\frac{1}{س^3})}$

$ص = 1 + \frac{1}{س^3}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1\times 3س^2}{س^6}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-3}{س^4}$

$دس = \frac{س^4}{-3}\,دص$

$= \int \frac{1}{س^4 ص} \times \frac{س^4}{-3}\,دص = \int \frac{-1}{3ص}\,دص = \frac{-1}{3}\,لو_هـ|ص| + جـ$

$= \frac{-1}{3}\,لو_هـ\left|1+\frac{1}{س^3}\right| + جـ$

* جد $\int \frac{2-\sqrt[3]{س}}{9-\sqrt[3]{س^2}}\, دس$

الحل :-

$ص = \sqrt[3]{س}$

$ص^3 = س$

$3ص^2\, دص = دس$

$$= \int \frac{(2-ص)}{9-ص^2} \times 3ص^2\, دص = \int \frac{(-3ص^3+6ص^2)}{9-ص^2}\, دص$$

$$\begin{array}{r} 3ص - 6 \\ -ص^2+9 \overline{\big)\, -3ص^3+6ص^2} \\ \underline{-3ص^3+27ص} \\ 6ص^2-27ص \\ \underline{6ص^2-54} \\ -27ص+54 \end{array}$$

$$\frac{-27ص+54}{9-ص^2} = \frac{أ}{3-ص} + \frac{ب}{3+ص}$$

$$= \frac{أ(3+ص)+ب(3-ص)}{(3-ص)(3+ص)}$$

$-27ص+54 = أ(3+ص)+ب(3-ص)$

عند $ص=3 \leftarrow أ = \frac{-9}{2}$

عند $ص=-3 \leftarrow ب = \frac{45}{2}$

$$= \int \left(3ص-6 + \frac{-27ص+54}{9-ص^2}\right) دص$$

$$= \int \left(3ص-6 + \frac{\frac{-9}{2}}{3-ص} + \frac{\frac{45}{2}}{3+ص}\right) دص$$

$$= \frac{3ص^2}{2} - 6ص + \frac{9}{2}لو_{هـ}|3-ص| + \frac{45}{2}لو_{هـ}|3+ص| + جـ$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{س})^2 - 6\sqrt[3]{س} + \frac{9}{2}لو_{هـ}|3-\sqrt[3]{س}| + \frac{45}{2}لو_{هـ}|3+\sqrt[3]{س}| + جـ$$

* جد $\int \frac{هـ^س}{2هـ^{2س}-5هـ^س+2}\, دس$

الحل :-

$ص = هـ^س$

$\frac{دص}{دس} = هـ^س$

$دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$$\int \frac{هـ^س}{2ص^2-5ص+2} \times \frac{دص}{هـ^س} = \int \frac{دص}{2ص^2-5ص+2}$$

$$\frac{1}{(2ص-1)(ص-2)} = \frac{أ}{2ص-1} + \frac{ب}{ص-2}$$

$$= \frac{أ(ص-2)+ب(2ص-1)}{(2ص-1)(ص-2)}$$

بالمقارنة ←

$1 = أ(ص-2)+ب(2ص-1)$

عند $ص=2 \leftarrow ب = \frac{1}{3}$

عند $ص=\frac{1}{2} \leftarrow أ = \frac{-2}{3}$

$$= \int \left(\frac{\frac{-2}{3}}{2ص-1} + \frac{\frac{1}{3}}{ص-2}\right) دص$$

$$= \frac{-1}{3}لو_{هـ}|2ص-1| + \frac{1}{3}لو_{هـ}|ص-2| = \frac{-1}{3}لو_{هـ}|2هـ^س-1| + \frac{1}{3}لو_{هـ}|هـ^س-2| + جـ$$

* $\int (2س-3)\, جتا^2 3س\, دس$

الحل :-

$ع = 2س - 3$

$دع = 2\, دس$

$دهـ = جتا^2 3س\, دس = \frac{1}{2}(1 + جتا 6س)\, دس$

$هـ = \frac{1}{2}\left(س + \frac{جا 6س}{6}\right)$

$\int (2س-3)\, جتا^2 3س\, دس = \frac{1}{2}(2س-3)\left(س + \frac{جا 6س}{6}\right) - \int \left(س + \frac{جا 6س}{6}\right) دس$

$= \frac{1}{2}(2س-3)\left(س + \frac{جا 6س}{6}\right) - \left[\frac{س^2}{2} - \frac{جتا 6س}{36}\right] + جـ$

$= \frac{1}{2}(2س-3)\left(س + \frac{جا 6س}{6}\right) - \frac{س^2}{2} + \frac{جتا 6س}{36} + جـ$

---

* $\int \sqrt{4 - هـ^{س}}\, دس$

الحل :-

$ص = \sqrt{4 - هـ^{س}}$

$ص^2 = 4 - هـ^{س}$

$2ص\, دص = -هـ^{س}\, دس$

$دس = \frac{2ص\, دص}{-هـ^{س}}$

$\int \frac{ص \times 2ص\, دص}{-هـ^{س}} = \int \frac{2ص^2\, دص}{4 - ص^2}$ قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & -2 \\ \hline -ص^2 + 4 & -2ص^2 \\ & -2ص^2 - 8 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$= \int \left(-2 + \frac{8}{4 - ص^2}\right) دص$ كسور جزئية

$= \int \left(-2 + \frac{2}{2 - ص} + \frac{2}{2 + ص}\right) دص$

$= -2ص - 2لو|2 - ص| + 2لو|2 + ص| + جـ$

$= -2\sqrt{4 - هـ^{س}} - 2لو\left|2 - \sqrt{4 - هـ^{س}}\right| + 2لو\left|2 + \sqrt{4 - هـ^{س}}\right| + جـ$

$\frac{8}{4 - ص^2} = \frac{أ}{2 - ص} + \frac{ب}{2 + ص}$

$8 = أ(2 + ص) + ب(2 - ص)$

عند $ص = 2 \leftarrow أ = 2$

$ص = -2 \leftarrow ب = 2$

رافت صالحي

07805824464

* $\int \frac{(\text{٤س}+\text{٢})^{\text{٧}}}{\text{س}^{\text{٩}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{٤س}+\text{٢}}{\text{س}} = \text{٤} + \frac{\text{٢}}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\text{دس} = -\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\,\text{دص}$

الحل :- $\int \frac{(\text{٤س}+\text{٢})^{\text{٧}}}{\text{س}^{\text{٧}}\times\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دس} = \int \left(\frac{\text{٤س}+\text{٢}}{\text{س}}\right)^{\text{٧}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{ص}^{\text{٧}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} \times \frac{-\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\,\text{دص}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \int \text{ص}^{\text{٧}}\,\text{دص} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{ص}^{\text{٨}}}{\text{٨}} + \text{ج}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{١٦}} \left(\frac{\text{٤س}+\text{٢}}{\text{س}}\right)^{\text{٨}} + \text{ج}$

---

* $\int \text{٢س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}}\,\text{دس}$

الحل :- $\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}}$ $\qquad$ $\text{ده} = \text{٢س}\,\text{دس}$

$\text{هـ} = \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{دع} = \text{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{دس}$

اجزاء مرة اخرى

$\text{س}^{\text{٢}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}} - \int \text{٢س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ده} = \text{٢س}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{س}^{\text{٢}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}} - \left[\text{س}^{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}\,\text{دس}\right]$

$\text{س}^{\text{٢}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}} - \left[\text{س}^{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right] + \text{ج}$

$\text{س}^{\text{٢}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{ج}$

المعادلات التفاضلية

1) تحرك جسم من السكون من نقطة الأصل على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt[3]{ع}$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد 6 ثوانٍ من بدء حركته.

الحل: ت = $\sqrt[3]{ع} = ع^{\frac{1}{3}}$

$\frac{دع}{دن} = ع^{\frac{1}{3}} \leftarrow ع^{-\frac{1}{3}} دع = دن$ بالتكامل:

$\frac{3}{2} ع^{\frac{2}{3}} = ن + ج_1$ ، لكن ع(0) = 0 ← $ج_1 = 0$

$\frac{3}{2} ع^{\frac{2}{3}} = ن \leftarrow ع^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} ن \leftarrow ع = \left(\frac{2}{3} ن\right)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{دف}{دن} = \left(\frac{2}{3} ن\right)^{\frac{3}{2}} \leftarrow دف = \left(\frac{2}{3} ن\right)^{\frac{3}{2}} دن$ بالتكامل

$ف = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} ن\right)^{\frac{5}{2}} + ج_2$ لكن ف(0) = 0 ← $ج_2 = 0$

$ف(ن) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} ن\right)^{\frac{5}{2}} \leftarrow ف(6) = \frac{3}{5}(4)^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} \times 32 = \frac{96}{5}$ م

2) حل المعادلة التفاضلية

$\sqrt{ص} \frac{دس}{دص} = قا^2(\frac{1}{4} س)$ علماً بأن ص = 1 عند س = 0.

الحل:

$\sqrt{ص} \frac{دس}{دص} = قا^2(\frac{1}{4} س)$

$\sqrt{ص}\, دس = قا^2(\frac{1}{4} س)\, دص$ نقسم على $\sqrt{ص} \times قا^2(\frac{1}{4} س)$

رافت صافي

$\frac{دس}{قا^2(\frac{1}{4} س)} = \frac{دص}{\sqrt{ص}}$

$جتا^2(\frac{1}{4} س) دس = ص^{-\frac{1}{2}} دص$ بالتكامل

$\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا \frac{1}{2} س) دس = \int ص^{-\frac{1}{2}} دص$

$2 ص^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} س + جا \frac{1}{2} س + جـ$ عند س = 0 ، ص = 1

$2 = 0 + 0 + جـ \leftarrow جـ = 2$

$2\sqrt{ص} = \frac{1}{2} س + جا \frac{1}{2} س + 2$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٣) يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = ٢\sqrt{ع}$ إذا كانت سرعة الجسم عند بدء حركته ٩ م/ث جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٣ ثوانٍ من بدء حركته علماً بانه قطع مسافة $\frac{٦٤}{٣}$ م في أول ثانية من حركته

الحل :-
$ت = ٢ع^{\frac{1}{2}}$

$\frac{دع}{دن} = ٢ع^{\frac{1}{2}} \rightarrow ع^{-\frac{1}{2}} دع = ٢دن$ ∴ بالتكامل

$٢ع^{\frac{1}{2}} = ٢ن + جـ_١$ لكن $ع(٠) = ٩$

$٢\sqrt{٩} = ٠ + جـ_١ \rightarrow جـ_١ = ٦$

$٢ع^{\frac{1}{2}} = ٢ن + ٦ \rightarrow ع^{\frac{1}{2}} = ن + ٣ \rightarrow ع = (ن+٣)^٢$

$\frac{دف}{دن} = (ن+٣)^٢$

$دف = (ن+٣)^٢ دن$ ∴ بالتكامل

$ف = \frac{(ن+٣)^٣}{٣} + جـ_٢$ لكن $ف(١) = \frac{٦٤}{٣}$

$\frac{٦٤}{٣} = \frac{٦٤}{٣} + جـ_٢ \rightarrow جـ_٢ = ٠$

$ف(ن) = \frac{(ن+٣)^٣}{٣} \rightarrow ف(٣) = \frac{(٣+٣)^٣}{٣} = \frac{٦^٣}{٣} = ٧٢$ م

---

٤) حل المعادلة التفاضلية الآتية :-

اهتمام

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س ص - ص - ١٢س + ٤}{ص^٢ - ١٦}$$

الحل :-

$(ص^٢ - ١٦) دص = (٣س ص - ص - ١٢س + ٤) دس$

$(ص^٢ - ١٦) دص = (٣س(ص-٤) - ص + ٤) دس$

$(ص^٢ - ١٦) دص = (ص-٤)(٣س-١) دس$ نقسم على $(ص-٤)$

$\left(\frac{ص^٢ - ١٦}{ص - ٤}\right) دص = (٣س - ١) دس$ ∴ بالتكامل

$\int \frac{(ص-٤)(ص+٤)}{\cancel{ص-٤}} دص = \int (٣س-١) دس$

$\frac{ص^٢}{٢} + ٤ص = \frac{٣}{٢}س^٢ - س + جـ$

٥) حل المعادلة التفاضلية :.

$$\text{جا}^2\text{س}\ \text{د ص} + \text{ص د س} = \text{د ص}$$

الحل :. $\text{جا}^2\text{س د ص} - \text{د ص} = -\text{ص د س}$

$$(\text{جا}^2\text{س} - 1)\ \text{د ص} = -\text{ص د س}$$

$-\text{جتا}^2\text{س د ص} = -\text{ص د س}$ نقسم على $-\text{جتا}^2\text{س} \times \text{ص}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{د س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{قا}^2\text{س د س}$$ بتكامل

$$\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = \int \text{قا}^2\text{س د س}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{ظاس} + \text{جـ} \leftarrow |\text{ص}| = \text{هـ}^{(\text{ظاس} + \text{جـ})}$$

٦) حل المعادلة $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 - 1}\ \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س} + 2)$

الحل :.

$\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 - 1}\ \text{د ص} = \text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س} + 2)\ \text{د س}$ نضرب بـ $\dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س هـ}^{-\text{ص}}}$

$$\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص} = \frac{(\text{س} + 2)(\text{س}^2 - 1)}{\text{س}}\ \text{د س}$$ بتكامل.

$$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص} = \int \left(\frac{\text{س}^3 - \text{س} + 2\text{س}^2 - 2}{\text{س}}\right) \text{د س} = \int \left(\text{س}^2 - 1 + 2\text{س} - \frac{2}{\text{س}}\right) \text{د س}$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}} = \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س} + \text{س}^2 - 2\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

٧) حل المعادلة التفاضلية $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt[3]{\dfrac{\text{ص}}{\text{س}}}$

الحل :.

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\sqrt[3]{\text{س}}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} = \frac{\text{د س}}{\sqrt[3]{\text{س}}}$$ بتكامل

$$\int \text{ص}^{-\frac{1}{3}}\ \text{د ص} = \int \text{س}^{-\frac{1}{3}}\ \text{د س}$$

$$\frac{3}{2}\text{ص}^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

8) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{-ص(س^2-1)}{س^2}$ جد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (1، -1).

الحل:

$\frac{دص}{دس} = \frac{-ص(س^2-1)}{س^2}$

$\frac{دص}{ص} = -\frac{(س^2-1)}{س^2} دس$ ∴ تكامل

$\int \frac{دص}{ص} = \int (س^{-2}-1) دس$

$لو|ص| = \frac{-1}{س} - س + جـ$ عند س = 1، ص = -1

$لو|1| = -1 - 1 + جـ \leftarrow \boxed{جـ = 2}$

$لو|ص| = \frac{-1}{س} - س + 2 \leftarrow |ص| = هـ^{(\frac{-1}{س} - س + 2)}$

9) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند (س، ص) يساوي $\frac{2ص^3}{(3س+5)^{\frac{2}{3}}}$ جد قاعدة هذه العلاقة علماً بأن منحناها يمر بـ(1، 5)

الحل:

رافت صافي

$\frac{دص}{دس} = \frac{2ص^3}{(3س+5)^{\frac{2}{3}}}$

$\frac{دص}{2ص^3} = \frac{دس}{(3س+5)^{\frac{2}{3}}}$ ∴ تكامل

$\int \frac{1}{2} ص^{-3} دص = \int (3س+5)^{\frac{-2}{3}} دس$

$\frac{-1}{4} ص^{-2} = (3س+5)^{\frac{1}{3}} + جـ$ عند س = 1، ص = 5

$\frac{-1}{4} \times \frac{1}{25} = (8)^{\frac{1}{3}} + جـ$

$\frac{-1}{100} = 2 + جـ \leftarrow جـ = \frac{-1}{100} - 2 = \frac{-201}{100} = -2.01$

$\frac{-1}{4} ص^{-2} = (3س+5)^{\frac{1}{3}} - 2.01$

10) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند (س، ص) يساوي $\frac{هـ^{-ص}(س+4)(س-3)}{س^2-3س}$ جد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بـ (1، 0).

الحل:

$\frac{dص}{dس} = \frac{هـ^{-ص}(س+4)(س-3)}{س^2-3س}$

$\frac{dص}{هـ^{-ص}} = \frac{(س+4)(س-3)}{س^2-3س}\, dس$ بالتكامل

$\int هـ^{ص}\, dص = \int \frac{(س+4)(س-3)}{س(س-3)}\, dس = \int (1+\frac{4}{س})\, dس$

$هـ^{ص} = س + 4 لو_{هـ}|س| + جـ$ عند (1، 0)

$هـ^{0} = 1 + 4 لو_{هـ} 1 + جـ \leftarrow 1 = 1 + 0 + جـ \leftarrow جـ = 0$

$هـ^{ص} = س + 4 لو_{هـ}|س|$

11) تحركت كرة من السكون على خط مستقيم بتسارع مقداره $(\frac{2}{\sqrt{ن}} + ن)$ م/ث²، إذا علمت أن سرعة الكرة 50 م/ث عندما ن = 9 وأن الكرة قطعت مسافة مقدارها 22 م بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة. جد المسافة التي تقطعها الكرة بعد 9 ثوانٍ من بدء حركتها.

الحل:

$ت = (\frac{2}{\sqrt{ن}} + ن) = 2ن^{-\frac{1}{2}} + ن$

$\frac{dع}{dن} = 2ن^{-\frac{1}{2}} + ن \leftarrow dع = (2ن^{-\frac{1}{2}} + ن)\, dن$ بالتكامل

$ع = 4\sqrt{ن} + \frac{ن^2}{2} + جـ$ عند $ع(9) = 50$

$50 = 4\sqrt{9} + \frac{81}{2} + جـ \leftarrow جـ = \frac{-5}{2}$

$ع = 4ن^{\frac{1}{2}} + \frac{ن^2}{2} - \frac{5}{2}$

$dف = (4ن^{\frac{1}{2}} + \frac{ن^2}{2} - \frac{5}{2})\, dن$ بالتكامل

$ف = \frac{8}{3}\sqrt{ن^3} + \frac{ن^3}{6} - \frac{5}{2}ن + جـ_2$ عند $ف(4) = 22$

$22 = \frac{8}{3} \times 8 + \frac{64}{6} - \frac{20}{2} + جـ_2 \leftarrow جـ_2 = 0$

$ف = \frac{8}{3}\sqrt{ن^3} + \frac{ن^3}{6} - \frac{5}{2}ن$

$ف(9) = \frac{8}{3}\sqrt{9^3} + \frac{9^3}{6} - \frac{5}{2} \times 9 = 171$ م

١٢) اذا كان تسارع جسم يعطى بالعلاقة ت = ٣ن + ٢ ، سرعته الابتدائية ٦م/ث ، المسافة التي يقطعها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة ١٢م فما المسافة التي يقطعها بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل: ت = ٣ن + ٢

$\frac{دع}{دن}$ = ٣ن + ٢ ← دع = (٣ن + ٢) دن ∴ بالتكامل

ع = $\frac{٣ن^٢}{٢}$ + ٢ن + جـ١ عند ع(٠) = ٦

٦ = ٠ + ٠ + جـ١ ← جـ١ = ٦

ع = $\frac{٣}{٢}$ن² + ٢ن + ٦

دف = ($\frac{٣}{٢}$ن² + ٢ن + ٦) دن ∴ بالتكامل

ف = $\frac{١}{٢}$ن³ + ن² + ٦ن + جـ٢ عند ف(١) = ١٢

١٢ = $\frac{١}{٢}$ + ١ + ٦ + جـ٢ ← جـ٢ = $\frac{٩}{٢}$

ف(ن) = $\frac{١}{٢}$ن³ + ن² + ٦ن + $\frac{٩}{٢}$ ← ف(٣) = $\frac{٢٧}{٢}$ + ٩ + ١٨ + $\frac{٩}{٢}$ = ٤٥م

افتح مخك

١٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي ٢س ص جد قيم (ص) عندما س = ٣ علماً بان منحنى العلاقة يمر بـ (٢، ١-)

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ص

$\frac{دص}{ص}$ = ٢س دس ∴ بالتكامل

لوهـ|ص| = س² + جـ عند (٢، ١-)

لوهـ١ = ٤ + جـ ← جـ = ٤-

لوهـ|ص| = س² - ٤

|ص| = هـ^(س² - ٤) عند س = ٣

|ص| = هـ⁵

ص = ± هـ⁵

١٤) اذا كان ميل المماس للعلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$ ، س > ٠ . جد قاعدة العلاقة ص علماً بان منحناها يمر بـ (هـ، ٤)

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$

دص = $\frac{دس}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$ ∴ بالتكامل

ص = ∫ $\frac{دس}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$

ص = ٢$\sqrt{٣ + لوهـ س}$ + جـ

عند (هـ، ٤)

٤ = ٢$\sqrt{٣ + ١}$ + جـ

جـ = ٠

ص = ٢$\sqrt{٣ + لوهـ س}$

ص = $\sqrt{٣ + لوهـ س}$
ص² = ٣ + لوهـ س
٢ص دص = $\frac{١}{س}$ دس
دس = ٢ص س دص
∫ $\frac{٢ص س دص}{س ص}$
٢ص + جـ

15) يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة
ت = ع + 1 ، ع > ٠ . اذا تحرك الجسم من السكون
فقطع مسافة ٦م بعد ٣ ثوانٍ من حركته. جد المسافة
التي قطعها بعد ٩ ثوانٍ من حركته.

الحل: $ت = ع + 1$

$\frac{دع}{دن} = ع + 1$

$\frac{دع}{ع+1} = دن$ ∴ بالتكامل

$لو_{هـ} |ع+1| = ن + حـ_1$ لكن $ع(0) = 0$

$لو_{هـ} 1 = 0 + حـ_1 \Leftarrow حـ_1 = 0$

$لو_{هـ} |ع+1| = ن$

$ع + 1 = هـ^{ن}$

$ع = هـ^{ن} - 1$

$\frac{دف}{دن} = هـ^{ن} - 1$

$دف = (هـ^{ن} - 1)\, دن$ بالتكامل

$ف = هـ^{ن} - ن + حـ_2$ لكن $ف(3) = 6$

$6 = هـ^{3} - 3 + حـ_2 \Leftarrow حـ_2 = 9 - هـ^{3}$

$ف = هـ^{ن} - ن + 9 - هـ^{3}$

$ف(9) = هـ^{9} - 9 + 9 - هـ^{3} = هـ^{9} - هـ^{3}$

١٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠، ١)

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$\text{دص} = \frac{\text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} \quad \therefore \text{بالتكامل}$$

$$\text{ص} = \int \frac{\text{جا}^2\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جا}^2\text{س}\,(1-\text{جتا}^2\text{س})}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \int \left(\frac{\text{جا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\right)\text{دس} \qquad \text{نوزع البسط على المقام}$$

$$\text{ص} = \int (\text{ظا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})\,\text{دس} = \int \left(\text{قا}^2\text{س} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\right)\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} - \frac{3}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \text{جـ} \qquad \text{عند } (0، 1)$$

$$1 = 0 - 0 + 0 + \text{جـ} \Longrightarrow \boxed{\text{جـ} = 1}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} - \frac{3}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + 1$$

---

١٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{1 + \text{لو}_\text{هـ}\text{س}}{\text{هـ} + \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س}}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بـ(١، ٢)

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 + \text{لو}_\text{هـ}\text{س}}{\text{هـ} + \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س}}$$

$$\text{دص} = \frac{1 + \text{لو}_\text{هـ}\text{س}}{\text{هـ} + \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س}}\,\text{دس} \quad \therefore \text{بالتكامل}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_\text{هـ}|\text{هـ} + \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س}| + \text{جـ} \qquad \text{عند } (1، 2)$$

$$2 = \text{لو}_\text{هـ}|\text{هـ} + 0| + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = 2 - 1 = 1$$

$$\text{ص} = \text{لو}_\text{هـ}|\text{هـ} + \text{س}\,\text{لو}_\text{هـ}\text{س}| + 1$$

١٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{هـ^{س+1}}{(1+2هـ^{س})^2}$ حيث هـ : العدد النيبري ، فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(0 ، \frac{-هـ}{6})$

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س+1}}{(1+2هـ^{س})^2}$$

$$دص = \frac{هـ^{س+1}}{(1+2هـ^{س})^2} دس \quad \therefore \text{بالتكامل}$$

$$ص = \int \frac{هـ^{س+1}}{(1+2هـ^{س})^2} دس$$

$$ص = 1 + 2هـ^{س}$$
$$\frac{دص}{دس} = 2هـ^{س}$$
$$دس = \frac{دص}{2هـ^{س}}$$
$$= \int \frac{هـ^{س} \times هـ}{ص^2} \times \frac{دص}{2هـ^{س}}$$
$$= \int \frac{هـ}{2} ص^{-2} دص$$
$$= \frac{-هـ}{2} ص^{-1} + جـ$$

$$ص = \frac{-هـ}{2}(1+2هـ^{س})^{-1} + جـ \quad \text{عند} \ (0 ، \frac{-هـ}{6})$$

$$\frac{-هـ}{6} = \frac{-هـ}{2}(1+2)^{-1} + جـ$$

$$\frac{-هـ}{6} = \frac{-هـ}{6} + جـ \leftarrow جـ = 0$$

$$ص = \frac{-هـ}{2}(1+2هـ^{س})^{-1}$$

---

١٩) حل المعادلة التفاضلية $4 جا^2 س \ دص + ص^2 دس = 4 دص$

الحل :

$$4 جا^2 س \ دص - 4 دص = - ص^2 دس$$

$$(4 جا^2 س - 4) دص = - ص^2 دس$$

$$4(جا^2 س - 1) دص = - ص^2 دس$$

$$4 جتا^2 س \ دص = ص^2 دس \qquad \text{نقسم على } ص^2 \times 4 جتا^2 س$$

$$\frac{دص}{ص^2} = \frac{دس}{4 جتا^2 س} \quad \therefore \text{بالتكامل}$$

$$\int ص^{-2} دص = \int \frac{1}{4} قا^2 س \ دس$$

$$\frac{ص^{-1}}{-1} = \frac{1}{4} ظا س + جـ \longrightarrow ص = \frac{-4}{ظا س + جـ}$$

٢٠) حل المعادلة التفاضلية :-

$$\frac{دص}{س^{٧}} = \sqrt{س^{٤} - ٢}\ دس$$

الحل :-

$$دص = س^{٧}\sqrt{س^{٤} - ٢}\ دس$$

تكامل الطرفين :-

$$\int دص = \int س^{٧}\sqrt{س^{٤} - ٢}\ دس$$

$$ص = \frac{١}{١٠}(س^{٤} - ٢)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}(س^{٤} - ٢)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$ص = \frac{١}{١٠}\sqrt{(س^{٤} - ٢)^{٥}} + \frac{١}{٣}\sqrt{(س^{٤} - ٢)^{٣}} + جـ$$

$$ص = س^{٤} - ٢$$

$$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$$

$$\int س^{٧}\sqrt{ص}\ \frac{دص}{٤س^{٣}}$$

$$\int \frac{١}{٤} س^{٤}\sqrt{ص}\ دص$$

$$\int \frac{١}{٤}(ص + ٢)\sqrt{ص}\ دص$$

$$\int \frac{١}{٤}(ص^{\frac{٣}{٢}} + ٢ص^{\frac{١}{٢}})\ دص$$

$$\frac{١}{١٠}ص^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}$$

---

٢١) اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{٨ جا^{٢} س}{(١ + جتا ٢س)^{٣}}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠، ١)

الحل :- $\frac{دص}{دس} = \text{ميل المماس} = \frac{٨ جا^{٢} س}{(١ + جتا ٢س)^{٣}}$

تكامل الطرفين

$$دص = \frac{٨ جا^{٢} س}{(٢ جتا^{٢} س)^{٣}}\ دس = \int \frac{جا^{٢} س}{جتا^{٦} س}\ دس$$

$$ص = \int \frac{جا^{٢} س}{جتا^{٢} س\ جتا^{٤} س}\ دس = \int ظا^{٢} س\ قا^{٤} س\ دس$$

$$ص = \frac{ظا^{٥} س}{٥} + \frac{ظا^{٣} س}{٣} + جـ$$ عند (٠، ١)

$$١ = ٠ + ٠ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ١}$$

$$ص = \frac{ظا^{٥} س}{٥} + \frac{ظا^{٣} س}{٣} + ١$$

$$ص = ظا س$$

$$\frac{دص}{دس} = قا^{٢} س$$

$$دس = \frac{دص}{قا^{٢} س}$$

$$\int ص^{٢} قا^{٤} س\ \frac{دص}{قا^{٢} س}$$

$$\int ص^{٢} قا^{٢} س\ دص$$

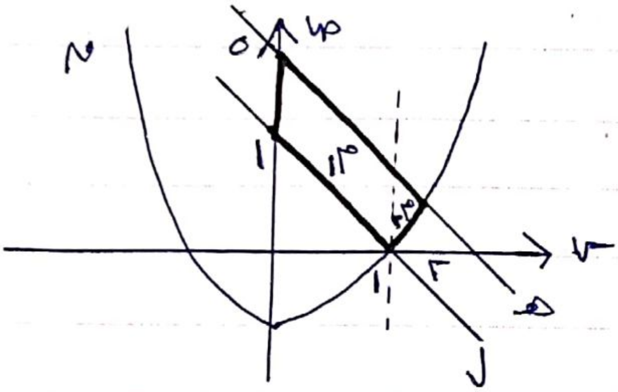
$$\int ص^{٢}(ظا^{٢} س + ١)\ دص$$

$$\int ص^{٢}(ص^{٢} + ١)\ دص$$

$$\int (ص^{٤} + ص^{٢})\ دص$$

$$\frac{ص^{٥}}{٥} + \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$$

١) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - ١$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥ - \text{س}$
$\text{ل}(\text{س}) = ١ - \text{س}$



الحل :-

التقاطع :-

$\text{ق} = \text{هـ}$

$\text{س}^2 - ١ = ٥ - \text{س}$

$\therefore \text{س}^2 + \text{س} - ٦ = ٠$

$\therefore (\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٣$

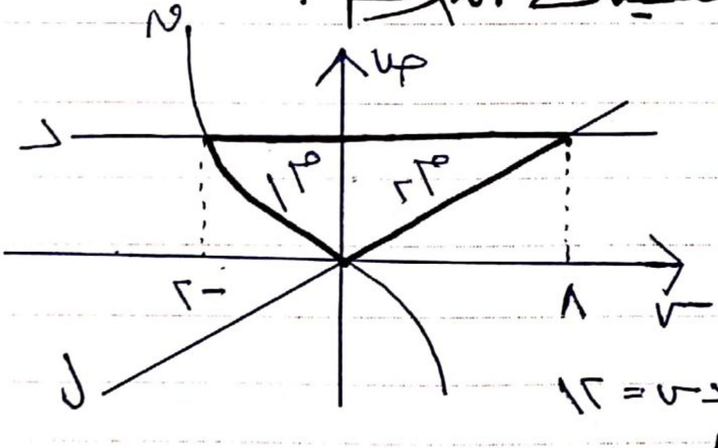
$$\text{م}_١ = \int_٠^١ (\text{هـ} - \text{ل})\, \text{دس} = \int_٠^١ (٥ - \text{س} - ١ + \text{س})\, \text{دس} = \int_٠^١ ٤\, \text{دس} = ٤$$

$$\text{م}_٢ = \int_١^٢ (\text{هـ} - \text{ق})\, \text{دس} = \int_١^٢ (٥ - \text{س} - \text{س}^2 + ١)\, \text{دس} = \int_١^٢ (-\text{س}^2 - \text{س} + ٦)\, \text{دس} = \frac{١٣}{٦}$$

$$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = ٤ + \frac{١٣}{٦} = \frac{٣٧}{٦}$$

---

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}^٣$ ، $\text{د}(\text{س}) = ٨$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات الثلاثة .



الحل :-

التقاطع :-

$\text{د} = \text{ق}$ | $\text{د} = \text{ل}$
$٨ = -\text{س}^٣$ | $\text{س} = ٨$
$\text{س} = -٢$

$$\text{م}_١ = \int_{-٢}^{٠} (\text{د} - \text{ق})\, \text{دس} = \int_{-٢}^{٠} (٨ + \text{س}^٣)\, \text{دس} = ١٢$$

$$\text{م}_٢ = \int_٠^٨ (\text{د} - \text{ل})\, \text{دس} = \int_٠^٨ (٨ - \text{س})\, \text{دس} = ٣٢$$

$$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = ١٢ + ٣٢ = ٤٤$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات

$ق(س) = -س^{٣}$ ، $هـ(س) = \frac{١}{٢}س$ ، $ل(س) = ٦ - س$

الحل :-

التقاطع :-

$ق = هـ$

$-س^{٣} = \frac{١}{٢}س$

$س^{٣} + \frac{١}{٢}س = ٠$

$س(س^{٢} + \frac{١}{٢}) = ٠$

$س = ٠$

$ق = ل$

$-س^{٣} = ٦ - س$

$س^{٣} - س + ٦ = ٠$

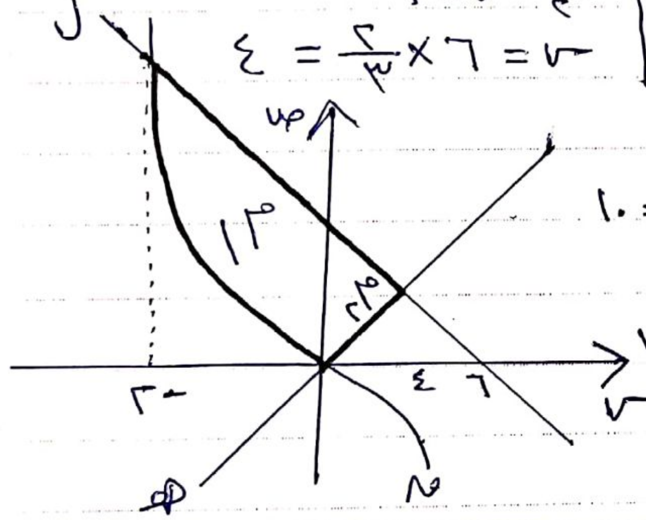
بالتجريب $س = -٢$

$ل = هـ$

$٦ - س = \frac{١}{٢}س$

$\frac{٣}{٢}س = ٦$

$س = ٦ \times \frac{٢}{٣} = ٤$



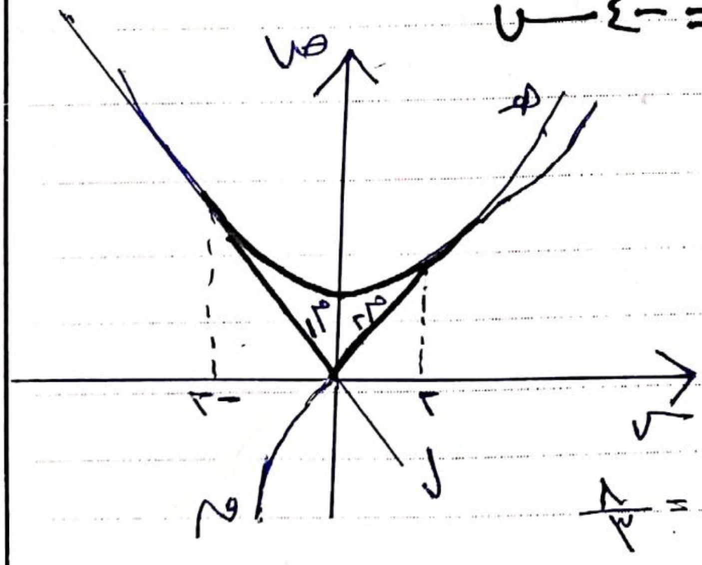
$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} (ل - ق)\, دس = \int_{-٢}^{٠} (٦ - س + س^{٣})\, دس = ١٠$

$م_{٢} = \int_{٠}^{٤} (ل - هـ)\, دس = \int_{٠}^{٤} (٦ - س - \frac{١}{٢}س)\, دس = ١٢$

$م = م_{١} + م_{٢} = ١٠ + ١٢ = ٢٢$

٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = س^{٣}$

$هـ(س) = س^{٢} + ٤$ ، $ل(س) = -٤س$



الحل :- التقاطع :-

$ق = هـ$

$س^{٣} = س^{٢} + ٤$

$س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠$

بالتجريب $س = ٢$

$ل = هـ$

$-٤س = س^{٢} + ٤$

$س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠$

$س = -٢$

$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} (هـ - ل)\, دس = \int_{-٢}^{٠} (س^{٢} + ٤ + ٤س)\, دس = \frac{٨}{٣}$

$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} (هـ - ق)\, دس = \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ٤ - س^{٣})\, دس = \frac{٢٠}{٣}$

$م = م_{١} + م_{٢} = \frac{٨}{٣} + \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٨}{٣}$

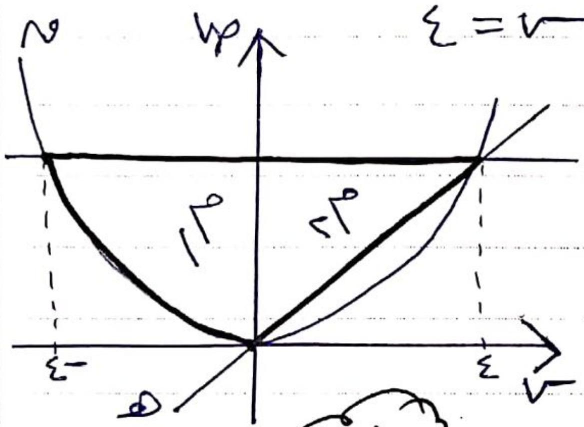
٥) جد مساحة المنطقة بين منحنيات الاقترانات :-

ق(س) = س^٢ ، هـ(س) = ٤س ، ل(س) = ١٦

الحل :-

التقاطع :-

ق = هـ	ق = ل	ل = هـ
س^٢ = ٤س	س^٢ = ١٦	١٦ = ٤س
س^٢ − ٤س = ٠	س = ٤ ، −٤	س = ٤
س(س − ٤) = ٠		
س = ٠ ، ٤		



$$م_1 = \int_{-4}^{0} (ل - ق)\, دس = \int_{-4}^{0} (16 - س^2)\, دس = \frac{128}{3}$$

$$م_2 = \int_{0}^{4} (ل - هـ)\, دس = \int_{0}^{4} (16 - 4س)\, دس = 32$$

$$م = م_1 + م_2 = \frac{128}{3} + 32 = \frac{224}{3}$$

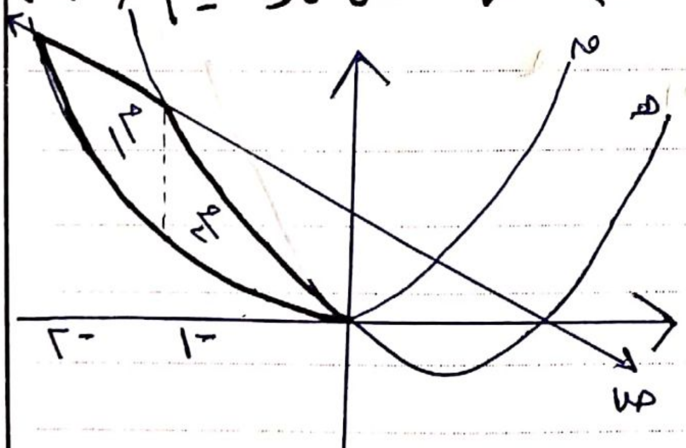
افتح مخك

---

٦) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^٢ ، هـ(س) = س^٢ − ٢س ، والمستقيم ص = ٢ − س

الحل :- التقاطع :-

ق = ص	هـ = ص
س^٢ = ٢ − س	س^٢ − ٢س = ٢ − س
س^٢ + س − ٢ = ٠	س^٢ − س − ٢ = ٠
(س + ٢)(س − ١) = ٠	(س − ٢)(س + ١) = ٠
س = −٢ ، ١	س = ٢ ، −١



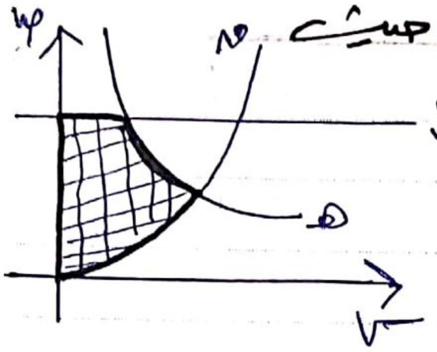
$$م_1 = \int_{-2}^{-1} (ص - ق)\, دس = \int_{-2}^{-1} (2 - س - س^2)\, دس = \frac{7}{6}$$

$$م_2 = \int_{-1}^{0} (هـ - ق)\, دس = \int_{-1}^{0} -2س\, دس = 1$$

$$م = م_1 + م_2 = \frac{7}{6} + 1 = \frac{13}{6}$$

٧) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور، حيث

$ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = \frac{1}{س^2}$ ، $ل(س) = 4$



الحل:-

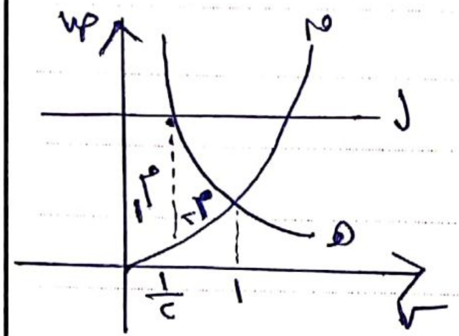
التقاطع:-

ل = هـ

$4 = \frac{1}{س^2} \leftarrow 4س^2 = 1 \leftarrow س^2 = \frac{1}{4} \leftarrow س = \frac{1}{2} ، -\frac{1}{2}$

ق = هـ

$\frac{1}{س^2} = س^2 \leftarrow س^4 = 1 \leftarrow س = 1 ، -1$



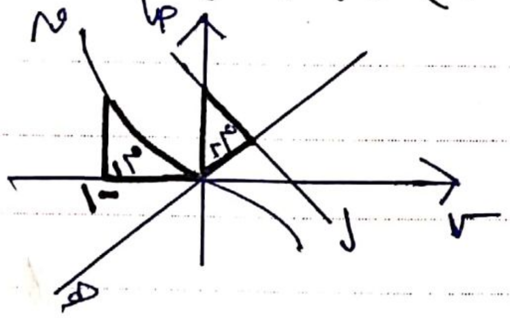
$م_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} (ل - ق) دس = \int_0^{\frac{1}{2}} (4 - س^2) دس = \frac{47}{24}$

$م_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (هـ - ق) دس = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{س^2} - س^2\right) دس = \frac{17}{24}$

$م = م_1 + م_2 = \frac{47}{24} + \frac{17}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$

٨) جد مجموع مساحتي المنطقتين م١، م٢ المظللتين في الشكل المجاور

حيث $ق(س) = -س^3$ ، $هـ(س) = -س$ ، $ل(س) = 3 - 2س$



الحل:-

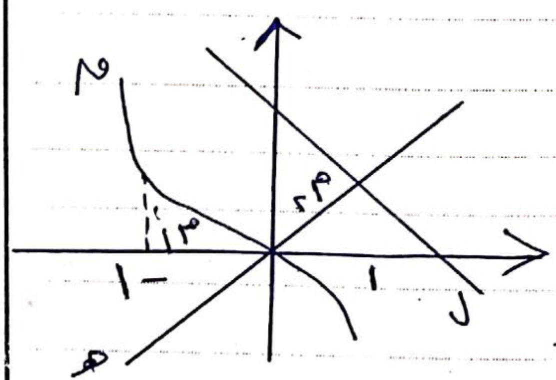
رافت صافي

التقاطع

هـ = ل

$س = 3 - 2س$

$3س = 3 \leftarrow س = 1$



$م_1 = \int_{-1}^{0} ق(س) دس = \int_{-1}^{0} -س^3 دس = \frac{1}{4}$

$م_2 = \int_0^1 (ل - هـ) دس = \int_0^1 (3 - 2س - س) دس$

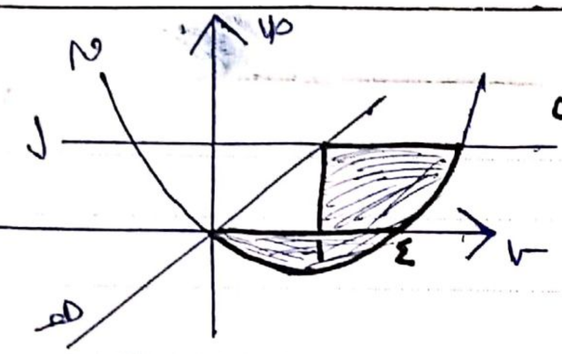
$= \int_0^1 (3 - 3س) دس = \frac{3}{2}$

$م = م_1 + م_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٩) جد مساحة المنطقة المظللة حيث

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - ٤\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥\text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = ٥$



الحل :- التقاطع :-

$\text{هـ} = \text{ل}$

$٥\text{س} = ٥$

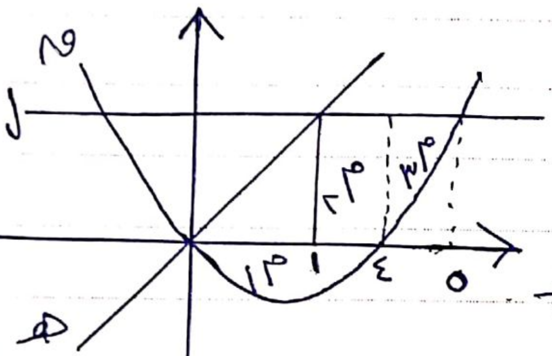
$\text{س} = ١$

$\text{ق} = \text{ل}$

$\text{س}^2 - ٤\text{س} = ٥$

$\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٥ = ٠$

$(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٥ ، -١$



$\text{م}_1 = \int_0^4 -\text{ق}(\text{س})\,د\text{س} = \int_0^4 (٤\text{س} - \text{س}^2)\,د\text{س} = \frac{٣٢}{٣}$

$\text{م}_2 = \int_1^4 \text{ل}\,د\text{س} = \int_1^4 ٥\,د\text{س} = ١٥$

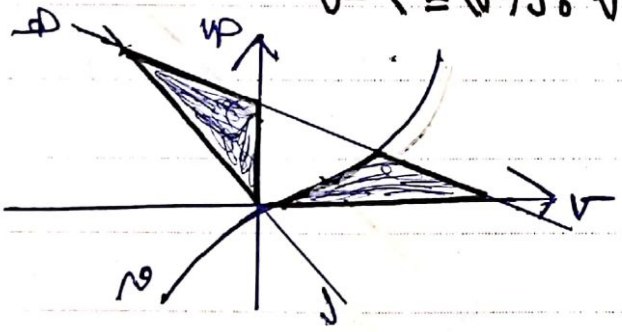
$\text{م}_3 = \int_4^5 (\text{ل} - \text{ق})\,د\text{س} = \int_4^5 (٥ - \text{س}^2 + ٤\text{س})\,د\text{س} = \frac{٨}{٣}$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = \frac{٣٢}{٣} + ١٥ + \frac{٨}{٣} = \frac{٨٥}{٣}$

---

١٠) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين في الشكل حيث

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^3$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٣ - \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = -٢\text{س}$



الحل :- التقاطع :-

$\text{ل} = \text{هـ}$

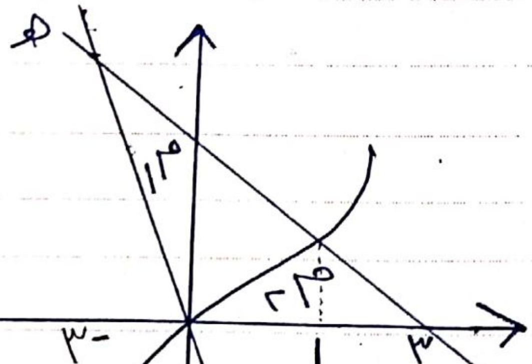
$-٢\text{س} = ٣ - \text{س} \leftarrow \text{س} = -٣$

$\text{ق} = \text{هـ}$

$٢\text{س}^3 = ٣ - \text{س}$ بالتجريب $\text{س} = ١$

$\text{هـ}(\text{س}) = ٠$

$٣ - \text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٣$



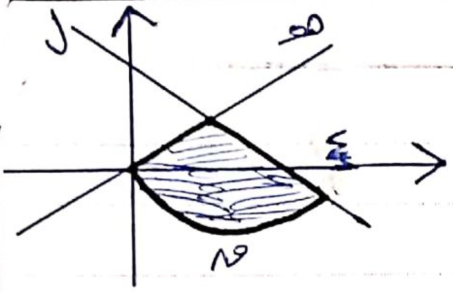
$\text{م}_1 = \int_{-3}^{0} (\text{هـ} - \text{ل})\,د\text{س} = \int_{-3}^{0} (٣ + \text{س})\,د\text{س} = \frac{٩}{٢}$

$\text{م}_2 = \int_0^1 \text{ق}(\text{س})\,د\text{س} + \int_1^3 \text{هـ}(\text{س})\,د\text{س}$

$= \int_0^1 ٢\text{س}^3\,د\text{س} + \int_1^3 (٣ - \text{س})\,د\text{س} = \frac{٥}{٢}$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{٩}{٢} + \frac{٥}{٢} = ٧$

١١) جد مساحة المنطقة المظللة حيث

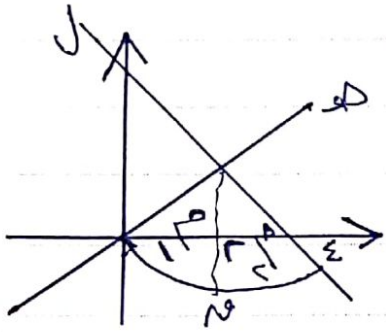


$\text{ق}(\text{س}) = -\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = ٦ - ٢\text{س}$

الحل :- التقاطع :-

هـ = ل

$\text{س} = ٦ - ٢\text{س} \leftarrow \text{س} = ٢$



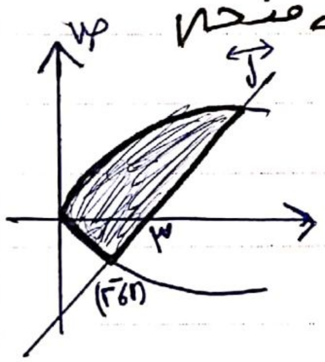
$\text{م}_1 = \int_0^2 (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس} = \int_0^2 (\text{س} + \sqrt{\text{س}})\,\text{دس} = ٢ + \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

$\text{م}_2 = \int_2^4 (\text{ل} - \text{ق})\,\text{دس} = \int_2^4 (٦ - ٢\text{س} + \sqrt{\text{س}})\,\text{دس} = \frac{١٦}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = ٢ + \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$

---

١٢) جد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين منحنى العلاقة $\text{ص}^2 = ٤\text{س}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$



الحل :- نجد أولاً معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$:-

$\text{م} = \frac{٠+٢}{٣-١} = ١ \leftarrow \text{ص} + ٢ = ١(\text{س} - ١) \leftarrow \text{ص} = \text{س} - ٣$

$\text{ص}^2 = ٤\text{س}$: $\text{ص}_1 = ٢\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}_2 = -٢\sqrt{\text{س}}$

رافت صافي

التقاطع :-

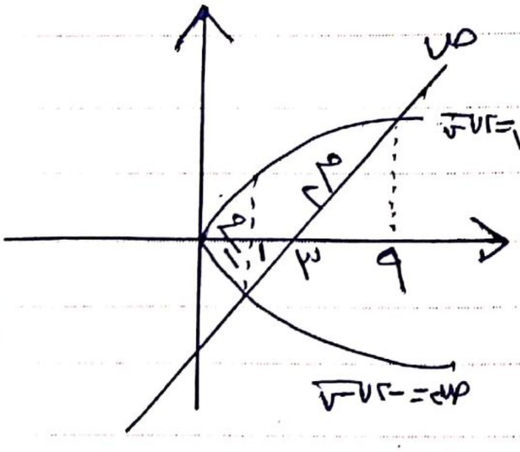
$\text{ص} = \text{ص}_1$

$\text{س} - ٣ = ٢\sqrt{\text{س}}$ نربع

$\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٩ = ٤\text{س}$

$\text{س}^2 - ١٠\text{س} + ٩ = ٠$

$(\text{س} - ٩)(\text{س} - ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = ١ ، ٩$



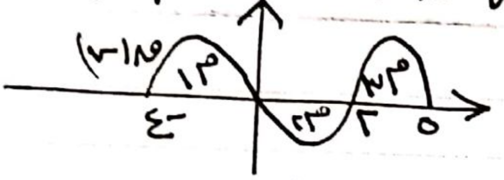
$\text{م}_1 = \int_0^1 (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)\,\text{دص} = \int_0^1 ٤\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{٨}{٣}$

$\text{م}_2 = \int_1^9 (\text{ص}_1 - \text{ص})\,\text{دص} = \int_1^9 (٢\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٣)\,\text{دس}$

$= \frac{٥٦}{٣}$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{٨}{٣} + \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$

١٣) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق، وإذا كانت $م_١ = ٧$ ، $م_٢ = ٤$ ، $م_٣ = ٥$ جد :



١) $\int_{٢}^{-٤} \frac{ق(س)}{٢} دس$

٢) المساحة المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات في الفترة [-٤، ٥].

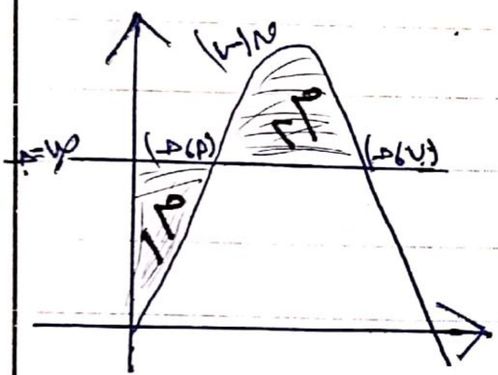
الحل: خلال الرسمة :

أ) $\int_{-٤}^{٠} ق(س) دس = م_١ = ٧$ ، $\int_{٠}^{٢} ق(س) دس = -م_٢ = -٤$ ، $\int_{٢}^{٥} ق(س) دس = م_٣ = ٥$

ب) $\int_{٢}^{-٤} \frac{ق(س)}{٢} دس = \frac{١}{٢}\left[\int_{٢}^{٠} ق(س) دس + \int_{٠}^{-٤} ق(س) دس\right] = \frac{١}{٢}[٤ - ٧] = \frac{-٣}{٢}$

ج) $م = م_١ + م_٢ + م_٣ = ١٦$

١٤) رسم المستقيم ص = ح يقطع منحنى $ق(س) = ٢س - ٣س^٣$ في النقطتين (أ، ح)، (ب، ح) حيث أ، ب، ح ثوابت، مكوناً المنطقتين $م_١$، $م_٢$ كما في الشكل. جد قيمة ح التي تجعل مساحة المنطقتين $م_١$، $م_٢$ متساويتين.



الحل :

$م_١ = \int_{٠}^{أ} (ص - ق(س)) دس = \int_{٠}^{أ} (ح - ٢س + ٣س^٣) دس$

$= \left[ح س - س^٢ + \frac{٣}{٤}س^٤\right]_{٠}^{أ} = ح أ - أ^٢ + \frac{٣}{٤}أ^٤$

$م_٢ = \int_{أ}^{ب} (ق(س) - ص) دس = \int_{أ}^{ب} (٢س - ٣س^٣ - ح) دس$

$= \left[س^٢ - \frac{٣}{٤}س^٤ - ح س\right]_{أ}^{ب} = ب^٢ - \frac{٣}{٤}ب^٤ - ح ب - أ^٢ + \frac{٣}{٤}أ^٤ + ح أ$

لكن : $م_١ = م_٢$

$\cancel{ح أ} - \cancel{أ^٢} + \cancel{\frac{٣}{٤}أ^٤} = ب^٢ - \frac{٣}{٤}ب^٤ - ح ب - \cancel{أ^٢} + \cancel{\frac{٣}{٤}أ^٤} + \cancel{ح أ}$

$ب^٢ - \frac{٣}{٤}ب^٤ - ح ب = ٠$ ــــ (١)

لكن (ب، ح) تقع على منحنى ق(س) ← ق(ب) = ح

$٢ب - ٣ب^٣ = ح$ ــــ (٢) نعوض (٢) في (١) ينتج :

$ب^٢ - \frac{٣}{٤}ب^٤ - ب(٢ب - ٣ب^٣) = ٠$

$ب^٢ - \frac{٣}{٤}ب^٤ - ٢ب^٢ + ٣ب^٤ = ٠ \leftarrow \frac{٩}{٤}ب^٤ - ب^٢ = ٠$

$ب^٢(\frac{٩}{٤}ب^٢ - ١) = ٠ \leftarrow ب = ٠ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣}$ وعليه $ب = \frac{٢}{٣}$ نعوض في (٢)

$ح = ٢ \times \frac{٢}{٣} - ٣ \times \frac{٨}{٢٧} = \frac{٤}{٩}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = \sqrt{8س}$ ، $ل(س) = س + 6$ ومحور الصادات .

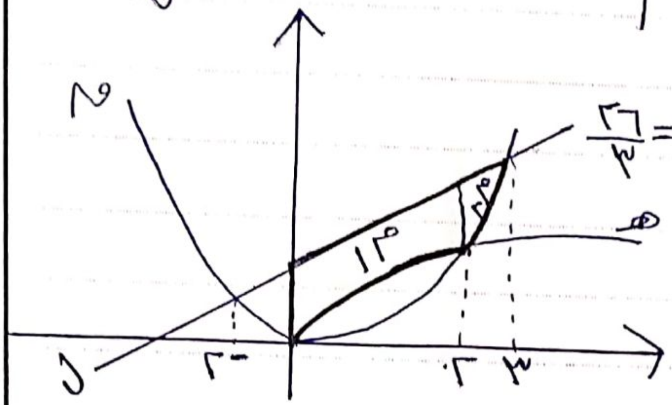
الحل :-

التقاطع :-

$ق = هـ$: $س^2 = \sqrt{8س}$ $\therefore س^4 - 8س = 0$ $\therefore س(س^3 - 8) = 0$ ، $س = 0 ، 2$

$ق = ل$: $س^2 = س + 6$ $\therefore س^2 - س - 6 = 0$ $\therefore (س - 3)(س + 2) = 0$ ، $س = 3 ، -2$

$هـ = ل$: $\sqrt{8س} = س + 6$ ، $8س = س^2 + 12س + 36$ $\therefore س^2 + 4س + 36 = 0$ $\therefore$ لا حل



$$م_1 = \int_0^2 (ل - هـ)\, دس = \int_0^2 (س + 6 - \sqrt{8س})\, دس = \frac{26}{3}$$

$$م_2 = \int_2^3 (ل - ق)\, دس = \int_2^3 (س + 6 - س^2)\, دس = \frac{13}{6}$$

$$م = م_1 + م_2 = \frac{26}{3} + \frac{13}{6} = \frac{65}{6}$$

١٦) استخدم التكامل في ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $ق(س) = 4 - س^2$ ، $هـ(س) = س + 2$ ، $ل(س) = 3$

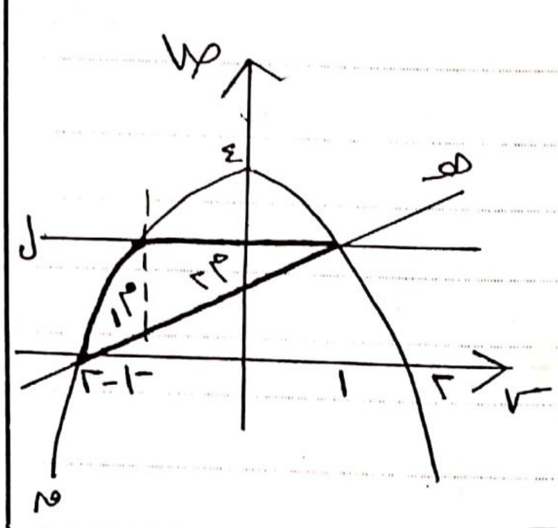
الحل :-

التقاطع

$ق = هـ$: $4 - س^2 = س + 2$ $\therefore س^2 + س - 2 = 0$ $\therefore (س + 2)(س - 1) = 0$ ، $س = 1 ، -2$

$ق = ل$: $4 - س^2 = 3$ ، $س^2 = 1$ ، $س = \pm 1$

$هـ = ل$: $س + 2 = 3$ ، $س = 1$

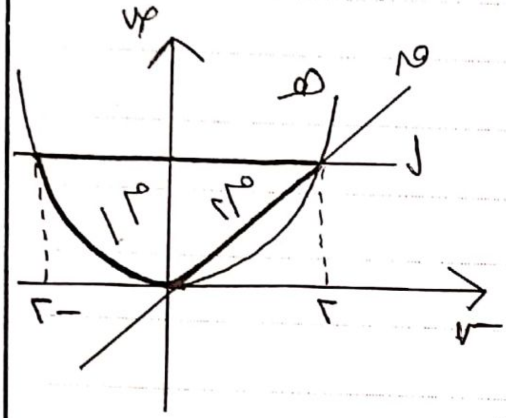


$$م_1 = \int_{-2}^{-1} (ق - هـ)\, دس = \int_{-2}^{-1} (2 - س^2 - س)\, دس = \frac{7}{6}$$

$$م_2 = \int_{-1}^{1} (ل - هـ)\, دس = \int_{-1}^{1} (1 - س)\, دس = 2$$

$$م = م_1 + م_2 = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$$

١٧) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = ٢س$ ، $هـ(س) = س^٢$ ، $ل(س) = ٤$



الحل :- التقاطع :-

$ق = هـ$ ، $س^٢ = ٢س$ ، $س^٢ - ٢س = ٠$ ، $س(س - ٢) = ٠$ ، $س = ٠ ، ٢$

$ق = ل$ ، $٢س = ٤$ ، $س = ٢$

$هـ = ل$ ، $س^٢ = ٤$ ، $س = \pm ٢$

$$م_١ = \int_{-٢}^{٠} (ل - هـ)\, دس = \int_{-٢}^{٠} (٤ - س^٢)\, دس = \frac{١٦}{٣}$$

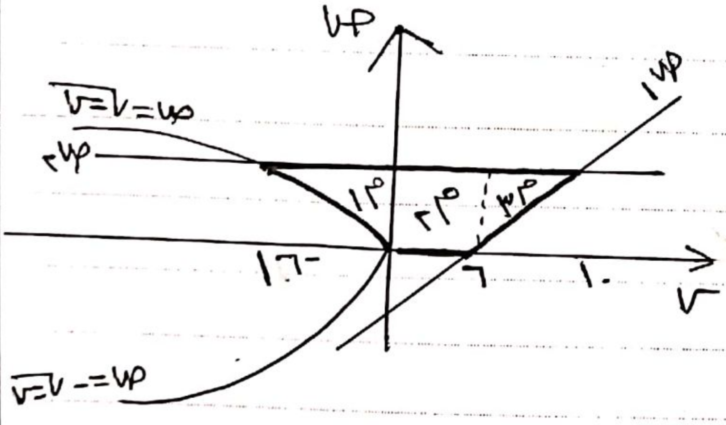
$$م_٢ = \int_{٠}^{٢} (ل - ق)\, دس = \int_{٠}^{٢} (٤ - ٢س)\, دس = ٤$$

$$م = م_١ + م_٢ = \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$$

---

١٨) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين العلاقة $ص^٢ = -س$ والمستقيمات $ص_١ = س - ٦$ ، $ص_٢ = ٤$ ، $ص = ٠$:

الحل :- التقاطع :-



$ص_١ = ص_٢$ ، $س - ٦ = ٤$ ، $س = ١٠$

$\sqrt{-س} = ٤$ ، $-س = ١٦$ ، $س = -١٦$

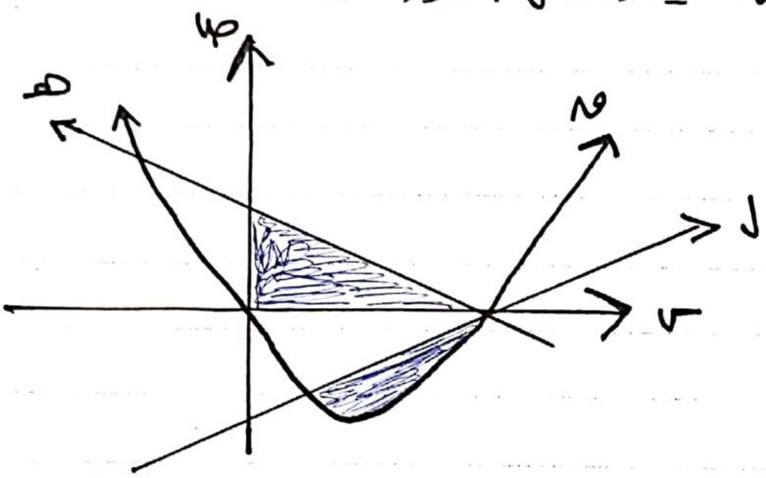
$$م_١ = \int_{-١٦}^{٠} (٤ - \sqrt{-س})\, دس = \frac{٦٤}{٣}$$

$$م_٢ = \int_{٠}^{٦} ٤\, دس = ٢٤$$

$$م_٣ = \int_{٦}^{١٠} (٤ - (س - ٦))\, دس = \int_{٦}^{١٠} (١٠ - س)\, دس = \left[١٠س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{٦}^{١٠} = ٨$$

$$م = م_١ + م_٢ + م_٣ = \frac{٦٤}{٣} + ٢٤ + ٨ = \frac{١٦٠}{٣}$$

١٩) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث



$ق(س) = س^2 - ٥س$

$ل(س) = س - ٥$

$هـ(س) = ٥ - س$

الحل :-

نجد أولاً نقاط التقاطع :-

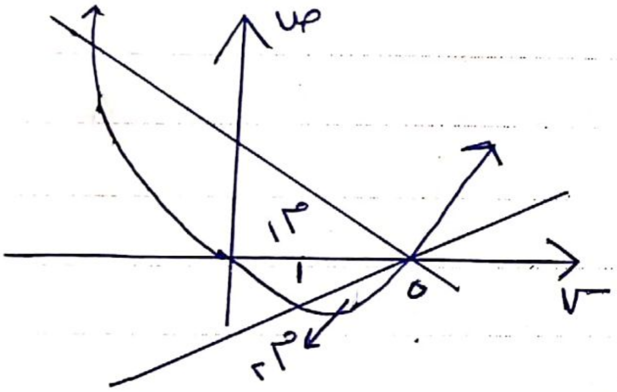
$ل = ق$

$س - ٥ = س^2 - ٥س$

$س^2 - ٦س + ٥ = ٠$

$(س - ١)(س - ٥) = ٠$

$س = ١ ، ٥$



$م_1 = \int_1^5 (ل - ق)\, دس = \int_1^5 (٦س - س^2 - ٥)\, دس$

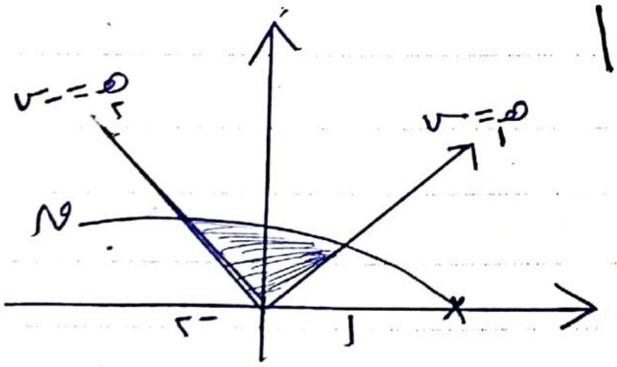
$= \frac{٣٢}{٣}$

$م_2 = \int_0^5 هـ(س)\, دس = \int_0^5 (٥ - س)\, دس = \frac{٢٥}{٢}$

المساحة المظللة $= م_1 + م_2 = \frac{٢٥}{٢} + \frac{٣٢}{٣} = \frac{١٣٩}{٦}$

٢٠) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين :-

$ق(س) = \sqrt{٢ - س} ، هـ(س) = |س|$



الحل :- التقاطع

$\sqrt{٢ - س} = س$ تربيع

$٢ - س = س^2$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

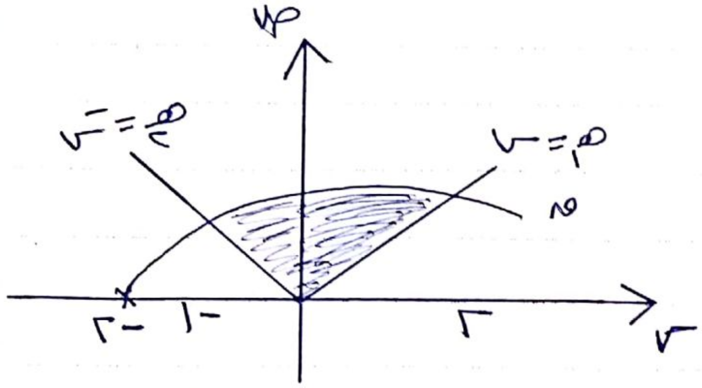
$س = -٢ ، ١$

$م = \int_{-2}^{0} (ق - هـ_2)\, دس + \int_0^1 (ق - هـ_1)\, دس = \int_{-2}^{0} (\sqrt{٢ - س} + س)\, دس + \int_0^1 (\sqrt{٢ - س} - س)\, دس$

$= \left[\frac{-٢}{٣}(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^2}{٢}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-٢}{٣}(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^2}{٢}\right]_0^1 = \frac{١٣}{٦}$

٢١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = \sqrt{س+2}$

$هـ(س) = |س|$



الحل :-

التقاطع :-

$\sqrt{س+2} = س$ نربع

$س + 2 = س^2$

$س^2 - س - 2 = 0$

$(س-2)(س+1) = 0$

$س = 2 ، -1$

$$م = \int_{-1}^{0} (ق - هـ_2)\,دس + \int_{0}^{2} (ق - هـ_1)\,دس = \int_{-1}^{0} (\sqrt{س+2} + س)\,دس + \int_{0}^{2} (\sqrt{س+2} - س)\,دس$$

$$= \left[\frac{2}{3}(س+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{س^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}(س+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{س^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

---

٢٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$ق(س) = جاس$ ، $ل(س) = جتا\frac{س}{2}$ في الفترة $[\frac{\pi}{3} ، \frac{5\pi}{3}]$

الحل :-

$ق = ل$

$جاس = جتا\frac{س}{2}$

$2جا\frac{س}{2}جتا\frac{س}{2} - جتا\frac{س}{2} = 0$

$جتا\frac{س}{2}(2جا\frac{س}{2} - 1) = 0$

$جتا\frac{س}{2} = 0 \longrightarrow \frac{س}{2} = \frac{\pi}{2} \leftarrow س = \pi$

$جا\frac{س}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{س}{2} = \frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6} \leftarrow س = \frac{\pi}{3} ، \frac{5\pi}{3}$

$$م_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (جاس - جتا\frac{س}{2})\,دس = \left[(-جتاس - 2جا\frac{س}{2})\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$م_2 = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{3}} (جتا\frac{س}{2} - جاس)\,دس = (2جا\frac{س}{2} + جتاس) = \frac{1}{2}$$

المساحة الكلية $= م_1 + م_2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

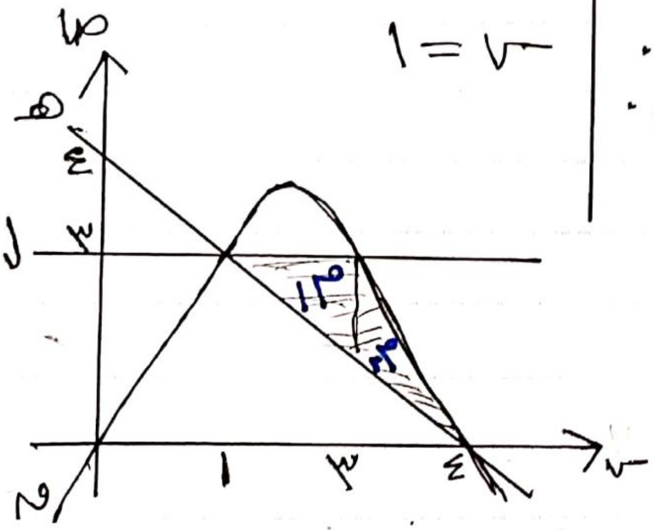
٢٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية: $ق(س) = ٤س - س^٢$ ، $هـ(س) = ٤ - س$ ، $ل(س) = ٣$

الحل: التقاطع:

$ق = هـ$
$٤س - س^٢ = ٤ - س$
$س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$
$(س - ٤)(س - ١) = ٠$
$س = ٤ ، ١$

$ق = ل$
$٤س - س^٢ = ٣$
$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$
$(س - ٣)(س - ١) = ٠$
$س = ٣ ، ١$

$هـ = ل$
$٤ - س = ٣$
$س = ١$



$$م_١ = \int_{١}^{٣} (ل - هـ)\, دس$$
$$= \int_{١}^{٣} (٣ - ٤ + س)\, دس$$
$$= \int_{١}^{٣} (-١ + س)\, دس = \left[-س + \frac{س^٢}{٢}\right]_{١}^{٣} = ٢$$
$$م_٢ = \int_{٣}^{٤} (ق - هـ)\, دس = \int_{٣}^{٤} (٤س - س^٢ - ٤ + س)\, دس$$
$$= \int_{٣}^{٤} (٥س - س^٢ - ٤)\, دس = \left[\frac{٥س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} - ٤س\right]_{٣}^{٤} = \frac{٧}{٦}$$
$$م = م_١ + م_٢ = ٢ + \frac{٧}{٦} = \frac{١٩}{٦}$$ وحدة مربعة

---

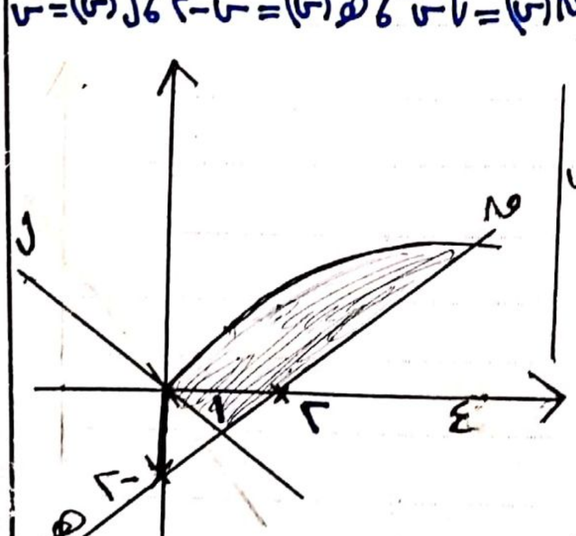
٢٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س - ٢$ ، $ل(س) = -س$

الحل: التقاطع:

$ق = هـ$
$\sqrt{س} = س - ٢$ نربع
$س = س^٢ - ٤س + ٤$
$س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$
$(س - ١)(س - ٤) = ٠$
$س = ١ ، ٤$

$ق = ل$
$\sqrt{س} = -س$ نربع
$س = س^٢$
$س^٢ - س = ٠$
$س(س - ١) = ٠$
$س = ٠ ، ١$

$هـ = ل$
$س - ٢ = -س$
$س = ١$



$$م = \int_{٠}^{١} (ق - ل)\, دس + \int_{١}^{٤} (ق - هـ)\, دس$$
$$= \int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + س)\, دس + \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\, دس$$
$$= \left[\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س\right]_{١}^{٤} = \frac{١٣}{٣}$$

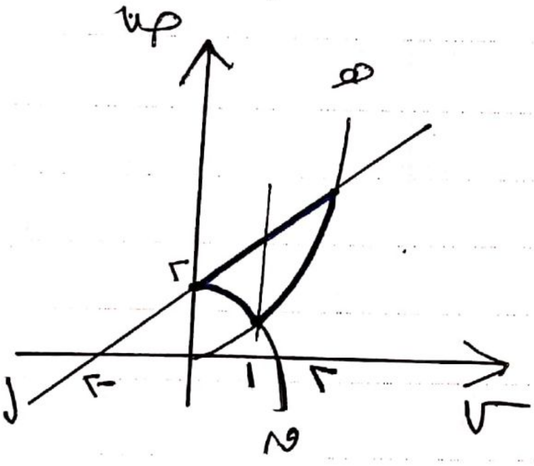
٥) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

$\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \text{س}^٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^٢$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س} + ٢$

الحل:

التقاطع:

هـ = ل	ق = ل	ق = هـ
$\text{س}^٢ = \text{س} + ٢$	$٢ - \text{س}^٢ = \text{س} + ٢$	$٢ - \text{س}^٢ = \text{س}^٢$
$\text{س}^٢ - \text{س} - ٢ = ٠$	$\text{س}^٢ + \text{س} = ٠$	$٢\text{س}^٢ = ٢$
$(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$	$\text{س}(\text{س} + ١) = ٠$	$\text{س}^٢ = ١$
$\text{س} = ٢ ، -١$	$\text{س} = ٠ ، -١$	$\text{س} = ١ ، -١$



$$\text{م} = \int_{٠}^{١} (\text{ل} - \text{ق})\, \text{دس} + \int_{١}^{٢} (\text{ل} - \text{هـ})\, \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{١} (\text{س} + \cancel{٢} - \cancel{٢} + \text{س}^٢)\, \text{دس} + \int_{١}^{٢} (\text{س} + ٢ - \text{س}^٢)\, \text{دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}\right) + \left(٢ + ٤ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(\frac{١}{٢} + ٢ - \frac{١}{٣}\right)$$

$= ٢$ وحدة مربعة

المحل الهندسي

١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص) التي تتحرك على بعد بين متساويين من المستقيمين ص = س + ١ ، ص = ١ − س

الحل :-

بعد ن(س،ص) عن ص − س − ١ = ٠ ، تساوي بعد ن(س،ص) عن ص + س − ١ = ٠

$$\frac{|ص - س - ١|}{\sqrt{١+١}} = \frac{|ص + س - ١|}{\sqrt{١+١}}$$

$$|ص - س - ١| = |ص + س - ١|$$

حالة(١) ← ص − س − ١ = ص + س − ١ نرتب

٢س = ٠ ← س = ٠ ، خط مستقيم

حالة(٢) ← ص − س − ١ = −(ص + س − ١) = −ص − س + ١ نرتب

٢ص = ٢ ← ص = ١ خط مستقيم.

٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) والتي يكون بعدها عن النقطة (٣،١) مساوياً لبعدها عن المستقيم س = −١

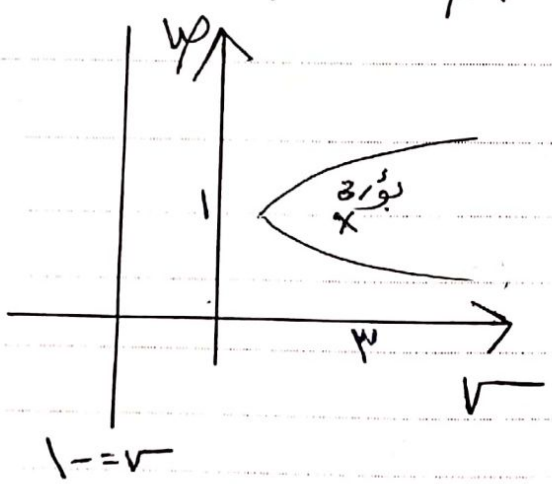
الحل :- المحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته (٣،١)

ودليله س = −١

٢ج = ٣ + ١ = ٤

$\boxed{ج = ٢}$

الرأس (١،١)



معادلة ← $(ص - هـ)^٢ = ٤ج(س - د)$

$(ص - ١)^٢ = ٨(س - ١)$

٣) تتحرك نقطة و(س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين (٣،٨)،(٣،٤) يساوي ٦ اجب عما يلي:

أ) ما نوع القطع المخروطي الذي يمثله المحل الهندسي

ب) اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة.

الحل:

أ) المحل الهندسي هو قطع زائد صادي بؤرتاه (٣،٨)،(٣،-٤) وطول محوره القاطع (٦).

ب) المركز $\left(\frac{٣+٣}{٢} ، \frac{٨-٤}{٢}\right) = (٣،٢)$

$٢جـ = ٨ + ٤ = ١٢ \leftarrow \boxed{جـ = ٦}$

$٢أ = ٦ \leftarrow \boxed{أ = ٣}$

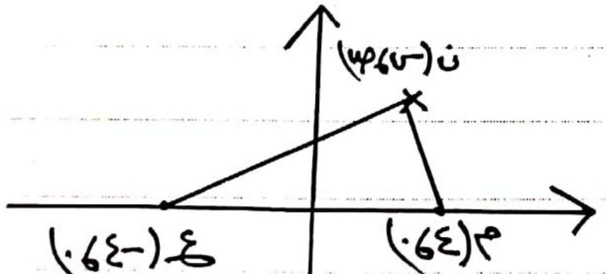
$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ٣٦ = ٩ + ب^2 \leftarrow ب^2 = ٢٧$

المعادلة ← $\frac{(ص-٢)^2}{٩} - \frac{(س-٣)^2}{٢٧} = ١$

---

٤) في الشكل المجاور اذا تحركت النقطة ن(س،ص) في المستوى بحيث يكون ن م + ن ع + م ع = ٢٨

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص)



الحل:

المحل الهندسي هو قطع ناقص بؤرتاه (٤،٠)،(-٤،٠) ومركزه (٠،٠)

$٢جـ = ٨ \leftarrow \boxed{جـ = ٤}$ لكن:

$\underbrace{ن م + ن ع}_{٢أ} + \underbrace{م ع}_{٢جـ} = ٢٨ \leftarrow ٢أ + ٢جـ = ٢٨$ لكن جـ = ٤

$٢أ + ٨ = ٢٨$

$٢أ = ٢٠ \leftarrow \boxed{أ = ١٠}$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow ١٦ = ١٠٠ - ب^2 \leftarrow ب^2 = ١٠٠ - ١٦ = ٨٤$

المعادلة ← $\frac{س^2}{١٠٠} + \frac{ص^2}{٨٤} = ١$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة و(س، ص) في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠، ٢) مساوياً ثلثي بعدها عن المستقيم ٢ص = ٩، ثم بيّن نوعه.

الحل :- بعد و(س، ص) عن (٠، ٢) = $\frac{٢}{٣}$ × بعد و(س، ص) عن ٢ص − ٩ = ٠

$\sqrt{س^٢ + (ص-٢)^٢} = \frac{٢}{٣} \times \frac{|٢ص - ٩|}{\sqrt{٠ + ٤}}$ نربع

$س^٢ + (ص-٢)^٢ = \frac{١}{٩}(٤ص^٢ - ٣٦ص + ٨١)$

$س^٢ + ص^٢ \cancel{- ٤ص} + ٤ = \frac{٤}{٩}ص^٢ \cancel{- ٤ص} + ٩$ نرتب

$س^٢ + ص^٢ - \frac{٤}{٩}ص^٢ = ٩ - ٤$

$س^٢ + \frac{٥}{٩}ص^٢ = ٥ \longleftarrow \frac{س^٢}{٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ (قطع ناقص)

٦) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س، ص) في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره وحدتين عن المستقيم ٦ص = ٨س + ٤ وتمر أثناء حركتها بالنقطة ($\frac{١}{٢}$، −٢)

الحل :-

بعد (ن) عن المستقيم ٦ص − ٨س − ٤ = ٠ يساوي (٢)

$\frac{|٦ص - ٨س - ٤|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = ٢$ تبادلياً

$|٦ص - ٨س - ٤| = ٢٠$

$٦ص - ٨س - ٤ = ٢٠ \longleftarrow ٦ص - ٨س = ٢٤$ ——— (١)

أو $٦ص - ٨س - ٤ = -٢٠ \longleftarrow ٦ص - ٨س = -١٦$ ——— (٢)

نفحص النقطة ($\frac{١}{٢}$، −٢) :-

$٦ \times -٢ - ٨ \times \frac{١}{٢} \stackrel{?}{=} ٢٤$ (لا تحقق) المعادلة (١)

$٦ \times -٢ - ٨ \times \frac{١}{٢} \stackrel{?}{=} -١٦$ (تحقق) المعادلة (٢)

∴ معادلة المحل الهندسي ٦ص − ٨س = −١٦ وهو مستقيم يوازي المستقيم ٦ص = ٨س + ٤

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٧) تتحرك نقطة و(س، ص) في المستوى بحيث س = ٣ + ٢ جاهـ ، ص = ٤ + ٢ جتاهـ جد معادلة المحل الهندسي للنقطة (و) وبين نوعه

الحل :-

س = ٣ + ٢ جاهـ نرتب

$\frac{س - ٣}{٢}$ = جاهـ نربع ← $\frac{(س - ٣)^2}{٤}$ = جا^{2}هـ —— (١)

ص = ٤ + ٢ جتاهـ نرتب

$\frac{ص - ٤}{٢}$ = جتاهـ نربع ← $\frac{(ص - ٤)^2}{٤}$ = جتا^{2}هـ —— (٢)

بجمع (١) + (٢) :-

$\frac{(س - ٣)^2}{٤} + \frac{(ص - ٤)^2}{٤} = ١$ دائرة

---

٨) تتحرك نقطة و(س، ص) في المستوى بحيث س = ظاهـ + ظتاهـ ، ص = ظتا٢هـ جد معادلة مسار النقطة (و) ثم بيّن نوع هذا المسار.

الحل :- س = $\frac{جاهـ}{جتاهـ} + \frac{جتاهـ}{جاهـ} = \frac{جا^2هـ + جتا^2هـ}{جاهـ جتاهـ} = \frac{١}{\frac{١}{٢} جا٢هـ}$

س = ٢ قتا٢هـ ← قتا٢هـ = $\frac{س}{٢}$

ص = ظتا٢هـ نربع

ص^2 = ظتا^{2}٢هـ

ص^2 = قتا^{2}٢هـ − ١ لكن قتا٢هـ = $\frac{س}{٢}$

ص^2 = $\frac{س^2}{٤}$ − ١

$\frac{س^2}{٤}$ − ص^2 = ١ (زائد)

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٩) تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين ص = ن + $\frac{٢}{ن}$ ، س = ٢(ن − $\frac{٢}{ن}$) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س، ص) وبين نوعه.

الحل :-

$$س = ٢\left(ن - \frac{٢}{ن}\right)$$

$$\frac{س}{٢} = \left(ن - \frac{٢}{ن}\right)$$ نربع

$$\frac{س^٢}{٤} = ن^٢ - ٤ + \frac{٤}{ن^٢} \quad —— \ (1)$$

$$ص = ن + \frac{٢}{ن}$$ نربع

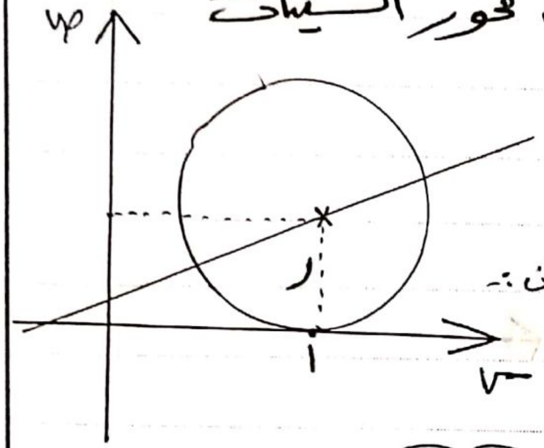
$$ص^٢ = ن^٢ + ٤ + \frac{٤}{ن^٢} \longrightarrow ن^٢ + \frac{٤}{ن^٢} = ص^٢ - ٤$$ نعوضها في (1)

$$\frac{س^٢}{٤} = ص^٢ - ٤ - ٤$$

$$ص^٢ - \frac{س^٢}{٤} = ٨$$

$$\frac{ص^٢}{٨} - \frac{س^٢}{٣٢} = ١$$ زائد صادي

١) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته $\text{ص} - ٢\text{س} = ٤$ وتمس محور السينات عند $(١ ، ٠)$



الحل :- الدائرة تمس محور السينات

عند $(١ ، ٠)$ ← المركز $(١ ، \text{هـ})$ ، $\text{نق} = |\text{هـ}|$

المركز $(١ ، \text{هـ})$ يقع على المستقيم $\text{ص} - ٢\text{س} = ٤$ فان :-

$\text{هـ} - ٢ = ٤ \leftarrow \text{هـ} = ٦ \leftarrow \text{نق} = ٦$

$(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$

$(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} - ٦)^{٢} = ٣٦$

رافت صافي

٢) جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :-

$-٤\text{س}^{٢} - ٤\text{ص}^{٢} + ١٦\text{ص} - ٢٤\text{س} - ٤ = ٠$ نقسم على -٤

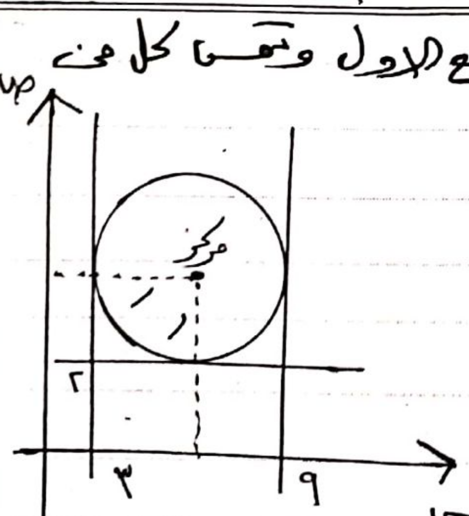
الحل :- $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\text{ص} + ٦\text{س} + ١ = ٠$

المركز $(\text{د} ، \text{هـ}) = \left(\frac{-\text{أ}}{٢} ، \frac{-\text{ب}}{٢}\right) = \left(\frac{-٦}{٢} ، \frac{٤}{٢}\right) = (-٣ ، ٢)$

$(٠ ، -\text{ك}) = (-٣ ، ٢)$

$\text{نق} = \sqrt{\text{د}^{٢} + \text{هـ}^{٢} - \text{جـ}} = \sqrt{٩ + ٤ - ١} = \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$

٣) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في الربع الاول وتمس كل من المستقيمات $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ٢$ ، $\text{س} = ٩$



الحل :-

تمس $\text{س} = ٣$ ، $\text{س} = ٩$ فان :-

$\text{نق} = \frac{٩ - ٣}{٢} = ٣$ ، $\text{د} = \frac{٩ + ٣}{٢} = ٦$

تمس $\text{ص} = ٢$ فان $\text{هـ} = ٢ + \text{نق} = ٢ + ٣ = ٥$

∴ المركز $(٦ ، ٥)$ ، $\text{نق} = ٣$

$(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$

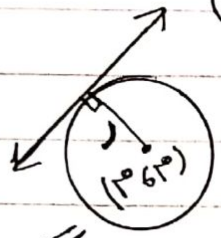
$(\text{س} - ٦)^{٢} + (\text{ص} - ٥)^{٢} = ٩$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤) جد معادلة الدائرة التي طول قطرها ١٤ وحدة ومركزها (م،م) وتمس المستقيم الذي معادلته $٣س+٤ص=٠$ ، $م>٠$

الحل: $ر = ٧$

المسافة بين المركز والمستقيم هو (ر)



رسم توضيحي

$$ر = \frac{|٣م+٤م|}{\sqrt{٩+١٦}} = ٧$$

$|٣م+٤م| = ٧\times٥$

$|٧م| = ٣٥$

$٧م = ٣٥$ أو $٧م = -٣٥$

$م = ٥$ ، $م = -٥ < ٠$ مرفوضة

المركز (٥،٥)

المعادلة $(س-د)^2+(ص-هـ)^2 = ر^2 \leftarrow (س-٥)^2+(ص-٥)^2 = ٤٩$

---

٥) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم $س = ٥$ وتمر بـ (٨،٠)، (٨،٨)

الحل: المركز $(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢})$ يقع على المستقيم $س = ٥$ فإن

$\frac{-أ}{٢} = ٥ \leftarrow أ = -١٠$

$س^2+ص^2-١٠س+ب ص+هـ = ٠$

عند (٨،٠) $\leftarrow ٦٤+٠-٨٠+٠+هـ = ٠$

$\leftarrow هـ = ١٦$

عند (٨،٨) $\leftarrow ٦٤+٦٤-٨٠+٨ب+١٦ = ٠$

$٦٤+٨ب = ٠$

$ب = -٨$

المعادلة: $س^2+ص^2-١٠س-٨ص+١٦ = ٠$

6) دائرة معادلتها $2س^2 + 2ص^2 - 12س + 4ك ص - 46 = 0$
نصف قطرها 6 ويقع مركزها في الربع الرابع
جد احداثيي مركز الدائرة.

الحل :- $2س^2 + 2ص^2 - 12س + 4ك ص - 46 = 0 \quad /2$

$س^2 + ص^2 - 6س + 2ك ص - 23 = 0$

المركز $(د ، هـ) = \left(\frac{-أ}{2} ، \frac{-ب}{2}\right) = \left(\frac{6}{2} ، \frac{-2ك}{2}\right) = (3 ، -ك)$

$نق = \sqrt{د^2 + هـ^2 - جـ}$

$6 = \sqrt{9 + ك^2 + 23} = \sqrt{ك^2 + 32}$ نربع

$36 = ك^2 + 32 \leftarrow ك^2 = 4 \leftarrow ك = 2 ، -2$

بما ان المركز في الربع الرابع $\leftarrow ك = 2 \leftarrow$ المركز $(3 ، -2)$

---

7) جد معادلة الدائرة التي تمر بـ $(1 ، 0)$، $(7 ، 0)$، $(4 ، 1)$.

الحل :-

$س^2 + ص^2 + أس + ب ص + جـ = 0$

عند $(1 ، 0) \leftarrow 1 + 0 + أ + 0 + جـ = 0$

$\leftarrow أ + جـ = -1$ ——— (1)

عند $(7 ، 0) \leftarrow 49 + 0 + 7أ + 0 + جـ = 0$

$7أ + جـ = -49$ ——— (2)

عند $(4 ، 1) \leftarrow 16 + 1 + 4أ + ب + جـ = 0$

$4أ + ب + جـ = -17$ ——— (3)

بحل المعادلات ينتج $أ = -8$ ، $ب = -8$ ، $جـ = 7$

$س^2 + ص^2 - 8س - 8ص + 7 = 0$

٨) جد معادلة دائرة طول نصف قطرها $2\sqrt{2}$ وتمر بـ (٢،٤) وتمس المستقيم الذي معادلته س − ص − ٢ = ٠ :

الحل: بعد المركز (د، هـ) عن المستقيم س − ص − ٢ = ٠ هو (ر):

$$2\sqrt{2} = \frac{|د - هـ - 2|}{\sqrt{1+1}} \leftarrow |د - هـ - 2| = 4$$

وعليه: د − هـ − ٢ = −٤ أو د − هـ − ٢ = ٤

حالة (١): د − هـ = −٢

د = هـ − ٢

$(س - (هـ - 2))^2 + (ص - هـ)^2 = 8$ عند (٢،٤)

$(2 - هـ + 2)^2 + (4 - هـ)^2 = 8 \leftarrow (4 - هـ)^2 + (4 - هـ)^2 = 8$

$2(4 - هـ)^2 = 8 \leftarrow (4 - هـ)^2 = 4$ جذر الطرفين

٤ − هـ = ٢ ← هـ = ٢ وعليه د = هـ − ٢ = ٠ ← المركز (٠،٢)

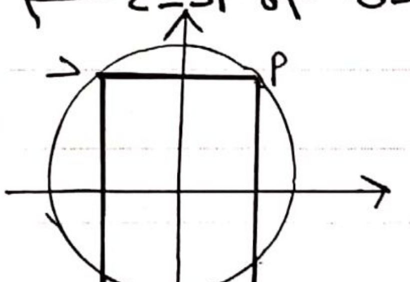
أو ٤ − هـ = −٢ ← هـ = ٦ وعليه د = هـ − ٢ = ٤ ← المركز (٤،٦)

المعادلة ← عند (٠،٢) ← $س^2 + (ص - 2)^2 = 8$

عند (٤،٦) ← $(س - 4)^2 + (ص - 6)^2 = 8$

حالة (٢) ينتج منها معادلة لا حل

٩) معتمداً الشكل المجاور والذي فيه دائرة مركزها نقطة الأصل والمستطيل أ ب جـ د فيه أب = ٥ سم، أد = ٤ سم جد معادلة الدائرة:

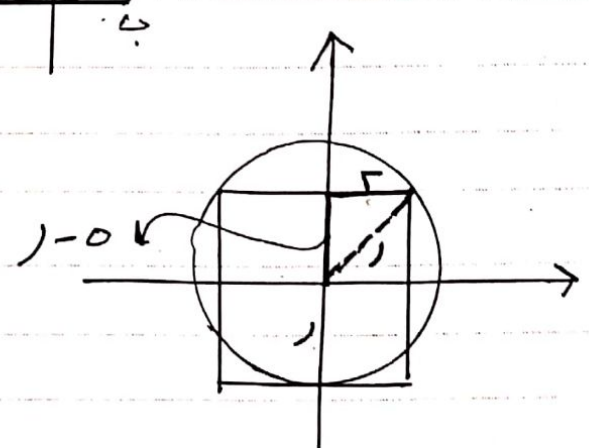


رافت صافي

الحل:

المركز (٠،٠)

نستخدم نظرية فيثاغورس:



$ر^2 = 4 + (5 - ر)^2$

$ر^2 = 4 + 25 - 10ر + ر^2$

$10ر = 29$

$ر = \frac{29}{10}$

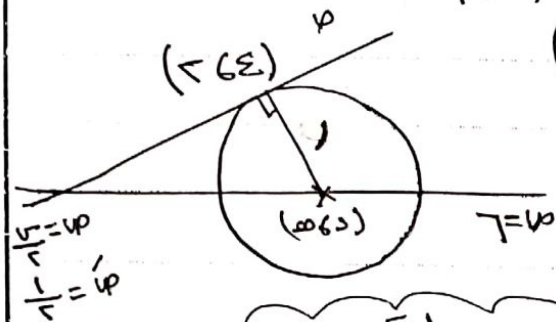
المعادلة:

$س^2 + ص^2 = \left(\frac{29}{10}\right)^2$

١٠) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٦ وتمس المستقيم الذي معادلته س − ٢ص = ٠ عند النقطة (٤، ٢)

الحل: المركز (د، هـ) يقع على المستقيم ص = ٦

∴ هـ = ٦ وعليه المركز (د، ٦)



نصف القطر ⊥ المماس عند (٤، ٢)

$\frac{٦-٢}{د-٤} \times \frac{١}{٢} = -١ \longleftarrow \boxed{د = ٢}$

المركز (٢، ٦)

نق: بعد المركز (٢، ٦) عن (٤، ٢)

$نق = \sqrt{(٤-٢)^٢ + (٢-٦)^٢} = \sqrt{٢٠}$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٢٠$

حل آخر:
ميل الدائرة = ميل (س − ٢ص = ٠) عند (٤، ٢)
ومنه نجد (د)

---

١١) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = س + ٤ وتمس المستقيم الذي معادلته ص = س عند (٤، ٤)

الحل:

المركز (د، هـ) يقع على المستقيم ص = س + ٤ ⟵ هـ = د + ٤

معادلة الدائرة $(س - د)^٢ + (ص - د - ٤)^٢ = نق^٢$ نجد ميلها

$٢(س - د) + ٢(ص - د - ٤)\,ص' = ٠$

$ص' = \frac{-(س - د)}{ص - د - ٤}$ ، ميل المستقيم ص = س ⟵ ص' = ١

ميل الدائرة = ميل المستقيم ص = س عند (٤، ٤)

$\frac{-(٤ - د)}{٤ - د - ٤} = ١ \longleftarrow \boxed{د = ٢}$ ∴ المركز (٢، ٦)

نق: بعد المركز (٢، ٦) عن (٤، ٤)

$نق = \sqrt{(٤-٢)^٢ + (٤-٦)^٢} = \sqrt{٨}$

المعادلة: $(س - ٢)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٨$

١٢) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم س = -١ وتمر بالنقطة (٥، ٢) ويقع مركزها على المستقيم ص = س وطول نصف قطرها أقل من ٤ وحدات.

الحل: المركز (د، هـ) يقع على المستقيم ص = س ← هـ = د

∴ المركز (د، د)

تمس س = -١ ← د = -١ + نق ← نق = د + ١

(س - د)^٢ + (ص - د)^٢ = (د + ١)^٢ تمر بـ (٥، ٢)

(٥ - د)^٢ + (٢ - د)^٢ = (د + ١)^٢

٢٥ - ١٠د + د^٢ + ٤ - ٤د + $\cancel{د^٢}$ = $\cancel{د^٢}$ + ٢د + ١ نرتب

د^٢ - ١٦د + ٢٨ = ٠

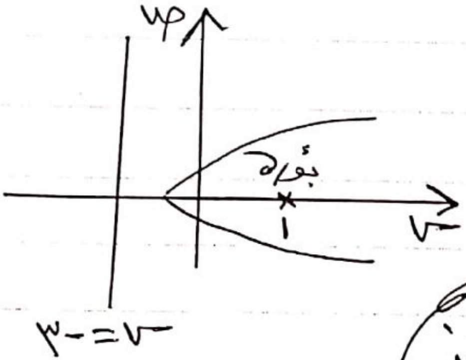
(د - ٢)(د - ١٤) = ٠ ← د = ٢ ← نق = ٣ / د = ١٤ ← نق = ١٥ مرفوض

المعادلة:

(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩

رافت صافي

١) جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (١،٠) ومعادلة دليله س = -٣



الحل :-

٢ج = ١ - -٣ = ٤ (بعد بؤرة عن دليل)

ج = ٢

من الرسم ← الرأس (-١،٠)

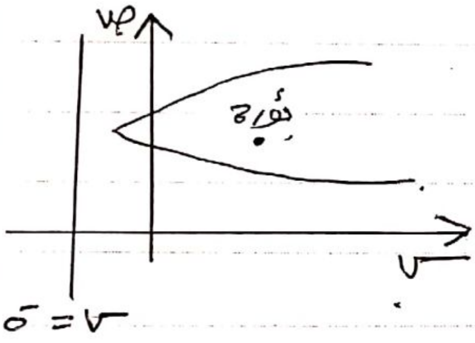
(ص - هـ)^٢ = ٤ج (س - د)

ص^٢ = ٨ (س + ١)

رافت صافي

---

٢) جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢،٢) ودليله س = -٥



الحل :-

٢ج = ٢ - -٥ = ٧ (بعد بؤرة عن دليل)

ج = $\frac{٧}{٢}$

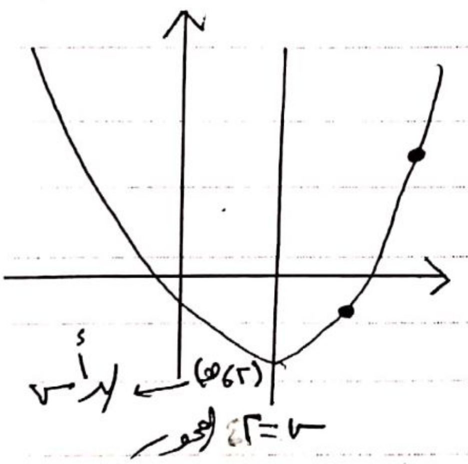
من الرسم ← الرأس (٢ - $\frac{٧}{٢}$ ، ٢) = ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٢)

(ص - هـ)^٢ = ٤ج (س - د)

(ص - ٢)^٢ = ١٤ (س + $\frac{٣}{٢}$)

---

٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بـ (٨،٦)، (٤،-٢) ومحوره المستقيم الذي معادلته س = ٢



الحل :-

حسب معادلة المحور ← التربيع لـ (س).

وحسب اتجاه النقطتان ← مفتوح لأعلى.

(س - ٢)^٢ = ٤ج (ص - هـ)

عند (٨،٦) ← ٣٦ = ٤ج (٦ - هـ) ―― ١

عند (٤،-٢) ← ٤ = ٤ج (-٢ - هـ) ―― ٢

بالقسمة ← $\frac{٣٦}{٤}$ = $\frac{\cancel{٤ج}(٦ - هـ)}{\cancel{٤ج}(-٢ - هـ)}$

٩ = $\frac{٦ - هـ}{-٢ - هـ}$ ← ٦ - هـ = -١٨ - ٩هـ ← هـ = -٣ نعوضها في ٢ :-

٤ = ٤ج (-٢ + ٣) ← ج = ١

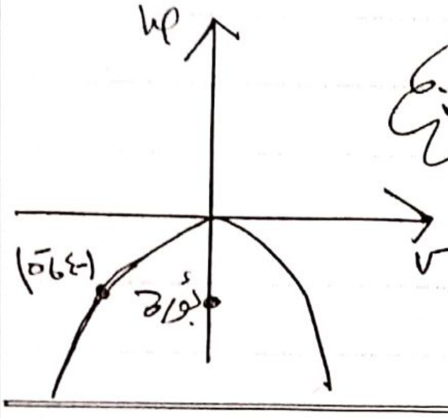
(س - ٢)^٢ = ٤ (ص + ٣)

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤) قطع مكافئ رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر منحناه بالنقطة (-٤، -٥) جد:-

أ) احداثي بؤرته

ب) معادلة دليله



اختصار الخطوات

الحل:-

س² = -٤جـ ص يمر بـ (-٤، -٥)

١٦ = ٢٠جـ ← جـ = ٤/٥

البؤرة (٠، -٤/٥) ، الدليل ص = ٤/٥

---

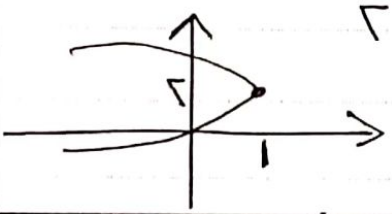
٥) قطع مكافئ معادلته ص² - ٤ص + ٨س - ٤ = ٠ جد :-

أ) احداثي الرأس ب) احداثي البؤرة جـ) معادلة المحور د) معادلة الدليل

الحل:- ص² - ٤ص = -٨س + ٤ نضيف (٤)

ص² - ٤ص + ٤ = -٨س + ٨

(ص - ٢)² = -٨(س - ١) ، ٤جـ = ٨ ← جـ = ٢



الرأس (١، ٢) ، البؤرة (-١، ٢)

المحور ص = ٢ ، الدليل س = ٣

---

٦) جد احداثي الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع المخروطي

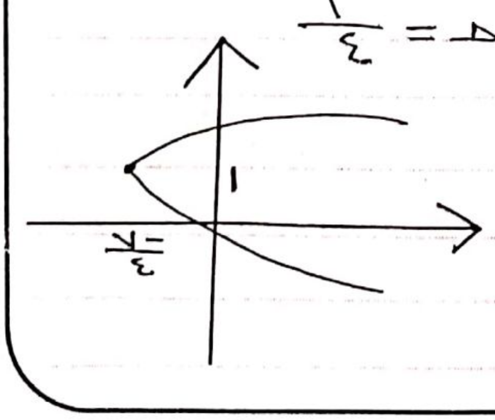
٤ص² - ٤س = ٨ص + ٣

الحل: ٤ص² - ٨ص = ٤س + ٣ نقسم على (٤)

ص² - ٢ص = س + ٣/٤ نضيف (١)

ص² - ٢ص + ١ = س + ٧/٤

(ص - ١)² = ١(س + ٧/٤) ٤جـ = ١ ← جـ = ١/٤



الرأس (-٧/٤، ١)

البؤرة (-٧/٤ + ١/٤، ١) = (-٣/٢، ١)

الدليل س = -٧/٤ - ١/٤ = -٢

المحور ص = ١

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٧) قطع مكافئ معادلته $ص = -\frac{1}{2} - س - \frac{1}{2}س^2$ جد

أ) احداثيات البؤرة والرأس   ب) معادلة الدليل

الحل :-

$\frac{1}{2}س^2 + س = -ص + \frac{1}{2}$ × ٢

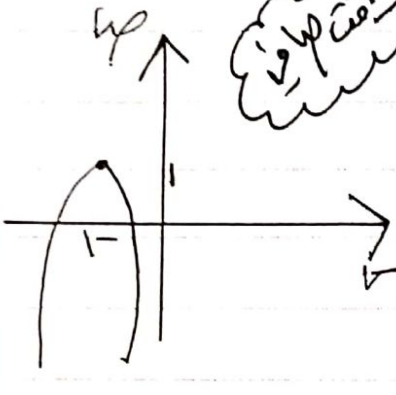
$س^2 + ٢س = -٢ص + ١$ نضيف (١)

$س^2 + ٢س + ١ = -٢ص + ٢$

$(س+١)^2 = -٢(ص-١) \leftarrow ٤أ = ٢ \leftarrow أ = \frac{1}{2}$

الرأس (-١، ١)، البؤرة $(-١، ١ - \frac{1}{2}) = (-١، \frac{1}{2})$

الدليل $ص = ١ + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



٨) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $ص = \frac{1}{4}س^2 + س + ٣$ وتمس دليله

الحل :- نجهز المعطيات وذلك بايجاد بؤرة ودليل القطع :-

$\frac{1}{4}س^2 + س = ص - ٣$ نضرب في (٤)

$س^2 + ٤س = ٤ص - ١٢$ نضيف (٤)

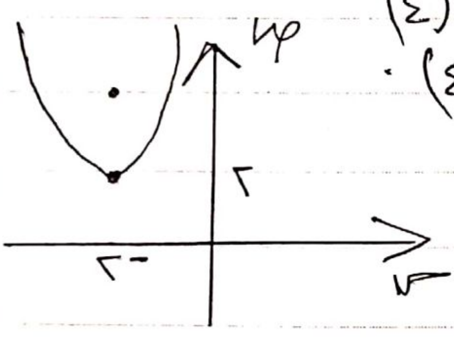
$س^2 + ٤س + ٤ = ٤ص - ٨$

$(س+٢)^2 = ٤(ص-٢)$

الرأس (-٢، ٢)، ٤أ = ٤ ← أ = ١

البؤرة (-٢، ٢+١) = (-٢، ٣)، الدليل ص = ٢ - ١ = ١

المطلوب :- معادلة دائرة مركزها (-٢، ٣) وتمس ص = ١

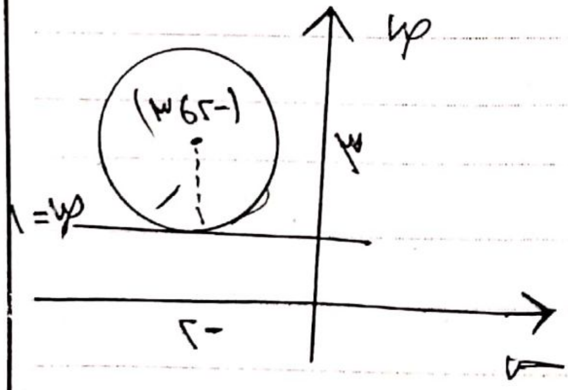


من الرسم نق = ٣ - ١ = ٢

المعادلة :-

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

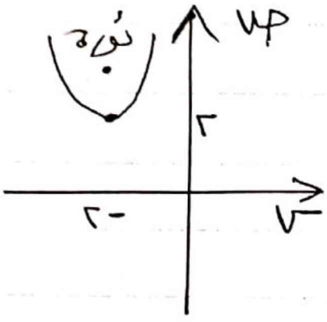
$(س+٢)^2 + (ص-٣)^2 = ٤$



رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٩) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٤،٢) ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته (س+٢)^2 = ١٢(ص−٢)

الحل :-



نجد بؤرة القطع :-

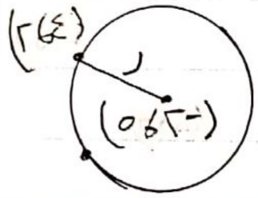
٤جـ = ١٢ ← جـ = ٣

الرأس (−٢،٢) ← البؤرة (−٢، ٢+٣) = (−٢،٥)

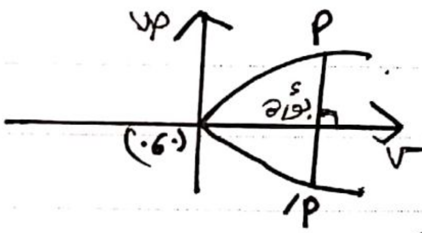
المطلوب :- معادلة دائرة تمر بـ (٤،٢) ومركزها (−٢،٥)

نق = $\sqrt{}$(٤+٢)^2 + (٢−٥)^2 = $\sqrt{}$٣٦+٩ = $\sqrt{}$٤٥

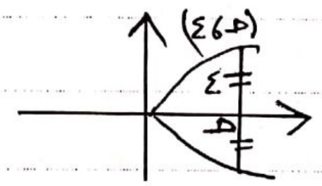
(س+٢)^2 + (ص−٥)^2 = ٤٥



١٠) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل قطعاً مكافئاً ، إذا علمت أن طول أأ' = ٨ جد معادلته.



الحل :



ص^2 = ٤جـ س

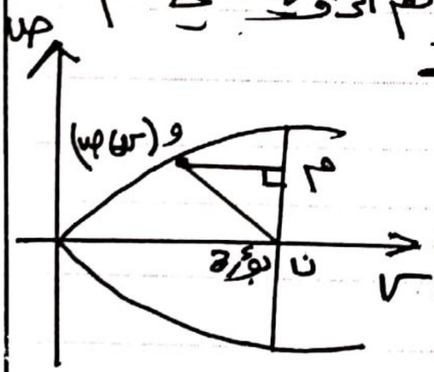
(جـ،٤) تقع على المنحنى

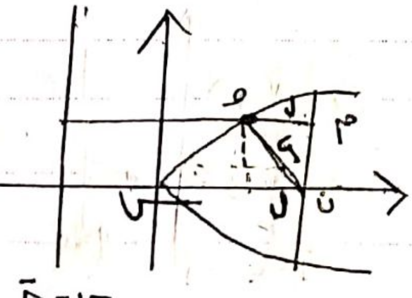
١٦ = ٤جـ^2 ← جـ^2 = ٤

← جـ = ٢

المعادلة :- ص^2 = ٨س

١١) يمثل الشكل المجاور قطعاً مكافئاً ، النقطة و(س،ص) تتحرك على منحنى القطع بحيث يبقى المثلث وم ن قائم الزاوية في م وكان م و + و ن = ٣ جد معادلته





الحل :- الرأس (٠،٠)

ص^2 = ٤جـ س نحتاج (جـ)

حسب تعريف القطع فإن بعد و عن ن مساوٍ لبعد (و) عن الدليل :-

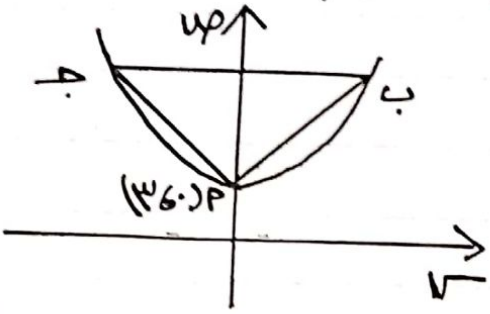
ل + س = ٢جـ

وم + ون = ٢جـ ← ٣ = ٢جـ ← جـ = $\frac{٣}{٢}$

المعادلة ص^2 = ٦س

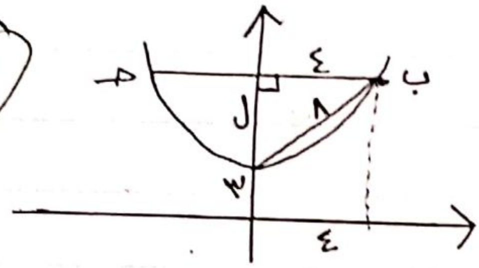
رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٢) معتمداً الشكل الآتي والذي يمثل قطعاً مكافئاً ، اذا علمت ان المثلث أ ب جـ متطابق الاضلاع طول ضلعه ٨ وحدات.
فيه الضلع ب جـ يوازي دليل القطع المكافئ.
جد معادلة هذا القطع



الحل :- الرأس (٠،٣)

س² = ٤جـ(ص-٣) نحتاج (جـ)



فيثاغورس :-

٦٤ = ١٦ + ل²

ل² = ٤٨ ← ل = √٤٨

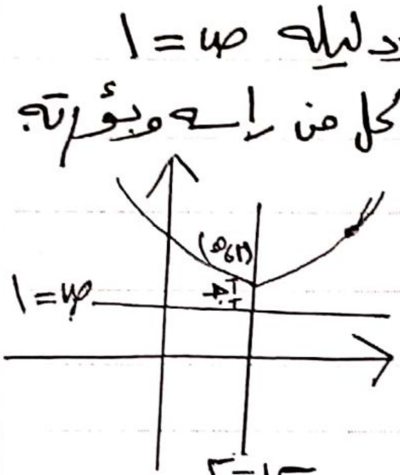
وعليه احداثي ب(٤، ٣+√٤٨)

وهي تقع على المنحنى :-

١٦ = ٤جـ(٣+√٤٨ - ٣) ← ١٦ = ٤√٤٨ جـ ← جـ = ٤/√٤٨

∴ معادلة س² = ١٦/√٤٨ (ص-٣)

١٣) قطع مكافئ محوره المستقيم س = ٢ ودليله ص = ١ ويمر بـ (٥،٦) جد معادلته واحداثيات كل من رأسه وبؤرته.



الحل :- حسب معادلة الدليل ← تربيع لـ(س)

ومفتوح للأعلى حسب اتجاه النقطة

الرأس(٢،هـ) ، جـ = هـ - ١ بعد الرأس عن الدليل

(س - د)² = ٤جـ(ص - هـ)

(س - ٢)² = ٤(هـ - ١)(ص - هـ) عند (٦،٥)

١٦ = ٤(هـ - ١)(٥ - هـ) نقسم على (٤)

٤ = ٥هـ - هـ² - ٥ + هـ نرتب

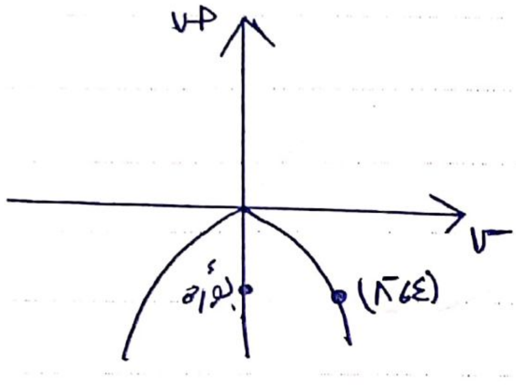
هـ² - ٦هـ + ٩ = ٠ ← (هـ - ٣)² = ٠ ← هـ = ٣ ← جـ = ٣ - ١ = ٢

معادلة :-

(س - ٢)² = ٨(ص - ٣)

∴ الرأس (٢،٣) ، البؤرة (٢،٣+٢) = (٢،٥)

١٤) قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة (٤، -٨) اذا كان احداثيا بؤرته $(٠، \frac{٣-أ}{٤})$ فما قيمة الثابت أ



الحل :- المعادلة $س^٢ = -٤جـ ص$

يمر بـ (٤، -٨)

$١٦ = -٤جـ \times -٨$

$جـ = \frac{١}{٢} \leftarrow$ البؤرة $(٠، \frac{-١}{٢})$

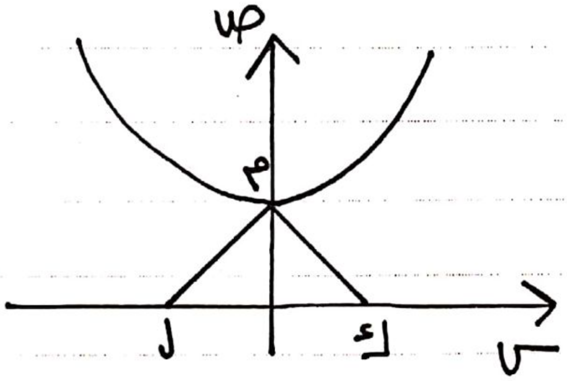
بالمقارنة :-

$\frac{٣-أ}{٤} = \frac{-١}{٢} \leftarrow ٦-٢أ = -٤ \leftarrow \boxed{أ = ٥}$

---

١٥) يمثل الشكل المجاور قطعاً مكافئاً رأسه النقطة م ودليله محور السينات، اذا علمت ان المثلث م ك ل متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤ وحدات

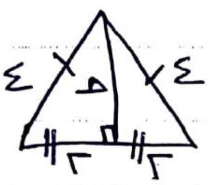
جد معادلة هذا القطع



الحل :-

الرأس (٠، هـ) $\leftarrow$ (٠، جـ)

بعد الدليل عن الرأس (جـ)



رافت صافي

نطبق فيثاغورس :-

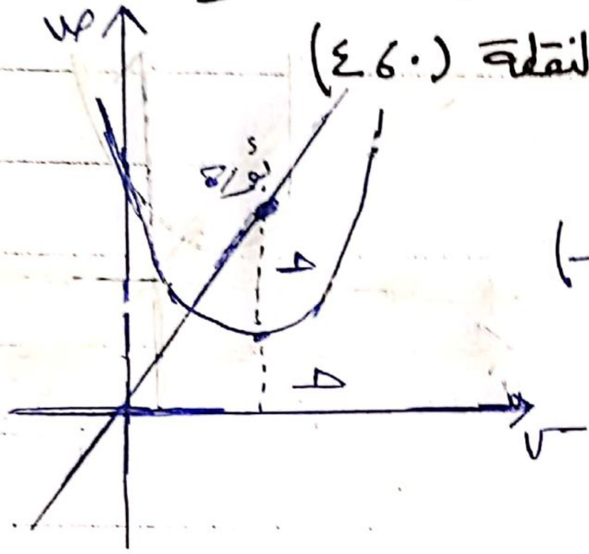
$١٦ = ٤ + جـ^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٢ \leftarrow جـ = \sqrt{١٢}$

∴ الرأس $(٠، \sqrt{١٢})$

المعادلة $س^٢ = ٤جـ(ص - هـ)$

$س^٢ = ٤\sqrt{١٢}(ص - \sqrt{١٢})$

١٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي تقع بؤرته على المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{1}{2}$ س ودليله محور السينات ويمر منحناه بالنقطة (٠، ٤)



الحل :-

الدليل محور السينات ← الرأس (د ، هـ)

البؤرة (د ، هـ + هـ) = (د ، ٢هـ)

تقع على ص = $\frac{1}{2}$ س

٢هـ = $\frac{1}{2}$ د ← د = ٤هـ

(س − د)^2 = ٤هـ (ص − هـ)

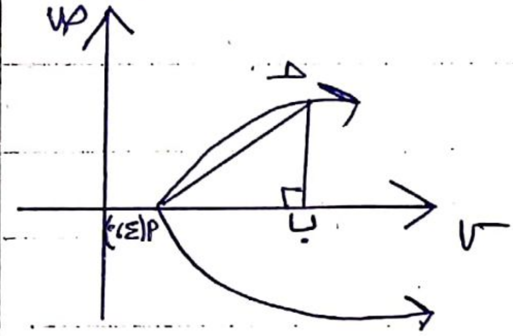
(س − ٤هـ)^2 = ٤هـ (ص − هـ) عند (٠، ٤)

١٦هـ^2 = ٤هـ (٤ − هـ) نقسم على ٤هـ

٤هـ = ٤ − هـ ← ٥هـ = ٤ ← هـ = $\frac{٤}{٥}$

(س − $\frac{١٦}{٥}$)^2 = $\frac{١٦}{٥}$ (ص − $\frac{٤}{٥}$)

١٧) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل قطعاً مكافئاً رأسه النقطة أ (٤،٠)، اذا علمت ان المثلث أ ب هـ قائم الزاوية في ب، وطول ضلعه أ هـ = ٦ سم وطول ضلعه أ ب = √١١ سم جد معادلة هذا القطع



الحل :-

الرأس (٤،٠)

(ص - هـ)² = ٤جـ (س - د)

ص² = ٤جـ (س - ٤)

نبحث عن نقطة تقع على المنحني :-

٣٦ = (هـ ب)² + ١١ ← فيثاغورس

(هـ ب)² = ٢٥

هـ ب = ٥ سم

وعليه احداثي هـ (٤ + √١١ ، ٥) نعوضها بالمعادلة

٢٥ = ٤جـ (٤ + √١١ - ٤)

٢٥ = ٤√١١ جـ ← جـ = ٢٥ / ٤√١١

ص² = ٤ × (٢٥ / ٤√١١) (س - ٤)

ص² = (٢٥ / √١١) (س - ٤)

رافت صباحي
٠٧٨٠٥٨٢٤٤٦٤

الدرس (٥)	القطع الناقص	القطوع المخروطية

١) جد احداثيات المركز والراسين والبؤرتين للقطع :-

$$٩س^{٢} + ٤ص^{٢} + ١٦ص = ١٨س + ١١$$

الحل :-

$$٩س^{٢} - ١٨س + ٤ص^{٢} + ١٦ص = ١١$$

$$٩(س^{٢} - ٢س) + ٤(ص^{٢} + ٤ص) = ١١$$

$$٩(س^{٢} - ٢س + ١) + ٤(ص^{٢} + ٤ص + ٤) = ١١ + ٩ + ١٦$$

$$٩(س - ١)^{٢} + ٤(ص + ٢)^{٢} = ٣٦$$

$$\frac{(س-١)^{٢}}{٤} + \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$$ عمودي

راجعت صحيح

المركز (١ ، −٢) ، $أ^{٢} = ٩ \leftarrow أ = ٣$ ، $ب^{٢} = ٤ \leftarrow ب = ٢$

$$ج^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ٩ - ٤ = ٥ \leftarrow ج = \sqrt{٥}$$

الراسين (١ ، −٢ ± ٣) = (١ ، ١) ، (١ ، −٥)

البؤرتين (١ ، −٢ ± $\sqrt{٥}$)

٢) جد احداثيات المركز والراسين والبؤرتين والاختلاف المركزي للقطع $(٦ - ٢ص)^{٢} + س^{٢} - ١٠س + ٩ = ٠$:-

الحل :- $(-٢(ص - ٣))^{٢} + س^{٢} - ١٠س = -٩$

$$٤(ص - ٣)^{٢} + س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = -٩ + ٢٥$$

$$٤(ص - ٣)^{٢} + (س - ٥)^{٢} = ١٦ \; / \; ١٦$$

$$\frac{(ص-٣)^{٢}}{٤} + \frac{(س-٥)^{٢}}{١٦} = ١$$

$أ^{٢} = ١٦ \leftarrow أ = ٤$

$ب^{٢} = ٤ \leftarrow ب = ٢$

$ج^{٢} = ١٢ \leftarrow ج = \sqrt{١٢}$

المركز (٥ ، ٣)

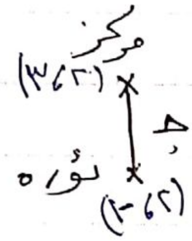
الراسين (٥ ± ٤ ، ٣) = (٩ ، ٣) ، (١ ، ٣)

البؤرتين (٥ ± $\sqrt{١٢}$ ، ٣)

$$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{١٢}}{٤} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

٣) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٢،٣) وإحدى بؤرتيه (٢،-١) وطول محوره الأصغر (٦).

الحل :



حسب اتجاه المركز بالنسبة للبؤرة (صادي)

جـ = ٣ - -١ = ٤ بعد مركز عن بؤرة

٢ب = ٦ ← ب = ٣

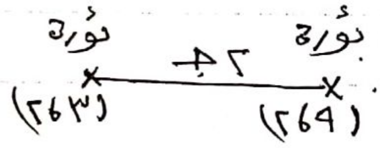
جـ² = أ² - ب²

١٦ = أ² - ٩ ← أ² = ٢٥

المعادلة ← (ص - ٣)²/٢٥ + (س - ٢)²/٩ = ١

---

٤) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢،٣)، (٢،٩) وطول محوره الأكبر ١٢



الحل : سيني وذلك حسب اتجاه البؤرتين

المركز ((٩+٣)/٢ ، (٢+٢)/٢) = (٦،٢)

٢جـ = ٩ - ٣ = ٦ ← جـ = ٣ ، ٢أ = ١٢ ← أ = ٦

جـ² = أ² - ب² ← ٩ = ٣٦ - ب² ← ب² = ٢٧

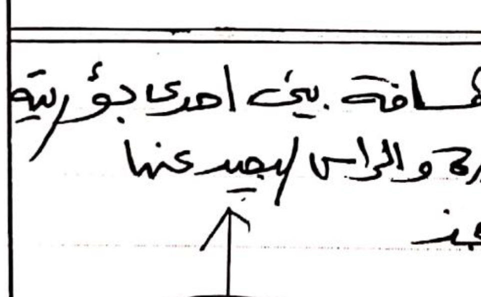
المعادلة ← (س - ٦)²/٣٦ + (ص - ٢)²/٢٧ = ١

---

٥) في القطع الناقص المجاور، إذا كانت ل المسافة بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها، م: المسافة بين البؤرة والرأس البعيد عنها وكانت ل/م = ١/٥ وطول المحور الأصغر ٤√٥ وحدة

أ) معادلته ب) احداثيات البؤرتين

جـ) احداثيات الرأسين د) الاختلاف المركزي



الحل : ٢ب = ٤√٥ ← ب = ٢√٥

ل/م = ١/٥ ← (أ - جـ)/(أ + جـ) = ١/٥ ← أ + جـ = ٥أ - ٥جـ نرتب ٤أ - ٦جـ = ٠ —— ①

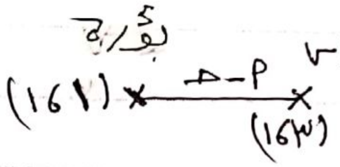
جـ² = أ² - ب² ← جـ² = أ² - ٢٠ —— ② بحل المعادلتان ينتج أ = ٦ ، جـ = ٤

أ) س²/٣٦ + ص²/٢٠ = ١   ب) (٤،٠)، (-٤،٠)   جـ) (٦،٠)، (-٦،٠)

د) هـ = جـ/أ = ٤/٦ = ٢/٣

٦) قطع ناقص اختلافه المركزي $\frac{٣}{٥}$ واحد رأسيه (٣،١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (١،١). جد معادلته.

الحل:-



حسب اتجاه الرأس والبؤرة ← سيني

أ - جـ = ٣ - ١ = ٢ (بعد الرأس عن البؤرة القريبة)

أ - جـ = ٢ ——— ①

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ← $\frac{٣}{٥} = \frac{جـ}{أ}$ ← ٣أ = ٥جـ ——— ②

بحل المعادلتان ينتج أ = ٥ ، جـ = ٣

جـ² = أ² - ب² ← ٩ = ٢٥ - ب² ← ب² = ٢٥ - ٩ = ١٦

المركز (١ - جـ ، ١) = (-٢ ، ١)

المعادلة $\frac{(س+٢)^2}{٢٥} + \frac{(ص-١)^2}{١٦} = ١$

---

٧) قطع ناقص معادلته $\frac{(س-٢)^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{٩} = ١$ جد معادلة الدائرة التي مركزها مركز هذا القطع وتمر ببؤرتيه.

الحل:-

رأفت صافي

نجد مركز وبؤرتاه القطع الناقص

المركز (٢،٠) ، أ² = ٢٥ ← أ = ٥

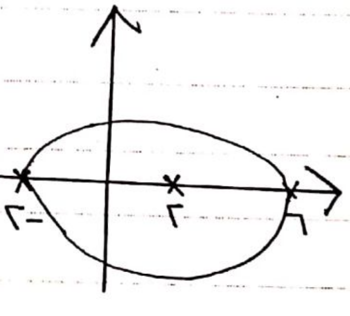
ب² = ٩ ← ب = ٣

جـ² = أ² - ب² = ٢٥ - ٩ = ١٦ ← جـ = ٤

البؤرتان (٢ ± ٤ ، ٠) = (٦،٠) ، (-٢،٠)

المطلوب:- معادلة دائرة مركزها (٢،٠) وتمر بـ (٦،٠) ، (-٢،٠)

نق = ٦ - ٢ = ٤

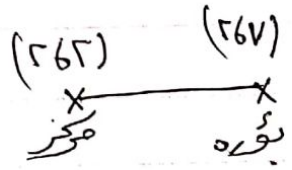


المعادلة ← (س-٢)² + ص² = ١٦

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٨) قطع مخروطي (ناقص) بعده البؤري ٤ أقل من البعد بين رأسيه مركزه (٢،٢) وإحدى بؤرتيه (٧،٢) ويمر منحناه بـ (٦،٥) جد معادلته.

الحل: ٢جـ < ٢أ ← جـ < أ (ناقص) سيني



جـ = ٧ − ٢ = ٥ (بعد مركز عن بؤرة)

نجعل معادلة القطع في متغير واحد:

جـ² = أ² − ب² ← ب² = أ² − ٢٥

المعادلة:

$$\frac{(\text{س}-٢)^٢}{\text{أ}^٢}+\frac{(\text{ص}-٢)^٢}{\text{ب}^٢}=١ \leftarrow \frac{(\text{س}-٢)^٢}{\text{أ}^٢}+\frac{(\text{ص}-٢)^٢}{\text{أ}^٢-٢٥}=١$$ يمر بـ (٦،٥)

$$\frac{٩}{\text{أ}^٢}+\frac{١٦}{\text{أ}^٢-٢٥}=١ \leftarrow \frac{٩\text{أ}^٢-٢٢٥+١٦\text{أ}^٢}{\text{أ}^٤-٢٥\text{أ}^٢}=١$$ تبادلياً

٢٥أ² − ٢٢٥ = أ⁴ − ٢٥أ² ترتيب:

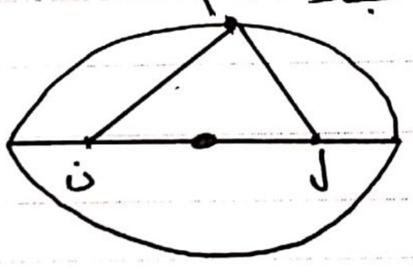
أ⁴ − ٥٠أ² + ٢٢٥ = ٠ ← (أ² − ٤٥)(أ² − ٥) = ٠

أ² = ٤٥ ، أ² = ٥ (مرفوض) لأن جـ < أ

ب² = أ² − ٢٥ = ٤٥ − ٢٥ = ٢٠

المعادلة ←
$$\frac{(\text{س}-٢)^٢}{٤٥}+\frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٢٠}=١$$

٩) الشكل المجاور يمثل منحنى قطع ناقص مركزه النقطة (١،١) وبؤرتاه النقطتان ل، ن واختلافه المركزي ٠٫٦ فإذا كان محيط المثلث م ل ن يساوي ٦٤ جد معادلة هذا القطع.



الحل: محيط المثلث = ٢أ + ٢جـ

٦٤ = ٢أ + ٢جـ ÷ ٢

أ + جـ = ٣٢ ——— ①

هـ = جـ/أ ← ٦/١٠ = جـ/أ ← ٦أ = ١٠جـ ——— ②

بحل المعادلتان أ = ٢٠ ، جـ = ١٢

جـ² = أ² − ب² ← ١٤٤ = ٤٠٠ − ب² ← ب² = ٢٥٦

المعادلة:
$$\frac{(\text{س}-١)^٢}{٤٠٠}+\frac{(\text{ص}-١)^٢}{٢٥٦}=١$$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

١٠) جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأصغر (٢) وبؤرتاه هما نقطتي تقاطع منحنى القطع المكافئ الذي معادلته $س^{٢} = ص$ مع منحنى القطع الناقص الذي معادلته $ص^{٢} = ١٥ - ٢س^{٢}$

الحل :-

نجهز المعطيات وذلك بإيجاد بؤرتي القطع الناقص :-

$س^{٢} = ص$ نعوضها في معادلة القطع الناقص :-

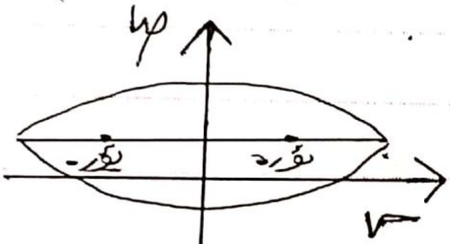
$ص^{٢} = ١٥ - ٢ص \leftarrow ص^{٢} + ٢ص - ١٥ = ٠$

$(ص + ٥)(ص - ٣) = ٠ \leftarrow ص = ٣$ ، $ص = -٥$ مرفوض لأنه $ص = س^{٢}$ (موجب)

عند $ص = ٣ \leftarrow س^{٢} = ٣ \leftarrow س = \sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$

البؤرتان $(\sqrt{٣} ، ٣)$ ، $(-\sqrt{٣} ، ٣)$

المطلوب : معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\sqrt{٣} ، ٣)$ ، $(-\sqrt{٣} ، ٣)$ وطول محوره الأصغر (٢)



المركز $\left(\frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{٢} ، \frac{٣ + ٣}{٢}\right) = (٠ ، ٣)$

$جـ = \sqrt{٣}$ ، $٢ب = ٢ \leftarrow \boxed{ب = ١}$

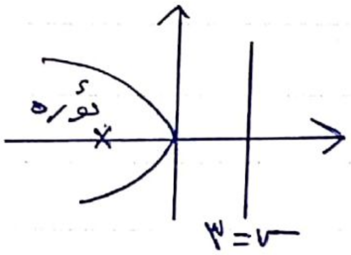
$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$٣ = أ^{٢} - ١ \leftarrow أ^{٢} = ٤$

المعادلة :- $\frac{س^{٢}}{٤} + (ص - ٣)^{٢} = ١$

١١) قطع ناقص مساحته ٢٠ π ، مركزه نقطة الأصل ، احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي يقع رأسه في نقطة الأصل ومعادلة دليله س = ٣ . جد معادلة هذا القطع الناقص.

الحل :-



نجد بؤرة القطع المكافئ :-

(-٣ ، ٠) وهي تمثل احدى بؤرتي الناقص

المطلوب :- معادلة قطع ناقص احدى بؤرتيه (-٣ ، ٠) ومركزه (٠ ، ٠)

جـ = ٣ بعد مركز عن بؤرة

المساحة = π أ ب = ٢٠ π ← أ ب = ٢٠ ——— ①

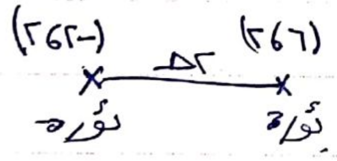
جـ² = أ² − ب² ← ٩ = أ² − ب² ——— ②

بحل المعادلتان أ = ٥ ، ب = ٤

المعادلة :- س²/٢٥ + ص²/١٦ = ١

---

١٢) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (-٢ ، ٢) ، (٦ ، ٢) ويمر بالنقطة (٢ ، ٦)



رافت صافي

الحل :-

المركز ((-٢+٦)/٢ ، (٢+٢)/٢) = (٢ ، ٢)

٢جـ = ٦ + ٢ = ٨ ← $\boxed{\text{جـ} = ٤}$

جـ² = أ² − ب²

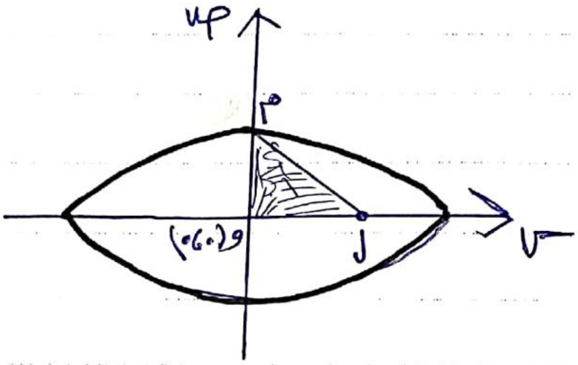
١٦ = أ² − ب² ← أ² = ١٦ + ب²

(س − ٢)²/(١٦ + ب²) + (ص − ٢)²/ب² = ١ يمر بـ (٢ ، ٦)

٠ + ١٦/ب² = ١ ← ب² = ١٦ ← أ² = ١٦ + ١٦ = ٣٢

(س − ٢)²/٣٢ + (ص − ٢)²/١٦ = ١

١٣) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل قطعاً ناقصاً بؤرته النقطة ل فاذا علمت ان مساحة المثلث ل و م تساوي (٦) والفرق بين طولي محوريه (٤) وحدات جد معادلته.



الحل :-

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times \text{جـ} \times \text{ب}$

$6 = \frac{1}{2} \times \text{جـ} \times \text{ب} \leftarrow \text{جـ ب} = 12 \leftarrow \text{جـ} = \frac{12}{\text{ب}}$

وكذلك :-

$2\text{أ} - 2\text{ب} = 4 \; / \; 2$

$\text{أ} - \text{ب} = 2 \leftarrow \text{أ} = \text{ب} + 2$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

$\left(\frac{12}{\text{ب}}\right)^2 = (\text{ب}+2)^2 - \text{ب}^2$

$\frac{144}{\text{ب}^2} = \cancel{\text{ب}^2} + 4\text{ب} + 4 - \cancel{\text{ب}^2}$ تبادلي $\leftarrow 4\text{ب}^3 + 4\text{ب}^2 = 144 \; / \; 4$

$\text{ب}^3 + \text{ب}^2 - 36 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 3}$

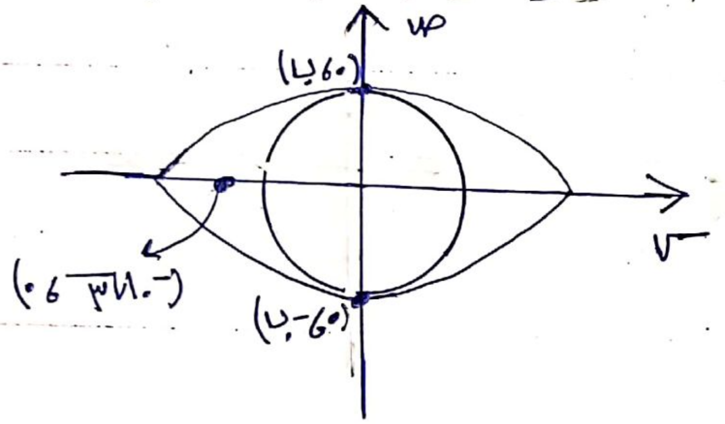
$\therefore \text{أ} = \text{ب} + 2 = 5$

المعادلة: $\frac{\text{س}^2}{25} + \frac{\text{ص}^2}{9} = 1$

١٤) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل دائرة وقطع ناقص مشتركين في المركز (٠،٠) اذا كانت النقطة (-١٠√٣ ، ٠) تمثل احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مساحته تساوي مثلي مساحة الدائرة المرسومة داخله، مجد كلاً مما يأتي :-

أ) معادلة الدائرة

ب) معادلة القطع الناقص



الحل :-

جـ = ١٠√٣

مساحة القطع = ٢ × مساحة الدائرة

~~π~~ أ ب = ٢ × ~~π~~ ب²

أ = ٢ ب

جـ² = أ² - ب²

٣٠٠ = ٤ب² - ب²

٣٠٠ = ٣ب²

ب² = ١٠٠ وعليه ٣٠٠ = أ² - ١٠٠ ← أ² = ٤٠٠

أ) س² + ص² = ١٠٠

ب) س²/٤٠٠ + ص²/١٠٠ = 1

١) جد معادلة قطع زائد مركزه (٢،-٢) واحدى بؤرتيه (٢،٣) وطول محوره القاطع يساوي (٨).

(٢،٣) بؤرة
(٢،-٢) مركز

الحل:

القطع صادي حسب اتجاه المركز بالنسبة للبؤرة

جـ = ٣ - -٢ = ٥ بعد مركز عن بؤرة

٢أ = ٨ ← أ = ٤

جـ² = أ² + ب² ← ٢٥ = ١٦ + ب² ← ب² = ٩

المعادلة ← $\frac{(\text{ص}+٢)^٢}{١٦} - \frac{(\text{س}-٢)^٢}{٩} = ١$

رافت صافي

---

٢) قطع زائد مركزه (٢،١) واحدى بؤرتيه (٢،-٢) وبعده البؤري ٣ أمثال طول محوره القاطع ، جد:

أ) معادلة القطع ب) احداثيات كل من الرأسين جـ) الاختلاف المركزي.

الحل:

مركز (٢،١) صادي
جـ
بؤرة (٢،-٢)

جـ = ١ - -٢ = ٣ (بعد مركز عن بؤرة)

$\cancel{٢}$جـ = ٣ × $\cancel{٢}$أ ← ٣ = ٣أ ← أ = ١

جـ² = أ² + ب² ← ٩ = ١ + ب² ⟸ ب² = ٨

المعادلة ← $(\text{ص}-١)^٢ - \frac{(\text{س}-٢)^٢}{٨} = ١$ ، الرأسين (٢،٢)،(٢،٠) ، هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ = ٣

---

٣) جد معادلة القطع المخروطي الذي رأساه (٢،١)،(٢،-٧) واختلافه المركزي ($\frac{٣}{٢}$).

الحل:

(٢،١)
٢أ
(٢،-٧)

هـ > ١ قطع زائد

حسب اتجاه الرأسان (صادي)

المركز ($\frac{٢+٢}{٢}$ ، $\frac{١-٧}{٢}$) = (٢،-٣)

٢أ = ١ - -٧ = ٨ (البعد بين الرأسين) ← $\boxed{\text{أ} = ٤}$

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ← $\frac{٣}{٢} = \frac{\text{جـ}}{٤}$ ← ٢جـ = ١٢ ← $\boxed{\text{جـ} = ٦}$

جـ² = أ² + ب² ← ٣٦ = ١٦ + ب² ← ب² = ٢٠

المعادلة: $\frac{(\text{ص}+٣)^٢}{١٦} - \frac{(\text{س}-٢)^٢}{٢٠} = ١$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٤) جد معادلة قطع مخروطي رأساه (٤،-٦)، (٤،٦) واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$

(٤،٦) رأس
٢أ
(٤،-٦) رأس

الحل :- هـ > ١ قطع زائد

حسب اتجاه الرأسان (صادي) ← المركز $\left(\frac{٤+٤}{٢} ، \frac{٦-٦}{٢}\right)$ = (٤،٠)

٢أ = ٦ + ٦ = ١٢ ← $\boxed{أ = ٦}$

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ← $\frac{٥}{٣} = \frac{جـ}{٦}$ ← ٣جـ = ٣٠ ← جـ = ١٠

جـ² = أ² + ب² ← ١٠٠ = ٣٦ + ب² ← ب² = ٦٤

انتبهوا

المعادلة ← $\frac{(ص-٠)^٢}{٣٦} - \frac{(س-٤)^٢}{٦٤} = ١$

---

٥) جد معادلة القطع المخروطي التي تتحرك النقطة ن(س،ص) على منحناه، بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين (٢،٢)، (١٠،٢) يساوي (٦).

الحل :- حسب تعريف القطع الزائد فان (٢،٢)، (١٠،٢) بؤرتاه وطول المحور القاطع (٦) وحسب اتجاه البؤرتان (سيني)

٢أ = ٦ ← $\boxed{أ = ٣}$ المركز $\left(\frac{٢+١٠}{٢} ، \frac{٢+٢}{٢}\right)$ = (٦،٢)

٢جـ = ١٠ - ٢ = ٨ ← $\boxed{جـ = ٤}$

جـ² = أ² + ب² ← ١٦ = ٩ + ب² ← ب² = ٧

المعادلة ← $\frac{(س-٦)^٢}{٩} - \frac{(ص-٢)^٢}{٧} = ١$

---

٦) قطع زائد معادلته ٧(ص-٣)² - ٩(س+١)² = ٦٣ جد

أ) احداثيات المركز ب) احداثيات البؤرتين جـ) احداثيي الرأسين د) الاختلاف المركزي

الحل :- ٧(ص-٣)² - ٩(س+١)² = ٦٣ / ٦٣ ← $\frac{(ص-٣)^٢}{٩} - \frac{(س+١)^٢}{٧} = ١$ صادي

أ² = ٩ ← أ = ٣ ، ب² = ٧ ← ب = $\sqrt{٧}$

جـ² = أ² + ب² = ٩ + ٧ = ١٦ ← جـ = ٤

أ) المركز (-١،٣)

ب) البؤرتين (-١، ٣±٤) = (-١،٧)، (-١،-١)

جـ) الرأسين (-١، ٣±٣) = (-١،٦)، (-١،٠)

د) هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٣}$

٧) قطع زائد معادلته ٤ص٢ − ٣س٢ + ٨ص + ١٦ = ٠ جد احداثي المركز واحداثي كل من البؤرتين وطول المحور المرافق

الحل :
٤ص٢ + ٨ص − ٣س٢ = −١٦
٤(ص٢ + ٢ص) − ٣س٢ = −١٦
٤(ص٢ + ٢ص + ١) − ٣س٢ = −١٦ + ٤ = −١٢
٤(ص + ١)٢ − ٣س٢ = −١٢ ← نقسم على −١٢ ← س٢ / ٤ − (ص + ١)٢ / ٣ = ١

أ٢ = ٤ ← أ = ٢ ، ب٢ = ٣ ← ب = √٣ ، جـ٢ = أ٢ + ب٢ = ٧ ← جـ = √٧
المركز (٠ ، −١)
البؤرتان (٠ ± √٧ ، −١) ← (√٧ ، −١) ، (−√٧ ، −١)
طول المحور المرافق ٢ب = ٢√٣

---

٨) قطع مخروطي معادلته ٩س٢ − ١٨س = ٤ص٢ + ٨ص + ٣١
جد :
أ) احداثيات كل من الرأسين
ب) احداثيات كل من البؤرتين
جـ) طول المحور القاطع ومعادلته
د) الاختلاف المركزي .

الحل :
٩س٢ − ١٨س − ٤ص٢ − ٨ص = ٣١
٩(س٢ − ٢س) − ٤(ص٢ + ٢ص) = ٣١
٩(س٢ − ٢س + ١) − ٤(ص٢ + ٢ص + ١) = ٣١ + ٩ − ٤
٩(س − ١)٢ − ٤(ص + ١)٢ = ٣٦
(س − ١)٢ / ٤ − (ص + ١)٢ / ٩ = ١ سيني ومركزه (١ ، −١)

أ٢ = ٤ ← أ = ٢ ، ب٢ = ٩ ← ب = ٣ ، جـ٢ = أ٢ + ب٢ = ١٣ ← جـ = √١٣

أ) الرأسين (١ ± ٢ ، −١) ← (٣ ، −١) ، (−١ ، −١)
ب) البؤرتين (١ ± √١٣ ، −١)
جـ) ٢أ = ٤ ومعادلته ص = −١
د) هـ = جـ / أ = √١٣ / ٢

رافت صافي

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

٩) جد احداثيات المركز والراسين والبؤرتان والاختلاف المركزي للقطع المخروطي الذي معادلته :-

ص² - ٩س² - ٨ص + ٣٦س - ٢٩ = ٠

الحل :- ص² - ٨ص - ٩س² + ٣٦س = ٢٩

ص² - ٨ص - ٩(س² - ٤س) = ٢٩

ص² - ٨ص + ١٦ - ٩(س² - ٤س + ٤) = ٢٩ + ١٦ - ٣٦

(ص - ٤)² - ٩(س - ٢)² = ٩ نقسم على (٩)

$$\frac{(\text{ص} - ٤)^2}{٩} - (\text{س} - ٢)^2 = ١$$ صادي

أ² = ٩ ← أ = ٣ ، ب² = ١ ← ب = ١ ، جـ² = أ² + ب² = ١٠ ← جـ = √١٠

المركز (٢،٤) ، الراسين (٢، ٤ ± ٣) = (٢،٧)،(٢،١)

البؤرتان (٢، ٤ ± √١٠) ، هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$

---

١٠) جد معادلة القطع الناقص الذي راساه تقعان على بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(\text{س} - ٢)^2}{١٦} - \frac{(\text{ص} - ٢)^2}{٩} = ١$ ويمر بـ(٢،٥)

الحل :- نجهز المعطيات من خلال ايجاد بؤرتي القطع الزائد :-

أ² = ١٦ ، ب² = ٩ ← جـ² = أ² + ب² = ١٦ + ٩ = ٢٥ ← جـ = ٥

البؤرتان (٢ ± ٥ ، ٢) = (٧،٢)،(-٣،٢)

المطلوب :- معادلة قطع ناقص راساه (٧،٢)،(-٣،٢) ويمر بـ(٢،٥)

المركز $\left(\frac{٧ - ٣}{٢} ، \frac{٢ + ٢}{٢}\right)$ = (٢،٢) سيني

٢أ = ٧ - -٣ = ١٠ ← أ = ٥

المعادلة ← $\frac{(\text{س} - ٢)^2}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^2}{\text{ب}^2} = ١$ يمر بـ(٢،٥)

$$٠ + \frac{٩}{\text{ب}^2} = ١ \leftarrow \text{ب}^2 = ٩$$

المعادلة ← $\frac{(\text{س} - ٢)^2}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^2}{٩} = ١$

١١) جد معادلة الدائرة التي تمر بمركز القطع الزائد الذي بؤرتيه (٣،-١) ، (-٧،-١) وتمر بـ (٤،٢) ويقع مركزها على محور الصادات.

الحل :-

نجهز المعطيات وذلك بإيجاد مركز القطع الزائد :-

م = ((٣-٧)/٢ ، (-١-١)/٢) = (-٢،-١)

المطلوب : معادلة دائرة تمر بـ (-٢،-١) ، (٤،٢) ومركزها على محور الصادات.

المركز على محور الصادات ← أ = ٠

معادلة س² + ص² + ب ص + ح = ٠

عند (-٢،-١) ← ٤ + ١ - ب + ح = ٠ ← ٥ - ب + ح = ٠ —— (١)

عند (٤،٢) ← ١٦ + ٤ + ٢ب + ح = ٠ ← ٢٠ + ٢ب + ح = ٠ —— (٢)

بحل المعادلتان فان ح = -١٠ ، ب = -٥

المعادلة ← س² + ص² - ٥ص - ١٠ = ٠

---

١٢) قطع مكافئ يقع رأسه على مركز القطع الزائد الذي معادلته ٩/٢ (س-١)² - ٨(ص-٢)² = ٧٢ وبؤرته (١،٣) جد :-

أ) معادلة هذا القطع ب) معادلة المحور ومعادلة الدليل.

الحل :-

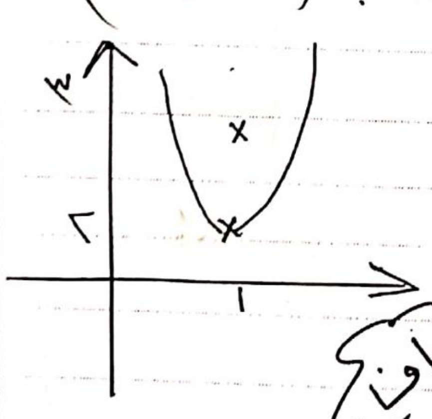
نجهز المعطيات وذلك بإيجاد مركز القطع ← (١،٢)

المطلوب : معادلة قطع مكافئ رأسه (١،٢) وبؤرته (١،٣)

ح = ٣ - ٢ = ١ بعد بؤرة عن رأسه

أ) المعادلة : (س-د)² = ٤ح(ص-هـ)

(س-١)² = ٤(ص-٢)



ب) معادلة المحور س = ١

معادلة الدليل ص = ١

١٣) جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{٤}+\frac{ص^2}{٩}=١$ وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع.

الحل: نجهز المعطيات من خلال ايجاد رأساه وبؤرتاه القطع الناقص

$\frac{س^2}{٤}+\frac{ص^2}{٩}=١$ صادي مركزه (٠،٠)

أ² = ٩ ← أ = ٣

ب² = ٤ ← ب = ٢

جـ² = أ² − ب² = ٩ − ٤ = ٥ ← جـ = √٥

الرأسان (٠،٣)،(٠،−٣) والبؤرتان (٠،√٥)،(٠،−√٥)

المطلوب: معادلة قطع زائد رأساه (٠،±√٥) وبؤرتاه (٠،±٣)

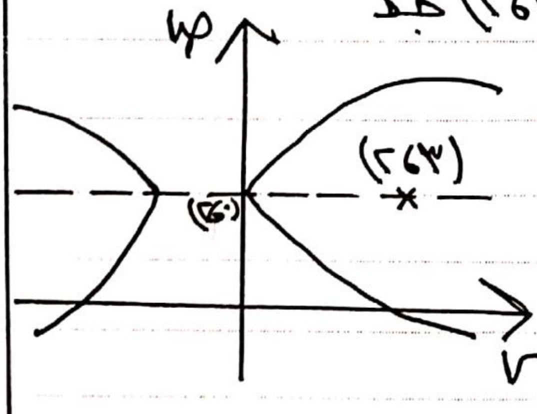
حسب اتجاه الرأسان والبؤرتان ← صادي

٢أ = ٢√٥ ← أ = √٥ ، ٢جـ = ٦ ← جـ = ٣

جـ² = أ² + ب² ← ٩ = ٥ + ب² ← ب² = ٤

المعادلة ← $\frac{ص^2}{٥}-\frac{س^2}{٤}=١$

١٤) معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى قطع مخروطي اختلافه المركزي (٣) واحدى بؤرتيه (٣،٢) جد معادلته.



الحل: قطع زائد سيني

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = ٣ ← جـ = ٣أ —①

جـ − أ = ٣ (بعد بؤرة عن رأس قريب) —②

نعوض ① في ②:

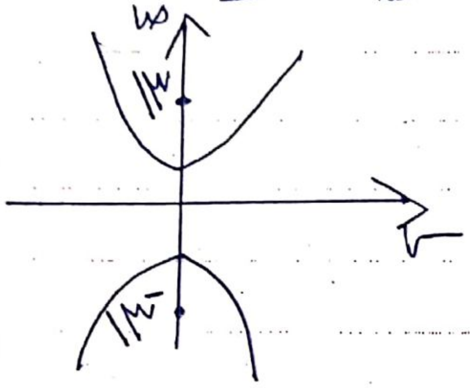
٣أ − أ = ٣ ← أ = $\frac{٣}{٢}$ وعليه جـ = ٣أ = ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$

جـ² = أ² + ب² ← $\frac{٨١}{٤}=\frac{٩}{٤}$ + ب² ← ب² = $\frac{٧٢}{٤}$

المركز (٠ − أ، ٢) = ($-\frac{٣}{٢}$، ٢)

المعادلة ← $\frac{٤(س+\frac{٣}{٢})^2}{٩}-\frac{٤(ص-٢)^2}{٧٢}=١$

١٥) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (٠،٠) وبؤرتاه النقطتان (٠، ١٣)، (٠، -١٣) وطول محوره القاطع أصغر من طول محوره المرافق بمقدار ١٤ وحدة.



الحل: المركز (٠،٠) / صادي

جـ = ١٣

٢أ = ٢ب − ١٤ / ٢

أ = ب − ٧ ← ب = أ + ٧

جـ² = أ² + ب²

١٦٩ = أ² + (أ + ٧)²

١٦٩ = أ² + أ² + ١٤أ + ٤٩ نرتب

٢أ² + ١٤أ − ١٢٠ = ٠ / ٢

أ² + ٧أ − ٦٠ = ٠

(أ + ١٢)(أ − ٥) = ٠

٥   −١٢ مرفوض

ب = أ + ٧ = ٥ + ٧ = ١٢

المعادلة $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$

$\frac{\text{ص}^2}{25} - \frac{\text{س}^2}{144} = 1$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤