المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبـه ماهـر التميمـي يوسف سليمان جرادات أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقم (2021/5)، تاريـخ 2021/12/7 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2021/168) تاريـخ 2021/12/21 م بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 217 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2021/6/3565)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر: الفـرع العلمـي: كتـاب التماريـن: الفصـل الثانـي/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.– عمـان: المركـز، 2021

(28) ص.

ر.إ.: 2021/6/3565

الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1442 هـ / 2021 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب تمارين متنوعة أعدت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي استكمال للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتنمي مهارتكم الحسابية.

قد يختار المعلم/ المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم البقية لتحلوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

تساعدكم الصفحات التي عنوانها (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ مما يعزز قدرتكم على متابعة التعلم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

يوجد فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة إجابته، وإذا لم يتسع هذا الفراغ لخطوات الحل جميعها فيمكنكم استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلمًا ممتعًا وميسّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 7 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 8 الاحتمالات

الوحدة 9 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 5: التكامل

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

مشتقة اقتران القوَّة

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = 2x^4 - 5x^2 + 7$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = x + \sqrt[5]{2x}$
4. $y = \dfrac{1-4x}{x^2}$
5. $y = 8x - \dfrac{1}{2x}$
6. $y = \dfrac{7}{x^3} + \dfrac{3}{x-2}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \dfrac{6x-8}{x^2}$.

$y = \dfrac{6x-8}{x^2} = \dfrac{6x}{x^2} - \dfrac{8}{x^2}$ بكتابة الاقتران في صورة فرق بين كسرين

$= 6x^{-1} - 8x^{-2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\dfrac{dy}{dx} = -6x^{-2} + 16x^{-3}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، والفرق

$= \dfrac{-6}{x^2} + \dfrac{16}{x^3}$ تعريف الأُسِّ السالب

مشتقة الاقتران: $y = (ax+b)^n$

أجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = (2x+4)^6$
2. $y = \sqrt{1-4x}$
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{7x+5}}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران: $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$.

$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} = (2x-3)^{-\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسِّية

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{3}{2}} \times 2$ قاعدة مشتقة الاقتران المُركَّب

$= -\dfrac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}$ تعريف الأُسِّ السالب

التمثيل البياني باستعمال التحويلات الهندسية

أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = x^2$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

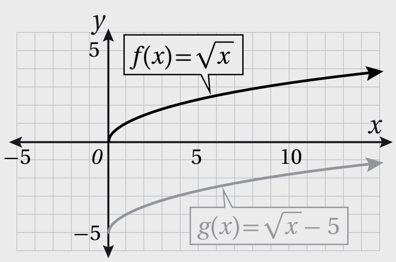
3) $q(x) = x^2 + 5$ 2) $h(x) = (x - 5)^2$ 1) $g(x) = x^2 - 5$

6) $p(x) = \frac{1}{5}x^2$ 5) $r(x) = 5x^2$ 4) $t(s) = (x + 5)^2$

مثال: أستعمل منحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كلٍّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

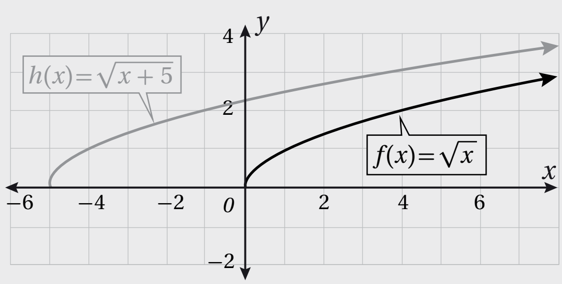
1) $g(x) = \sqrt{x} - 5$

منحنى الاقتران: $g(x) = \sqrt{x} - 5$ هو منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى الأسفل؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى g يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



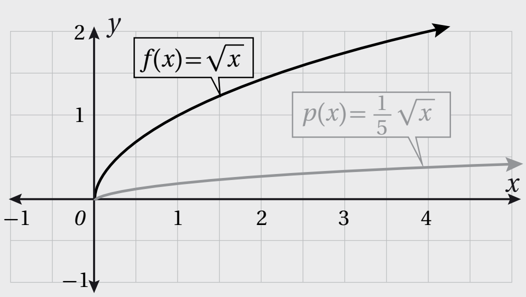
2) $h(x) = \sqrt{x + 5}$

منحنى الاقتران: $h(x) = \sqrt{x + 5}$ هو منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليسار؛ لذا فإنَّ الإحداثي x لكل نقطة على منحنى g يقل بمقدار 5 وحدات عن الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f كما في الشكل المجاور.



3) $p(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$

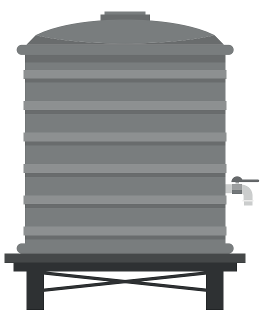
منحنى الاقتران: $p(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$ هو تضييق رأسي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{5}$؛ لذا فإنَّ الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران g ناتج من ضرب الإحداثي y للنقطة المقابلة لها في الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{5}$ كما في الشكل المجاور.



التكامل غير المحدود
Indefinite integrals

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x^6\, dx$
2. $\int \frac{dx}{x^4}$
3. $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{7}{x^2}\right) dx$
4. $\int (x^2 + x - 1)\, dx$
5. $\int \frac{-7}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$
6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int (x^2 + 3)(x-1)\, dx$
8. $\int (3 - 2x)^7\, dx$
9. $\int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x-4}}\, dx$
11. $\int \left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}} - 7\right) dx$
12. $\int \sqrt[3]{(2x-5)^2}\, dx$



خزّان: يحتوي خزّان على **100** لتر من الماء. بدأ الماء بالتســرُّب من الخزّان، وبعد t ساعة أصبح حجم الماء المتبقي فيه V لترًا. إذا كانت المعادلة: $\frac{dV}{dt} = 0.6t - 10$ تُمثِّل مُعدَّل تســرُّب الماء من الخزّان باللتر لكل ساعة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. حجم الماء في الخزّان بعد t ساعة.

14. حجم الماء في الخزّان بعد 10 ساعات.

تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+3}}$، حيث a ثابت موجب:

15. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.

16. إذا كان $f(0) = 0$ و $f(a) = 2\sqrt{2} - 2$، فأُثبِت أنَّ $a = \sqrt{3}$.

17. **أكتشف الخطأ:** أوجدت كلٌّ من مرام وفرح ناتج التكامل: $\int (x+2)^2\, dx$ كالآتي:

إجابة مرام

$\frac{1}{3}(x+2)^3 + c$

إجابة فرح

$\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + c$

أيُّهما إجابتها صحيحة، مُبرِّرًا إجابتي؟

التكامل المحدود
Definite Integrals

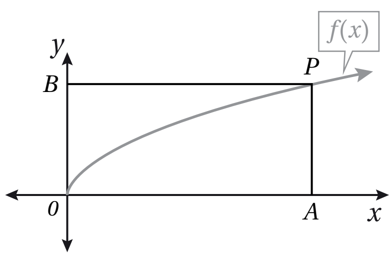
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int_1^3 (3x^2 + 7)\, dx$
2. $\int_1^2 (4x^3 - 1)\, dx$
3. $\int_1^8 (\sqrt[3]{x} - 2)\, dx$
4. $\int_a^b \frac{1}{2} x^2\, dx$
5. $\int_0^{27} \sqrt{3x}\, dx$
6. $\int_{-2}^5 (2x^2 - 3x + 7)\, dx$

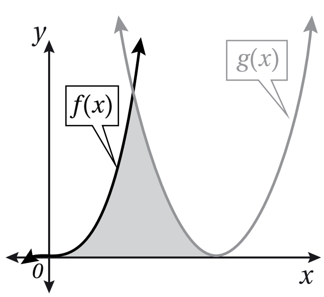
7. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x.

8. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$ و $x = 3$.

9. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$، والمحور x.



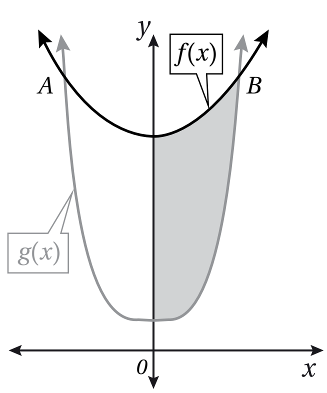
10. يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$. إذا علمْتُ أنَّ النقطة P تقع على منحنى الاقتران، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة OPA المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x تساوي ثلثي مساحة المستطيل $OAPB$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$، و $g(x) = (x-4)^2$:

11. أُثبِت أنَّ منحنيي الاقترانين يتقاطعان في النقطة $(2, 4)$.

12. أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 14$، و $g(x) = x^4 + 2$:

13. إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطتين: A و B، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

14. أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

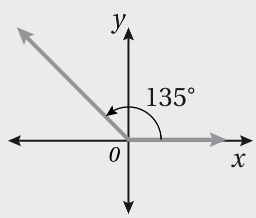
أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

رسم الزاوية في الوضع القياسي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية المعطى قياسها في ما يأتي، مُحدِّدًا الربع أو المحور الذي تقع عليه:

1) $150°$ 2) $240°$ 3) $290°$ 4) $180°$

مثال: أرسم الزاوية $135°$ في الوضع القياسي، مُحدِّدًا الربع أو المحور الذي تقع عليه:



أرسم المحورين الإحداثيين. ومن نقطة الأصل أرسم ضلع الابتداء مُنطبِقًا على محور x الموجب، ثم أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل، وأضع تدريج المنقلة $0°$ على ضلع الابتداء، ثم أُعيِّن نقطةً مقابل التدريج $135°$. بعد ذلك أرسم ضلع الانتهاء من نقطة الأصل إلى النقطة الثابتة التي عيَّنْتُها، فأجد أنَّ ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الثاني.

إيجاد النسب المثلثية الأساسية باستعمال دائرة الوحدة

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

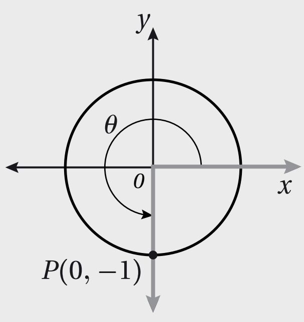
1) $P(0.6 , 0.8)$ 2) $P(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ 3) $P(1, 0)$

مثال: أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة $P(0 , -1)$ في ما يأتي:

$\sin \theta = y = -1$

$\cos \theta = x = 0$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ (غير مُعرَّف)



إيجاد قِيَم النسب المثلثية لزاوية

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\cos 120°$
2. $\sin 225°$
3. $\tan 330°$

مثال: أجد قيمة $\sin 120°$.

إيجاد قياس الزاوية المرجعية	$\theta' = 180° - \theta$
$\theta = 120°$	$= 180° - 120°$
	$= 60°$
الجيب موجب في الربع الثاني	$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إيجاد قِيَم النسب المثلثية إذا عُلِمت قيمة نسبة مثلثية

أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\sin \theta = \frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$
2. $\tan \theta = 1, 180° < \theta < 270°$

مثال: أجد قيمة كلٍّ من النسبتين المثلثيتين الباقيتين للزاوية θ إذا كان: $\sin \theta = \frac{3}{5}, 90° < \theta < 180°$.

نتيجة نظرية فيثاغورس	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
بتعويض قيمة $\sin \theta$	$\cos^2 \theta + (\frac{3}{5})^2 = 1$
بطرح $\frac{9}{25}$ من كلا الطرفين	$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25}$
بالتبسيط	$\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$
في الربع الثاني يكون $\cos \theta$ سالبًا	$\cos \theta = -\frac{4}{5}$
	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in Radian

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

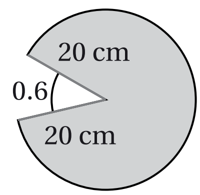
1) $225°$

2) $840°$

3) $\frac{11\pi}{6}$

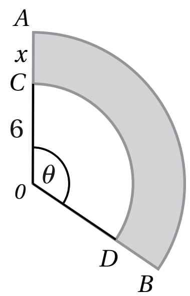
4) $-\frac{23\pi}{4}$

5) أجد مساحة القطاع الدائري المُظلَّل في الشكل المجاور.



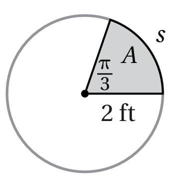
6) يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين مركزهما O. إذا كان: $OC = 6$ cm، و $CA = x$ cm،

و $m\angle\theta = 2$، وكانت مساحة المنطقة المُظلَّلة 64 cm^2، فأجد قيمة المُتغيِّر x.

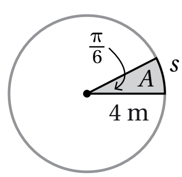


أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

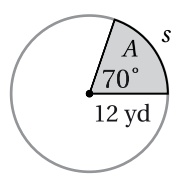
7)



8)



9)



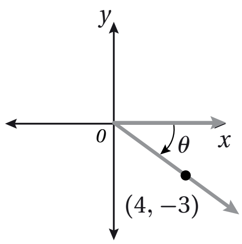
10) **رافعة:** يبلغ طول نصف القُطْر لبكرة رافعة 2 ft، وهي تُستعمَل لرفع الأحمال الثقيلة، وتؤدي 8 دورات كل 15 ثانية. أجد السرعة الخطية والسرعة الزاويّة للرافعة.

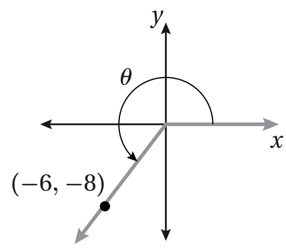
11) إذا كانت مساحة دائرة 72 cm^2، فأجد مساحة قطاع دائري من هذه الدائرة يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{6}$.

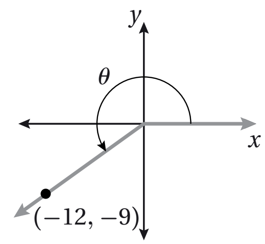
12) قطاع دائري نصف قُطْره 24 cm، ومساحته 288 cm^2. أجد الزاوية المركزية لهذا القطاع.

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

2 

3 

إذا كان: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = 2x$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

4 $f\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

5 $(h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right)$

6 $(h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

إذا كان $\sin 70° = \cos 20° = 0.940$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

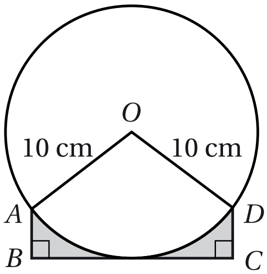
7 $\cos 560°$

8 $\sin 430°$

9 $\sin 470°$

10 $\cos(-380°)$

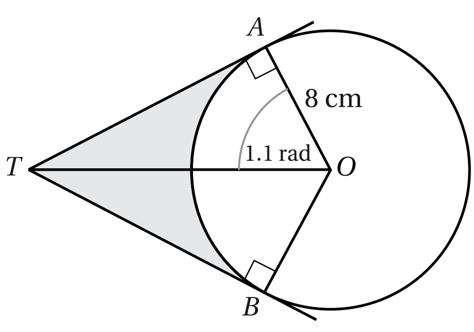
يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها 10 cm، إذا كان $\overline{BC}$ مماسًّا للدائرة طوله 16 cm، و $DC = AB$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



11 $m\angle AOD$ بالراديان.

12 مساحة المنطقة المُظلَّلة.

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O، وطول نصف قُطْرها 8 cm، إذا كان $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسَّين للدائرة، وكان $m\angle AOT = 1.1$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



13 طول TA.

14 مساحة الجزء المُظلَّل في الشكل.

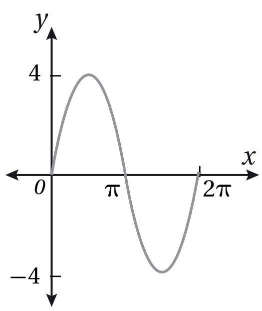
الدرس
3

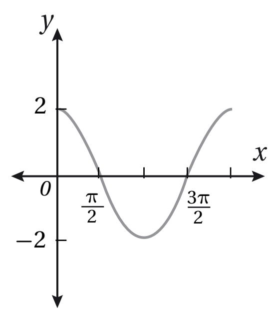
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا
Graphing Trigonometric Functions

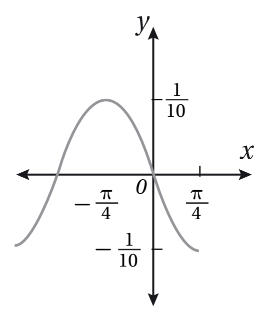
أجد طول الدورة والسعة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

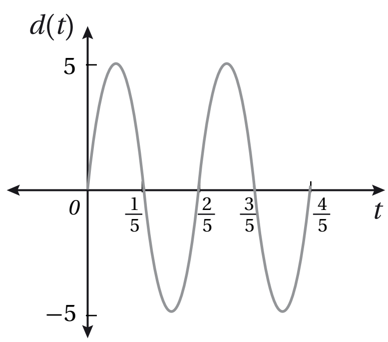
1. $g(x) = 2 + \sin x$
2. $g(x) = 5 - \cos x$
3. $g(x) = -\cos(x + \pi)$
4. $g(x) = 5 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
5. $g(x) = -2 - \sin(x - \pi)$
6. $g(x) = 3 + \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
7. $g(x) = -4 \sin \frac{1}{4} x$
8. $g(x) = 2 - \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
9. $g(x) = \frac{1}{2} \tan \pi x$

أجد السعة وطول الدورة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أكتب معادلة في صورة: $y = a \sin b(x-c)$، أو صورة: $y = a \cos b(x-c)$ لتمثيل قاعدة الاقتران:

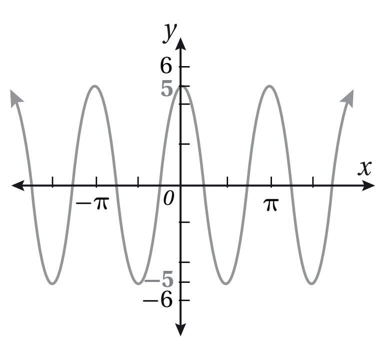
10. 

11. 

12. 



13. يُمثِّل الشكل المجاور الإزاحة $d(t)$ بالسنتيمتر مع الزمن t لكتلة مُعلَّقة بزنبرك نابضي، وهي تتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل في حركة توافقية بسيطة. أكتب قاعدة الاقتران d، حيث $d(t) = a \sin \omega t$.



أتأمَّل الشكل المجاور، ثم أُجيب عن السؤالين الآتيين:

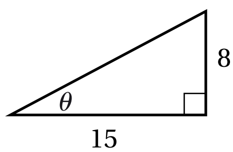
14. هل يُمثِّل المنحنى الاقترانَ الذي صورته $y = a \sin bx$، أو صورته $y = a \cos bx$؟ أُبرِّر إجابتي.

15. أجد القيمة العظمى، والقيمة الصغرى، وطول الدورة، والسعة للاقتران.

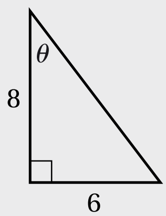
أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• الاقترانات المثلثية

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



مثال: أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



الخطوة 1: أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

نظرية فيثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$
بتعويض $a = 6, b = 8$	$c^2 = 6^2 + 8^2$
بالتبسيط	$c^2 = 100$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$c = \pm\sqrt{100}$
الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا	$c = 10$

الخطوة 2: أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ

$\tan\theta = \dfrac{\text{(المقابل)}}{\text{(المجاور)}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ | $\cos\theta = \dfrac{\text{(المجاور)}}{\text{(الوتر)}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ | $\sin\theta = \dfrac{\text{(المقابل)}}{\text{(الوتر)}} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$\cot\theta = \dfrac{\text{(المجاور)}}{\text{(المقابل)}} = \dfrac{4}{3}$ | $\sec\theta = \dfrac{\text{(الوتر)}}{\text{(المجاور)}} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$ | $\csc\theta = \dfrac{\text{(الوتر)}}{\text{(المقابل)}} = \dfrac{5}{3}$

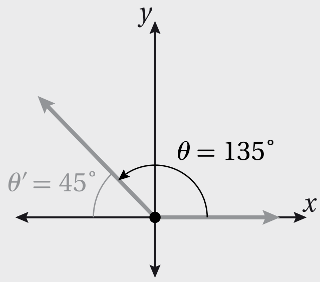
• إيجاد قيمة الاقتران المثلثي لأيِّ زاوية

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\cos 135^\circ$
2. $\cot 120^\circ$
3. $\sin 210^\circ$
4. $\csc(-30^\circ)$
5. $\tan \frac{\pi}{4}$
6. $\cos \frac{11\pi}{3}$
7. $\sec(-\frac{7\pi}{4})$
8. $\tan \frac{15\pi}{4}$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) tan 135°



يقع ضلع انتهاء الزاوية °135 في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = 180° - \theta$

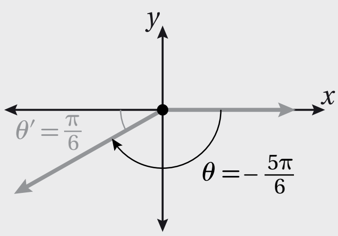
$\theta = 135°$ $= 180° - 135°$

$= 45°$

الظل سالب في الربع الثاني $\tan 135° = -\tan 45° = -1$

2) $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

بمـــا أنَّ الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ ســـالبة، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المشـــتركة مع الزاوية $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ التي قياســـها موجب، وأقل من 2π



بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مشتركة قياسها موجب $-\frac{5\pi}{6} + 2(1)\pi = \frac{7\pi}{6}$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = \theta - \pi$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ $= \frac{7\pi}{6} - \pi$

$= \frac{\pi}{6}$

قاطع التمام سالب في الربع الثالث $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\csc\frac{\pi}{6} = -2$

- **معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 2) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 3) $\sin^{-1}(-1)$

مثال: أجد قيمة $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاوية التي قيمة الجيب لها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

المتطابقات المثلثية 1

Trigonometric Identities 1

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

1 $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$

2 $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x}$

3 $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

4 $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

5 $\dfrac{1 + \cos x}{1 + \sec x}$

6 $\dfrac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

7 $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\csc x} = 1$

8 $\ln|1 + \cos\theta| + \ln|1 - \cos\theta| = 2\ln|\sin\theta|$

9 $\dfrac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$

10 $\tan A + \tan B = \dfrac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B}$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11 $\sin 105°$

12 $\tan \dfrac{19\pi}{12}$

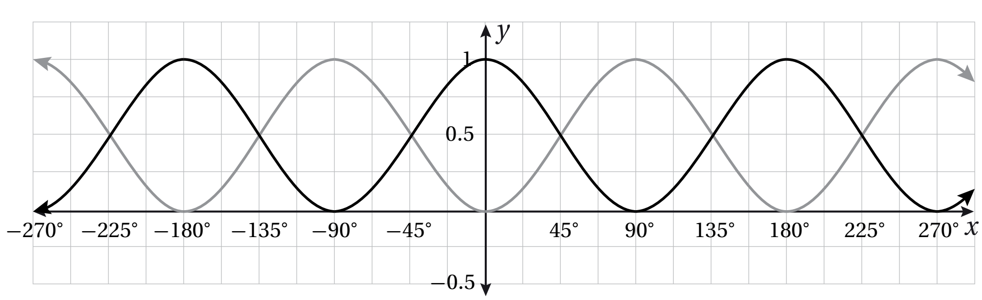
13 $\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80°$

14 إذا كان $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{6})$، فأُثبِت أنَّ: $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

15 إذا كان $A + B = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّ: $\tan A = \dfrac{1 - \tan B}{1 + \tan B}$.

16 **تبرير:** أُثبِت صحة المتطابقة: $\tan(s + t) = \dfrac{\sin(s + t)}{\cos(s + t)}$، مُبرِّرًا إجابتي.

17 **تبرير:** يُبيِّن التمثيل البياني الآتي منحنيي الاقترانين: $y = \sin^2 x$، و $y = \cos^2 x$، حيث الزوايا بالدرجات. أستعمل هذا التمثيل لإثبات أنَّ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

أُبسِّط كُلًّا من المتطابقات الآتية، مُستعمِلًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

1) $2\sin 3x \cos 3x$

2) $\dfrac{2\tan 7x}{1-\tan^2 7x}$

3) $\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 4x}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

4) $\dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

6) $\cos^2 37.5^\circ - \sin^2 37.5^\circ$

7) $\sin 75^\circ$

8) $\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$

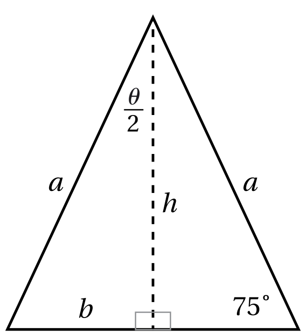
9) $\tan 202.5^\circ$

10) $2\sin 52.5^\circ \sin 97.5^\circ$

11) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

12) $\cos 37.5^\circ \sin 7.5^\circ$

يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما a:



13) أكتب قاعدة لمساحة المثلث بدلالة الزاوية θ.

14) أجد مساحة المثلث إذا كان طول الضلع a هو 7 cm

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15) $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

16) $\csc 2x = \dfrac{1}{2}\csc x \sec x$

17) $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

18) $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos 2\theta$

19) $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x + \sin x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

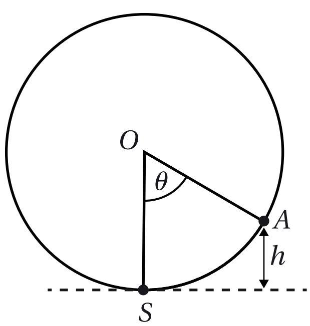
20) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\tan 2x$

الدرس
3

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

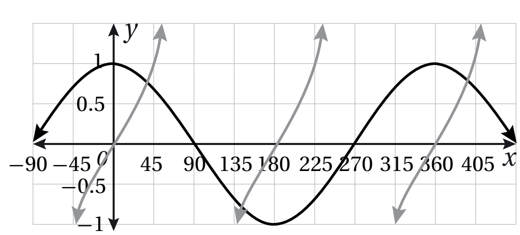
أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

1. $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $\cot x - \csc x = \sqrt{3}$
3. $\frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = 2$
4. $3 \cos^2 x = \sin^2 x$
5. $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = 0$
6. $\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - 1 = 0$
7. $\cot^2 x + 5 \csc x = 5$
8. $4 \sec^2 x + 9 \sec x = 8$
9. $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 5$
10. $\cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0$
11. $4 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$
12. $\sin (x + \frac{\pi}{4}) + \sin (x - \frac{\pi}{4}) = 1$



ترفيه: يُمثِّل الشكل المجاور دولابًا دوّارًا في مدينة ألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتُمثِّل S نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن هو A، في حين تُمثِّل النقطة O مركز الدولاب. إذا دار الدولاب بزاوية θ، فإنَّ ارتفاع الراكب عن الأرض h بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 67.5 - 67.5 \cos \theta$، حيث θ بالراديان:

13. أجد طول قُطْر الدولاب.
14. إذا علمْتُ أنَّ الرحلة في هذه اللعبة تُمثِّل دورة واحدة، وأنَّها تستغرق 30 دقيقة، فكم دقيقةً تَلزم للوصول إلى ارتفاع 100 متر فوق سطح الأرض؟



يُمثِّل الشكل المجاور منحنيي المعادلتين: $y = \cos x$، و $y = \tan x$:

15. كم حلًّا يوجد للمعادلة: $\cos x = \tan x$ في الفترة $[0°, 360°]$؟
16. أجد أصغر حلٍّ موجب للمعادلة.

تبرير: إذا كان $\sin(A + B) = 2 \sin (A - B)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

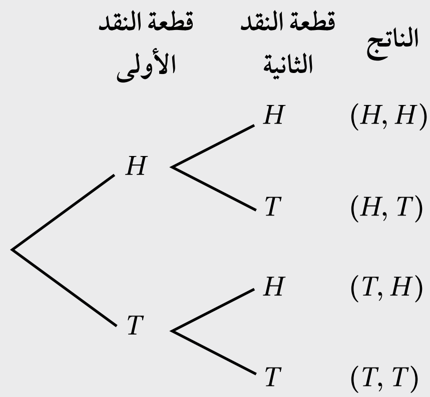
17. أُثبِت أنَّ: $\tan A = 3 \tan B$.
18. أحُلُّ المعادلة: $\sin (x + 0.5) = 2 \sin (x - 0.5)$، حيث: $0 \leq x < 2\pi$.

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• استعمال مُخطَّط الشجرة لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية

أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد عشوائيًّا.

مثال: أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعتي نقد عشوائيًّا.



أُلاحِظ من مُخطَّط الشجرة أنَّ لهذه التجربة 4 نواتج مُمكِنة.

إذن، الفضاء العيني هو:

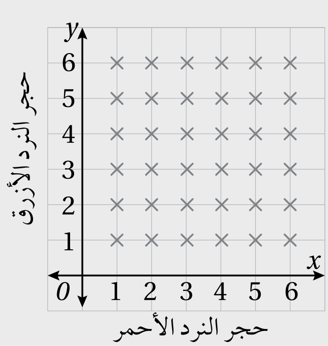
$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$

• استعمال مُخطَّط الاحتمال لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية

دُوِّر قرص مُؤشِّرٍ مقسوم إلى 3 قطاعات متطابقة؛ أولها أحمر (R)، وثانيها أزرق (B)، وثالثها أبيض (W)، ثم دُوِّر قرص مُؤشِّرٍ مقسوم إلى 4 قطاعات متطابقة، كُتِب عليها الأرقام: 1, 2, 3, 4. أستعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

مثال: أستعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي حجري نرد عشوائيًّا؛ أحدهما لونه أحمر، والآخر لونه أزرق.

أرسم محورين، ثم أكتب على أحدهما نواتج رمي حجر النرد الأحمر، ثم أكتب على المحور الآخر نواتج رمي حجر النرد الأزرق، كما في الشكل المجاور الذي يُمثِّل فيه تقاطعُ خطوط مُخطَّط الاحتمال الفضاءَ العينيَ للتجربة.



• إيجاد احتمال الحوادث المتنافية

في تجربة اختيار عدد عشوائيًّا من بين الأعداد: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12:

1. ما احتمال اختيار عدد فردي، ويقبل القسمة على 4؟
2. ما احتمال اختيار عدد فردي، أو عدد يقبل القسمة على 4؟

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرَّة واحدة:

a) ما احتمال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5؟

أفترض أنَّ (A) هو حادث ظهور عدد زوجي، وأنَّ (B) هو حادث ظهور عدد يقبل القسمة على 5

وبذلك، فإنَّ: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{5\}$

بما أنَّ $\{2, 4, 6\} \cap \{5\} = \phi$، فإنَّ (A) و (B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5 هو صفر. وبالرموز: $P(A \cap B) = 0$

b) ما احتمال ظهور عدد زوجي، أو عدد يقبل القسمة على 5؟

(A) و (B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال وقوع (A) أو (B) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

وبالرموز:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ صيغة احتمال حادثين متنافيين

$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ بإيجاد احتمالات كلٍّ من الحادثين، والتعويض

$= \frac{2}{3}$ بالجمع، ثم التبسيط

- **إيجاد احتمال الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة**

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى خضراء (G)، و8 قطع حلوى حمراء (R)، جميعها مُتماثِلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة أُخرى عشوائيًّا ليأكلها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

1 اختيار الطفل قطعتي حلوى مُتماثِلتي اللون.

2 اختيار الطفل قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

مثال: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، جميعها مُتماثِلة. سُحِبت كرة من الكيس عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحِبت كرة أُخرى عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

a) سحب كرة خضراء في المرَّة الأولى، ثم سحب كرة حمراء في المرَّة الثانية.

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

b) سحب كرتين مختلفتي اللون.

$$P(G \cap R) + P(R \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$

التباديل والتوافيق

Permutations and Combinations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\frac{8!}{4!}$

2 ${}_7P_3$

3 ${}_7C_3$

4 ${}_9C_0$

5 ${}_5P_5$

6 $\frac{6! \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3}$

7 لــدى أحمد 3 أزواج مختلفة من الأحذية، و4 بناطيل مختلفــة، و4 قمصان مختلفة، و3 ربطات عنق مختلفة. بكم طريقةً مختلفة يُمكِن أنْ يظهر أحمد مُرتدِيًا زوجًا من الأحذية، وبنطالًا، وقميصًا، مع ربطة عنق، أو من دونها؟

8 اجتمع في قاعة 20 شــخصًا، ثم بــادر كلٌّ منهم إلى مصافحة جميع الأشــخاص الآخرين الموجودين في القاعة. كم مصافحةً شهدتها هذه القاعة؟

9 في متحف 20 لوحة فنية، منها 8 لوحات لفنّان واحد، والبقية لفنّانين آخرين. إذا اختار المسؤول عن المتحف 4 لوحات عشوائيًّا لعرضها في أحد المعارض، فما عدد طرائق اختيار اللوحات الأربع إذا كان بينها لوحتان على الأكثر من لوحات الفنّان صاحب اللوحات الثماني؟

10 **سباق:** شارك كلٌّ من أحمد، وسلمان، وزياد في سباق 400 m مع 7 متسابقين آخرين. ما احتمال أنْ يفوز هؤلاء الثلاثة بالمراكز الثلاثة الأولى من السباق؟

11 نظــر محمد في برنامج توزيع الدروس ليــوم الخميس، فوجده يحوي 6 حصص للمباحث الآتيــة: الرياضيات، واللغة العربية، والفيزياء، واللغة الإنجليزية، والتربية الإسلامية، والكيمياء. إذا حُدِّد ترتيب هذه الحصص في البرنامج عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون الحصتان الأُوليان هما الفيزياء واللغة الإنجليزية بأيِّ ترتيب مُمكِن؟

رتَّب فؤاد 4 كؤوس مختلفة ودرعين مختلفتين عشوائيًّا في صف واحد ضمن خزانة عرض. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

12 أنْ تكون الكؤوس الأربع متجاورة.

13 أنْ تكون الدرعان في وسط الصف.

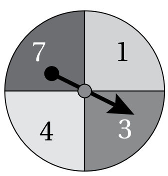
المُتغيِّرات العشوائية

Random Variables

أجد مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. سحب 6 كرات عشوائيًّا من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات خضراء، و 5 كرات زرقاء، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

2. إطلاق 8 طلقات على هدف ثابت، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X عدد مرّات إصابة الهدف.



3. تدوير مُؤشِّر القرص المجاور مرَّتين، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X مجموع الرقمين اللذيْنِ توقَّف عليهما المُؤشِّر.

4. سُحِب بالونان عشوائيًّا مع الإرجاع من كيس فيه 8 بالونات حمراء، وبالون واحد أصفر، و3 بالونات بيضاء. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البالونات الصفراء المسحوبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

يُبيِّن الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	1	2	5	7
$P(Y=y)$	b	0.4	$2b$	0.12

5. أجد قيمة b.

6. أجد ناتج: $P(Y \geq 2)$.

7. أجد ناتج: $P(1 < Y \leq 7)$.

8. أجد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-1	0	2	3
$P(X=x)$	0.15	0.25	0.35	0.25

سُئِل طلبة إحدى المدارس عن عدد الهواتف المحمولة في منازلهم، فكانت الإجابات كما في الجدول الآتي:

عدد الهواتف المحمولة (x)	1	2	3	4	5	6
عدد الطلبة (f)	35	55	105	140	110	75

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الهواتف المحمولة:

9. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

10. أجد التوقُّع $E(X)$.

الوحدة 9: المتتاليات والمتسلسلات

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد حدود متتالية معطى حدها العام

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية معطى حدها العام في ما يأتي:

1) $3n + 1$

2) $n^2 - 1$

3) $4n + 2$

مثال: أجد أول أربعة حدود للمتتالية التي حدها العام: $\mathbf{2n - 1}$

$n = 1$ $2(1) - 1 = 1$

$n = 2$ $2(2) - 1 = 3$

$n = 3$ $2(3) - 1 = 5$

$n = 4$ $2(4) - 1 = 7$

إكمال نمط عددي معطى

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $4, 6, 8, 10, \ldots$

2) $3, 6, 9, 12, \ldots$

3) $2, 4, 8, 16, \ldots$

مثال: أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

a) 7, 14, 21, 28,...

بطرح أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّ كل حد يزيد على الحد السابق بمقدار 7

إذن، تتزايد المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$7 \xrightarrow{+7} 14 \xrightarrow{+7} 21 \xrightarrow{+7} 28 \xrightarrow{+7} 35 \xrightarrow{+7} 42 \xrightarrow{+7} 49, \ldots$$

b) 8, 16, 32, 64, ...

بقسمة أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّه يُمكِن إيجاد أيِّ حد بضرب الحد السابق له في 2، وأنَّ الحدود الثلاثة التالية هي:

$$8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{\times 2} 128 \xrightarrow{\times 2} 256 \xrightarrow{\times 2} 512, \ldots$$

إيجاد الحد العام للمتتاليات

أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

1. 3, 10, 17, 24, 31, …
2. 2, 5, 10, 17, 26, …
3. 5, 8, 13, 20, 29, …

مثال: أجد الحد العام للمتتالية: **2, 9, 28, 65,…**

أُلاحِــظ أنَّ المتتالية لم تنتج من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها، أو من ضرب حدودها في عدد ثابت، وأنَّها لم تنتج من تربيع كل حد.

أُفسِّر المتتالية عن طريق تكعيب رتبة كل حد n^3:

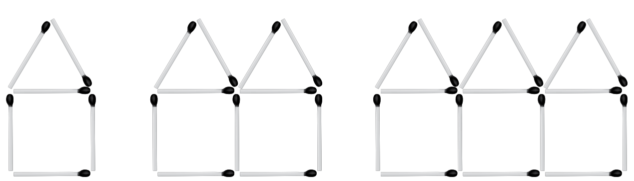
1	8	27	64	…	n^3
2	9	28	65	…	?

أُلاحِظ أنَّ المتتالية المطلوبة تنتج عند إضافة 1 إلى كل مكعب رتبة أيٍّ من الحدود.

إذن، الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = n^3 + 1$

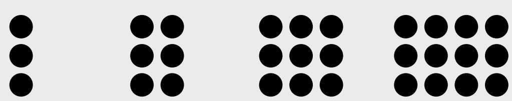
التعبير عن الأنماط الهندسية بمتتاليات عددية

يُمثِّل عــدد أعواد الثقــاب في نماذج النمط الهندســي المجاور متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



النموذج (1) النموذج (2) النموذج (3)

مثال: يُمثِّل عدد النقاط في نماذج النمط الهندسي المجاور متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



النموذج (1) النموذج (2) النموذج (3) النموذج (4)

بالنظر إلى هذا النمط، أُلاحِظ أنَّ عدد النقاط يُشكِّل المتتالية الآتية:

$$\underset{1\times3}{3},\ \underset{2\times3}{6},\ \underset{3\times3}{9},\ \underset{4\times3}{12},\ \dots$$

بالنظر إلى الحدود الأولى من المتتالية، أُلاحِظ أنَّ كل حد فيها يساوي حاصل ضرب رتبته في العدد 3

إذن، الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = 3n$

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

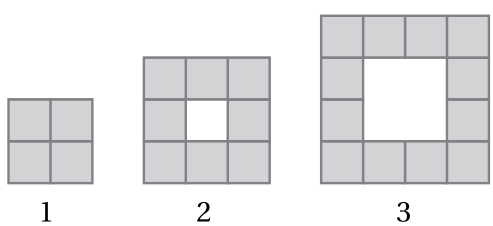
أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1. $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$
2. $a_n = -3n^2$
3. $a_n = (n+1)^2$
4. $a_n = n\,(n-1)$
5. $a_n = 1 + (-1)^n$
6. $a_n = n^n$

أكتب كُلًّا ممّا يأتي من دون استعمال رمز المجموع:

7. $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$
8. $\sum_{k=1}^{9} k(k+3)$
9. $\sum_{k=1}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُمثِّل نمطًا هندسيًّا، أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



10. أكتب الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد المربعات المُلوَّنة في كل شكل.
11. أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد المربعات المُلوَّنة في أول عشرين شكلًا من هذا النمط، ثم أجد مجموع المتسلسلة.
12. إذا كان طول ضلع كل مربع مُلوَّن هو وحدة واحدة، فأجد الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل مساحة المربعات البيضاء وسط كل شكل.

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

13. $-1 + 4 - 9 + \ldots + 36$
14. $10.8 + 10.5 + 10.2 + 9.9$
15. $3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{8}$
16. $1000 + 100 + 10 + \ldots + \frac{1}{100}$

الدرس 2

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحد العشرين منها:

1. $a_6 = -8$, $a_{15} = -62$
2. $a_{11} = 43, d = 5$
3. $25, 26.5, 28, 29.5, \ldots$

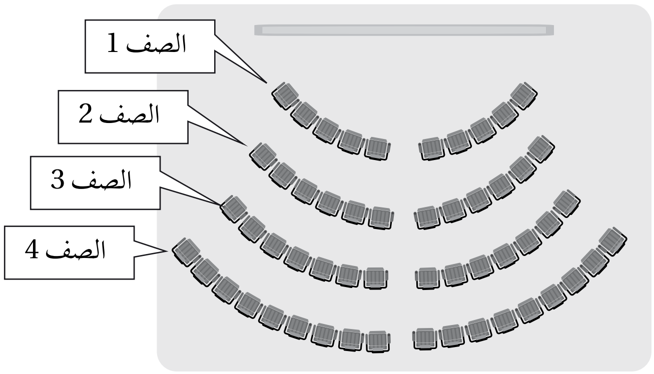
إذا كانت المتتالية: ... ,41 ,34 ,27 ,20 حسابية، فأجد:

4. الحد 100 من المتتالية.
5. أكبر حد أقل من 200
6. مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية.

أجد مجموع الحدود الثلاثين الأولى لكلٍّ ممّا يأتي:

7. متسلسلة حدها العام $1 + 6n$
8. متتالية حدها العام $8n + 5$

مسارح: مسرح في صفه الأول 10 مقاعد، وفي صفه الثاني 12 مقعدًا، وفي صفه الثالث 14 مقعدًا، وهكذا حتى الصف الأخير منه:



9. أُبيِّن أنَّ عدد المقاعد في صفوف المسرح يُشكِّل متتالية حسابية.
10. أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.
11. إذا كان في المسرح 14 صفًا من المقاعد، فكم مقعدًا في المسرح؟

متسلسلة حسابية مجموع حدودها العشرين الأولى 730، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى 1545:

12. أجد الحد الأول من المتسلسلة.
13. ما أساس المتسلسلة؟
14. أجد عدد حدود المتسلسلة التي تقل عن 101

الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1) $729, 243, 81, 27, 9, \ldots$

2) $-0.8, 3.2, -12.8, 51.2, -204.8, \ldots$

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية:

3) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots$

4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

متتالية هندسية حدها الثالث $\frac{8}{3}$، وحدها الخامس $\frac{32}{27}$:

6) أجد الحد الأول من المتتالية.

7) ما المجموع اللانهائي لحدود المتتالية؟

8) متتالية هندسية لانهائية متقاربة، حدها الأول a، ومجموعها ka، حيث $k > 1$. أجد حدها الثاني بدلالة الثابتين: a و k.

9) إذا كان الحد الأول لمتسلسلة هندسية لانهائية متقاربة x، وأساسها $3x$، ومجموعها 8، فما قيمة x؟

10) **حواسيب:** اشترت رغد حاسوبًا، واتفقت مع البائع على أنْ تدفع من ثمنه JD 100 في الشهر الأول، ثم تدفع في بقية الشهور ما نسبته 80% من قيمة دُفعة الشهر السابق، مدَّة عام كامل. كم دينارًا سعر الحاسوب؟

بدأ ماهر العمل في إحدى الشركات، وبلغ راتبه الشهري في السنة الأولى JD 500؛ على أنْ يزداد الراتب بنسبة 3% سنويًّا بعد العام الأول:

11) أكتب قاعدة يُمكِن استعمالها لتحديد راتب ماهر بعد (n) من السنوات.

12) كم دينارًا سيبلغ راتبه الشهري في العام الخامس؟

13) إذا استمر ماهر في العمل بهذه الشركة 10 سنوات، فما مجموع رواتبه في هذه السنوات؟