الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الفرع العلمي

11

فريق التأليف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدِّمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمِّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أولى المركز هــذا المبحث عناية كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلســة، ضمن ســياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُســهِمَ في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المُقدَّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشــروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة للمفاهيــم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المســائل يُعَدُّ إحدى أهمِّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخــل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا ندرك جيدًا حرص المعلِّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُســتخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيَّما على شبكة الإنترنــت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقــدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت أبناءنا الطلبة أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتســارع في عالَــم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحــن إذ نُقدِّم هذا الكتــاب، نأمل أنْ ينال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلِّميهــم، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأنْ نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 1 الاقترانات المتشعّبة والمتباينات 6

الدرسُ 1 الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة 8

الدرسُ 2 حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة 15

الدرسُ 3 حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا 25

الدرسُ 4 البرمجة الخطّية 25

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ 33

الوحدةُ 2 الاقترانات الأُسّية والاقترانات اللوغاريتمية 60

الدرسُ 1 الاقترانات الأُسّية 62

الدرسُ 2 الاقترانات اللوغاريتمية 70

الدرسُ 3 قوانين اللوغريتمات 79

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ 86

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 3 تحليل الاقترانات 88

الدرسُ 1 نظريتا الباقي والعوامل 90

الدرسُ 2 الكسور الجزئية 96

الدرسُ 3 التحويلات الهندسية للاقترانات 106

الدرسُ 4 النهايات والاتّصال 112

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ 118

الوحدةُ 3 المشتقّات 120

الدرسُ 1 اشتقاق اقتران القوة 124

الدرسُ 2 قاعدة السلسلة 133

الدرسُ 3 رسم منحنى الاقتران باستعمال المشتقّة 140

الدرسُ 4 تطبيقات عملية على الاشتقاق 158

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ 172

الوحدةُ 1

الاقترانات المتشعّبة والمتباينات
Piecewise Functions and Inequalities

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمل الاقترانات المتشعّبة واقترانات القيمة المطلقة؛ لنمذجة مواقف حياتية كثيرة، مثل حساب أثمان المياه والكهرباء وفق شرائح الاستهلاك المختلفة، أو حساب ضريبة الدخل تبعًا لشرائح الدخل المتعدّدة. وتُستعمل المتباينات والبرمجة الخطّية في نواحٍ اقتصادية كثيرة؛ لخفض التكاليف وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح ممكن.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تمثيل اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية بيانيًّا.
- ✓ حل معادلات خطّية وتربيعية بمتغيّر واحد.
- ✓ حل أنظمة معادلات خطّية وغير خطّية بمتغيّرين.
- ✓ حل متباينات خطّية بمتغيّر واحد.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا.
- ◄ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.
- ◄ تمثيل منطقة حلّ أنظمة متباينات خطّية بمتغيّرين.
- ◄ إيجاد الحلّ الأمثل في مسائل حياتية؛ باستعمال البرمجة الخطّية.

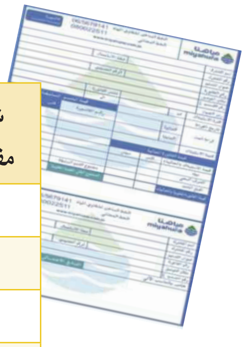
الدرسُ 1

الاقترانات المتشعّبة
Piecewise functions

فكرةُ الدرسِ تعرّف الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة وتمثيلهما بيانيًّا، وتحديد مجال كلٍّ منهما ومداه.

المصطلحاتُ الاقتران المتشعّب، اقتران القيمة المطلقة، رأس.

مسألةُ اليومِ يُبيّن الجدول المجاور تعرفة ثمن المياه للاستهلاك المنزلي في الدورة الواحدة لبعض شرائح الاستهلاك. كم تدفع أسرة استهلكت $42\ m^3$ من الماء؟



شرائح الاستهلاك مقرّبة إلى أقرب m^3	التعرفة JOD/m^3
0 – 18	0.361
19 – 36	0.450
37 – 54	0.550
55 – 72	1.000

أُلاحظ في المسألة السابقة، أنّه لا يُمكن كتابة معادلة واحدة بدلالة كمّية المياه المستهلكة x نستطيع عن طريقها حساب ثمن المياه لِقيَم x جميعها من $(0-72)$، وسنحتاج إلى معادلة خاصّة بكلّ واحدة من شرائح الاستهلاك.

يُسمّى الاقتران الذي يُعرف بمعادلات مختلفة لأجزاء مختلفة من مجاله **اقترانًا متشعّبًا** (Piecewise function).

مثال 1

إذا كان
$$f(x)=\begin{cases} -2x+1, & -3 \le x < 1 \\ x^2 \quad , & x \ge 1 \end{cases}$$

1 أُحدّد مجال $f(x)$

أُلاحظ أنّ مجال هذا الاقتران $f(x)$ هو الفترة $[-3, \infty)$، وأنّه معرّف بمعادلتين (أو قاعدتين)؛ الأولى $f(x) = 2x+1$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $-3 \le x < 1$، والثانية $f(x) = x^2$ وتُستعمل لحساب قِيَم الاقتران عندما تكون $x \ge 1$.

2 أجد قيمة كلّ من $f(-2)$، و $f(1)$

$f(-2)$

بما أنّ $-3 < -2 < 1$؛

إذن: أستعملُ القاعدة الأولى.

القاعدة الأولى	$f(x) = -2x + 1$
بتعويض $x = -2$	$f(-2) = -2(-2) + 1$
بالتبسيط	$= 5$

$f(1)$

بما أنّ $1 \leq 1$؛ إذن: أستعملُ القاعدة الثانية.

القاعدة الثانية	$f(x) = x^2$
بتعويض $x = 1$	$f(1) = (1)^2$
بالتبسيط	$= 1$

3 أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مداه.

الخطوة 1: أُمثّل $f(x) = -2x + 1$ عندما $-3 \leq x < 1$

أجد قيمة الاقتران $f(x) = -2x + 1$، عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$ كما في الجدول الآتي:

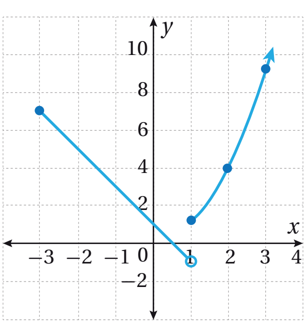
x	-3	1
$y = f(x) = -2x + 1$	7	-1
(x, y)	$(-3, 7)$	$(1, -1)$

أُعيّن النقطتين $(-3, 7)$,$(1, -1)$ في المستوى الإحداثي وأصل بينهما، وبما أنّ العدد -3 يُحقّق المتباينة؛ أبدأ التمثيل بدائرة مغلقة عند النقطة $(-3, 7)$، أمّا العدد 1 فهو لا يُحقّق المتباينة؛ لذا، أُنهي التمثيل بدائرة مفرّغة عند النقطة $(1, -1)$.

الخطوة 2: أُمثّل $f(x) = x^2$ عندما $x \geq 1$

الاقتران $f(x) = x^2$ قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى؛ لأنّ $a > 0$. إحداثيات رأس الاقتران $(0, 0)$ وهو لا ينتمي إلى مجال الاقتران؛ لذا، لا أستطيع تعويضه في قاعدة الاقتران، وأكتفي بإنشاء جدول قِيَم لبعض قِيَم x الأكبر من أو تساوي 1

x	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	1	4	9
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$



أُعيّن النقاط $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ في المستوى الإحداثي، ثـم أصل بينها بخط منحنٍ، وبما أنّ العـدد 1 يُحقّق المتباينة، إذن: أبدأ التمثيل بدائرة مغلقة عند $(1, 1)$.

إنّ مدى هذا الاقتران هو $y > -1$ ويُمكن التعبيرُ عنهُ بالفترة $(-1, \infty)$.

أتذكّر

بما أنّ $f(x) = -2x+1$ اقتران خطّي؛ لذا، يكفي نقطتان لتمثيله بيانيًّا.

أتحقق من فهمي

إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}3x+2\,,\,x<2\\5\,,\quad x=2\\2x-1,\,x>2\end{cases}:$$

a) أُحدّد مجال $f(x)$

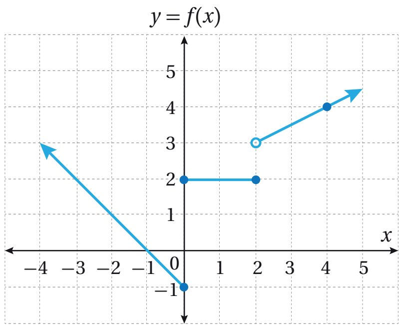
b) أحسبُ قيمة كلّ من $f(5)$، وَ $f(2)$

c) أُمثّل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه.

يُمكنني أيضًا أن أجد قاعدة الاقتران المتشعّب؛ إذا أُعطيتُ تمثيله البياني، كما يتّضح من المثال الآتي.

مثال 2

أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



أكتبُ الاقتران الذي يُمثّل كلّ جزء في التمثيل البياني.

الخطوة 1: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيسر من التمثيل البياني، وهو شعاع يمرّ بالنقطتين:

$(-1,0)$, $(0,-1)$. ميله -1 ومعادلته بصيغة الميل والمقطع هي: $y=-x-1$، ووجود دائرة مظلّلة عند النقطة $(0,-1)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(-\infty,0]$ من مجال الاقتران $f(x)$.

الخطوة 2: أكتبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأوسط، وهو قطعة مستقيمة توازي المحور x وطرفاها النقطتان $(2,2)$,$(0,2)$، فتُمثل الاقتران الثابت:

$f(x)=2$، ولوجود دائرة مظلّلة عند $(2,2)$، ودائرة مفرّغة عند $(0,2)$، فهذه القاعدة تقابل الفترة $(0,2]$ من مجال الاقتران $f(x)$.

أتذكّر

ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1,y_1), (x_2,y_2) هو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ومعادلته بصيغة الميل والمقطع:

$$y=mx+b$$

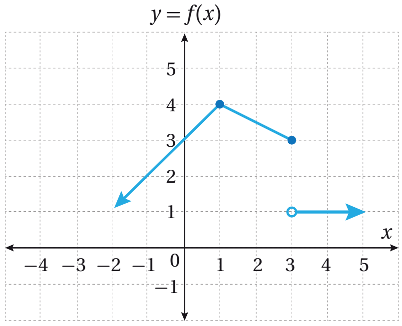
الخطـوة 3: أكتــبُ القاعدة التي يُمثّلها الجزء الأيمن، وهو شــعاع يمرّ بالنقطتين $(3, 3.5)$، و $(4, 4)$. ميلــه 0.5 ومعادلته بصيغة الميل ونقطة هي: $y - 4 = 0.5\,(x-4)$، ويمكن إعادة كتابتهــا على صورة الميل والمقطع: $y = 0.5x + 2$، ولوجود دائرة مفرغة عند $(2, 3)$، يعني أنّ هذه القاعدة تقابل الفترة $(2, \infty)$ من مجال الاقتران $f(x)$.

إذن: تكون قاعدة هذا الاقتران على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \le 0 \\ 2\,, & 0 < x \le 2 \\ 0.5x + 2, & x > 2 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي

أكتــبُ قاعدة الاقتران المتشــعّب الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.



يوجـد نـوع خـاص مـن الاقترانـات المتشـعّبة يُسـمّى **اقتـران القيمـة المطلقـة** (absolute value function) وهو اقتران يحتــوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري، ومن أمثلته:

$f(x) = |x+2|$ ، و $f(x) = 2|x| + 3$ ، و $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ ، و $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{2x-6}\right|$ ،

تعلّمتُ ســابقًا أنّ القيمة المطلقة لأيّ عدد حقيقي x والتي يُرمز لها بالرمز $|x|$ تســاوي بعده عن الصفر على خط الأعداد، وبما أنّ البعد لا يكون ســالبًا، فإنّ $|x| \ge 0$؛ لذا، يُمكن كتابة $|x|$ بصورة اقتران متشعّب كما يأتي:

$$|x| = \begin{cases} -x\,, & x < 0 \\ x\,, & x \ge 0 \end{cases}$$

ويُمكن إعادة كتابة أيّ اقتران قيمة مطلقة على صورة اقتران متشــعّب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة، وهو ما يُسمّى **إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة.**

أتذكّر

القيمــة المطلقــة لأيّ عدد حقيقــي x والتــي يُرمز لها بالرمز $|x|$ تساوي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

$|x| = x\,, x \ge 0$

$|x| = -x\,, x < 0$

مثال:

$\left|-\frac{1}{2}\right| = \left|+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

مثال 3

أعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = |2x + 4|$

الخطوة 1: أجعلُ ما بداخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x + 4 = 0$ بجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا

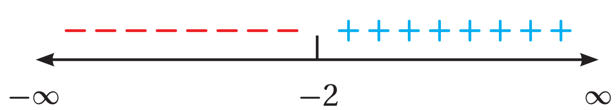
$2x + 4 - 4 = 0 - 4$ بطرح 4

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$ بالقسمة على -2

$x = -2$ بالتبسيط

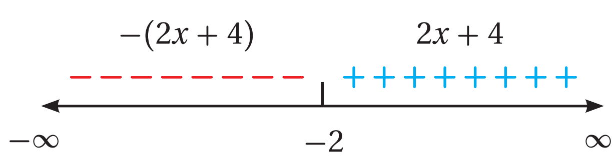
الخطوة 2: أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيه.

أُعيّن صفر المعادلة على خط الأعداد. ولتحديد الإشارة على جانبيه؛ أُعوّض أيّ قيمة أقلّ من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض سالب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يسار -2 سالبة. وأُعوّض أيّ قيمة أكبر من -2 في $2x + 4$ لأجد أنّ ناتج التعويض موجب دائمًا، ما يعني أنّ الإشارة يمين -2 موجبة.



الخطوة 3: أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين صفر المعادلة ويساره.

أكتبُ ما في داخل القيمة المطلقة كما هو في الجزء الموجب، وأكتبُ في الجزء السالب ما في داخل القيمة المطلقة مضروبًا في -1



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4\,, & x < -2 \\ 2x + 4\,, & x \geq -2 \end{cases}$$

أتعلّم

يأخذ الاقتران الخطّي يمين صفره إشارة معامل x نفسها، ويسار صفره عكس إشارة معامل x.

2 $f(x) = |2x^2 + 5x - 3|$

الخطوة 1: أجعلُ ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ بجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا

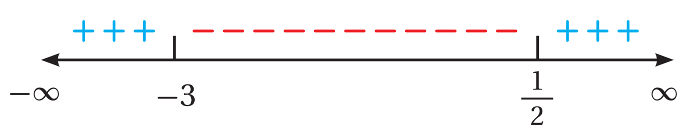
$(2x - 1)(x + 3) = 0$ بتحليل العبارة التربيعية إلى عواملها الأولية

$2x - 1 = 0 \;\; or \;\; x + 3 = 0$ بجعل كلّ عامل يساوي صفرًا

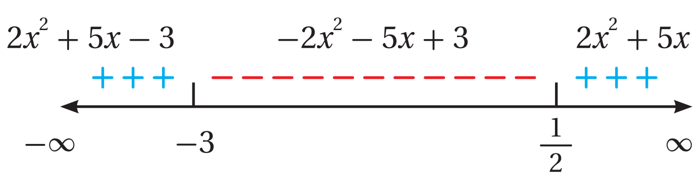
$x = \frac{1}{2} \;\; or \;\; x = -3$ بحلّ كلّ معادلة

الخطوة 2: أُعيّن صفرَي المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدّد الإشارة على جانبيهما.

أُعيّن صفرَي المعادلة على خط الأعداد. ولتحديد الإشـــارة على جانبيهما، أختار قيمة من كلّ منطقة وأُعوّضها لأجد أنّ إشارة المعادلة يسار -3 ويمين $\frac{1}{2}$ موجبة، والإشارة بينهما سالبة.



الخطوة 3: أكتبُ قاعدتَي الاقتران حسب إشارة يمين أصفار المعادلة ويسارها.



الخطوة 4: أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \,, & x < -3 \text{ and } x > \frac{1}{2} \\ -2x^2 - 5x + 3 \,, & -3 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

أتحقق من فهمي

أُعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

a) $f(x) = |-5x + 15|$

b) $f(x) = |5x^2 + x - 3|$

يتكوّن التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$ ، $m \neq 0$ من شعاعين على شكل V متماثلين حول المحور $x = \frac{-b}{m}$، ورأس (vertex) الاقتران هو النقطة التي يصل عندها الاقتران إلى أعلى قيمة أو أقلّ قيمة وإحداثياها $(\frac{-b}{m}, c)$، ويُمكن تمثيله بعدّة طرائق منها: الانعكاس حول المحور x، واستعمال محور التماثل والرأس.

مثال 4

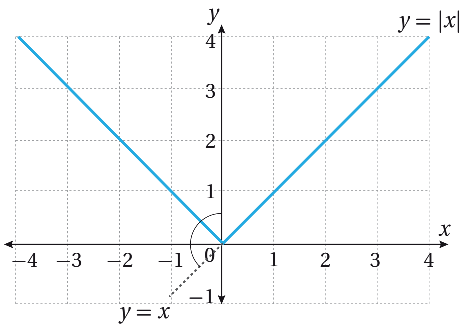
أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، محدّدًا مجاله ومداه:

1 $f(x) = |x|$

الطريقة الأولى: الانعكاس حول محور السينات.

الخطوة 1: أُمثّل المعادلة داخل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا.

أُمثّل المعادلة $y = x$؛ باختيار نقطتين لتمثيله.



الخطوة 2: أعكسُ الجزء الواقع تحت المحور x حول المحور x.

بما أنّ القيمة المطلقة لأيّ عدد لا يُمكن أن تكون سالبة؛ لذا، فإنّه عند أخذ القيمة المطلقة للاقتران، فهذا يعني عكس الجزء الواقع تحت المحور x حول المحور x.

الطريقة الثانية: استعمال محور التماثل والرأس.

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيّا نقطة الرأس $(0, 0)$، ومعادلة محور التماثل $x = 0$

الخطوة 2: أجد نقطتين حول محور التماثل.

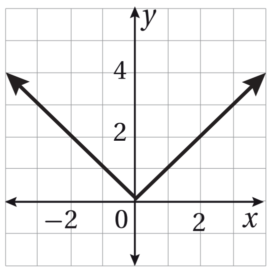
بما أنّ محور التماثل $x = 0$، أختار قيمة لـ x أكبر من 0 (مثلًا 1) وقيمة لـ x أقلّ من 0 (مثلًا -1)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-1	1
$f(x) = \|x\|$	1	1
(x, y)	$(-1, 1)$	$(1, 1)$

الخطوة 3: أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاثة بشكل V.

يُلاحظ من الرسم أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأن المدى $[0, \infty)$



$y = |x|$

2 $f(x) = -|x+2| + 3$

الخطوة 1: أجد إحداثيَي نقطة رأس الاقتران، ومعادلة محور التماثل.

إحداثيا نقطة الرأس $(-2, 3)$، ومعادلة محور التماثل $x = -2$

الخطوة 2 : أجد نقطتين حول محور التماثل.

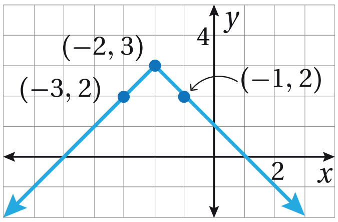
بما أنّ محور التماثل $x = -2$، أختار قيمة لـ x أكبر من -2 (مثلًا -1) وقيمة لـ x أقلّ من -2 (مثلًا -3)، ثم أجد صورتيهما في الاقتران.

x	-3	-1
$f(x) = -\|x+2\| + 3$	2	2
(x, y)	$(-3, 2)$	$(-1, 2)$

الخطوة 3 : أُمثّل النقطتين والرأس بيانيًّا.

أُمثّل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط الثلاثة بشكل V.

ألاحظ من الرسم أنّ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ المدى $(-\infty, 3]$.



أتعلّم

يكون اقتران القيمة المطلقة على الصورة $f(x) = a|mx+b|+c$، $m \neq 0$، مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت $a < 0$

أتحقق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا كلّ اقتران ممّا يأتي، محدّدًا مجاله ومداه:

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |2 - \frac{1}{2}x|$

ويُمكنني أيضًا تمثيل اقتران القيمة المطلقة لمقدار تربيعي؛ باستعمال مفهوم الانعكاس.

مثال 5 أُمثّل الاقتران $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أجد النقاط المهمّة لتمثيل المعادلة داخل اقتران القيمة المطلقة.

أجد النقاط المهمّة لتمثيل منحنى المعادلة التربيعية $y = x^2 - 4x - 5$، وهي: المقطع y، وجذور المعادلة، ورأس القطع المكافئ.

- **المقطع y**: عندما $x = 0$؛ فإنّ قيمة $y = -5$
- **جذور المعادلة**: أجد جذور المعادلة عندما $y = 0$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ بجعل ما في داخل القيمة المطلقة يساوي صفرًا

$(x + 1)(x - 5) = 0$ بتحليل العبارة التربيعية إلى عواملها الأولية

$x + 1 = 0 \text{ or } x - 5 = 0$ بجعل كل عامل يساوي صفرًا

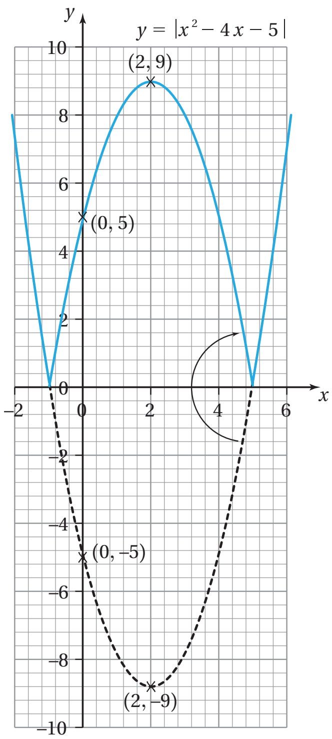
$x = -1 \text{ or } x = 5$ بحلّ كلّ معادلة

- **أجد إحداثيَي رأس القطع المكافئ:**

$\text{vertex} = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ رأس القطع المكافئ

$= \left(\frac{-(-4)}{2}, f\left(\frac{-(-4)}{2}\right)\right)$ بتعويض $b = -4, a = 1$

$= (2, -9)$ بالتبسيط



الخطوة 2: أُمثّل المعادلة داخل اقتران القيمة المطلقة بيانيًّا، ثم أعكسُ الجزء الواقع تحت المحور x حول المحور x.

أتذكّر

يُسمّى منحنى المعادلة التربيعية قطعًا مكافئًا.

أتذكّر

يُمثّل الاقتران $f(x) = ax^2 + bx + c$ قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانت قيمة $a > 0$، ومفتوحًا إلى الأسفل إذا كانت قيمة $a < 0$، ويُمكن إيجاد إحداثيَي رأس القطع المكافئ على النحو الآتي:

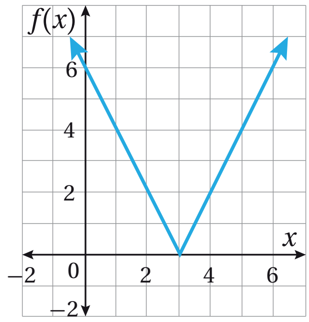
$\text{vertex} = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

أتحقق من فهمي

أُمثّل الاقتران $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$ بيانيًّا.

يُمكن إيجاد قاعدة اقتران القيمة المطلقة لمقدار خطّي؛ إذا أُعطي تمثيله البياني.

مثال 6



أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أجد ميل المعادلة الخطّيّة داخل المطلق.

يظهر من الشكل أنّ التمثيل البياني هو لاقتران قيمة مطلقة خطّي؛ لأنّه على شكل V؛ لذا، يُمكن كتابة قاعدته على الصورة $f(x) = a|mx + b| + c$. حيث m ميل المستقيم $y = mx + b$، وإحداثيا الرأس $(\frac{-b}{m}, c)$.

أُلاحظ من الرسم أنّ الشعاع الأيمن يمرّ بالنقطتين $(5, 4)$ و $(3, 0)$، إذن: فإنّ ميله يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

الخطوة 2: أجد إحداثيَي الرأس، ثم أُعوّض الميل وإحداثيَي الرأس في قاعدة الاقتران.

يظهر من التمثيل البياني أيضًا أنّ الرأس $(3, 0)$، إذن: يُمكن إيجاد قيمة b من الإحداثي x للرأس والميل حيث:

$$x = \frac{-b}{m}$$ الإحداثي x للرأس

$$3 = \frac{-b}{2}$$ بتعويض $m = 2$ و $x = 3$

$$-b = 6$$ بالضرب التبادلي

$$b = -6$$ بالقسمة على -1

وبتعويض الرأس والميل وقيمة b في قاعدة الاقتران؛ فإنّ:

$$f(x) = a|2x - 6| + 0 \longrightarrow f(x) = a|2x - 6|$$

الخطوة 3: أجد قيمة a.

ولإيجاد قيمة a؛ أُعوّض في قاعدة الاقتران إحداثيَي نقطة تقع على منحنى الاقتران، وأحلّ المعادلة الناتجة.

$$f(x) = a|2x - 6|$$ قاعدة الاقتران

$$6 = a|2(0) - 6|$$ بتعويض $(0, 6)$

$$6 = 6a$$ بالتبسيط

$$a = 1$$ بالقسمة على 6

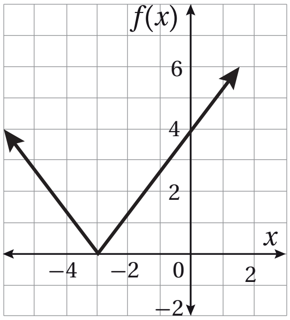
إذن: قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = |2x-6|$.

أتعلّم

يسهل تعويض نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y لإيجاد قيمة a؛ لأنّ قيمة x فيها تساوي صفرًا.

أتحقق من فهمي

أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل بيانيًا في الشكل المجاور.



يُمكن نمذجة الكثير من المواقف الحياتية؛ باستعمال الاقترانات المتشعّبة.

مثال 7 : من الحياة

تحسب شركة الأجرة الأسبوعية لعمّالها في الساعة. أجرة ساعة العمل الواحدة 4 دنانير في أوقات العمل النظامية المعتادة ضمن 40 ساعة عمل في الأسبوع. وتدفع لكلّ ساعة عمل إضافي فوق ذلك أجرة ساعة ونصف من ساعات العمل المعتاد. أكتبُ اقترانًا لحساب الأجرة الأسبوعية لعامل اشتغل x ساعة في أسبوع.

يوجد في المسألة قاعدتان لحساب الأجرة؛ تبعًا لعدد ساعات العمل.

الأجرة	عدد الساعات
$4x$	$0 \le x \le 40$
$4(40) + 6(x - 40)$	$x > 40$

إذن: اقتران الأجرة هو:

$$f(x) = \begin{cases} 4x\,, & 0 \le x \le 40 \\ 4(40) + 6(x-40)\,, & x > 40 \end{cases} = \begin{cases} 4x\,, & 0 \le x \le 40 \\ 6x-80\,, & x > 40 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي

زادت شركة رواتب موظفيها الشهرية وفق الأسس الآتية: الرواتب التي تقلّ عن 400 دينار زيدت بنسبة 20%، والرواتب من 400 دينار إلى أقلّ من 600 دينار زيدت بنسبة 10%، والرواتب من 600 دينار وأكثر زيدت 50 دينارًا. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الراتب الجديد لموظّفي الشركة.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2\ , & x<-1\\ 4x-3\ , & -1\le x\le 4\\ 2, & x>4\end{cases}$ ، و $h(x)=\begin{cases}3x-1\ , & x\neq 1\\ 5\ , & x=1\end{cases}$ فأجد كلًّا من:

1) 1) $f(-2)$
2) $f(-1)$
3) $f(0)$
4) $f(4)$
5) $f(8)$
6) $h(0)$
7) $h(3)$
8) $h(1)$
9) $h(-2)$

10) أجد أصفار الاقتران $f(x)$ أعلاه.

أعيد تعريف كلّ من الاقترانات الآتية:

11) $f(x)=|7x-5|+3$

12) $f(x)=|5x^2+13x-6|-2$

أُمثّل كلاًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجالها ومداها:

13) $f(x)=\begin{cases}x+3\ , & x<-2\\ -2x-3\ , & x\ge -2\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}2x+5\ , & x<4\\ x+1\ , & 4\le x\le 6\\ -3\ , & x>6\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}|x|\ , & x<3\\ x+2\ , & x\ge 3\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}3-2x\ , & x<-1\\ 6\ , & -1\le x\le 3\\ x^2\ , & x>3\end{cases}$

17) $f(x)=2|x|+3$

18) $f(x)=|3x-12|$

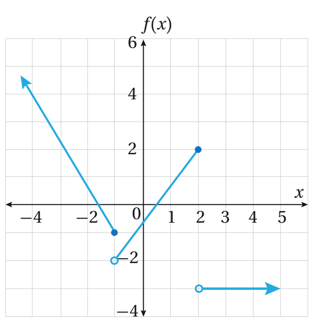
19) $f(x)=|x^2-4|$

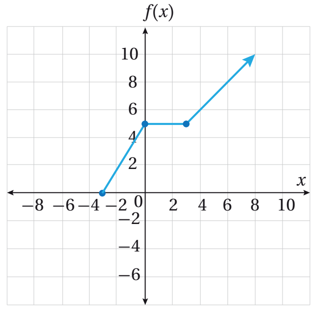
20) $f(x)=|2x+4|+3$

21) $f(x)=-|2x-4|$

22) $f(x)=|2-3x|-2$

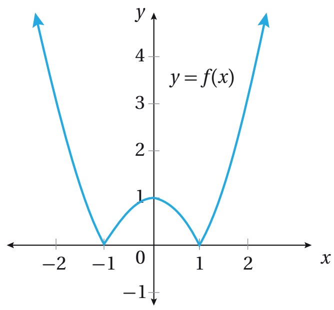
أكتبُ قاعدة الاقتران المتشعّب الممثّل في كلّ من الشكلين الآتيين:

23)


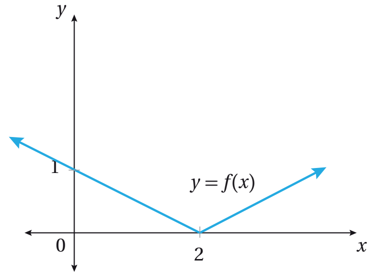
24)


أكتبُ قاعدة اقتران القيمة المطلقة الممثّل في كلّ الشكلين الآتيين:

26



25



27 **ترشيد استهلاك المياه:** أستعملُ الجدول المجاور مع الجدول الوارد في بداية الدرس؛ لكتابة اقتران متشعّب يُمكنني استعماله لحساب ثمن المياه لأيّ كمّية مستهلكة $x\ \text{m}^3$.

شرائح الاستهلاك m^3 مقرّبة إلى أقرب	التعرفة JOD/m^3
73 – 90	1.200
91 – 126	1.620
$x \geq 127$	1.920

خيمة: يُمثّل الاقتــران $f(x) = -1.4\,|x-2.5| + 3.5$ الوجه الأمامي لخيمة، حيث x و y تُقاسان بالقدم، والمحور x يُمثّل الأرض.

28 أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

29 أجد مجال الاقتران ومداه.

30 **أعمال:** يتقاضى مندوب مبيعات راتبًا شــهريًّا مقداره 500 دينار، وعمولة بنسبة 1% لأول 20000 دينار من مبيعاته الشــهرية، وإذا زادت مبيعاته على 20000 دينار يأخذ عمولة بنسبة 1.5% ممّا يزيد على 20000 دينار. أكتبُ اقترانًا متشعّبًا لحساب الدخل الشهري لهذا المندوب.

عاصفة: تبدأ العاصفة المطرية بالهطل على شــكل رذاذ ثم يزداد معدل الهطل، ثم تعود ثانية للهطل على شــكل رذاذ، ويُمثّل الاقتــران $r = -0.5|t-1| + 0.5$، معدل الهطل r (بالإنش لكلّ ساعة)، حيث t الزمن بالساعات منذ بداية الهطل.

31 أُمثّل اقتران معدّل العطل بيانيًّا.

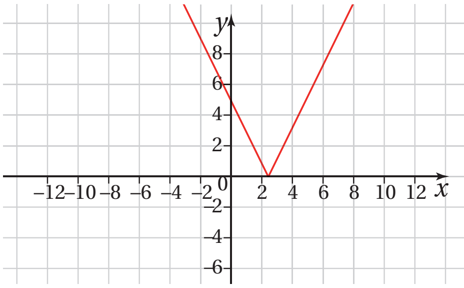
32 أجد كم ساعة استمر الهطل.

33 بعد كم ساعة كان أعلى معدل هطل؟ أُبرّر إجابتي.

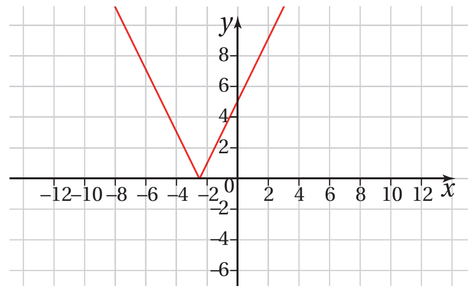
مهارات التفكير العليا

34 **تبرير:** أيّ التمثيلات الآتية تُمثّل الاقتران $f(x) = |2x-5|$؟ أُبرّر إجابتي:

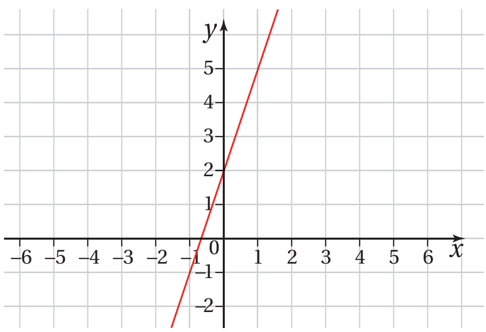
a)



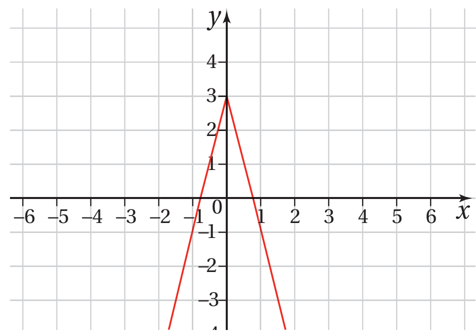
b)



c)



d)



35 **تبرير:** هل تُمثّل العلاقة المتشعّبة الآتية اقترانًا؟ أُبرّر إجابتي.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-5\ , & x \leq 2 \\ -x+2\ , & x \geq 1 \end{cases}$$

36 **مسألة مفتوحة:** أكتبُ اقتران قيمة مطلقة $f(x)$ بحيث يكون $f(4) = -5$.

تحدٍّ: يُمكن كتابة المقدار $x^2 + px - q$ على الصورة $(x-2.5)^2 - 0.25$

37 أجد قيمة كلّ من p، و q.

38 أجـد إحداثيَـي كلّ من نقطتَي تقاطع منحنـى $f(x) = |x^2 + px - q|$ مع محور x، والنقطـة التي يكون ميل هذا المنحنى عندها صفرًا.

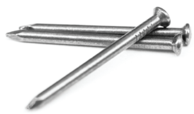
الدرس 2

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations and Inequalities

فكرةُ الدرسِ
- حل معادلات تتضمّن قيمة مطلقة لتعابير جبرية خطّية.
- حل متباينات تتضمّن قيمة مطلقة لتعابير جبرية خطّية.

المصطلحاتُ معادلة قيمة مطلقة، متباينة قيمة مطلقة.

مسألةُ اليومِ تُنتج آلة مسامير فولاذية طولها 5 cm، ويُسمح أن يزيد طول المسمار على الطول المحدّد أو يقلّ عنه بمقدار 0.02 cm. أكتبُ معادلة وأحلّها لإيجاد الحدّين الأدنى والأعلى لطول المسمار الذي تُنتجه هذه الآلة.



معادلـة القيمة المطلقة (absolute value equation) هي المعادلة التي تحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري.

تعلّمتُ سابقًا أنّ القيمة المطلقة للمتغيّر x يُمكن إعادة تعريفها على صورة اقتران متشعّب:

$$|x| = \begin{cases} -x\,, & x < 0 \\ x\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

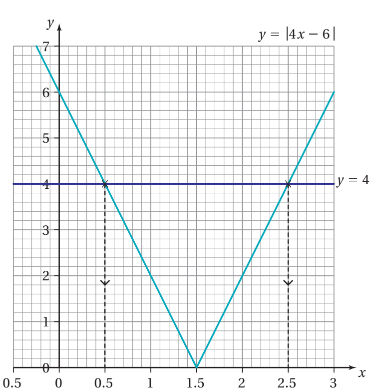
ويُمكن الاستفادة من هذه الحقيقة في حل المعادلة $|x| = c$ حيث $c > 0$؛ إذ أنّه يوجد للمتغيّر x قيمتان محتملتان: قيمة موجبة وهي c، وقيمة سالبة وهي $-c$، فإذا كان $|x| = 4$، فإنّ $x = 4$، أو $x = -4$، ففي الحالتين $|x| = 4$ ويُمكن تعميم هذه القاعدة لحل أيّ معادلة تحتوي على قيمة مطلقة في أحد طرفَيها.

مثال 1

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

1 $|4x - 6| = 4$

يُمكنني حلّ معادلة القيمة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = |4x - 6|$، وَ $y = 4$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه أُلاحظ أن منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0.5$ وعندما $x = 2.5$، وهما حلا المعادلة ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



$|4x - 6| = 4$ المعادلة الأصلية

$4x - 6 = 4 \quad or \quad 4x - 6 = -4$ تعريف القيمة المطلقة

$4x = 10 \quad or \quad 4x = -2$ بجمع 6 إلى طرفَي كلّ معادلة

$x = 2.5 \quad or \quad x = 0.5$ بقسمة طرفَي كلّ معادلة على 4

للتحقّق؛ أُعوّض قيمتَي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = 2.5$

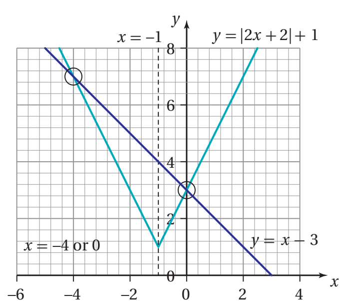
$$|4(2.5) - 6| = 4$$
$$|10 - 6| = 4$$
$$|4| = 4 \ \checkmark$$

عندما $x = 0.5$

$$4(0.5) - 6| = 4$$
$$|2 - 6| = 4$$
$$|-4| = 4 \ \checkmark$$

2 $|2x + 2| + 1 = 3 - x$

يُمكنني حلّ معادلة القيمة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = |2x + 2| + 1$، $y = 3 - x$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0$ وعندما $x = -4$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



$|2x+2| + 1 = 3 - x$ المعادلة الأصلية

$|2x+2| + 1 - 1 = 3 - x - 1$ بطرح 1 من كلا الطرفين

$|2x+2| = 2 - x$ بالتبسيط

$2x + 2 = 2 - x \quad or \quad 2x + 2 = -(2 - x)$ تعريف القيمة المطلقة

$2x + 2 = 2 - x \quad or \quad 2x + 2 = x - 2$ أُبسّط كل معادلة

$3x = 0 \quad or \quad x = -4$ بإعادة ترتيب المعادلتين

$x = 0 \quad or \quad x = -4$ بقسمة طرفَي المعادلة الأولى على 3

للتحقّق؛ أُعوّض قيمتَي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -4$

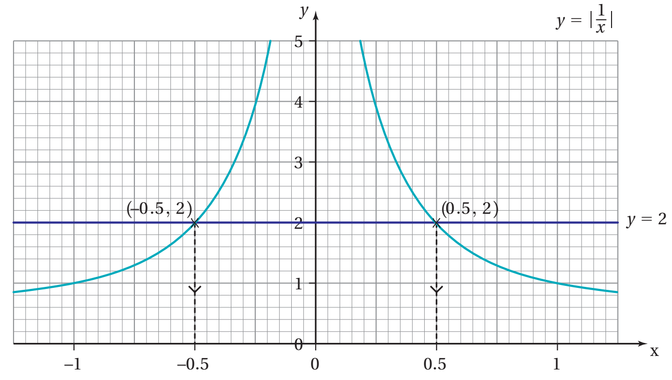
$$|2(-4) + 2| + 1 = 3 - (-4)$$
$$|-6| + 1 = 3 + 4$$
$$7 = 7 \ \checkmark$$

عندما $x = 0$

$$|2(0) + 2| + 1 = 3 - (0)$$
$$|2| + 1 = 3$$
$$3 = 3 \ \checkmark$$

3 $\left|\frac{1}{x}\right| = 2$

يُمكنني حلّ معادلة القيمة المطلقة بتمثيل المعادلتين $y = \left|\frac{1}{x}\right|$، $y = 2$ في المستوى الإحداثي نفسـه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَـي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 0.5$ وعندما $x = -0.5$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



المعادلة الأصلية $\left|\frac{1}{x}\right| = 2$

تعريف القيمة المطلقة $\frac{1}{x} = 2 \quad or \quad \frac{1}{x} = -2$

خاصية الضرب التبادلي $2x = 1 \quad or \quad -2x = 1$

بقسمة طرفَي كلّ معادلة على معامل x $\quad x = 0.5 \quad or \quad x = -0.5$

للتحقّق؛ أُعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -0.5$

$\left|\frac{1}{-0.5}\right| = 2$

$|2| = 2$ ✓

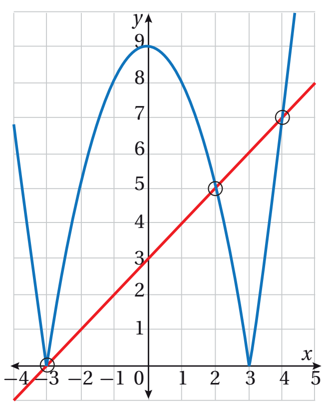
عندما $x = 0.5$

$\left|\frac{1}{0.5}\right| = 2$

$2 = 2$ ✓

4 $|x^2 - 9| = x + 3$

يُمكنني حـلّ هذه المعادلـة بتمثيل المعادلتيـن $y = |x^2 - 9|$ ، $y = x + 3$ في المسـتوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندمـا $x = -3$، وعندمـا $x = 2$، وعندما $x = 4$. أي أن لها ثلاثة حلـول هي: $-3, 2, 4$، ويُمكنني التحقّق من ذلك جبريًّا.



المعادلة الأصلية $\quad |x^2 - 9| = x + 3$

تعريف القيمة المطلقة $\quad x^2 - 9 = x + 3 \quad \text{or} \quad x^2 - 9 = -(x + 3)$

أحلّ كلّ معادلة على حدة:

المعادلة الأولى:

المعادلة الأولى	$x^2 - 9 = x + 3$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^2 - x - 12 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية إلى عواملها الأولية	$(x + 3)(x - 4) = 0$
بجعل كل عامل يساوي صفرًا	$x + 3 = 0 \quad or \quad x - 4 = 0$
بحلّ كلّ معادلة	$x = -3 \quad or \quad x = 4$

المعادلة الثانية:

المعادلة الثانية	$x^2 - 9 = -(x + 3)$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^2 + x - 6 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية إلى عواملها الأولية	$(x - 2)(x + 3) = 0$
بجعل كل عامل يساوي صفرًا	$x - 2 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$
بحلّ كلّ معادلة	$x = 2 \quad or \quad x = -3$

إذن: حلول هذه المعادلة هي: $x = -3 \quad or \quad x = 2 \quad or \quad x = 4$

للتحقّق؛ أُعوّض قِيَم x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = 4$	عندما $x = 2$	عندما $x = -3$
$\lvert(4)^2 - 9\rvert = (4) + 3$	$\lvert(2)^2 - 9\rvert = (2) + 3$	$\lvert(-3)^2 - 9\rvert = (-3) + 3$
$7 = 7$ ✓	$5 = 5$ ✓	$0 = 0$ ✓

أتحقق من فهمي أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

a) $|4x + 8| = 4$

b) $2|x + 1| - x = 3x - 4$

c) $\left|\dfrac{1}{2x - 7}\right| = 2$

d) $|x^2 - 2| = x$

تعلّمتُ في المثال السابق حلّ معادلات تحوي قيمة مطلقة في أحد طرفَي المعادلة، أمّا إذا كانت المعادلة تحوي قيمة مطلقة على طرفَي المساواة مثل $|A| = |B|$، فإنّه يوجد 4 حلول ممكنة لهذه المعادلة:

$$(1)\ A = B \qquad (2)\ A = -B \qquad (3)\ -A = B \qquad (4)\ -A = -B$$

وبتطبيق خصائص المساواة؛ فإنّ المعادلتين (1) و(4) متكافئتان، وكذلك بالنسبة إلى المعادلتين (2) و(3)، ما يعني أنّ الحلول جميعها يُمكن إيجادها من المعادلتين (1) و(2).

مثال 2

أحلّ المعادلة $|2x + 4| = |3x + 1|$:

الحالة الأولى $A = B$

$2x + 4 = 3x + 1$

بطرح 4 من طرفَي المعادلة

$2x = 3x - 3$

بطرح $3x$ من طرَفي المعادلة

$-x = -3$

بضرب الطرفين في -1

$x = 3$

الحالة الثانية $A = -B$

$2x + 4 = -(3x + 1)$

خاصية توزيع الضرب على الجمع

$2x + 4 = -3x - 1$

بطرح 4 من طرفَي المعادلة

$2x = -3x - 5$

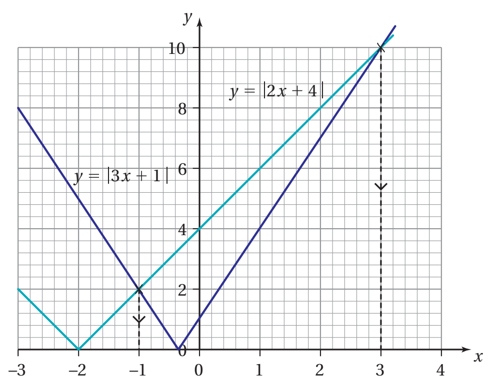
بجمع $3x$ إلى طرفَي المعادلة

$5x = -5$

بقسمة طرفَي المعادلة على 5

$x = -1$

إذن: لهذه المعادلة حلّان، هما -1 و 3



ويُمكنني حلّ المعادلة السابقة؛ بتمثيل المعادلتين $y = |2x + 4|$، $y = |3x + 1|$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. ومنه ألاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان عندما $x = 3$ وعندما $x = -1$.

أتذكّر

أستعمل خصائص المساواة لحل معادلة تحتوي على متغيّر على طرفَي المساواة.

أتحقق من فهمي

أحلّ المعادلة $2|x-1| = \dfrac{|2x+4|}{2}$

توجد مواقف حياتية تُستعمل فيها معادلات القيمة المطلقة.

مثال 3 : من الحياة

درجة حرارة الجسم الطبيعية: تكون درجة حرارة جسم الإنسان المقيسة من تحت لسانه طبيعية إذا كان الفرق المطلق بينها وبين $36.8°\ C$ يساوي $0.5°$، أكتبُ معادلة أجدُ عن طريقها الحدّين الأعلى والأدنى لدرجة حرارة جسم الإنسان الطبيعية.

الدرجة المتوسطة هي $36.8°$، والفرق هو $0.5°$، فإذا دلّ المتغير x على درجة حرارة الجسم تكون المعادلة المطلوبة $|x - 36.8°| = 0.5°$

المعادلة الأصلية	$\lvert x - 36.8°\rvert = 0.5°$
تعريف القيمة المطلقة	$x - 36.8° = 0.5°$ *or* $x - 36.8° = -0.5°$
بجمع $36.8°$ لطرفَي كلّ معادلة	$x = 36.8° + 0.5°$ *or* $x = 36.8° - 0.5°$
بالتبسيط	$x = 37.3°$ *or* $x = 36.3°$

إذن: الحد الأدنى لدرجة جسم الإنسان الطبيعية هي $36.3°$ C والحد الأعلى $37.3°$ C

أتحقق من فهمي

طعام: لصنع مسحوق الكاكاو؛ تُحمّص بذوره على درجة حرارة لا تزيد على $300°$ F أو تقلّ عنها بأكثر من $25°$ F، أكتبُ معادلة قيمة مطلقة وأجد عن طريقها الحدّين الأعلى والأدنى لدرجة حرارة تحميص بذور الكاكاو.

معلومة

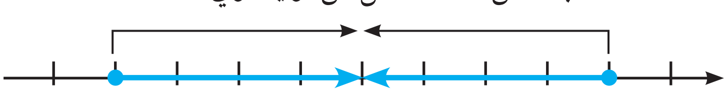
تُقاس درجة الحرارة باستعمال مقياس حرارة زجاجي يحتوي على الزئبق، أو موازين الحرارة الإلكترونية. ويُمكن قياس درجة الحرارة في الفم (تحت اللسان)، أو تحت الإبط أو في فتحة الشرج، ولكن القياس الأكثر دقّة هو في الفم.

معلومة

نحتاج إلى 400 حبّة كاكاو تقريبًا؛ لإنتاج أقلّ من نصف كيلو شوكولاتة؛ لذا، تمتاز الشوكولاتة الخالصة بسعرها الغالي نسبيًّا.

تعلّمتُ سابقًا أنّ المتباينة جملة رياضية تحوي الرمز $\geq$ ، أو $\leq$، أو $>$، أو $<$، وتُسمى المتباينة التي تحتوي على قيمة مطلقة لمقدار جبري **متباينة القيمة المطلقة** (absolute value inequality)؛ ولحلّ متباينة قيمة مطلقة أستعمل المفاهيم الأساسية لحلّ معادلة القيمة المطلقة، فمثلًا، لحل المعادلة $|x| = 4$، فإنّني أبحثُ عن الأعداد جميعها التي تبعد عن العدد 0 بمقدار 4. ومنه، فإنّه لحلّ المتباينة $|x| \leq 4$ فإنّني أبحثُ عن الأعداد جميعها التي بعدها عن 0 أقلّ من 4 أو يساويها، ويُمكنني تمثيل مجموعة الحلّ على خط الأعداد كالآتي:

البعد عن العدد 0 أقل من أو يساوي 4



وبالاستعانة بخط الأعداد أعلاه؛ أُلاحظ أنّ مجموعة حلّ المتباينة $|x| \leq 4$ هي $x \geq -4$ و $x \leq 4$ ويُمكنني التعبير عنها باستعمال المتباينة المركّبة $-4 \leq x \leq 4$ أو يُمكنني التعبير عنها بالفترة $[-4, 4]$.

مفهومٌ أساسيٌّ

متباينة القيمة المطلقة (أقلّ من)

إذا كان X يُمثّل مقدارًا جبريًّا وكان k عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ:

$$|X| < k \Leftrightarrow -k < X < k$$

والقاعدة صحيحة أيضًا إذا كانت إشارة المتباينة $\leq$

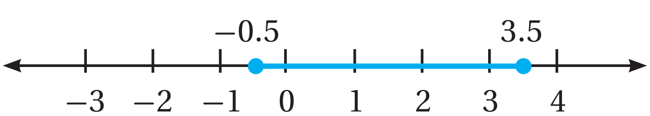
مثال 4

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

1 $|2x - 3| \leq 4$

$|2x-3| \leq 4$	المتباينة الأصلية
$-4 \leq 2x - 3 \leq 4$	حلّ متباينة القيمة المطلقة ($\leq$)
$-1 \leq 2x \leq 7$	بجمع 3 إلى حدود المتباينة جميعها
$-0.5 \leq x \leq 3.5$	بقسمة حدود المتباينة جميعها على 2

إذن: مجموعة الحلّ هي $[-0.5, 3.5]$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



أتذكّر

أستعملُ رمز الفترة المغلقة للتعبيـر عـن المتباينة التي تحوي مسـاواة، وأستعملُ رمز الفترة المفتوحة للتعبير عن المتباينة التي لا تحوي مساواة.

2 $|3x + 7| < -5$

بما أنّ القيمة المطلقة لأيّ قيمة تساوي عددًا موجبًا؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة هي المجموعة الخالية { } أو Φ

أتذكّر

يُرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز { }، أو الرمز Φ (تُقرأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

أتحقق من فهمي

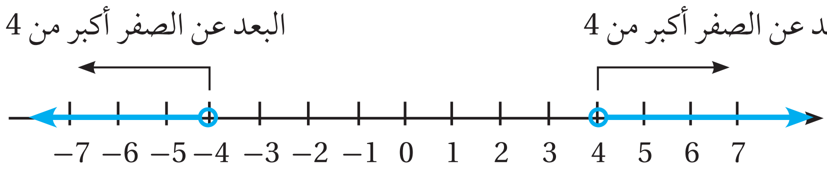
أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

a) $|3x - 4| < 5$

b) $|0.5x - 1| + 2 \leq 2.5$

c) $|x - 4| < -1$

تعلّمتُ في المثال الســابق حلّ متباينة القيمة المطلقة (أقلّ من)، ولحلّ متباينة القيمة المطلقة (أكبــر من) مثل $|x| > 4$، فإنّني أبحث عن الأعداد جميعها التي بعدها عن 0 أكبر من 4، وهي تُمثّل الأعداد الأقلّ من -4 أو الأعداد الأكبر من 4، ويُمكنني تمثيل مجموعة الحلّ على خط الأعداد كالآتي:



أُلاحظ من التمثيل أعلاه، أنّه يوجد مجموعتا حــلّ منفصلتان، وعندها تكون مجموعة الحلّ هي: $x > 4$ أو $x < -4$ أو يُمكنني التعبير عنها باتحاد فترتين منفصلتين $(-\infty, 4)\cup(4, \infty)$

مفهومٌ أساسيٌّ

متباينة القيمة المطلقة (أكبر من)

إذا كان X يُمثّل مقدارًا جبريًّا وكان k عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنّ

$$|X| > k \Leftrightarrow X < -k \;\; or \;\; X > k$$

والقاعدة صحيحة أيضًا إذا كانت إشارة المتباينة $\geq$

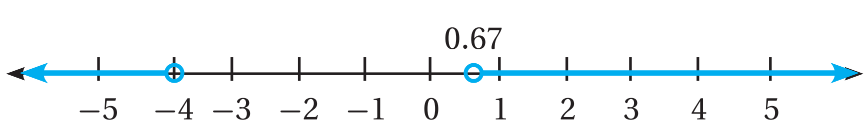
مثال 5

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

1 $|3x + 5| > 7$

$\|5x+ 5 \| > 7$	المتباينة الأصلية
$3x+5 < -7 \quad or \quad 3x + 5 > 7$	حلّ متباينة القيمة المطلقة (>)
$3x < -12 \quad or \quad 3x > 2$	بطرح 5 من طرفَي كل متباينة
$x < -4 \quad or \quad x > 0.67$	بقسمة طرفَي كل متباينة على 3

إذن: مجموعة الحلّ هي: $(-\infty, -4)\cup(0.67, \infty)$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



2 $-\frac{1}{3}\left|3+\frac{x}{2}\right| \leq -2$

المتباينة الأصلية: $-\frac{1}{3}\left|3+\frac{x}{2}\right| \leq -2$

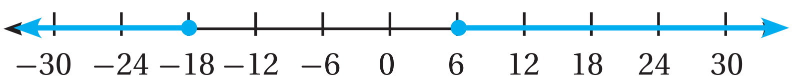
بضرب طرفَي المتباينة في -3، عكس اتّجاه المتباينة: $\left|3+\frac{x}{2}\right| \geq 6$

حلّ متباينة القيمة المطلقة $(>)$: $3+\frac{x}{2} \leq -6 \quad or \quad 3+\frac{x}{2} \geq 6$

بطرح 3 من طرفَي كلّ المتباينة: $\frac{x}{2} \leq -9 \quad or \quad \frac{x}{2} \geq 3$

بضرب طرفَي كلّ متباينة في 2: $x \leq -18 \quad or \quad x \geq 6$

إذن: مجموعة الحلّ هي $(-\infty, -18]\cup[6, \infty)$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



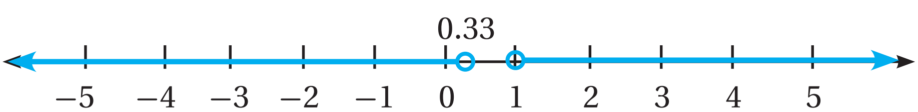
3 $|2x-1| > x$

حلّ متباينة القيمة المطلقة $(>)$: $2x-1 < -x \quad or \quad 2x-1 > x$

بإعادة ترتيب المتباينتين: $3x < 1 \quad or \quad x > 1$

بقسمة طرفَي المتباينة الأولى على 3: $x < 0.33 \quad or \quad x > 1$

إذن: مجموعة الحلّ هي $(-\infty, 0.33)\cup(1, \infty)$، وتُمثّل على خط الأعداد كما يأتي:



أتحقق من فهمي

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

a) $\frac{1}{3}|2x+4| > 2$ **b)** $\frac{|2x+3|}{2} \geq 2x$ **c)** $-2|3x+4| < -8$

تعلّمتُ في المثالين السابقين حلّ متباينة تحوي قيمة مطلقة في أحد طرفيها، ويُمكن أن تحوي المتباينة قيمة مطلقة في طرفيها، عندئذ يُمكن حلّها باتّباع الإجراءات الآتية:

- مساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة ببعضهما، وحلّ المعادلة الناتجة.
- مساواة أحد المقدارين داخل القيمة المطلقة بمعكوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.
- اختيار عدد بين الحلّين وتعويضه في المتباينة، فإذا كانت الجملة صحيحة تكون مجموعة حلّ المتباينة الأصلية هي مجموعة الأعداد الواقعة بين الحلّين، وإلّا كانت مجموعة الأعداد الواقعة خارج الحلّين.

أتذكّر

يتغيّر اتّجاه إشارة المتباينة عند ضرب طرفَيها في عدد سالب، أو قسمتهما عليه. فمثلًا، تصبح $-x > a$ بعد ضرب طرفيها في العدد -1، $x < -a$ حيث a عدد حقيقي.

مثال 6

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

1 $|2x+1| > |3x-2|$

الخطوة 1: مساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة ببعضهما، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة	$2x+1 = 3x-2$
بطرح $3x$ من كلا الطرفين	$2x-3x+1 = -2$
بطرح 1 من طرفَي المعادلة	$-x = -3$
بقسمة طرفَي المعادلة على -1	$x = 3$

الخطوة 2: مساواة أحد المقدارين داخل القيمة المطلقة بمعكوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة أحد المقدارين بمعكوس الآخر	$2x+1 = -(3x-2)$
خاصية توزيع الضرب على الجمع	$2x+1 = -3x+2$
بجمع $3x$ إلى طرفَي المعادلة	$2x+3x+1 = 2$
بطرح 1 من طرفَي المعادلة	$5x = 1$
بقسمة طرفَي المعادلة على 5	$x = \frac{1}{5}$

إذن: الحلّان الناتجان $x = 3$ و $x = \frac{1}{5}$

الخطوة 3: تحديد مجموعة الحلّ.

أختار عددًا بين الحلّين وليكن $x = 2$، ثم أُعوّضه في المتباينة $|2x+1| > |3x-2|$

$$|2(2)+1| > |3(2)-2|$$

$$|5| > |4|$$

$$5 > 4 \quad ✓$$

بما أنّ العدد 2 حقّق المتباينة؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة تقع بين العددين $x = \frac{1}{5}$ و $x = 3$

إذن: مجموعة حلّ هذه المتباينة هي: $\frac{1}{5} < x < 3$ أو الفترة $(\frac{1}{5}, 3)$

2 $|3x - 2| \geq |2x + 5|$

الخطـوة 1 : مسـاواة المقداريـن داخـل القيمـة المطلقـة ببعضهما، وحـلّ المعادلة الناتجـة.

بمساواة المقدارين داخل القيمة المطلقة	$3x-2 = 2x+5$
بطرح $2x$ من كلا الطرفين	$3x- 2x -2 = 5$
بجمع 2 إلى طرفَي المعادلة	$x = 7$

الخطوة 2 : مسـاواة أحـد المقدارين داخل القيمـة المطلقة بمعكـوس المقدار الآخر، وحلّ المعادلة الناتجة.

بمساواة أحد المقدارين بمعكوس الآخر	$3x-2 = -(2x+5)$
خاصية توزيع الضرب على الجمع	$3x-2 = -2x-5$
بجمع $2x$ إلى طرفَي المعادلة	$3x + 2x -2 = -5$
بجمع 2 إلى طرفَي المعادلة	$5x = -3$
بقسمة طرفَي المعادلة على 5	$x = \frac{-3}{5}$

إذن: الحلّان الناتجان $x = 7$ و $x = \frac{-3}{5}$

الخطوة 3 : تحديد مجموعة الحلّ.

أختار عددًا بين الحلّين وليكن $x = 0$، وأُعوّضه في المتباينة $|3x-2| \geq |2x + 5|$

$$|3(0) - 2| \geq |2(0) + 5|$$

$$|-2| \geq |5|$$

$$2 \geq 5 \quad ✗$$

بما أنّ العدد 0 لم يُحقّق المتباينة؛ فإنّ مجموعة حلّ المتباينة تقع خارج العددين $x = \frac{-3}{5}$ و $x = 7$

إذن: مجموعة حلّ هذه المتباينة هي: $x \leq -\frac{3}{5}$ or $x \geq 7$ أو الفترتين $(-\infty, -\frac{3}{5}] \cup [7, \infty)$

أتحقق من فهمي

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

a) $|3x + 5| > |x - 1|$

b) $|2 - 3x| \leq |4x + 3|$

مثال 7 : من الحياة

معدّل كتلــة التفّاحة في صندوق تفّاح هو **200 g**، وقد تختلف الكتلــة الفعلية للتفّاحــة بما لا يتجاوز **4%** مــن هذا المعدّل. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد عــن طريقها مدى الكتلة الفعلية للتفّاحة الواحدة في هذا الصندوق.

اختلاف 4% من 200 g يساوي:

$$4\% \times 200 = \frac{4}{100}(200) = 8$$

أي إنّ كتلة التفّاحــة قد تزيد على المعدل أو تقلّ عنه بمقدار 8 g على الأكثر. فإذا رمزنا لكتلة التفّاحة بالرمز x؛ فإنّ $|x-200| \leq 8$ هي المتباينة التي تُعبّر عن هذه المسألة.

ولإيجاد مدى كتلة التفّاحة أحلّ هذه المتباينة.

$-8 \leq x - 200 \leq 8$ حلّ متباينة القيمة المطلقة ($\leq$)

$192 \leq x \leq 208$ بجمع 200 لحدود المتباينة جميعها

إذن: مجموعة الحلّ هي: $192 \leq x \leq 208$

وهذا يعني أنّ مدى كتلة التفّاحة الواحدة هو من 192 g إلى 208 g

أتحقق من فهمي

صحّة: يصل مســتوى السكر في دم الانســان إلى مستوى حرج وخطير؛ إذا زاد مســتوى الســكر في الدم أو انخفض بأكثر من **38 mg** عن المعدل الطبيعي البالغ **88 mg**. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد عن طريقها مستويات سكر الدم الخطرة.

أتدرب وأحل المسائل

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

1. $|3x-4| = 2$
2. $\left|\frac{x-4}{2}\right| = 7$
3. $3|2x-3| - 7 = 2$
4. $-4|5x-1| = -12$
5. $8b = |6b-4|$
6. $|x-2| = 3x + 2$
7. $0.5\,|x-2| = 3\,|0.5x-2|$
8. $|2x^2-3| = 5x$
9. $|2x^2 + 9x + 5| = 9 + 2x$
10. $\left|\frac{2x+1}{2}\right| = \left|\frac{3x-2}{4}\right|$
11. $\left|\frac{3x+3}{2x-5}\right| - 4 = 6$
12. $3\,|0.5x + 2| = 0$

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

13 $|2x + 6| < 5$

14 $|4x - 3| > 4$

15 $|3x + 1| - 3 \leq 4$

16 $\left|\frac{2x-3}{2}\right| \geq 6$

17 $|x + 2| > -3$

18 $|3x + 5| < -7$

19 $|-4x - 6| < 14$

20 $-2|2x - 1| \geq -3$

21 $2|3x - 2| + 4 \geq 9$

22 $|3-7x| > 2x$

23 $|x + 1| > 2x + 5$

24 $4-x < |2x-7|$

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية:

25 $|x + 1| \geq 2x + 5$

26 $|5-x| > |x + 4|$

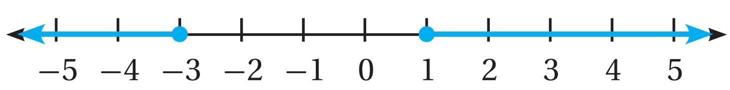
27 $|2x + 3| \geq |x - 2|$

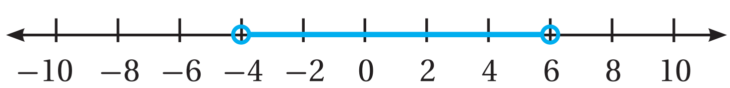
28 $|5x-1| > |2x + 3|$

29 $|3x + 2| < |x - 5|$

30 $|2x - 7| \leq |x + 2|$

أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُمثّل مجموعة حلّها بالرسم الآتي:

31 

32 

33 إذا كان a، و b، و c أعدادًا حقيقية حيث $a \neq 0$، فما عدد الحلول الممكنة للمعادلة $|ax + b| = c$؟

34 **مطالعة:** اتّفق أعضاء نادي مطالعة أن يقرؤوا في أحد فصول كتاب وأن يتوقّفوا عن القراءة ضمن 10 صفحات قبل نهاية الفصل أو بعدها. إذا كان عدد صفحات الكتاب 400 صفحة، وكان الفصل ينتهي في الصفحة 304، فأكتبُ معادلة قيمة مطلقة يُمكنني من حلها إيجاد أول صفحة وآخر صفحة يُمكن أن يتوقّف الأعضاء عن القراءة عندها.

معلومة

الثعابين ليس لديها جفون. في حين أنّ لديها شيئًا يُسمّى بريل، وهو طبقة شفّافة مثل (النظارة)، وعلى شكل الجلد وتُغطّي العينين للحماية.

35 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

36 أُمثّل الاقتران $f(x) = |(x - 2)(x + 6)|$ بيانيًّا.

37 أجد قيمة k التي يكون عندها للمعادلة $|(x - 2)(x + 6)| = k$ ثلاثة حلول.

38 **أفاعي:** تعيش معظم الأفاعي في بيئة تتراوح درجة حرارتها من 75°F إلى 90°F، أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُمثّل درجات حرارة البيئات التي لا تعيش فيها الأفاعي.

39 **إيجارات:** يبحث سعيد عن شقّة للإيجار في أحد الأحياء، وقد وجد أنّ معدّل الإيجار الشهري لشقّة متوسّطة في ذلك الحي هو 250 دينارًا. ولكنّ الإيجار الفعلي للشقّة قد يزيد أو ينقص عن ذلك بمقدار 55 دينارًا على الأكثر. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة أجد عن طريقها مدى الإيجار الشهري لشقّة متوسّطة في هذا الحي.

40 **جيولوجيا:** قد تزيد كتلة 20 قدم مكعّب من الرخام أو تقلّ عن 3400 رطل، بما لا يزيد على 100 رطل. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة تُعبّر عن هذه المعلومات، وأجد مدى الكتل الممكنة لقدم مكعّب واحد من الرخام.

مهارات التفكير العليا

41 **تبرير:** إذا كان $a \neq 0$، فهل للمعادلتين $|x+a| = b$، $|x| + a = b$ و الحلّ نفسه؟ أُبرّر إجابتي.

42 **أكتشف الخطأ:** حلّت كلّ من غادة ومها المعادلة $|2x+9| = 4x$

إجابة غادة

$2x+9 = 4x$ أو $2x+9 = -4x$

$9 = 2x$ ، $6x = -9$

$x = 4.5$ ، $x = -1.5$

لهذه المعادلة حلّان هما 4.5 وَ -1.5

إجابة مها

$2x+9 = 4x$ أو $2x+9 = -4x$

$9 = 2x$ ، $6x = -9$

$x = 4.5$ ، $x = -1.5$

لهذه المعادلة حلّ واحد هو 4.5

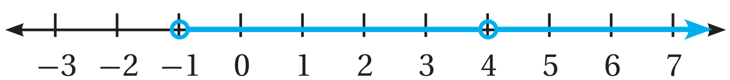
أيّهما كانت إجابتها صحيحة؟ أُبرّر إجابتي.

43 **تحدّ:** أحلّ المعادلة $|2x+1| + 5 = |7-3x|$

44 **أيّها لا ينتمي:** أُحدّد المتباينة التي تختلف عن المتباينات الثلاث الأخرى. أُبرّر إجابتي.

$|2-x| < 6$ ، $2+|-3x+2| \geq 5$ ، $5-|4x+1| \leq 8$ ، $|2x+1| > 3$

45 **أكتشف الخطأ:** مثّلت مريم مجموعة حلّ المتباينة $|2x-3| > 5$ على خط الأعداد على النحو الآتي:



هل كانت إجابتها صحيحة؟ أُبرّر إجابتي.

46 **تحدّ:** أحلّ المتباينة $|x-3| + 2 < -|x+4| + 8$

الدرسُ 3

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Solving system of linear inequalities in two variables

فكرةُ الدرسِ

- تمثيل متباينة خطّية بمتغيّرين بيانيًّا.
- حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا.

المصطلحاتُ منطقة الحلول الممكنة، المستقيم الحدودي، نظام المتباينات الخطّية، مجموعة الحلّ.

مسألةُ اليومِ يوجد في إحدى قاعات الطعام طاولات مستديرة، يوضع حول الواحدة منها 8 مقاعد، وأخرى مستطيلة يوضع حول الواحدة منها 6 مقاعد. ما المتباينة التي تُبيّن عدد الطاولات اللازمة من كل نوع؛ إذا كان عدد الحضور في مأدبة غداء 264 شخصًا على الأقلّ؟ وما عدد الطاولات المستطيلة اللازمة؛ إذا استُعملت في هذا المأدبة 18 طاولة مستديرة؟

تعلّمتُ سابقًا أنّ المتباينة الخطّية جملة رياضية قد تحتوي على متغيّر واحد أو متغيّرين.

ومن أمثلة المتباينات الخطّية بمتغيّرين:

$$2x + 3y \geq 12 \qquad y \leq 2x - 5 \qquad y \leq x$$

تُسمّى مجموعة الأزواج (a, b) التي تُحقّق المتباينة مجموعة حلّ المتباينة، أي إذا عُوّض a بدل x، وb بدل y نتجت عبارة عددية صحيحة.

عند تمثيل المتباينة الخطّية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، فإنّ النقاط التي تُمثّل حلولها الممكنة جميعها تُسمّى: **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region). ولتمثيل المتباينة بيانيًّا، أبدأ برسم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة $(=)$ بدلًا من رمز المتباينة $(\leq ، \geq ، < ، >)$، حيث تُمثّل المعادلة الناتجة مستقيمًا يُسمّى: **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

أتذكّر

لتحديد إذا كان الزوج المرتب $(1, 2)$ يُمثّل حلًّا للمتباينة $x - y \leq 3$، أُعوّضه في المتباينة:

$x - y \leq 3$

$1 - 2 \leq 3$

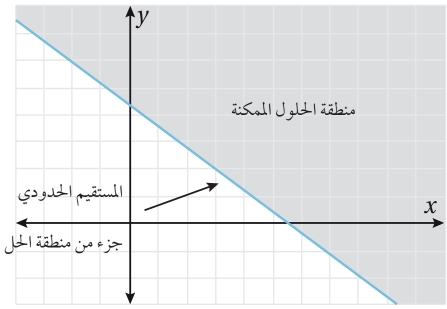
$-1 \leq 3$

ألاحظ أنّ ناتج التعويض حقّق المتباينة. إذن: $(1, 2)$ يُمثّل حلًّا للمتباينة.

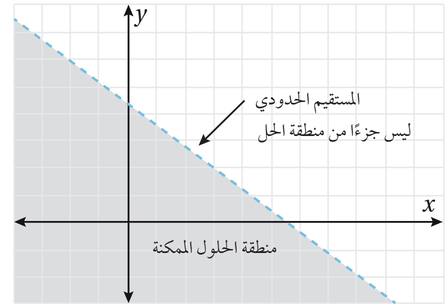
أتعلّم

لكلّ متباينة خطّية معادلة خطّية مرتبطة بها، فمثلًا $3x+2y>2$ هي متباينة خطّية، و $3x+2y=2$ هي المعادلة الخطّية المرتبطة بها.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول الممكنة؛ إذا تضمّنت المتباينة الرمز $\leq$ أو الرمز $\geq$، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي متّصلًا، كما في الشكل المجاور.



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمّنت المتباينة الرمز $>$ أو الرمز $<$، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي مُتقطّعًا، كما في الشكل المجاور.



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول الممكنة، أختار النقطة (a, b) التي لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوّضها في المتباينة الخطّية، فإذا كانت تُحقّقها (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا فأُظلّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 1 **أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:**

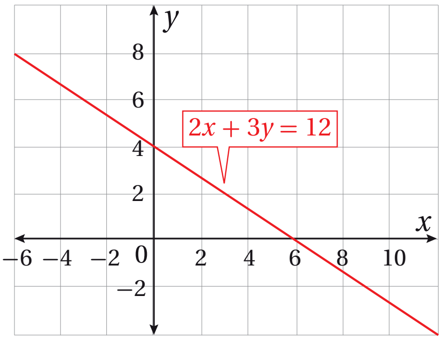
1 $2x + 3y \geq 12$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيم الحدودي بيانيًّا.

أُنشئ جدول قِيَم لإيجاد نقطتَي تقاطع المستقيم الحدودي $2x + 3y = 12$ مع المحورين الإحداثيّين.

x	0	6
y	4	0
(x, y)	$(0, 4)$	$(6, 0)$

أُعيّن النقطتين $(0, 4), (6, 0)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمرّ بهما، وبما أنّه توجد مساواة في رمز المتباينة؛ فإنّه يُرسم متّصلًا كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي ولتكن $(0, 0)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية $2x + 3y \geq 12$

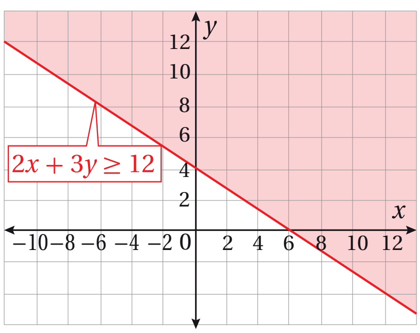
بتعويض $x = 0, y = 0$ $2(0) + 3(0) \overset{?}{\geq} 12$

العبارة غير صحيحة $0 \geq 12$ ✗

إذن: النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة، إذن: فهي لا تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل المجاور.



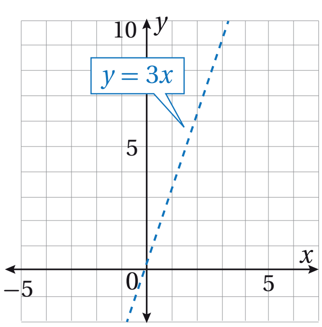
2 $y < 3x$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيم الحدودي.

أُنشئ جدول قِيَم لإيجاد نقطتين تقعان على المستقيم الحدودي $y = 3x$

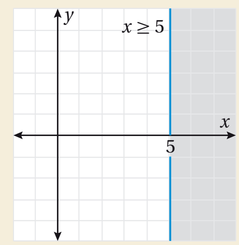
x	1	0
y	3	0
(x, y)	$(1, 3)$	$(0, 0)$

أُعيّن النقطتين $(0, 0), (1, 3)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرسمُ مستقيمًا يمرّ بهما، وبما أنّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة؛ فإنّه يُرسم متقطعًا كما في الشكل المجاور.

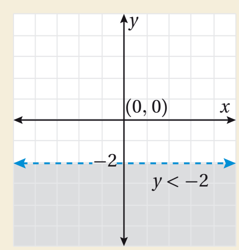


أتذكّر

تُمثّل المتباينة الخطّيّة ذات المتغيّر الواحد، مثل $x \geq 5$ كما في الشكل الآتي:



في حين تُمثّل المتباينة الخطّيّة ذات المتغيّر الواحد، مثل $y < -2$، كما في الشكل الآتي:



أتذكّر

إنّ أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطّيّة بمتغيّرين، هي إيجاد نقطتَي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيّين، ولكن هذا غير ممكن في المستقيمات على الصورة $Ax = By$

الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

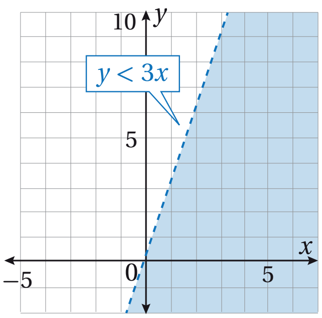
أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي ولتكن $(2, 1)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية	$y < 3x$
بتعويض $x = 2, y = 1$	$1 \overset{?}{<} 3(2)$
العبارة صحيحة	$1 < 6$ ✓

إذن: النقطة $(2, 1)$ تُحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(2, 1)$ حقّقت المتباينة، إذن: فهي تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل المجاور.



أتحقق من فهمي

أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

a) $y \geq -1$ b) $x < 3$ c) $y \geq 0.5x$ d) $2x - y < 8$

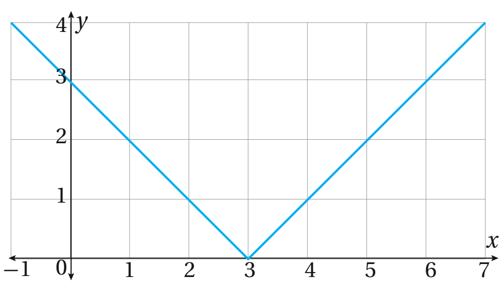
> **إرشاد**
> يُفضّل اختيار النقطة $(0, 0)$ لفحص المتباينة لسهولة إجراء الحسابات. ولكن، إذا وقعت على المستقيم الحدودي فيجب اختيار نقطة غيرها.

إنّ تمثيل متباينة القيمة المطلقة بمتغيّرين بيانيًّا مشابه لتمثيل المتباينة الخطّيّة بمتغيّرين. أُمثّل أولًا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة بالمتباينة، ثم أُحدّد إذا كانت المستقيمات الحدودية متّصلة أم متقطة، ثم أُحدّد المنطقة المراد تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال 2 أُمثّل المتباينة $y \geq |x-3|$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أُمثّل المعادلة المرتبطة بالمتباينة بيانيًّا.

أُمثّل المعادلة المرتبطة $y = |x-3|$، وبما أنّه توجد مساواة في رمز المتباينة؛ فإنّ المستقيمين الحدوديين يُرسمان متّصلين كما في الشكل المجاور.



> **أتذكّر**
> يُمكن تمثيل معادلة القيمة المطلقة بمتغيّرين بعدّة طرائق منها: الانعكاس حول المحور x، واستعمال محور التماثل والرأس.

الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيمين الحدوديّين ولتكن $(0, 0)$، ثم أتحقّق إذا كان ناتج تعويضها في المتباينة صحيحًا أم لا.

المتباينة الأصلية $\quad y \overset{?}{\geq} |3-x|$

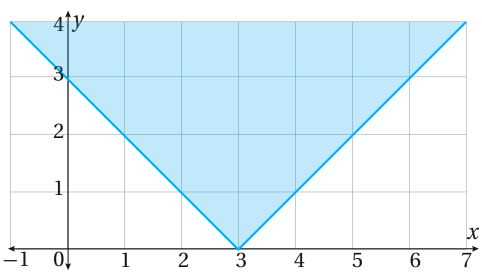
بتعويض $x = 0, y = 0$ $\quad 0 \overset{?}{\geq} |3-0|$

العبارة غير صحيحة $\quad 0 \geq 3$ ✗

إذن: النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة.

الخطوة 3: أُظلّل منطقة الحلول الممكنة.

بما أنّ النقطة $(0, 0)$ لم تحقّق المتباينة، إذن: فهي لا تقع في منطقة الحلول الممكنة؛ لذا، فإنّني أُظلّل الجزء من المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل المجاور.



أتحقق من فهمي **أُمثّل كلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:**

a) $y > -\frac{1}{2}|x|$ b) $y \leq |x-4| + 1$ c) $y \geq |x| - 2$

لغة الرياضيات

تدل عبارة (الزوج المُرتّب يُحقّق متباينة) على أنّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطّيتين أو أكثر. ويُطلق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق المتباينات جميعها اسم **مجموعة الحلّ** (solution set). فمثلًا، يتكوّن النظام الآتي من 3 متباينات:

المتباينة الأولى $\quad x + y < 2$

المتباينة الثانية $\quad -2x + y > -1$

المتباينة الثالثة $\quad x - 3y \leq -2$

يُمثّل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الأولى $\quad -1 + 2 = 1 < 2$

الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الثانية $\quad -2(-1) + 2 = 4 > -1$

الزوج المُرتّب يُحقّق المتباينة الثالثة $\quad -1 - 3(2) = -7 \leq -2$

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لحلّ نظام متباينات، أُمثّل كل متباينة فيه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أُظلّل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها التي تُمثّل حلّ النظام.

مثال 3

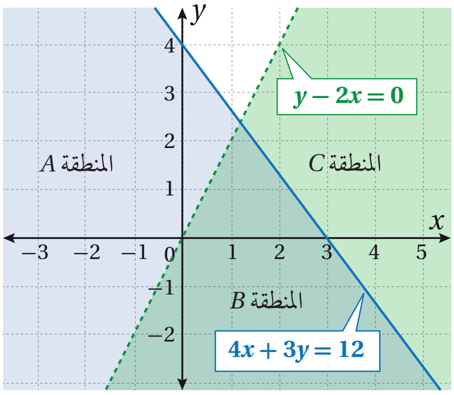
أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$$4x + 3y \le 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيمين الحدوديّين.

أُمثّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين $4x + 3y = 12$ ، $y - 2x = 0$ في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعملُ لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلّ كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدّد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $4x + 3y \le 12$ هو المنطقتان A وB، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن: المنطقة B المشتركة بين منطقتَي حلّ المتباينتين هي منطقة حلّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: التحقُّق من صحة الحَلِّ.

أتحقّق من صحّة الحلّ باختيار زوج مُرتّب يقع في منطقة حلّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثم أُعوّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى	$4x + 3y \le 12$
بالتعويض	$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\le} 12$
العبارة صحيحة	$5 \le 12$ ✓
المتباينة الثانية	$y - 2x < 0$
بالتعويض	$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$
العبارة صحيحة	$-5 < 0$ ✓

أتحقق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقّق من صحّة الحلّ:

a) $y < x + 5$

$3x + 2y \geq 6$

b) $x + y \leq 2$

$x + y \geq 0$

يُمكــن أحيانًا ألّا تتداخــل منطقتا حلّ المتباينتيــن فلا يكون لنظــام المتباينتين حلّ، وتكون مجموعة حلّ النظام هي المجموعة الخالية { } أو Φ.

مثال 4

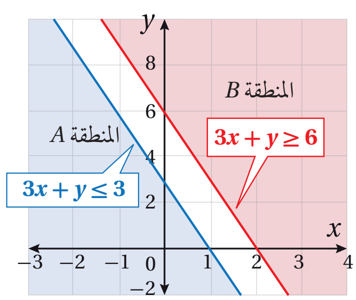
أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$3x + y \leq 3$$

$$3x + y \geq 6$$

الخطوة 1: أُمثّل المستقيمين الحدوديّين.

أُمثّــل المســتقيمين الحدوديّــين $3x + y = 3$، $3x + y = 6$ في المستوى الإحداثي نفسه بيانيًّا، وأســتعملُ لونين مختلفين لتظليل منطقتَي الحلّ، كما في الشكل المجاور.



أتعلّم

ألاحــظ فــي المثــال 3 عــدم وجــود منطقة حلّ مشتركة؛ لأنّ المستقيمين الحدوديّين متوازيان.

الخطوة 2: تحديد منطقة التقاطع بين حلَّي المتباينتين.

ألاحظ أنّ حــلّ المتباينة: $3x + y \leq 3$ هو المنطقة A، وأنّ حــلّ المتباينة: $3x + y \geq 6$ هو المنطقة B، وأنّه لا يوجد تقاطع بين منطقتَــي حلّ المتباينتين. إذن: حلّ النظام هو المجموعة الخالية Φ.

أتحقق من فهمي

أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

a) $x + 3y \leq 6$

$x + 3y > 9$

b) $2x - y \geq 4$

$2x - y \leq 0$

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحلّ هي المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها.

مثال 5

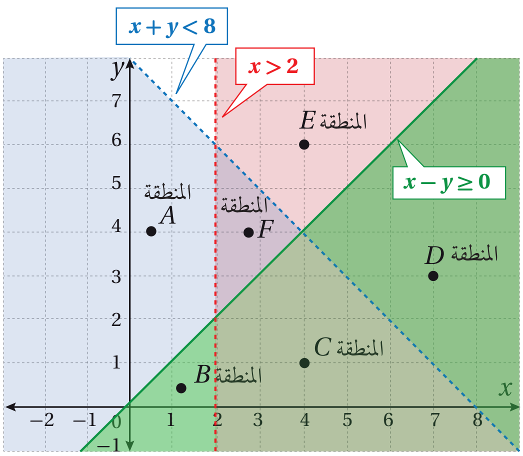
أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$
$$x + y < 8$$
$$x > 2$$

الخطوة 1: أُمثّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية.

أُمثّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية $x - y = 0$، $x + y = 8$، $x = 2$ في المستوى الإحداثي نفسه.

الخطوة 2: أُحدّد منطقة الحلّ.



- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: F, A, B, C.
- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: D, B, C.
- أُظلّل منطقة حلّ المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: F, C, D, E.

أُلاحظ أنّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات الثلاث. إذن: هي منطقة حلّ النظام.

أتحقق من فهمي أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$
$$x - 5y > 6$$
$$2x - 5y < -3$$

أتعلّم

للتحقّق من أنّ الزوج المُرتّب يُمثّل حلًّا لنظام المتباينات، يجب تعويضه في المتباينات جميعها.

تُستعمل أنظمة المتباينات الخطّية في العديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكن بها تحديد القِيَم الممكنة للمتغيّرات وَفق شروط محدّدة.

مثال 6 : من الحياة

نجارة: **يريد نجّار شـــراء نوعين من المسامير، ووجد أنّ ثمن الكيلو جرام الواحد من النوع الأول 4 JD، ومن النوع الثاني 6 JD. إذا أراد شـــراء ما لا يقلّ عن 10 kg من النوعين، ولا يزيد ثمنه الكلي على 48 JD، فأجد مقدار ما يمكنه شراؤه من كل نوع.**

يوجد في هذه المســـألة متغيّران مجهولان هما كمّية المسامير من النوع الأول وكمّية المسامير من النوع الثاني، وتوجد قيود على هذين المتغيّرين محدّدة بحدّ أدنى للكتلة الكلّية لما يشتريه من النوعين، والحد الأعلى لمقدار ما يدفعه للكمّيتين من النوعين.

الخطوة 1: أُعبّر عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطّية.

أفـــرضُ أنّ كتلة المســـامير من النوع الأول هـــي x، ومن النوع الثاني هـــي y، ثم أكتبُ نظام المتباينات الخطّية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة.

لا تقلّ الكتلة الكلّية لنوعَي المسامير عن $10\ kg$	$x + y \geq 10$
لا يزيد الثمن الكلّي لنوعَي المسامير عن $JD\ 48$	$4x + 6y \leq 48$
لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الأول سالبة	$x \geq 0$
لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الثاني سالبة	$y \geq 0$

وبعد تبسيط المتباينة $4x + 6y \leq 48$ بالقســـمة على 2؛ فإنّ نظام المتباينات الذي يُمثّل هذه المسألة هو:

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة 2: أُمثّل نظام المتباينات الخطّية بيانيًّا.

أُمثّل بيانيًّا المســـتقيمات الحدودية $x + y = 10$، $2x + 3y = 24$ في المســـتوى الإحداثي نفسه، مقتصرًا الرسم على الربع الأول؛ لأن $x \geq 0, y \geq 0$، ثم أُظلّل منطقة الحلّ لكلّ متباينة.

أتعلّم

نحتاج في بعض المسائل الحياتيـــة إلـــى إضافـــة الشـــرطين $x \geq 0, y \geq 0$؛ لأنّ قِيَـــم المتغيّرات فيها لا يُمكن أن تكون سالبة، مثل الكتلة والمسافة.

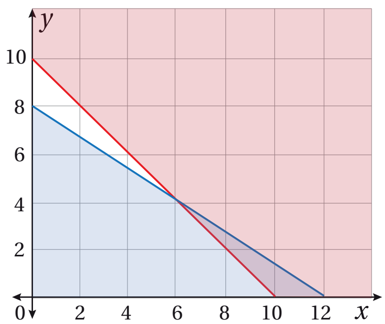
لغة الرياضيات

a علـــى الأكثـــر تُكافِئ $x \leq a$، وb علـــى الأقلّ تُكافِئ $x \geq b$.

أُفكّر

أكتبُ قائمة تحوي النقاط جميعها التي يُمكن أن تكون حلولًا ممكنة لنظام المتباينات الخطّية.

الخطوة 3 : أُحدّد منطقة الحلّ.



أُلاحظ أنّ مناطق الحلّ تتقاطع في منطقة مغلقة على شكل مثلّث هي منطقة حلّ النظام، وأنّ النقاط $(6, 4), (8, 2), (9, 1), (9, 2)$ وغيرها الكثير واقعة في منطقة الحلّ. فمثلًا، يُمكن للنجار شراء 6 kg من النوع الأول و 4 kg من النوع الثاني؛ أو 9 kg من النوع الأول و 1 kg من النوع الثاني، وهكذا لبقية النقاط الواقعة في منطقة الحلّ.

أتحقق من فهمي

خياطة: أراد خيّاط شراء نوعين من الأقمشة، ووجد أنّ ثمن المتر المربع الواحد من الكتان 5 دنانير، ومن الصوف 8 دنانير. إذا أراد شراء ما لا يزيد على $30\ m^2$ من النوعين ولا يقل ثمنه عن 200 دينار، فأجد أكبر كمية كتان يمكنه شراؤها.

أتدرب وأحل المسائل

أُمثّل المتباينات الآتية بيانيًّا:

1) $y < 2x - 1$

2) $3x - 4y \leq 12$

3) $y \geq 0.5x + 3$

4) $-2 \leq x \leq 1$

5) $-2x + 3y \geq 12$

6) $-1 \leq y \leq 4$

7) $y < |x+3|$

8) $y > |x-1| - 2$

9) $y \geq |x| + 4$

أُمثّل منطقة حلّ كلّ من أنظمة المتباينات الآتية:

10) $y < -3x + 4$
$x + 3y > -6$

11) $2x + 5y \leq 5$
$3x - y < 6$

12) $2x + 3y \geq 6$
$2x + 3y \leq 0$

13) $y \leq |x + 4| + 4$
$y < x$

14) $y \leq |x + 4| - 4$
$2x - 3y > -6$

15) $y \leq 3$
$y \geq |x - 1|$

18 $y \geq x - 4$

$y \leq 0.5x$

$y \geq -x$

17 $y > x - 3$

$4x + 3y < 24$

$x \geq 2$

16 $y \geq x$

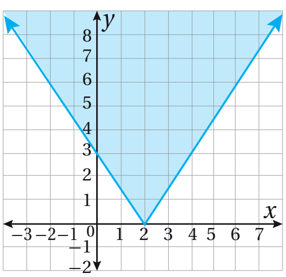
$2x + y < 6$

$2x + 5 > 10$

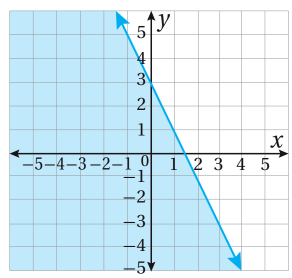
19 **ورق زينة:** تريد تغريد شراء ورق زينة لتزيين قاعة في منزلها للاحتفال بتخرّجها. وقد كان سعر اللفّة من ورق الزينة الذهبي 3 دنانير، ومن ورق الزينة الأزرق دينارين. وتريد تغريد الشراء من النوعين بما لا يزيد على 15 دينارًا، وألّا يقلّ عدد لفّات ورق الزينة التي تشتريها عن 6 لفّات. أكتبُ نظام متباينات يصف هذا الموقف وأُمثّله بيانيًا، وأجد من الرسم 4 حلول ممكنة لعدد لفّات ورق الزينة التي يُمكنها شراؤها من كل نوع.

أكتبُ المتباينة الخطّية بمتغيّرين التي تُمثّل كلًّا من التمثيلات البيانية الآتية:

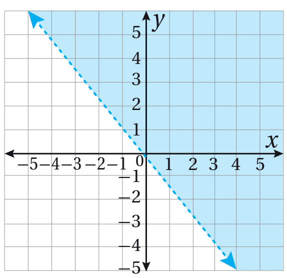
22



21



20



23 **رحلات:** ذهب رافع وعاهد في زيارة لعدد من المعالم السياحية في الأردن، وقد اتّفقا على أن يتناوبا قيادة سيارتهما، بحيث لا تقلّ مدة قيادة رافع للسيارة على نحو متواصل في اليوم عن 3 ساعات ولا تزيد على 6 ساعات، ولا تقلّ مدّة قيادة عاهد للسيارة على نحو متواصل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وألا يزيد زمن قيادة كليهما للسيارة يوميًا على 10 ساعات. أكتبُ نظام متباينات يصف هذا الموقف، وأُمثّله بيانيًّا.

24 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

هندسة: أُمثّل بيانيًّا منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أُجيب عن الأسئلة التي تليه:

$$x \geq 2$$

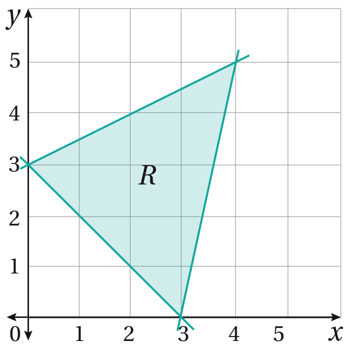
$$y \geq -3$$

$$x + y \leq 4$$

25 أصف الشكل الهندسي الذي يُمثّل منطقة الحلّ نظام المتباينات.

26 أجد مساحة المنطقة المغلقة التي تُمثّل حلّ النظام.

المنطقة R في الرسم المجاور محدودة بالمستقيمات $x + y = 3, y = \frac{1}{2}x + 3, y = 5x - 15$



27 ما المتباينات الثلاث التي تُمثّل حلّها المنطقة R؟

28 ما أكبر قيمة للمقدار $x + y$ في المنطقة R؟

29 ما أكبر قيمة للمقدار $x - y$ في المنطقة R؟

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب نظامًا من متباينتين خطّيتين بحيث يكون حلّه:

30 خطًا مستقيمًا.

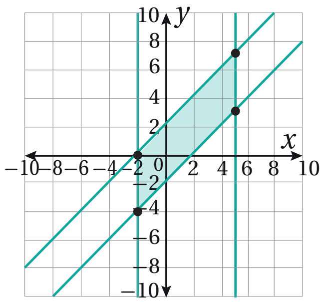
31 واقعًا في الربع الثالث.

32 تبرير: هل العبارة الآتية: صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة إطلاقًا؟
"نظام المتباينتين الذي مستقيماه الحدوديّان متوازيان ليس له حل". أُبرّر إجابتي بتقديم مثال أو مثال مضاد.

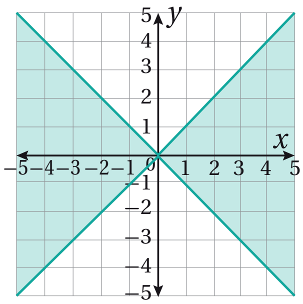
33 تبرير: إذا كانت النقطة $(3, 2)$ تُمثّل حلًّا للمتباينة $y > mx+b$، في حين أنّ النقطة $(1, 2)$ لا تُمثّل حلًّا لها. هل ميل المستقيم الحدودي سالب أم موجب أم صفر أم غير معرّف؟ أُبرّر إجابتي.

تحدّ: أكتبُ نظام المتباينات الذي منطقة حلّه هي المنطقة المظللة، في كلّ من التمثيلات البيانية الآتية:

35



34



معمـلُ برمجيـةِ جيوجبـرا

تمثيل نظام متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Graphing system of linear inequalities in two variables

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا؛ لتمثيل نظام المتباينات الخطّية بيانيًّا على المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحلّ.

مثال 1

أُمثّل نظام المتباينات الخطّية الآتي بيانيًّا؛ باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحلّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

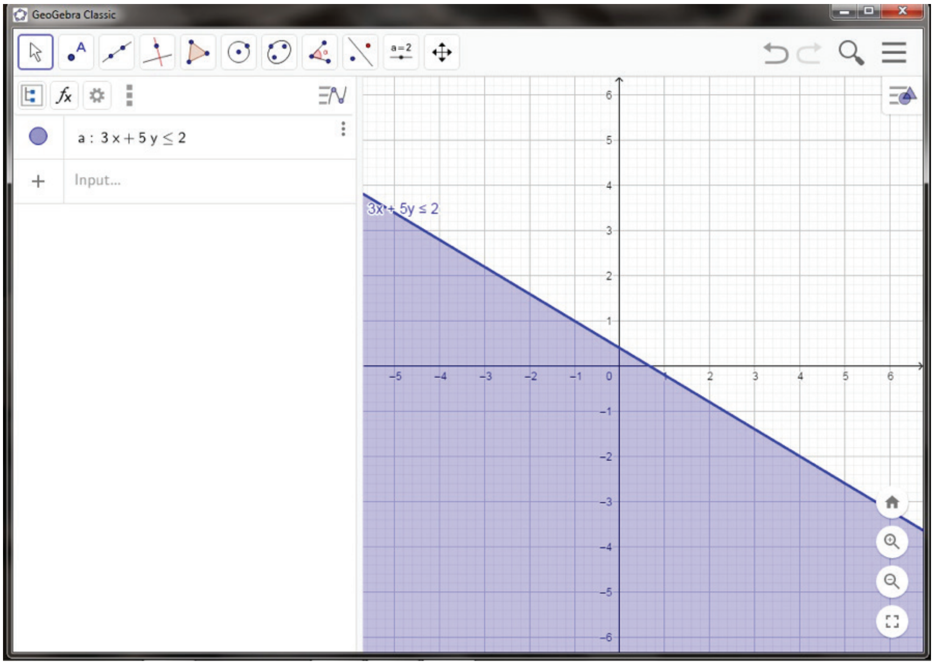
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1 : تمثيل المتباينة الأولى بيانيًّا باتباع الآتي:

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3	x	÷	5	y	≤	2

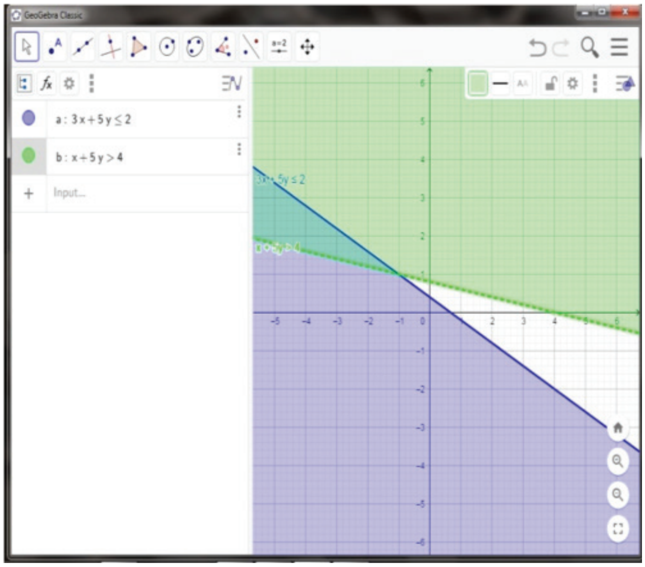
أُلاحظ أنّ برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2 : تمثيل المتباينة الثانية بيانيًّا باتّباع الآتي:

أكتبُ المتباينة الثانية في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

x	÷	5	y	>	4

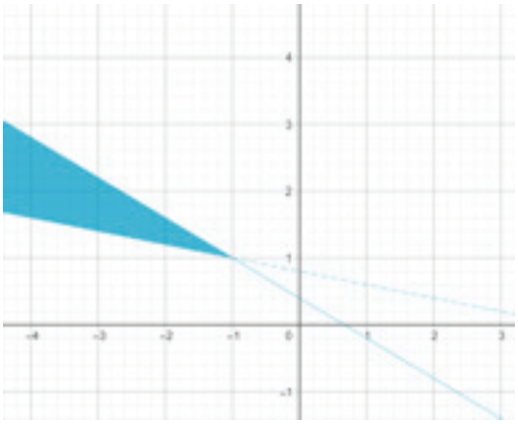


الخطوة 3 : تغيير اللون الأزرق الذي حدّدته برمجية جيوجبرا لمنطقة أُخرى؛ لتمييزها عن منطقة الحلّ الأولى.

أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز ⋮ الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4 : تفسير المناطق الظاهرة.

ألاحظ وجود 4 مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كلّ منطقة؟



الخطوة 5 : تحديد منطقة الحلّ بشكل منفصل.

يُمكنني تحديد منطقة الحلّ بشكل منفصل عن المناطق الأخرى، وذلك بالضغط على زر اللون المجاور لكلّ معادلة؛ ليختفي بذلك تظليل المناطق، ثم كتابة الصيغة الآتية في شريط الادخال: $a\&\&b$

حيث تُمثل a و b اسمَي المنطقتين الممثلتين للمتباينتين؛ لتظهر منطقة الحلّ بشكل منفصل كما في الشكل المجاور.

أتدرب

أُمثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية بيانيًّا؛ باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدّد منطقة الحلّ:

1) $-5x - 2y \geq 3$
$x + y < -3$

2) $0.5x + 7y > -2$
$x < y$

3) $x - y \geq 0$
$x + y \leq 0$

4) $9x - 6y > 8$
$27x - 18y < 1$

الدرسُ 4

البرمجة الخطية
Linear Programming

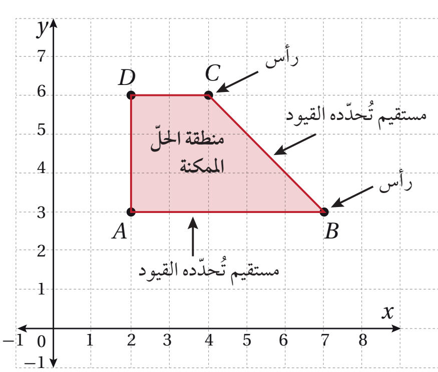
فكرةُ الدرسِ إيجاد الحلّ الأمثل لمسألة برمجة خطيّة.

المصطلحاتُ البرمجة الخطّية، اقتران الهدف، الحلّ الأمثل.

مسألةُ اليومِ يُمكن لطائرة أن تحمل 200 راكب حدًّا أقصى في الدرجتين الاقتصادية ورجال الأعمال، وتُحقّق الشركة ربحًا قدره 60 JD عن كل تذكرة من الدرجة الاقتصادية، و 100 JD عن كل تذكرة من درجة رجال الأعمال. إذا كان عدد المقاعد في درجة رجال الأعمال لا يقلّ عن 20 مقعدًا، وفي كل رحلة يكون عدد الركاب الدرجة الاقتصادية على الأقلّ 4 أمثال عدد ركاب درجة رجال الأعمال، فأجد عدد التذاكر التي يجب على شركة الطيران بيعها من كل درجة للحصول على أكبر ربح ممكن؟

البرمجة الخطية (linear programming) طريقة تعتمد التمثيل البياني على المستوى الإحداثي؛ لإيجاد أكبر قيمة ممكنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة ممكنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن **مجموعة قيود** (constraints)، يُمثّل كلّ منها متباينة خطيّة. بتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدّد منطقة حلّ مشتركة لها تُسمّى **منطقة الحلول الممكنة** (feasible region)، وفيها تتحقّق أكبر قيمة ممكنة، أو أصغر قيمة ممكنة للاقتران الهدف عند رؤوس المضلع الذي يُحدّد منطقة الحلول الممكنة.

تُعرّف البرمجة الخطّية أيضًا بأنّها طريقة البحث عن **الحلّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوّن مسألتها من:



1. **الاقتران الهدف**: يكون في صورة: $P = ax + by$، حيث: P: اسم الاقتران (مثل الربح). b, a: عددان حقيقيان. x وَ y متغيران.

2. **القيود**: نظام من المتباينات الخطّية، تُكتب بدلالة المتغيّرين y, x، وتُحدّد منطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المجاور.

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا وُجِدت قيمة عظمــى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

مثال 1

أجـد إحداثيـي النقطـة (x, y) التـي تجعـل الاقتـران: $P = 2x + 2y$ أكبـر مـا يُمكـن ضمـن القيـود الآتية:

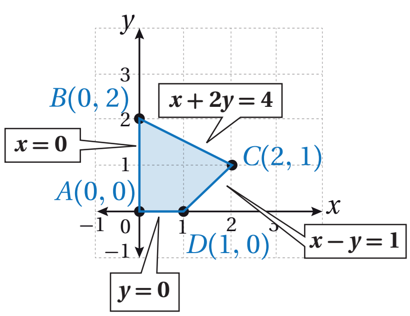
$$x + y \leq 1$$
$$x + 2y \leq 4$$
$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

أتذكّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

الخطوة 1: أُمثّل القيود بيانيًّا.

أُمثّل نظام المتباينات الخطّية (القيود) بيانيًّا، ثم أُحدّد منطقة الحلول الممكنة، كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدّد رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

أُعيّن إحداثيَي كلّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وهــي: A, B, C, D، ثم أضعها في جدول، وأحســب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلّ منها.

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 3x + 2y$
$A(0, 0)$	$P = 3(0) + 2(0) = 0$
$B(0, 2)$	$P = 3(0) + 2(2) = 4$
$C(2, 1)$	$P = 3(2) + 2(1) = 8$
$D(1, 0)$	$P = 3(1) + 2(0) = 3$

القيمة العظمى

الخطوة 3: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحظ أنّ أكبر قيمة للاقتران P هي 8، وأنّها تتحقّق عندما $x = 2, y = 1$

أتحقق من فهمي

أجـد إحداثيَـي النقطـة (x, y) التـي تجعـل الاقتـران $T = 4x + 5y$: أكبـر مـا يُمكـن ضمـن القيـود الآتية:

$$x + 2y \leq 16$$
$$3x + 2y \leq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

يسعى القائمون على الشركات الصناعية والتجارية وفي الأعمال كافّة، إلى تخفيض الكلفة وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح. ويخضع هذا لقيود ومحدّدات مثل التمويل والأيدي العاملة وعدد ساعات العمل وتوافر المواد الأولية وعوامل العرض والطلب وغير ذلك من المتغيّرات. ولحلّ مثل هذا النوع من المسائل نستعمل البرمجة الخطّية، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: صياغة الفرضيات وكتابة اقتران الهدف الذي يُراد إيجاد قيمته العظمى أو الصغرى، ثم تحديد القيود.

الخطوة 2: تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتظليل منطقة الحلول الممكنة.

الخطوة 3: تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

الخطوة 4: اختيار القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال 2: من الحياة

يبيع متجر للأجهزة الإلكترونية نوعين من أجهزة الكومبيوتر المحمولة، تكلفة النوع الأول 250 JD، وتكلفة النوع الثاني 400 JDعلى التوالي. ويُحقّق النوع الأول ربحًا قدره 45 JD، في ما يُحقّق النوع الثاني ربحًا قدره 50 JD. ويُقدّر المتجر أنّ إجمالي الطلب الشهري على الأجهزة لا يتجاوز 250 جهازًا، وأنّه لا يُمكنه استثمار أكثر من 70000 JD في ذلك. كم جهاز كومبيوتر يجب على المتجر توفيرها للزبائن من كل نوع؛ لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الخطوة 1: أصيغ الفرضيات.

أفرضُ أنّ عدد أجهزة الكومبيوتر التي سيوفّرها المتجر من النوع الأول هو x، وأنّ عدد الأجهزة التي سيوفّرها من النوع الثاني هو y. إذا افترضنا أنّ المحل سيبيع كلّ الأجهزة المخزّنة لديه؛ فإنّ الربح المتوقّع هو: $P = 45x + 50y$

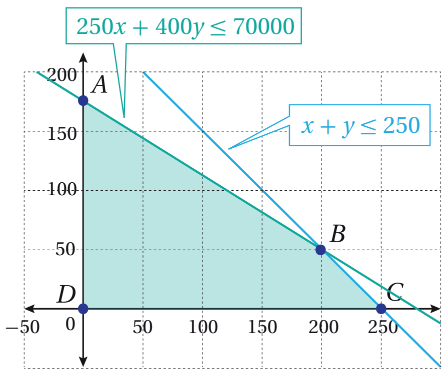
$$250x + 400y \leq 70000 \quad , \quad x + y \leq 250 \; , \; x \geq 0 \; , \quad y \geq 0$$

أتعلّم

تُسمّى المتباينتان $x \geq 0, y \geq 0$ قيود أو شروط عدم السالبية، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطّية الحياتية بصورة ضمنية.

الخطوة 2 : أمثل القيود بيانيًّا.

أُمثّل نظـام المتباينات، ثم أُظلّل منطقة الحلـول الممكنـة كمـا في الشـكل المجاور.



الخطوة 3 : أُحدّد رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

أُحدّد إحداثيَي كلّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة الربح P عند كلّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 45x + 50y$
$A(0, 175)$	$P = 45\,(0) + 50\,(175) = 8750$
$B(200, 50)$	$P = 45\,(200) + 50\,(50) = 11500$
$C(250, 0)$	$P = 45\,(250) + 50\,(0) = 11250$
$D(0, 0)$	$P = 45\,(0) + 50\,(0) = 0$

القيمة العظمى

الخطوة 4 : أُحدّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحـظ من الجدول أنّ أكبر ربح ممكن هـو 11500 JD، وأنّه يتحقّق عند بيع 200 جهاز من النوع الأول، و 50 جهازًا من النوع الثاني.

أتحقق من فهمي

يُنتج مشـغل صغير للأثاث المعدني 36 خزانة على الأكثر في الأسبوع من نوعين مختلفين A، و B. وربحه في الخزانة الواحدة من النوع A هو 35 دينارًا، ومن النوع B هو 45 دينارًا، وكان ما يُباع من النوع A لا يقلّ عن 3 أمثال ما يُباع من النوع B. أجد عدد الخزائن التي ينتجها المشغل من كل نوع ليحقّق أكبر ربح ممكن.

أُلاحظ من المثالين السـابقين أنّ منطقة الحلّ الممكنـة التي تُحدّدها القيود كانت مغلقة؛ لأنّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنّ بعض المسـائل الحياتيـة تتضمّن إيجاد أقلّ تكلفة ممكنة، أو أقلّ كمّية مُستهلَكة وغير ذلك، فتكون منطقة الحلّ عندئذٍ مفتوحة؛ لأنّ قيودها تفرض ذلك.

أتذكّر

لإيجاد إحداثيَي النقطة B، أحلّ المعادلتين معًا بطريقة الحـذف والتعويـض، ويُمكنني أيضًا استـعمال برمجية جيوجبـرا لإيجاد إحداثيَـي نقطـة تقاطـع المستقيمين.

أتذكّر

تُمثّل النقطة A المقطع y للمعادلة $250x+400y=70000$

مثال 3 : من الحياة

حمية غذائية: يشترط نظام الحمية الغذائية الذي يتبعه بعض الرياضيين أن يتوافر ما لا يقلّ عن 300 سعرة حرارية، و36 وحدة من فيتامين A، و90 وحدة من فيتامين C، ضمن الجزء السائل من وجبتهم الغذائية. يُبيّن الجدول المجاور تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من المكمّلات الغذائية، وعدد السعرات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكن أن يستهلكها يوميًّا لاعب يتّبع نظام الحمية الغذائية، ويُريد تحقيق شروطها بأقلّ تكلفة مالية ممكنة؟

	النوع 2	النوع 1
سعر العلبة الواحدة	JD 0.4	JD 0.3
عدد السعرات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	6	12
عدد وحدات فيتامين C	30	10

معلومة

إنّ الحد الأدنى من السعرات الحرارية التي يحتاج إليها الشخص البالغ هي 1800 سعرة حرارية يوميًّا؛ ليستطيع الدماغ وبقية أجزاء الجسم القيام بوظائفها بشكل سليم.

الخطوة 1: أصيغ الفرضيات.

أفرضُ أنّ عدد العلب التي سيستهلكها اللاعب يوميًّا من النوع الأول هو x، أنّ عدد العلب التي سيستهلكها من النوع الثاني هو y. إذا افترضتُ أنّ اللاعب سيحصل على حاجته اليومية من السعرات الحرارية والفيتامينات من النوعين معًا؛ فإنّ التكلفة المتوقّعة هي:

$$C = 0.3x + 0.4y$$

المطلوب أن تكون التكلفة أقلّ ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$60x + 60y \geq 300\ ,\quad 12x + 6y \geq 36\ ,\quad 10x + 30y \geq 90\ ,\quad x \geq 0\ ,\quad y \geq 0$$

ويُمكن كتابة الشروط في أبسط صورة كما يأتي:

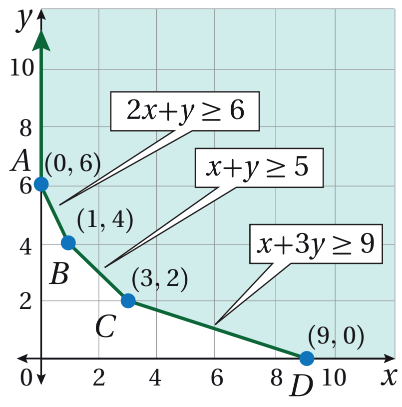
$$x + y \geq 5\ ,\quad 2x + y \geq 6\ ,\quad x + 3y \geq 9\ ,\quad x \geq 0\ ,\quad y \geq 0$$

أتذكّر

كتابة المتباينات في أبسط صورة يُسهّل عملية تمثيلها بيانيًّا.

الخطوة 2: أُمثّل القيود بيانيًّا.

أُمثّل نظام المتباينات الخطّية، ثم أُظلّل منطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3 : أُحدّد رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

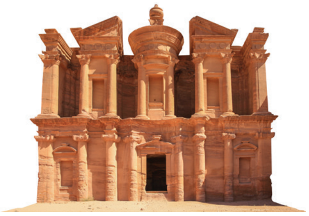
رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$C = 0.3x + 0.4y$
$A(0, 6)$	$C = 0.3(0) + 0.4(6) = 2.4$
$B(1, 4)$	$C = 0.3\ (1) + 0.4(4) = 1.9$
$C(3, 2)$	$C = 0.3\ (3) + 0.4(2) = 1.7$
$D(9, 0)$	$C = 0.3\ (9) + 0.4(0) = 2.7$

القيمة الصغرى

الخطوة 4 : تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحظ من الجدول أنّ أقلّ تكلفة ممكنة تساوي JD 1.7، وأنّ اللاعب يستهلك وقتئذٍ 3 علب من النوع الأول من المكمّل الغذائي، وعلبتين من النوع الثاني من المكمّلات الغذائية، وهو الحد الأدنى الذي يحتاج إليه من السعرات الحرارية والفيتامينات ضمن الجزء السائل من وجبته الغذائية.

أتحقق من فهمي



رحلات: تُخطط مدرسة ثانوية أن تأخذ ما لا يقلّ عن 400 طالب في رحلة لمدينة البترا. ولدى شركة نقل ركاب 10 حافلات كبيرة سعة الواحدة 50 راكبًا، و8 حافلات صغيرة سعة الواحدة 40 راكبًا، ولديها 9 سائقين فقط. إذا كانت أجرة الحافلة الكبيرة JD 560، والصغيرة JD 420، فما أقلّ تكلفة ممكنة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة؟

أتدرب وأحل المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكن ضمن القيود المعطاة في كلّ ممّا يأتي:

1) $T = 5x + 2y$
$y \geq 4$
$x \leq 5$
$y \leq 2x$

2) $P = 2x + 4y$
$3x + y \geq 3$
$x + y \leq 5$
$y \geq 0$

3) $Z = 3x + 2y$
$x + y \leq 8$
$y \geq 3$
$x \geq 0$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن ضمن القيود المعطاة في كلّ ممّا يأتي:

4 $T = 5x - 2y$

$x + 2y \leq 8$

$2x - y \leq 2$

$x \geq 0, y \geq 0$

5 $Q = 3x + y$

$5x + 3y \geq 15$

$x \leq 6$

$0 \leq y \leq 5$

6 $K = x + 2y$

$2x + y \leq 6$

$x + 2y \leq 6$

$x \geq 0, y \geq 0$

لدى شركة لنقل الركاب حافلات كبيرة وحافلات متوسّطة، لا يزيد عددها الكلي على 15 ولا يقلّ عن 8 حافلات. وكان عدد الحافلات المتوسّطة لا يقلّ عن نصف عدد الحافلات الكبيرة، ولا يزيد على عدد الحافلات الكبيرة بأكثر من حافلتين.

7 أكتبُ نظام متباينات يصف هذه المعلومات وأُمثّله بيانيًّا.

8 إذا كان لدى الشركة 6 حافلات كبيرة، فكم لديها من الحافلات الصغيرة؟ أكتبُ القِيَم الممكنة جميعها.

9 إذا كانت أجرة رحلة بالقارب للواحد من الكبار JD 20، وللواحد من الأطفال JD 10 . ويحمل القارب ما لا يزيد على 30 شخصًا، ويجب ألّا تقلّ الأجرة الكلية عن JD 480 فما أقلّ عدد ممكن للكبار الذين يحملهم القارب؟

خزائن الكتب: يريد المسؤول عن مخزن لبيع الكتب شراء خزائن جديدة؛ إذ يحتاج المخزن إلى $30\ m^2$ من الرفوف. مساحة رفوف الخزانة من النوع *A* هي $3m^2$، ومن النوع *B* هي $2m^2$ ، ويمكن أن يستوعب المخزن 8 خزائن على الأكثر من النوع *A*، و12 خزانة على الأكثر من النوع *B*.

10 إذا كان ثمن الخزانة من النوع *A* JD 90، ومن النوع *B* JD 75، فأكتبُ اقتران تكلفة شراء الخزائن ونظام متباينات يصف هذا الموقف.

11 أُمثّل منطقة حلّ نظام المتباينات، وأجد إحداثيات رؤوسها.

12 أجد عدد الخزائن من كل نوع التي يجب أن يشتريها المسؤول عن المخزن، لتحقيق حاجته من الخزائن بأقلّ تكلفة ممكنة.

13 يُنتج مصنع نوعين من الدراجات الهوائية، وتبلغ طاقة الإنتاجية القصوى من كلا النوعين 420 دراجة أسبوعيًّا. فإذا كان عليه أن ينتج ما لا يقلّ عن 100 دراجة من النوع الأول، وما لا يزيد على 200 دراجة من النوع الثاني في أحد الأسابيع، وكان ثمن بيع الدراجة من النوع الأول JD 60، ومن النوع الثاني JD 75، فكم دراجة يُنتج من كل نوع ليكون دخل المصنع أكبر ما يمكن في ذلك الأسبوع؟

زراعة: يُباع في محل للوازم الزراعية نوعان من الأسـمدة هما A, B . يُبيّن الجدول المجاور مكوّنات الكيلوغرام الواحد من هذين السمادين:

النوع	فوسفات (وحدة)	نيترات (وحدة)	أمونيا (وحدة)
A	6	3	3
B	4	4	10

يُريد مزارع أن يكوّن مزيجًا من السمادين يحتوي على 36 وحدة على الأقلّ فوسفات، و24 وحدة على الأقلّ نيترات، و30 وحدة على الأقلّ أمونيا.

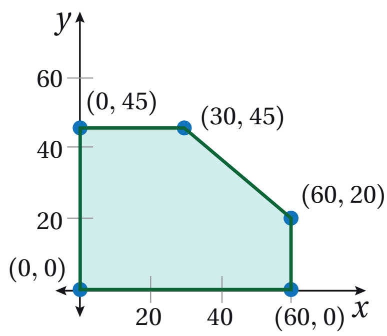
14 إذا كان ثمـن الكيلوجرام مـن النوع A دينارًا واحـدًا، ومن النوع B JD 1.5، فأكتبُ اقتران التكلفة ونظام متباينات يصف هذا الموقف.

15 أُمثّل منطقة حلّ نظام المتباينات، وأجد إحداثيات رؤوسها.

16 أجد عدد الكيلوغرامات التي يشتريها من كل نوع؛ ليُحقّق غايته بأقلّ تكلفة.

مهارات التفكير العليا

17 **تبرير:** أجد أكبر قيمة ممكنـة لاقتران الهدف $P = 5x + 6y$ ضمن منطقة الحلول الممكنة المُمثّلة في الشكل المجاور وأُبرّر إجابتي، ثم أجد نقاطًا أُخرى ضمن منطقة الحـلّ يتحقّق عندها أكبر قيمة لا قتران الهدف، وأُبرّر إجابتي.



18 **مسـألة مفتوحة:** أكتبُ مسـألة حياتية يُمكنني حلّها باستعمال البرمجة الخطّية التي تُسـتعمل فيها 4 متباينات على الأقلّ، وأكتبُ اقتران الهدف وأجد قيمته العظمى والصغرى.

19 **تبرير:** هل يكون لاقتران الهدف $T = ax + by$ قيمة عظمى موجبة؛ إذا وقعت منطقة حلّ نظام المتباينات المرتبطة به في الربع الأول؟ أُبرّر إجابتي.

20 **تحدّ:** أُمثّل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$y \geq 4$$
$$-2x + 5y \leq 20$$
$$-7x + 5y \leq 35$$
$$x - y \leq 3$$
$$2x + y \leq 18$$

وأجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للاقتران $T = -3x + 5y$ في منطقة حلّ هذا النظام.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+2, & x<3\\ -2x^2+5x+7, & x\geq 3\end{cases}$، فما قيمة $f(-2)$؟

a) -18 b) -11 c) 11 d) 22

2 ما قيمة: $|3-(2.5-)2| + 8$؟ ($8+|2(-2.5)-3|$)

a) 0 b) 10 c) 16 d) 19

3 ما حلّ المعادلة: $2|x-1|=4$؟

a) 3 b) $3, -3$

c) $1, 3$ d) $-1, 3$

4 ما مجموعة حلّ $|2x+3|\leq 5$؟

a) $-4\leq x\leq 1$ b) $x\leq -4$ or $x\geq 1$

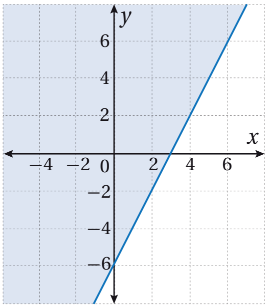
c) $1\leq x\leq 4$ d) $x\leq 1$ or $x\geq 4$

5 أيّ الأزواج الآتية حلّ للمتباينة $2x-3y\geq 6$؟

a) $(2, 3)$ b) $(1, 1)$

c) $(4, 1)$ d) $(5, 0)$

6 ما المتباينة الذي يُمثّلها الرسم البياني المجاور؟



a) $2x-y\leq 6$

b) $2x+y\leq 6$

c) $2x-y\geq 6$

d) $2x+y\geq 6$

7 إذا كان لنظام متباينات خطّيّة منطقة حلّ مغلقة رؤوسها هي: $P(0, 2), Q(2, 3), R(4, 2), S(3, 0)$، فعند أيّ منها يأخذ اقتران الهدف $T=2x+y$ قيمته العظمى؟

a) P b) Q c) R d) S

8 أيّ أنظمة المتباينات الآتية ليس له حلّ؟

a) $3x+5y\geq 15$, $2x+3y\geq 6$ b) $x+2y\geq 2$, $2x+4y\leq 0$

c) $4x+3y\geq 6$, $4x+3y\leq 10$ d) $x+y\geq 6$, $x+y\geq 3$

أُمثّل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًّا:

9 $f(x)=\begin{cases}2x+1\,, & x<0\\ -1\,, & 0\leq x\leq 3\\ x^2-4\,, & x\geq 3\end{cases}$

10 $f(x)=|3x-12|+2$

أحلّ كلًّا من المعادلات والمتباينات الآتية:

11 $3|2x+3|-2=10$

12 $|5-3x|=|5x+7|$

13 $|2x-3|\geq 9$

14 $|x-3|\leq 4x$

15 $|6+3x|\geq |5x-10|$

أُمثّل أنظمة المتباينات الآتية بيانيًّا:

16 $x+2y\leq 8$, $3x+2y\leq 12$

17 $-1\leq y\leq 4$, $y<2x$

18 $y\geq -|x|$, $y<\frac{2}{5}x$

مسرح: ثمن التذكرة للمقاعد القريبة من منصّة مسرح JD 15، وللمقاعد الخلفية JD 10. بيعت في أحد العروض 100 تذكرة على الأكثر، وبلغت إيراداتها JD 1200 على الأقلّ.

19 أختار متغيّرين، وأكتب نظام متباينات خطّية يُمثّل هذه المعلومات.

20 أُمثّل نظام المتباينات بيانيًّا.

21 أجد أكبر قيمة ممكنة لعدد تذاكر المقاعد الخلفية المبيعة.

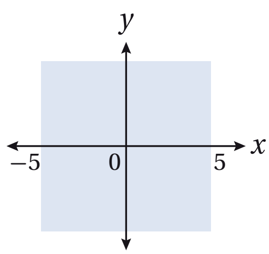
طرود الخير: يريد تاجر مواد تموينية تشغيل عدد من العمال ليوم واحد لتجهيز طرود لبيعها في رمضان. أجرة العامل الماهر في هذا اليوم 30 دينارًا، والعامل غير الماهر 20 دينارًا، ولا يريد هذا التاجر أن يُنفق أكثر من 630 دينارًا لتجهيز الطرود. وقد وجد 15 عاملًا ماهرًا فقط، ويريد التاجر أن يُشغّل عاملًا ماهرًا واحدًا على الأقلّ مقابل كل 3 عمال غير مهرة. العامل الماهر يُجهّز 25 طردًا في الساعة، وغير الماهر يجهز 18 طردًا في الساعة.

22 أكتبُ نظام متباينات يُمثّل هذه المعلومات وأُمثّله بيانيًّا.

23 أجد عدد العمال من النوعين الذين يجب تشغيلهم لتجهيز أكبر عدد ممكن من الطرود.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

24 المتباينة التي تُمثّل التمثيل البياني المجاور، هي:



a) $|x| < 5$ b) $|x| \leq 5$

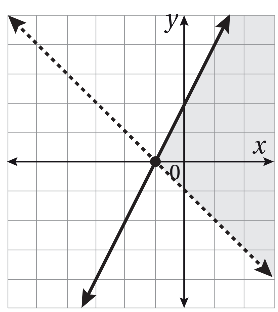
c) $|x| > 5$ d) $|x| \geq 5$

25 قِيَم x التي تحقق المعادلة $|x+5| = 2$، هي:

a) $-3, 3$ b) $-3, 7$

c) $2, -2$ d) $3, -7$

26 أيّ أنظمة المتباينات الآتية، يُمثّل التمثيل البياني المجاور؟



a) $y \leq 2x + 2$, $y > -x - 1$

b) $y \geq 2x + 2$, $y < -x - 1$

c) $y < 2x + 2$, $y \leq -x - 1$

d) $y > 2x + 2$, $y \leq -x - 1$

الوحدةُ
2

الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية
Logarithmic and Exponential Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمل الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية، في نمذجة الكثير من التطبيقات الحياتية بصورة رياضية تُسهّل فهمها. فمثلًا، تُستعمل بعض أنواع الاقترانات الأُسّية لوصف العلاقة بين عدد خلايا بكتيريا والزمن. وسأتعرّف في هذه الوحدة هذين النوعين من الاقترانات، وتطبيقاتهما الحياتية الكثيرة.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ قوانين الأُسس النسبية.
- ✓ حلّ المعادلة الأُسّية.
- ✓ إيجاد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد.
- ✓ تمثيل الاقترانات بيانيًّا.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- الاقتران الأُسّي وخصائصه وتمثيله البياني.
- الاقتران اللوغاريتمي وخصائصه وتمثيله البياني.
- قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ المعادلة الأُسّية واللوغاريتمية؛ باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

الدرس 1

الاقترانات الأُسّية
exponential functions

فكرةُ الدرسِ تعرّف خصائص الاقتران الأُسّي وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقتران الأُسّي، النمو الأُسّي، عامل النمو، الاضمحلال الأُسّي، عامل الاضمحلال، الأساس الطبيعي، الاقتران الأسّي الطبيعي.

مسألةُ اليومِ الهيدرا حيوان صغير يعيش في الماء العذب، ويُمكنه مضاعفة عدده كلّ يومين. إذا افترضتُ أنّ خزّانًا من الماء في مختبر يحوي في البداية 60 حيوان هيدرا، فأجد عدد حيوانات الهيدرا في الخزّان بعد 8 أيام.

الاقتران الأسي (exponential function) اقتران على الصورة $f(x) = ab^x$ حيث a,b عددان حقيقيان، و $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$، ومن أمثلته:

$$f(x)=4(3^x) \quad , \quad f(x) = (\tfrac{1}{4})^x \quad , \quad f(x) = (0.6)^x$$

يُمكنني تمثيل الاقتران الأُسّي بتكوين جدول قِيَم، ثم تعيين الأزواج المرتّبة الناتجة من الجدول في المستوى الإحداثي، والوصل بينها بخط منحنٍ. سأتعلّم في المثال الآتي التمثيل البياني للاقتران الأُسّي على الصورة $f(x) = ab^x$، حيث $a > 0$، $b > 1$، وأستكشفُ خصائصه.

أتعلّم

إذا كانت $b < 0$ فإنّ الاقتران $f(x) = ab^x$، يكون غير معرّف عند بعض القِيَم مثل $x = \frac{1}{2}$.
إذا كانت $b = 1$ فإنّ الاقتران $f(x) = ab^x$ يُصبح على الصورة $f(x) = a$، وهو اقتران ثابت.

مثال 1 إذا كان $f(x) = 2^x$

1 أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

x	$y=f(x)$	(x, y)
-2	$y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$	$(-2\ ,\ \frac{1}{4})$
-1	$y=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$	$(-1\ ,\ \frac{1}{2})$
0	$y=2^0=1$	$(0\ ,\ 1)$
1	$y=2^1=2$	$(1\ ,\ 2)$
2	$y=2^2=4$	$(2\ ,\ 4)$

أتذكّر

اقترانات القوّة مثل $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ ليست اقترانات أُسّية؛ لأنّ المتغيّر موجود في الأساس وليس في الأُسّ.

أتذكّر

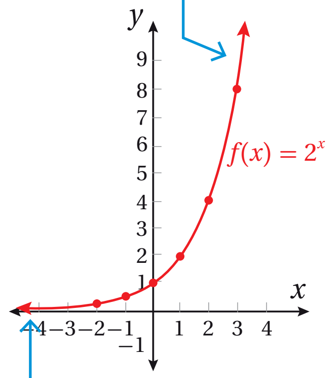
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.

أُلاحظ أنّ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه الفترة $(0, \infty)$، ويوجد للاقتران خط تقارب أُفقي وهو المحور x.

يمتد هذا الجزء من المنحنى من دون حدود.



يقتـرب هذا الجـزء مـن المنحنى من المحور x ولكنّه لا يقطعه ولا يمسّه.

أتذكّر

خط التقارب خط مستقيم يقتـرب منـه منحنـى الاقتران ولكن لا يمسّـه ولا يقطعه، ويُشـير خط التقــارب الأُفقــي إلــى ســلوك الاقتــران عندما تصبــح القيمــة المطلقة للمتغيّر x كبيرة جدًّا.

2 **أجد المقطعين الإحداثيّين.**

بما أنّ 2^x موجبة دائمًا؛ فإنّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x لأنّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1، عندما $x = 0$

3 **هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟**

الاقتران $f(x)$ متزايد؛ لأنّه كلّما ازدادت قِيَم x؛ فإنّ قِيَم y تزداد.

4 **هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟**

نعم، $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد ويمكن التحقق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتذكّر

يسـمى الاقتــران الذي يرتبـط كل عنصـر فـي مداه بعنصــر واحد فقط في مجاله اقتــران واحد لواحــد، ويمكن التحقق من أن الاقتران هو واحد لواحد، وذلك برســم أي خط أفقي، والتأكد أنه لا يقطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة.

أتحقق من فهمي **إذا كان $f(x) = 3^x$، فأُجيب عمّا يأتي:**

a) أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين الإحداثيّين.

c) هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

d) هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

أُلاحــظ من المثال 1 أنّ الاقتران $f(x) = 2^x$ اقتران متزايد، مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومــداه مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أُفقي وهو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبشــكل عام، فإنّ أيّ اقتران على الصورة $f(x) = ab^x$، حيث $a > 0$، $b > 1$ له الخصائص ذاتها.

والآن، ســأتعلّم في المثال الآتي التمثيل البياني للاقتران الأُسّــي على الصورة $f(x) = ab^x$، حيث $a > 0$، $0 < b < 1$، وأستكشفُ خصائصه.

مثال 2

إذا كان $f(x) = (\frac{1}{2})^x$، فأُجيب عمّا يأتي:

1 أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

x	$y=f(x)$	(x, y)
-2	$y=(\frac{1}{2})^{-2}=2^2=4$	$(-2, 4)$
-1	$y=(\frac{1}{2})^{-1}=2^1=2$	$(-1, 2)$
0	$y=(\frac{1}{2})^{0}=2^0=1$	$(0, 1)$
1	$y=(\frac{1}{2})^{1}=\frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
2	$y=(\frac{1}{2})^{2}=\frac{1}{4}$	$(2, \frac{1}{4})$

أتذكّر

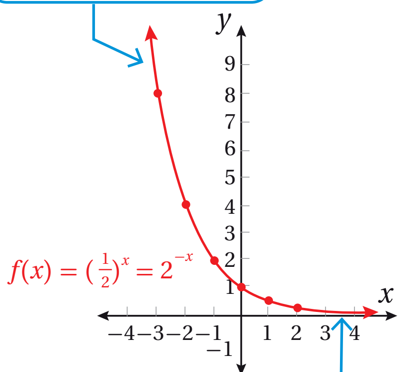
$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.

ألاحظ أنّ مجال هذا الاقتران مجموعة الأعداد الحقيقية، وأنّ مداه الفترة $(0, \infty)$، ويوجد للاقتران خط تقارب أُفقي وهو المحور x.

يمتد هذا الجزء من المنحنى من دون حدود.



يقترب هذا الجزء من المنحنى من المحور x ولكنّه لا يقطعه ولا يمسّه.

أتعلّم

يُمكن كتابة الاقتران $f(x) = (\frac{1}{b})^x$ على الصورة $f(x) = b^{-x}$ لأنّ $(\frac{1}{b})^x = b^{-x}$

2 أجد المقطعين الإحداثيّين.

بما أنّ $(\frac{1}{2})^x$ موجبة دائمًا؛ فإنّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x لأنّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1، عندما $x = 0$

3 هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متناقص؛ لأنّه كلّما ازدادت قِيَم x؛ فإنّ قِيَم y تتناقص.

4 هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

نعم، $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد ويمكن التحقق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتحقق من فهمي إذا كان $f(x) = (\frac{1}{3})^x$، فأُجيب عمّا يأتي:

a) أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين الإحداثيّين.

c) هل $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

d) هل $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

أُلاحظ من المثال 2 أنّ الاقتران $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ اقتران متناقص، مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أُفقي وهو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبشكل عام، فإنّ أيّ اقتران على الصورة $f(x) = ab^x$، حيث $a > 0$، $0 < b < 1$ له الخصائص ذاتها.

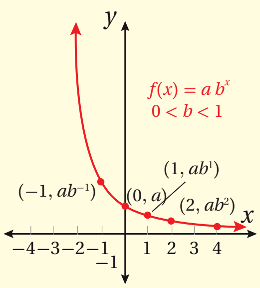
ملخص المفهوم — خصائص الاقتران الأسّي

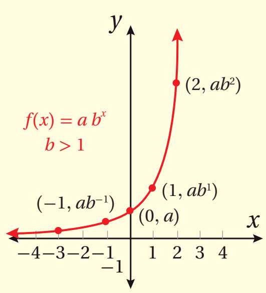
التمثيل البياني للاقتران الأُسّي المعرّف على الصورة $f(x) = ab^x$ حيث a, b عددان حقيقيان و $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$ له الخصائص الآتية:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة $(0, \infty)$.
- يكون الاقتران متزايدًا إذا كانت $b > 1$
- يكون الاقتران متناقصًا إذا كانت $0 < b < 1$
- للاقتران خط تقارب أُفقي هو المحور x.

يقطع الاقتران المحور y في نقطة واحدة هي $(0, a)$، ولا يقطع المحور x.

- اقتران واحد لواحد.





للاقترانات الأُسّية صور مختلفة، ويُمكن تمثيلها بيانيًّا بانشاء جدول قِيَم، وإيجاد مجالها ومداها وخط التقارب الأُفقي لها.

مثال 3

أجد خط التقارب الأُفقي لكلّ اقتران ممّا يأتي، وأُمثّله بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1) $f(x) = 2(3^{x+2}) - 1$

الخطوة 1: أجد خط التقارب الأُفقي.

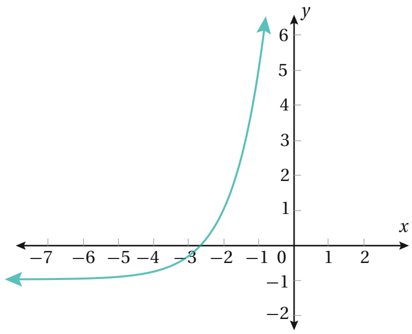
كلّما قلّت قيمة $x + 2$ اقتـرب $2(3^{x+2})$ من الصفر، واقتربت قيمة $f(x)$ من -1 ؛ أي إنّ خط التقارب الأُفقي هو $y = -1$

الخطوة 2: أُنشئ جدول قِيَم.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-0.78	-0.33	1	5	17	53	161
(x, y)	$(-4, -0.78)$	$(-3, -0.33)$	$(-2,1)$	$(-1,5)$	$(0,17)$	$(1,53)$	$(2,161)$

الخطوة 3: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقـاط التـي تُمثّـل الأزواج (x, y) في المســتوى الإحداثي، وأصل بينهـا بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.



مجال هـذا الاقتـران هـو مجموعـة الأعداد الحقيقية، ومداه الفترة $(-1,\infty)$

إرشاد

يُمكنني اسـتعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قِيَم y في الجدول، وأختـار منزلة لتقريب الأعداد الناتجة.

2 $f(x) = 5(2^{-x}) + 3$

الخطوة 1: أجد خط التقارب الأُفقي.

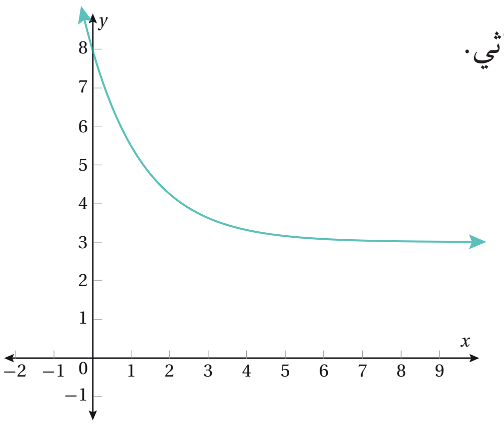
كلّما قلّت قيمة الأس $(-x)$ اقترب $5(2^{-x})$ من الصفر، واقتربت قيمة $f(x)$ من 3؛ أي إنّ خط التقارب الأُفقي هو $y = 3$

الخطوة 2: أُنشئ جدول قِيَم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	43	23	13	8	5.5	4.25	3.63	3.31
(x, y)	$(-3, 43)$	$(-2,23)$	$(-1,13)$	$(0,8)$	$(1,5.5)$	$(2,4.25)$	$(3, 3.63)$	$(4, 3.31)$

الخطوة 3: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّـن النقاط التـي تُمثّـل الأزواج (x, y) في المســتوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.



مجال هـذا الاقتران هــو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه الفترة $(3, \infty)$.

إرشاد

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقتران الأُسّـي بيانيًّـا؛ وذلـك بإدخـال الاقتـران فـي شريط المعادلة، ثم النقر على زرّ (Enter).

أتحقق من فهمي

أجد خط التقارب الأُفقي لكلّ اقتران ممّا يأتي، وأُمثّله بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

a) $f(x) = 4(2^x) + 12$

b) $h(x) = 6(\frac{1}{3})^{2-x}$

للاقترانات الأُسّية الكثير من التطبيقات الحياتية، مثل حساب كمية المادة المتبقية من المواد المشعة.

مثال 4 : من الحياة

موادّ مشعة: تُمثّل المعادلة $A(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ الكمية المتبقّية A بالغرامات من عيّنة 1 g من الراديوم 226 حيث t الزمن بالسنوات.

معلومة

الراديوم عنصر كيميائي مشع يُرمز له بالرمز Ra ورقمه الذري 88، لونه أبيض نقي تقريبًا، وهو من المعادن القلوية الترابية ولكنّه يتأكسد بسهولة عند تعرّضه للهواء، فيصبح أسود اللون.

1 أجد كمّية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$$A(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$ المعادلة الأصلية

$$A(3240) = (\frac{1}{2})^{\frac{3240}{1620}}$$ أُعوّض $t=3240$

$$= (\frac{1}{2})^{2}$$ أُبسّط القوّة

$$= 0.25$$ أُبسّط

إذن: بعد 3240 سنة، يبقى من كمّية الراديوم 0.25 g

2 بعد كم سنة يبقى من كمّية الراديوم 0.125 g؟

يُمكنني إيجاد عدد السنوات اللازمة ليبقى من الراديوم 0.125 عن طريق حلّ المعادلات الأُسّية.

$$A(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$ المعادلة الأصلية

$$0.125 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$ بتعويض $A(t) = 0.125$

$$\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$ $0.125 = \frac{1}{8}$

$$(\frac{1}{2})^{3} = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$ الأساسان متساويان

$$3 = \frac{t}{1620}$$ بمساواة الأُسس

$$t = 4860$$ بحلّ المعادلة

إذن: يبقى 0.125 g من كمّية الراديوم بعد 4860 سنة.

أتحقق من فهمي

تُمثّل المعادلة $A(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{30}}$ الكمّية المتبقّية A بالغرامات من عينة $1\ g$ السيزيوم 137 حيث t الزمن بالسنوات.

a) أجد كمّية السيزيوم 137 المتبقّية بعد 30 سنة.

b) بعد كم سنة يبقى من كمية السيزيوم $0.25\ g$

عندما تزداد كمّية بشكل أُسّي؛ فإنّها تزداد بنسبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية متساوية. ولإيجاد مقدار هذه الكمّية التي ازدادت بعد t من الزمن؛ يُمكن استعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

ويُسمّى هذا الاقتران اقتران **النمو الأسي** (exponential growth) حيث t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترات زمنية محدّدة. ويُسمّى أساس العبارة الأُسّية $(1 + r)$ **عامل النمو** (growth factor).

أتعلّم

اقتران النمو الأُسّي $A(t) = a(1 + r)^t$ أحد صور الاقتران الأُسّي $f(x) = ab^x$، حيث استعمل المقدار $1 + r$ بدلًا من b، و t بدلًا من x. ولقانون النمو الأُسّي الكثير من التطبيقات الحياتية، منها النمو السكّاني.

مفهومٌ أساسيٌّ — اقتران النمو الأسي

بالكلمات: اقتران النمو الأُسّي هو كلّ اقتران أُسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = \overset{\text{الكمية الابتدائية}}{a}\ \underbrace{(1 + \overset{\text{النسبة المئوية للنمو}}{r})}_{\text{عامل النمو } 1+r}{}^{\overset{\text{الفترة الزمنية للنمو}}{t}}$$

a الكمية الابتدائية

r النسبة المئوية للنمو

$1 + r$ عامل النمو

t الفترة الزمنية للنمو

مثال 5 : من الحياة

سكّان: بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية في عام 2020، 10.8 مليون نسمة تقريبًا، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني 2.6% سنويًّا تقريبًا؛ فأُجيب عما يأتي:

1 أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان المملكة بالمليون نسمة بعد t سنة.

$A(t) = a(1 + r)^t$ اقتران النمو الأُسّي

$A(t) = 10.8\ (1 + 0.026)^t$ بتعويض $a = 10.8, r = 0.026$

$A(t) = 10.8\ (1.026)^t$ بالتبسيط

إذن: اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان المملكة بعد t من السنوات $A(t)=10.8(1.026)^t$

2 **أجد عدد سكان المملكة التقريبي في عام 2030**

بما أنّ عدد سكان المملكة الابتدائي (عندما $t = 0$) يرتبط بالعام 2020، فإنّه لإيجاد عدد سكان المملكة في عام 2030، أُعوّض $t = 10$ لأنّه يُمثّل الفرق الزمني بين العامين.

$A(t) = 10.8\,(1.026)^t$ المعادلة الأصلية

$A(10) = 10.8\,(1.026)^{10}$ بتعويض $t = 10$

≈ 13.96 باستعمال الآلة الحاسبة

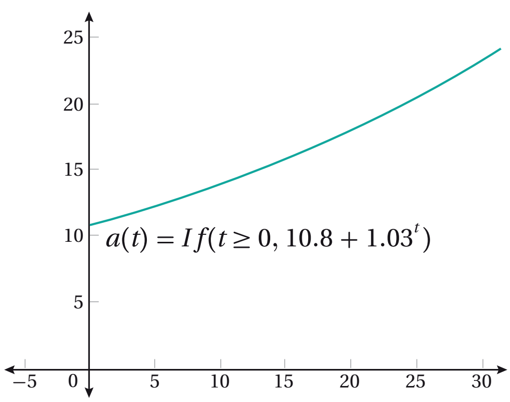
إذن: من المتوقّع أن يكون عدد سكان الأردن في عام 2030، 96.13 مليون نسمة تقريبًا.

3 **أُمثّل اقتران النمو الأُسّي بيانيًّا.**

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقتران الأُسّي بيانيًّا؛ وذلك بإدخال الصيغة الآتية في شريط الإدخال:

$$A(t) = 10.8(1.026)^t\ ,\ t \geq 0$$

ثم النقر على زرّ (Enter).



معلومة

توجد العديد من الطرائق لرصد التعداد السكّاني؛ إذ تتّبع بعض الدول منهجيّة المسح الميدانيّ، كما أنّ بلدانًا أخرى تستعمل التكنولوجيا الحديثة مثل الأجهزة المتنقّلة، ونظم المعلومات الجغرافيّة المكانيّة؛ إذ تُساعد هذه الطرائق الحديثة على تحسين نتائج التعداد، وسرعة الحصول عليها، وكفاية نوعيتها.

أتعلّم

لا يُمكن للزمن أن يكون سالبًا؛ لذا، يُضاف شرط $t \geq 0$، عند تمثيل اقتران النمو في برمجية جيوجيبرا.

أتحقق من فهمي

بلغ عدد سكّان لواء الموقّر في عام 2015، 84370 نسمة تقريبًا، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني فيه 2.4% سنويًّا، فأجيب عمّا يأتي:

a) أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد سكان لواء الموقر بالنسبة بعد t سنة.

b) أجد عدد سكان اللواء التقريبي في عام 2030

c) أُمثّل اقتران النمو الأُسّي بيانيًّا.

وكما في النمو الأُسّي؛ فإنّه يُمكنني تمثيل النقص في كمّية ما، بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية؛ باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1-r)^t$$

ويُسمّى هذا الاقتران اقتران **الاضمحلال الأُسّي** (exponential decay) حيث t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للاضمحلال في فترة زمنية محدّدة، ويُسمّى أساس العبارة الأسية $(1-r)$ **عامل الاضمحلال** (decay factor).

مفهومٌ أساسيٌّ

اقتران الاضمحلال الأُسّي

بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأُسّــي اقتران أُسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = a\,(1 - r)^{t}$$

a الكمية الابتدائية

r النسبة المئوية للاضمحلال

$1 - r$ عامل الاضمحلال

t الفترة الزمنية للاضمحلال

مثال 6 : من الحياة

تلوّث: بدأ العلماء دراســة على إحدى البحيرات؛ لتحديد مدى تأثير التلوّث على عدد الأسماك فيها، فوجدوا أنّ عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة.

1 أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل عدد الأسماك في البحيرة بعد (t) سنة، علمًا بأنّ عدد الأسماك عند بدء الدراسة يساوي 12000 سمكة.

$A(t) = a(1 - r)^{t}$ اقتران الإضمحلال الأُسّي

$A(t) = 12000\,(1 - 0.2)^{t}$ بتعويض $a = 12000,\ r = 0.2$

$A(t) = 12000\,(0.8)^{t}$ بالتبسيط

إذن: اقتران الاضمحلال الأُسّــي الذي يُعبّر عن عدد الأسماك في البحيرة بعد t من السنوات $A(t) = 12000(0.8)^{t}$

2 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد مرور 3 سنوات.

$A(t) = 12000\,(0.8)^{t}$ المعادلة الأصلية

$A(t) = 12000\,(0.8)^{3}$ بتعويض $t = 3$

≈ 6144 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: يبقى في البحيرة 6144 سمكة تقريبًا بعد مرور 3 سنوات.

معلومة

يُعدّ موت الكائنات الحية البحرية في المصادر المائية، أحد الأسباب الرئيسة التي تؤدّي إلى تلوّث الماء، ومن الكائنات البحرية التي تتأثّر بدرجة كبيرة بتلوّث المياه: الأسماك والسرطانات والطيور والنوارس البحرية والدلافين، والعديد من الكائنات البحرية الأخرى.

أتعلّم

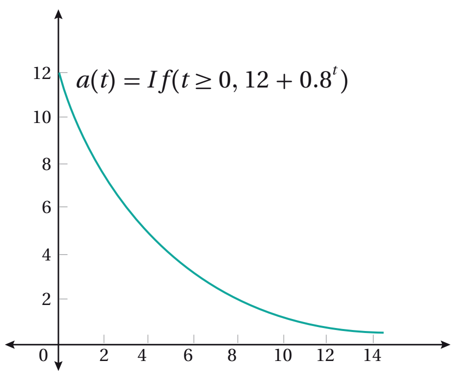
يُمكن تمثيل الاقتران $A(t) = 12(0.8)^3$ بدلًا من $A(t)=12000(0.8)^3$ لتسهيل ملاحظة التغيّرات على شكل المنحنى، مع ضرورة الانتباه إلى ضرب أيّ قيمة ناتجة في 1000

3 أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.

يُمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقتران الأُسّي بيانيًا؛ وذلك بإدخال الصيغة الآتية في شريط الإدخال:

$$A(t) = 12000(0.8)^3 \;, t \geq 0$$

ثم النقر على زرّ (Enter).



أتحقق من فهمي

سيّارة: اشترى أحمد سيّارة تعمل على الشحن الكهربائي بمبلغ JD 25000. إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 10% سنويًّا؛ فأجيب عمّا يأتي:

a) أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيارة بعد (t) سنة.

b) أجد ثمن السيّارة بعد 5 سنوات.

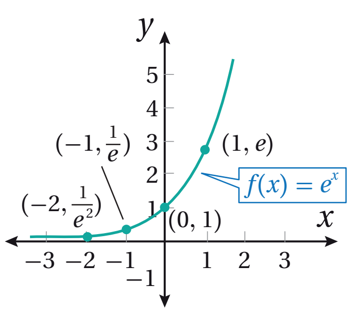
c) أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.

في الكثير من التطبيقات الحياتية، يكون الاختيار الأمثل للأساس في الاقترانات الأُسيّة هو العدد غير النسبي.

$$e = 2.718281828......$$

ويُسمّى العدد e **الأساس الطبيعي** (natural base) أو العدد النيبيري، ويُسمّى الاقتران $f(x) = e^x$ الاقتران **الأسي الطبيعي** (natural exponential function).

إنّ التمثيل البياني للاقتران الأُسّي الطبيعي، له خصائص التمثيل البياني نفسها للاقتران $f(x) = a^x$



مثال 7 : من الحياة

ذبـاب الفاكهة: وجد عالم بعد دراسـة أجراها علـى تكاثر ذباب الفاكهـة، أنّ العـدد التقريبـي للذبـاب يُمكن تمثيلـه بالاقتران $Q(t) = 20e^{0.03t}$ حيث Q عدد الذباب بعد t ساعة.

معلومة

يُمكن لأنثى ذبابة الفاكهة أن تضع 100 بيضة يوميًّا، وتفقس هـذه البيضات لتُصبح يرقات في أقلّ من 24 ساعة.

1 أجد العدد الابتدائي لذبابات الفاكهة عند بدأ الدراسة.

المعادلة الأصلية	$Q(t) = 20e^{0.03t}$
بتعويض $t = 0$	$Q(0) = 20e^{0.03(0)}$
أضرب	$= 20e^{0}$
$e^0 = 1$	$= 20(1)$
أُبسّط	$= 20$

إذن: العدد الابتدائي للذباب عند بدء الدراسة 20 ذبابة.

2 أجـد عـدد ذبابـات الفاكهـة بعد مرور 72 سـاعة من بـدء الدراسـة، مقرّبًا إجابتـي إلى أقرب عـدد صحيح.

المعادلة الأصلية	$Q(t) = 20e^{0.03t}$
بتعويض $t = 72$	$Q(72) = 20e^{0.03(72)}$
أضربُ	$= 20e^{2.16}$
أستعملُ الآلة الحاسبة	≈ 173

إذن: عدد ذبابات الفاكهة بعد مرور 72 ساعة 173 ذبابة تقريبًا.

أتعلّم

لإيجـاد القيمـة $20e^{2.16}$ باستعمال الآلة الحاسبة؛ أضغطُ على الأزرار:

2 0 × SHIFT

e^x 2 . 1 6

= 173.422

أتحقق من فهمي

يُمثّل الاقتران $P(t) = 34.706e^{0.0097t}$ عدد سـكان مدينة بالمليون نسـمة، بعد t سـنة منذ المسح الإحصائي للمدينة في عام 2015

a) أجد عدد سكان المدينة في عام 2015

b) أجد عدد سكّان المدينة في عام 2030؛ مقرّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أتدرب وأحل المسائل

أجد خط التقارب الأُفقي لكلّ اقتران ممّا يأتي، وأُمثّله بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1 $y = 4(3^x)$

2 $y = 10(4^{-x})$

3 $y = 4(\frac{3}{5})^{x+4} + 3$

4 $y = 3(\frac{2}{5})^{x-3} - 6$

5 $y = 3e^{x+2}$

6 $y = 8e^{-2x} - 3$

أشـجار: يُمثّل الاقتران $f(x) = 12(2)^{\frac{x}{5}}$ طول شجرة من التين الخانق y بالأقدام بعد x سنة.

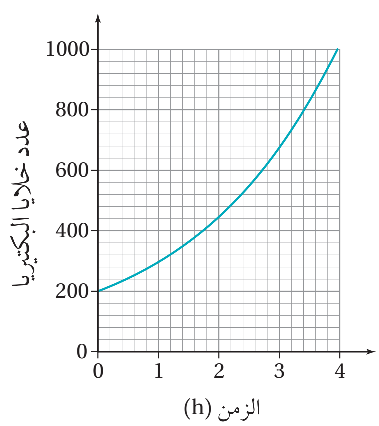
7 أجد خط التقارب الأُفقي للاقتران $f(x)$، ثم أُمثّله بيانيًّا، علمًا بأنّ $x = 0$ تُمثّل الوقت الحاضر.

8 أجد المقطع y للاقتران $f(x)$ وأصف مدلوله.

معلومة

ينبت التين الخانق من الأعلى نحو الأسفل؛ فالبذرة التي يتخلّص منها العصفور تستقر فوق الأشجار الاستوائية العالية، لتبدأ نموها نحو الأسفل وتصل إلى سطح الأرض وتتغلغل فيه؛ فتختنق الشجرة الحاملة لها إلى أن تقتلها تمامًا وتأخذ مكانها.

يُبيّن التمثيل البياني العلاقة بين عدد خلايا بكتيريا والزمن بالساعات.



9 أجد عدد خلايا البكتيريا في البداية.

10 أجد النسبة المئوية للنمو في كلّ ساعة.

11 أكتبُ اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد خلايا البكتيريا بعد h ساعة.

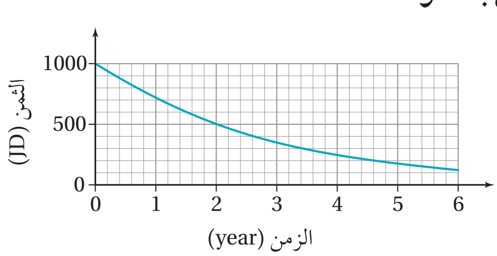
12 بعد كم ساعة يُصبح عدد خلايا البكتيريا 3 أضعاف عددها الأصلي.

يمرّ منحنى الاقتران $y = k(2^x) + c$ بالنقطتين $(0, 10)$، $(-1, 7)$.

13 أجد قيمة كلّ من الثابتين k وc.

14 أجد قيمة y عندما $x = 3$

يُمثّل التمثيل البياني المجاور العلاقة بين ثمن درّاجة نارية بالدينار والزمن بالسنوات.



15 أجد ثمن الدرّاجة عند شرائها.

16 أجد النسبة المئوية للاضمحلال في ثمن الدرّاجة.

17 أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل ثمن الدرّاجة بعد مرور (t) سنة.

يُقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى الهيكتوباسكال (hPa)، ويكون الضغط الجوي عند سطح البحر $1000\ hPa$، ويتناقص بنسبة 12% لكلّ كيلومتر عن سطح البحر.

18 أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي للضغط الجوي عند ارتفاع (h) كيلو متر.

19 أُمثّل اقتران الاضمحلال بيانيًّا.

يُمثل الاقتران $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون في نهر P بعد t سنة.

20 أجد عدد أسماك السلمون في النهر بعد 3 سنوات.

21 أُمثّل الاقتران $P(t)$ بيانيًّا.

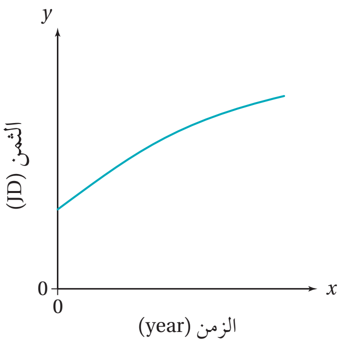
معلومة

عندما تتعرّض أسماك المياه المالحة للمياه العذبة يُمكن أن تنفجر خلاياها؛ بسبب عملية تعرف باسم **التنظيم العضلي**، أمّا السلمون فلديه بعض التعديلات الفسيولوجية والسلوكية المدهشة التي تسمح له بالبقاء في كلا البيئتين.

22 **طب:** حقن الطبيب مريضًا بمادّة علاجية، فإذا كان تركيز هذه المادة في جسم المريض يقلّ بنسبة 10% يوميًّا؛ فأكتبُ اقتران الاضمحلال الذي يُمثّل تناقص تركيز المادة العلاجية M بعد t يوم.

مهارات التفكير العليا

23 **أكتشفُ الخطأ:** تقول سميرة إنّ العلاقة بين ثمن عقار والزمن بالسنوات الممثّلة في الشكل المجاور، تُمثّل اقتران نمو أُسّي لأنّ ثمن العقار يزداد مع الزمن. هل هي على صواب؟ أُبرّر إجابتي.



24 إذا كانت $P = e^{2x}$؛ فأكتبُ كلًّا من المقادير الآتية بدلالة P:

e^{4x}	e^{2x+1}	e^{-x}	e^{-2x}	e^{3x}	e^{x}

25 **تبرير:** متى يقطع الاقتران الأُسّي محور x؟ أُبرّر إجابتي بتقديم مثال داعم.

26 **تحدّ:** أُحدّد العلاقة بين الاقترانين $f(x) = 4^{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{16}(4^x)$. أُبرّر إجابتي.

الدرس 2

الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

فكرةُ الدرسِ تعرّف خصائص الاقتران اللوغاريتمي وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقتران اللوغاريتمي للأساس b، لوغاريتم، اللوغاريتم الاعتيادي، اقتران اللوغاريتم الطبيعي.

مسألةُ اليومِ يُمثّل الاقتران $B(t) = 100e^{0.693t}$ عدد خلايا البكتيريا في طبق بتري B بعد t ساعة.

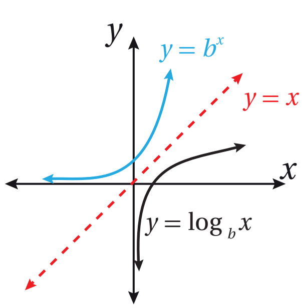
1 بعد كم ساعة يُصبح عدد خلايا البكتيريا في طبق بتري 200 خلية.

2 ما الاقتران العكسي للاقتران $B(t)$؟

تعلّمتُ سابقًا أنّ أيّ اقتران يجتاز اختبار الخط الأُفقي يكون اقتران واحد لواحد، ويُمكنني إيجاد اقتران عكسي له؛ لذا، فإنّه يُمكنني إيجاد اقتران عكسي للاقتران الأُسّي الذي على الصورة $f(x) = b^x$.

يُسمّى الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي $f(x) = b^x$ الاقتران **اللوغاريتمي للأساس b** (logarithmic function with base b)، ويُرمز له بالرمز $\log_b x$ ويُقرأ **لوغاريتم** x (logarithm) للأساس b.

وهذا يعني أنّه إذا كان $f(x) = b^x$ حيث $b > 0, b \neq 1$، $x > 0$، فإنّ $f^{-1}(x) = \log_b x$، ويُبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني المجاور للاقترانين.



أتعلّم

ألاحظ أنّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$

مفهومٌ أساسيٌّ العلاقة بين الصورتين الأُسّية واللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإنّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأسية
$\log_b x = y$ (الأُسّ: y، الأساس: b)	إذا وفقط إذا	$b^y = x$ (الأُسّ: y، الأساس: b)

ويُمكنني استعمال تعريف اللوغاريتمات؛ لكتابة المعادلات من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأُسّية.

مثال 1

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

1 $\log_2 16 = 4$

$\log_2 16 = 4 \longrightarrow 2^4 = 16$

2 $\log_7 7 = 1$

$\log_7 7 = 1 \longrightarrow 7^1 = 7$

3 $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$

$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \longrightarrow (10)^{-3} = \frac{1}{1000}$

4 $\log_5 1 = 0$

$\log_5 1 = 0 \longrightarrow 5^0 = 1$

أتحقق من فهمي

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

a) $\log_3 9 = 2$ b) $\log_5 5 = 1$ c) $\log_4\left(\frac{1}{256}\right) = -4$ d) $\log_8 1 = 0$

ويُمكنني استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا؛ للتحويل من الصورة الأُسّية إلى الصورة اللوغاريتمية.

أتذكّر

الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$ والصورة الأُسّية $b^y = x$ متكافئتان.

مثال 2

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

1 $12^2 = 144$

$12^2 = 144 \longrightarrow \log_{12} 144 = 2$

2 $36^{\frac{1}{2}} = 6$

$36^{\frac{1}{2}} = 6 \longrightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

3 $(3)^{-4} = \frac{1}{81}$

$(3)^{-4} = \frac{1}{81} \longrightarrow \log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

4 $34^0 = 1$

$34^0 = 1 \longrightarrow \log_{34} 1 = 0$

أتحقق من فهمي

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

a) $25^2 = 625$ b) $81^{\frac{1}{2}} = 9$ c) $(10)^{-4} = \frac{1}{10000}$ d) $19^0 = 1$

يُمكنني اســتنتاج – من العلاقة بين الصورتين الأُسّية واللوغاريتمية – أنّ اللوغاريتم هو أُسّ، وبما أنّه كذلك فإنّه يُمكنني إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية بسيطة باستعمال قوانين الأُسس.

مثال 3

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_2 8$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_2 8 = y$
الصيغة الأُسّية	$2^y = 8$
$8 = 2^3$	$2^y = 2^3$
بمساواة الأُسس	$y = 3$

إذن: فإنّ $\log_2 8 = 3$

2 $\log_7 \sqrt{7}$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_7 \sqrt{7} = y$
الصيغة الأُسّية	$7^y = \sqrt{7}$
$\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$	$7^y = 7^{\frac{1}{2}}$
بمساواة الأُسس	$y = \frac{1}{2}$

إذن: فإنّ $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

3 $\log_9 3$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_9 3 = y$
الصيغة الأُسّية	$9^y = 3$
$9 = 3^2$	$(3^2)^y = 3$
قانون قوّة القوّة	$3^{2y} = 3^1$
بمساواة الأُسس	$2y = 1$
بحلّ المعادلة	$y = \frac{1}{2}$

إذن: فإنّ $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

4 $\log_{10} 0.01$

بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y	$\log_{10} 0.01 = y$
الصيغة الأُسّية	$10^y = 0.01$
$0.01 = \frac{1}{100}$	$10^y = \frac{1}{100}$
$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	$10^y = 10^{-2}$
بمساواة الأُسس	$y = -2$

إذن: فإنّ $\log_{10} 0.01 = -2$

أتذكّر

- $a^0 = 1$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_8 64$ b) $\log_{11} \sqrt{11}$ c) $\log_{25} 5$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$

يُمكنني استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات؛ عن طريق ملاحظة الأمثلة السابقة.

مفهومٌ أساسيٌّ

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإنّ:

- $\log_b 1 = 0$ لأنّ $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ لأنّ $b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ لأنّ $b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x, \ x > 0$ لأنّ $\log_b x = \log_b x$

أتعلّم

$\log_b 0$ غير معرّف؛ لأنّ $b^x \neq 0$ لأيّ قيمة x.

مثال 4

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_3 81$

$\log_3 81 = \log_3 3^4$ ⟵ $81 = 3^4$

$= 4$ ⟵ $\log_b b^x = x$

2 $\log_{23} \sqrt{23}$

$= \log_{23} 23^{\frac{1}{2}}$ ⟵ $\sqrt{23} = 23^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$ ⟵ $\log_b b^x = x$

3 $\log_9 9$

$\log_9 9 = 1$ ⟵ $\log_b b = 1$

4 $6^{\log_6 11}$

$6^{\log_6 11} = 11$ ⟵ $b^{\log_b x} = x$

أتحقق من فهمي

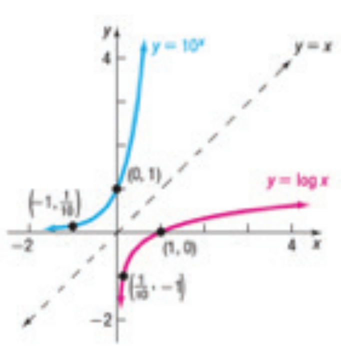
أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 64$ b) $\log_{19} \sqrt{19}$ c) $\log_{18} 18$ d) $4^{\log_4 15}$

يُسمّى اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ **اللوغاريتم الاعتيادي** (common logarithm) ويُكتب عادة من دون أساس.

اقتران اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسّي $y = 10^x$، أي إنّ:

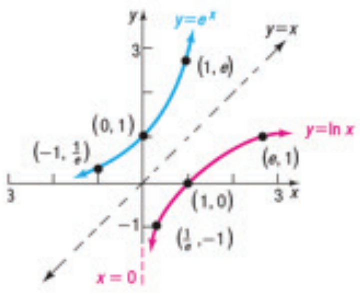
$y = \log x$ إذا وفقط إذا $10^y = x, x > 0$



أمـا اللوغاريتـم للأسـاس e أو $\log_e$ فيُسـمّى **اللوغاريتـم الطبيعـي** (natural logarithmic) ويُرمـز لـه $\ln 1$.

اقتـران اللوغاريتـم الطبيعـي $y = \ln x$ هـو الاقتـران العكسـي للاقتـران الأُسّـي الطبيعـي $y = e^x$، أي إنّ:

$$y = \ln x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad e^y = x\,,\ x > 0$$



لغة الرياضيّات

يـدلّ الرمـز $\ln 1$ علـى اللوغاريتـم الطبيعـي، حيث الحرف l من كلمة logarithmic والحرف n من كلمة natural.

تصلـح خصائـص اللوغاريتمـات أيضًا للوغاريتـم الاعتيـادي واللوغاريتم الطبيعـي، ويُمكن اسـتعمالها لإيجـاد قيمـة كل منهمـا، ولكـن توفّـر لنـا الآلـة الحاسـبة زرًّا خاصًّـا باللوغاريتم الاعتيـادي وهـو log وزرًّا خاصًّـا باللوغاريتـم الطبيعي وهو ln بحيث يُمكن اسـتعمالهما لإيجـاد القيمـة التقريبية لـكل مـن اللوغاريتيـم الاعتيـادي أو اللوغاريتم الطبيعـي، لأيّ عدد حقيقـي موجب.

مثال 5

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 5.3$

أستعملُ الآلة الحاسبة: log 5.3 = 0.7242758696

إذن: $\log 5.3 \approx 0.7$

2 $\log(8.2 \times 10^9)$

أستعملُ الآلة الحاسبة: log (8.2 × 10 $x^{\blacksquare}$ 9) = 9.913813852

إذن: $\log(8.2 \times 10^9) \approx 9.9$

3 $\ln 80$

أستعملُ الآلة الحاسبة: ln 80 = 4.382026635

إذن: $\ln 80 \approx 4.4$

أتعلّم

يتوفّر فـي بعض الآلات الحاسـبة الـزرّ $\log_{\blacksquare}\square$ الذي يُمكن عـن طريقه إيجـاد قيمـة اللوغاريتم لأيّ أسـاس b، حيـث $b > 0$

أتحقق من فهمي

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

c) $\ln 0.00025$ **b)** $\log(6.3 \times 10^5)$ **a)** $\log 1200$

يُمكنني استعمال العلاقة العكسية بين الاقتران الأُسّي والاقتران اللوغارتمي؛ لتمثيل الاقتران اللوغاريتمي الذي على الصورة $y = \log_b x$

مثال 6

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعَيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

1 $f(x) = \log_2 x$

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

بما أنّ المعادلة $y = \log_2 x$ تُكافئ المعادلة $x = 2^y$، إذن: يُمكنني إيجاد الأزواج المرتّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمتغيّر y أولًا، ثمّ إيجاد قِيَم x المرتبطة بها عن طريق التعويض في المعادلة $x = 2^y$.

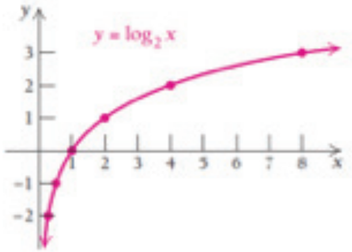
$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(4, 2)$

1 أختار قيمًا لـ y

2 أجد قِيَم x

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.



أتعلّم

يُمكن أيضًا إنشاء جدول القِيَم باختيار قِيَم للمتغيّر x تتناسب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي على الصورة $f(x) = \log_2 x$، ويسهُل عن طريقها استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ أنّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، ولا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y لأن $x > 0$ دائمًا.
- يوجد للاقتران خط تقارب رأسي وهو المحور y.
- الاقتران متزايد.

2 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

بما أنّ المعادلة $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافئ المعادلة $x = (\frac{1}{2})^y$، إذن: يُمكنني إيجاد الأزواج المرتّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمتغيّر y أولًا، ثمّ إيجاد قِيَم x المرتبطة بها عن طريق التعويض في المعادلة $x = (\frac{1}{2})^y$.

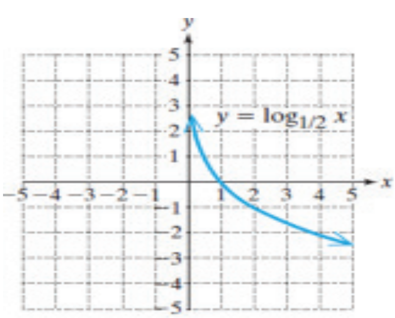
$x = (\frac{1}{4})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(4, -2)$	$(2, -1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, 2)$

1 أختار قيمًا لـ y

2 أجد قِيَم x

الخطوة 2: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.



أُلاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ أنّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، ولا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y لأن $x > 0$ دائمًا.
- يوجد للاقتران خط تقارب رأسي وهو المحور y.
- الاقتران متناقص.

أتحقق من فهمي

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعَيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا.

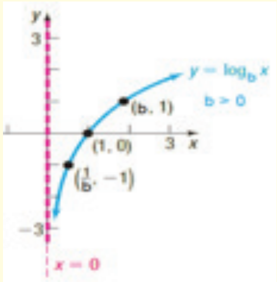
a) $f(x) = \log_3 x$

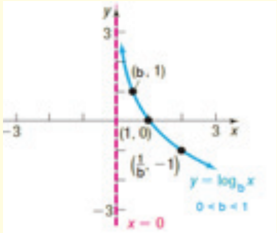
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

أُلاحظ من المثال 6 أنّ الاقتران اللوغاريتمي على الصورة $f(x)=\log_b x$، له مجموعة من الخصائص يُمكن تلخيصها كالآتي:

ملخّص المفهوم — خصائص الاقتران اللوغاريتمي

التمثيل البياني للاقتران اللوغاريتمي على الصورة $f(x) = \log_b x$ حيث b عدد حقيقي و $b > 0$, $b \neq 1$ له الخصائص الآتية:





- مجال الاقتران هو الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- يكون الاقتران متزايدًا إذا كانت $b > 1$
- يكون الاقتران متناقصًا إذا كانت $0 < b < 1$
- للاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y.

يقطع الاقتران المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.

للاقترانات اللوغاريتمية صور مختلفة، ويُمكن تمثيلها بيانيًّا بإيجاد المجال وخط التقارب الرأسي أولًا، ثم إنشاء جدول قِيَم.

مثال 7

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

1 $f(x) = \log_4 (x + 3)$

الخطوة 1: أجد مجال الاقتران وخط التقارب الرأسي له.

مجال الاقتران $f(x)$ هي قِيَم x جميعها التي تجعل المقدار $x + 3 > 0$، وبحلّ المتباينة ينتج أنّ $x > -3$

إذن: مجال الاقتران $(-3, \infty)$

أمّا خط التقارب الرأسي فهو $x = -3$

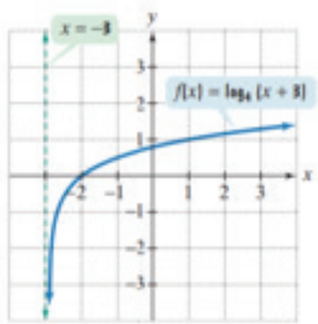
الخطوة 2: أُنشئ جدول قِيَم.

أختار قيمًا للمتغيّر x، وأستعملُ الخصائص الأساسية للرغاريتمات لإيجاد قِيَم y.

x	-2	-1	1	5
$y = \log_4(x+3)$	0	0.5	1	1.5
(x, y)	$(-2, 0)$	$(-1, 0.5)$	$(1, 1)$	$(5, 1.5)$

الخطوة 3: أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.



2 $f(x) = \ln x - 1$

الخطوة 1: أجد مجال الاقتران وخط التقارب الرأسي له.

مجال الاقتران $f(x)$ هي قِيَم x جميعها، التي تجعل المقدار $x > 0$

إذن: مجال الاقتران $(0, \infty)$.

أمّا خط التقارب الرأسي فهو $x = 0$ أي المحور y.

الخطوة 2: أُنشئ جدول قِيَم.

أختار قيمًا للمتغيّر x وأستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيم y، وأختار منزلة لتقريب الأعداد الناتجة (مثلًا إلى أقرب جزء من عشرة).

x	1	2	3	4
$y = \ln x - 1$	-1	-0.3	0.1	0.4
(x, y)	$(1, -1)$	$(2, -0.3)$	$(3, 0.1)$	$(4, 0.4)$

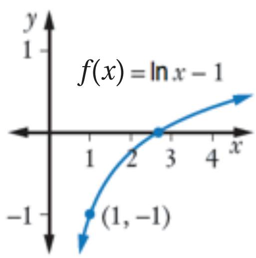
أتذكّر

أختار قيمًا للمتغيّر x تتناسب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي، ويسهُل عن طريقها استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

أفكّر

كيف أجد نقطة تقاطع الاقتران $f(x) = \log 4(x+3)$ مع المحور x؟

الخطوة 3 : أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.



أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.

3 $f(x) = 3 \log (x-1)$

الخطوة 1 : أجد مجال الاقتران وخط التقارب الرأسي له.

مجال الاقتران $f(x)$ هي قِيَم x جميعها، التي تجعل المقدار $x-1 > 0$، وبحلّ المتباينة ينتج أنّ $x > 1$

إذن: مجال الاقتران $(1, \infty)$.

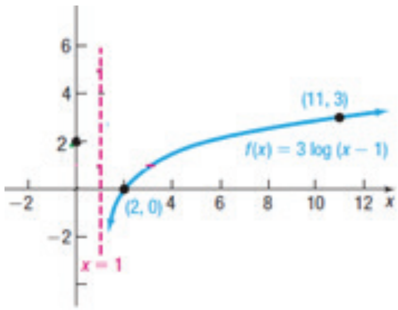
أمّا خط التقارب الرأسي فهو $x = 1$

الخطوة 2 : أُنشئ جدول قِيَم.

أختار قيمًا للمتغير x وأستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قِيَم y، وأختار منزلة لتقريب الأعداد الناتجة (مثلًا إلى أقرب جزء من عشرة).

x	2	3	4	11
$y = 3 \log (x-1)$	0	0.9	1.4	3
(x, y)	(2, 0)	(3, 0.9)	(4, 1.4)	(11, 3)

الخطوة 3 : أُمثّل الاقتران في المستوى الإحداثي.



أُعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط منحنٍ متّصل، كما في الشكل المجاور.

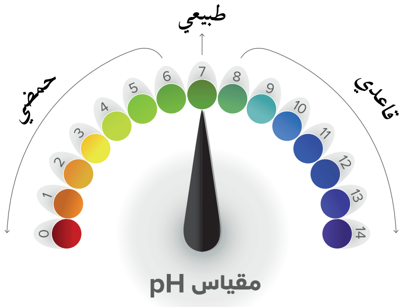
أتحقق من فهمي أُمثّل كلًّ من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

a) $f(x) = \log_5 (x-2)$

b) $f(x) = \ln (x+3)$

c) $f(x) = \log x + 4$

مثال 8 : من الحياة



علوم: يُعرف الرمز **pH** باسم الرقم الهيدروجيني، وهو القياس الذي يُحدّد إذا كان السائل قاعديًّا أم حمضيًّا أم متعادلًا، ويُمكن إيجاد الرقم الهيدروجيني **(pH)** للسوائل عن طريق المعادلة $\mathbf{pH = -\log [H^+]}$ حيث تُمثّل $\mathbf{[H^+]}$ تركيز أيونات الهيدروجين في المول لكل ليتر **(mol/ L)**.

معلومة

للأمطار الحمضية تأثيرات مدمّرة على النباتات والحيوانات المائية، ومعظمها تتكوّن بسبب مركّبات النيتروجين والكبريت الناتجة عن الأنشطة البشرية، والتي تتفاعل في الجو لتكوّن الأحماض.

1 **أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لعيّنة مطر تركيز أيونات الهيدروجين فيها 0.0002 mol/L، ثم أُحدّد إذا كانت مياه الأمطار التي أُخذت منها العيّنة حمضية أم لا، علمًا بأنّ الرقم الهيدروجيني للأمطار الطبيعية 5.6 أو أكثر (أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة).**

$$pH = -\log [H^+]$$ المعادلة الأصلية

$$= -\log (0.0002)$$ بتعويض $[H^+] = 0.0002$

$$\approx 3.7$$ أستعملُ الآلة الحاسبة

إذن: الرقم الهيدروجيني (pH) لعيّنة المطر 3.7 تقريبًا، وبمقارنة الرقم الهيدروجيني لعيّنة المطر بالرقم الهيدروجيني للمياه الطبيعية، أجد أنّ مياه الأمطار التي أُخذت منها العيّنة حمضية.

2 **أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لسائل تنظيف منزلي تركيز أيونات الهيدروجين فيه $\mathbf{1.0 \times 10^{-11}}$ mol/L، ثم أُحدّد إذا كان السائل حمضيًّا أم قاعديًّا.**

$$pH = -\log [H^+]$$ المعادلة الأصلية

$$= -\log (1.0 \times 10^{-11})$$ بتعويض $[H^+] = 1.0 \times 10^{-11}$

$$= -\log (10^{-11})$$ بالتبسيط

$$= -(-11)$$ $\log_b b^x = x$

$$= 11$$ بالضرب

إذن: الرقم الهيدروجيني (pH) لسائل التنظيف 11، ما يعني أنّه قاعدي.

أفكّر

تُظهِر الأبحاث أنّ مستويات الرقم الهيدروجيني القاعدية للشامبو تُطلق شحنات كهربائية سالبة، ما يؤدّي إلى تلف البشرة وتكسّر ألياف الشعر. فهل الشامبو في سؤال أتحقّق من فهمي مناسب للشعر أم لا؟ أُبرّر إجابتي.

أتحقق من فهمي

أجد الرقم الهيدروجيني (pH) لشامبو طبيعي تركيز أيونات الهيدروجين فيه $\mathbf{5.88 \times 10^{-7}}$ mol/ L، ثم أُحدّد إذا كان الشامبو حمضيًّا أم قاعديًّا. (أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

1 $\log_4 1024 = 5$
2 $\log_3 729 = 6$
3 $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
4 $\log_{25} 5 = 0.5$

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

5 $6^3 = 216$
6 $3^{-2} = \frac{1}{9}$
7 $5^4 = 625$
8 $2^{-3} = 0.125$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

9 $\log_2 256$
10 $\log_9 27$
11 $\log 0.1$
12 $\log_{\frac{7}{2}} 1$
13 $e^{\ln \frac{1}{2}}$
14 $\log_y \sqrt[3]{y}$
15 $\log(1.0 \times 10^{-6})$
16 $6^{\log_6 2.8}$

أستعملُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

17 $\log \frac{1}{32}$
18 $\log(2.77 \times 10^{-4})$
19 $\ln 0.000062$
20 $\ln \pi$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

21 $f(x) = \log_5 x$
22 $h(x) = \log_8 x$
23 $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
24 $r(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$
25 $g(x) = \ln(x-1)$
26 $h(x) = 8 + 5\ln(2x+3)$
27 $f(x) = 3 - \log_4 (\frac{x}{2} - 5)$
28 $w(x) = |\ln x|$

النسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في مدى تذكّر الطلبة للمعلومات، عُرّضت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادّة معيّنة، وأُعيد تعريضهم لاختبارات مكافئة لذلك الاختبار على فترات شهرية بعد ذلك. فوجد أنّ النسبة المئوية لمتوسّط علامات الطلبة $S(t)$، بعد t شهرًا تُعطى بالاقتران $S(t) = 78 - 15 \log(t+1)\ ,\ t \geq 0$.

معلومة

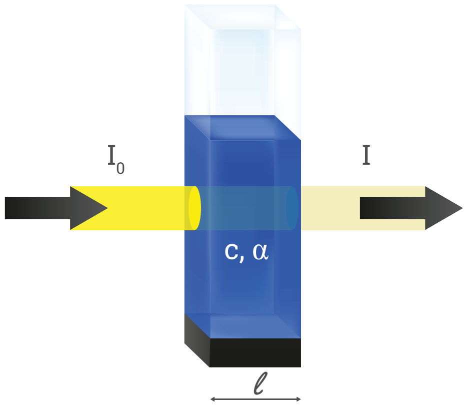
إنّ فهم المعلومات أولًا وتنظيمها؛ يُسهّل تذكّرها واستعادتها، ويُساعد أيضًا تدوين المعلومات عدّة مرّات على تغذية الدماغ وتدريبه على تذكّر المعلومات في ما بعد.

29 أجد النسبة المئوية لمتوسّط علامات الطلبة في بداية الدراسة.

30 أجد النسبة المئوية لعلامات الطلبة بعد 4 أشهر من بدء الدراسة؟

31 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_a x$ يمرّ بالنقطة $(2, 2)$

32 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_c x$ يمرّ بالنقطة $(\frac{1}{2}, -4)$



ضوء: تُمثّل المعادلة $A = 2 - \log 100T$ كمّية الضوء التي تمتصّها عيّنة من محلول A حيث T نسبة الضوء الذي ينتقل خلال المحلول (T نسبة شدّة الضوء قبل اختراق المحلول I_0 إلى شدّته بعد اختراق المحلول I).

33 إذا كانت نسبة الضوء التي انتقلت خلال محلول 72%؛ فأجد مقدار الضوء الذي امتصه المحلول.

34 إذا كانت كمّية الضوء التي امتصّها محلول 0.174؛ فأجد نسبة الضوء التي انتقلت خلاله.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُحدّد التمثيل البياني المناسب لكل اقتران ممّا يأتي، وأُبرّر إجابتي:

35 $f(x) = \log_3 (x-1)$

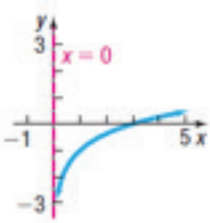
36 $g(x) = \log_3(x) - 1$

37 $h(x) = 1 - \log_3(x)$

a)

b)

c)



38 تحدّ: أجد المقطع x للاقتران $f(x) = \log(x-k)$، حيث k ثابت.

أُحدّد إذا كانت الجمل الآتية صحيحة أم خطأ، وأُبرّر إجابتي بمثال:

39 يوجد قيود على مجال الاقترانات اللوغاريتمية دائمًا.

40 لا يوجد قيود على مدى الاقترانات اللوغاريتمية.

41 يوجد خط تقارب للتمثيل البياني للاقترانات اللوغاريتمية دائمًا.

42 تبرير: من دون استعمال الآلة الحاسبة، أُبيّن أيّ القِيَم الآتية أكبر. أُبرّر إجابتي:

$\log_5 28 \quad , \quad \log_6 32 \quad , \quad \log_7 40$

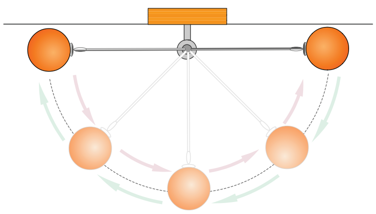
قوانين اللوغريتمات
Laws of logarithmes

فكرةُ الدرسِ

- تعرّف قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أُسّية ولوغاريتمية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

المصطلحاتُ خاصّية المساواة اللوغاريتمية، معادلة لوغاريتمية

مسألةُ اليومِ تُمثّـل المعادلة $T = 2L^n$ الزمــن T بالثواني اللازم لتأرجح البندول 10 مرّات، حيـث L طول البندول بالأمتار و n عدد ثابـت. إذا علمتُ أنّ بندولًا طولـه $0.25\ \text{m}$ تلزمه 12 ثانية ليتأرجح 10 مرّات. فما قيمة الثابت n؟



تعلمتُ ســابقًا قوانين الأسس، ووظّفتها في تبسيط مقادير أُسّــية، وإيجاد قيمة مقادير عددية ومنها قوانين الضرب والقسمة وقوّة القوّة.

قانون ضرب القوى	قانون قسمة القوى	قانون ضرب القوى
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, b \neq 0$	$(b^x)^y = b^{xy}$

وبما أنّه توجد علاقة عكسية بين اللوغاريتمات والأُسس، فيُمكن اشتقاق قوانين لوغاريتمات مقابلة لهذه القوانين.

مفهوم أساسي **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث $b \neq 1$ فإنّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

ويُمكنني إثبات صحّة قانون الضرب؛ باستعمال قوانين الأُسس كالآتي:

أفرضُ أنّ $m = \log_b x$ ومنه $b^m = x$

أفرضُ أنّ $n = \log_b y$ ومنه $b^n = y$

ومنه فإنّ $xy = b^m\, b^n = b^{m+n}$

وعند كتابة التعبير $xy = b^{m+n}$ بالصورة اللوغاريتمية؛ فإنّ الناتج:

$$\log_b xy = m + n$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad ✓$$

ويُمكنني أيضًا إثبات صحّة قانونَي القسمة والقوة؛ باستعمال قوانين الأُسس.

يُمكنني استعمال قوانين اللوغاريتمات في إيجاد قِيَم مقادير لوغاريتمية.

أتذكّر

الصورة اللوغاريتمية $\log^b x = y$ والصورة الأُسّية $b^y = x$ متكافئتان.

مثال 1

إذا كان $\log_a 2 \approx 0.301$ و $\log_a 3 \approx 0.477$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 $\log_a 6$

$\log_a 6 = \log_a (2 \times 3)$ — $6 = 2 \times 3$

$= \log_a 2 + \log_a 3$ — قانون الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 0.301 + 0.477$ — بالتعويض $\log_a 2 \approx 0.301$, $\log_a 3 \approx 0.477$

≈ 0.778 — بالجمع

2 $\log_a \frac{2}{3}$

$\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$\approx 0.301 - 0.477$ — بالتعويض $\log_a 2 \approx 0.301, \log_a 3 \approx 0.477$

≈ -0.176 — بالطرح

3 $\log_a 81$

$\log_a 81 = \log_a (3^4)$ — $81 = 3^4$

$= 4 \log_a 3$ — قانون القوة في اللوغاريتمات

$\approx 4\,(0.477)$ — بالتعويض $\log_a 3 \approx 0.477$

≈ 1.908 — بالضرب

4 $\log_a \frac{1}{4}$

$\log_a \frac{1}{4} = \log_a 1 - \log_a 4$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= 0 - \log_a 2^2$ — $\log_a 1 = 0\,,\, 4 = 2^2$

$= -2 \log_a 2$ — بالطرح، وقانون القوة في اللوغاريتمات

$\approx -2(0.301)$ — بالتعويض $\log_a 2 \approx 0.301$

≈ -0.602

أُفكّر

هل يُمكن إيجاد $\log_a 5$ عن طريق معطيات المثال 1 باستعمال قوانين اللوغاريتمات؟ أُبرِّر إجابتي.

أُفكّر

هل يُمكن استعمال قانون القسمة لإيجاد ناتج $\frac{\log_a 3}{\log_a 2}$؟

أتحقق من فهمي

إذا كان $\log_b 4 \approx 0.86$ و $\log_b 3 \approx 0.68$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 12$ b) $\log_b 9$ c) $\log_b 0.75$ d) $\log_b \frac{1}{3}$

أحتــاجُ في بعض الأحيان إلى إعادة كتابة عبارات لوغاريتميــة بصورة مطوّلة، ويُمكنني ذلك باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

مثال 2

أكتـبُ كلّ عبـارة لوغاريتميـة ممّـا يأتـي بالصـورة المطوّلـة؛ علمًا بـأنّ المتغيّـرات جميعها تُمثّـل أعـدادًا حقيقيـة موجبة:

1 $\log_4 5x^3 y$

$\log_4 5x^3 y = \log_4 5 + \log_4 x^3 + \log_4 y$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_4 5 + 3\log_4 x + \log_4 y$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

2 $\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7}$

$\ln \frac{\sqrt{3x-5}}{7} = \ln \frac{(3x-5)^{\frac{1}{2}}}{7}$ صورة الأُسّ النسبي

$= \ln (3x-5)^{\frac{1}{2}} - \ln 7$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2}\ln (3x-5) - \ln 7$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

3 $\log_a \frac{x^2 y^5}{z^4}$

$\log_a \frac{x^2 y^5}{z^4} = \log_a x^2 y^5 - \log_a z^4$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_a x^2 + \log_a y^5 - \log_a z^4$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_a x + 5\log_a y - 4\log_a z$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

4 $\log_a \sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{c^5}}$

صورة الأُسّ النسبي	$\log_a \sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{c^5}} = \log_a \left(\dfrac{a^2b}{c^5}\right)^{\frac{1}{3}}$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{3}\log_a \left(\dfrac{a^2b}{c^5}\right)$
قانون القسمة في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{3}(\log_a a^2b - \log_a c^5)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{3}(\log_a a^2 + \log_a b - \log_a c^5)$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{3}(2\log_a a + \log_a b - 5\log_a c)$
$\log_b b = 1$	$= \dfrac{1}{3}(2 + \log_a b - 5\log_a c)$
خاصّية التوزيع	$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\log_a b - \dfrac{5}{3}\log_a c$

أتحقق من فهمي

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

a) $\log_3 a^2bc^3$

b) $\ln(a^2\sqrt{a-1})$

c) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)$

d) $\log_b \dfrac{x^2y}{b^3}$

توسّع

أستعملُ برمجية جيوجيبرا لتمثيل الاقترانين $f(x)=\ln x-\ln(x-3)$ و $g(x)=\ln\dfrac{x}{x-3}$ في المستوى الإحداثي نفسه. هل أظهرت البرمجية المجال نفسه للاقترانين؟ أبرّر إجابتي.

تعلّمتُ في المثال السابق كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطوّلة، ولكن أحتاجُ أحيانًا إلى كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطوّلة إلى الصورة المختصرة، وهذا يعني كتابة العبارة اللوغارتمية على شكل لوغاريتم واحد.

مثال 3

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

1 $\frac{2}{3}\ln 8-\ln(5^2-1)$

$\frac{2}{3}\ln 8-\ln(5^2-1)=\ln 8^{\frac{2}{3}}-\ln(25-1)$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$=\ln 4-\ln 24$ $8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4$

$=\ln\frac{4}{24}$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$=\ln\frac{1}{6}$ بالتبسيط

$=\ln 1-\ln 6$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$=-\ln 6$ $\ln 1=0$

2 $\ln x^5-2\ln(xy)$

$\ln x^5-2\ln(xy)=\ln x^5-\ln(xy)^2$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$=\ln x^5-\ln x^2y^2$ قوة حاصل الضرب

$=\ln\frac{x^5}{x^2y^2}$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$=\ln\frac{x^3}{y^2}$ بالتبسيط

3 $2\log x-\frac{1}{2}\log y+3\log z$

$2\log x-\frac{1}{2}\log y+3\log z=\log x^2-\log y^{\frac{1}{2}}+\log z^3$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$=\log x^2+\log z^3-\log y^{\frac{1}{2}}$ بإعادة تجميع الحدود ذات المعاملات الموجبة

$=\log x^2z^3-\log y^{\frac{1}{2}}$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$=\log\left(\frac{x^2z^3}{y^{\frac{1}{2}}}\right)$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$=\log\left(\frac{x^2z^3}{\sqrt{y}}\right)$ الصورة الجذرية

أتعلّم

أتجنّب هذه الأخطاء عند كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطوّلة أو الصورة المختصرة:

$$\log_b(M+N)=\log_b M+\log_b N$$
$$\log_b(M-N)=\log_b M-\log_b N$$
$$\log_b(M\cdot N)=\log_b M\cdot\log_b N$$
$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{\log_b M}{\log_b N}$$
$$\frac{\log_b M}{\log_b N}=\log_b M-\log_b N$$
$$\log_b(MNP)=p\log_b(MN)$$

4 $\frac{1}{2}(\log_5(x^2-y^2)-\log_5(x+y))$

$$\frac{1}{2}(\log_5(x^2-y^2)-\log_5(x+y))=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}\right)$$ بتحليل الفرق بين مربّعين

$$=\frac{1}{2}\log_5(x-y)$$ بالاختصار

$$=\log_5(x-y)^{\frac{1}{2}}$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$$=\log_5\sqrt{(x-y)}$$ الصورة الجذرية

أتحقق من فهمي

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّـــا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

a) $\ln 25+\ln 4$

b) $\ln(3x+1)-\ln(3x^2-5x-2)$

c) $\frac{1}{2}(\log_2(a^2+ab)-\log_2 a)$

تعلّمتُ ســابقًا أنّ معظم الآلات الحاســبة توفّر زرّيــن للوغاريتمات هما log و ln . ولكن، كيف يُمكنني إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات؟

يُمكنني حلّ هذه المشــكلة بتغيير الأساس غير المرغوب به (وهو في هذه الحالة الأساس 4) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه، ويُمكنني التحقّق من إمكانية ذلك جبريًّا كما يأتي:

$$\log_4 7=y$$ بافتراض أنّ العبارة اللوغاريتمية تساوي y

$$4^y=7$$ الصيغة الأُسّية

$$\ln 4^y=\ln 7$$ بأخذ ln للطرفين

$$y\ln 4=\ln 7$$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$$y=\frac{\ln 7}{\ln 4}$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$\log_4 7=\frac{\ln 7}{\ln 4}$$ $y=\log_4 7$

أُلاحظ من الخطوات أعلاه أنّه أمكن كتابة $\log_4 7$ على صورة حاصل قسمة لوغاريتمين طبيعيّين، ومنه أصبح بالإمكان استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمته.

$$\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4} = 1.4036 \dots \dots$$

ويُمكن تعميم صيغة تغيير الأساس كما يأتي:

مفهوم أساسي **صيغة تغيير الأساس**

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1, a \neq 1$ فإنّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

أفكّر

هل سأحصل على النتيجة نفسها لو استعملت اللوغاريتم الاعتيادي بدلًا من استعمال اللوغاريتم الطبيعي في الفرع 1 من المثال؟ أبرّر إجابتي.

مثال 4

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة إن لزم الأمر:

1 $\log_3 16$

$\log_3 16 = \dfrac{\ln 16}{\ln 3}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 2.52 أستعملُ الآلة الحاسبة

2 $\log_4 25$

$\log_4 25 = \dfrac{\log 25}{\log 4}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 2.32 أستعملُ الآلة الحاسبة

3 $\log_{\frac{1}{2}} 2$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}}$ صيغة تغيير الأساس

$= \dfrac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2}$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \dfrac{\ln 2}{-\ln 2}$ $\ln 1 = 0$

$= -1$ بالتبسيط

4 $\log_6 10$

$\log_6 10 = \dfrac{\log 10}{\log 6}$ صيغة تغيير الأساس

$= \dfrac{1}{\log 6}$ $\log 10 = 1$

≈ 1.29 أستعملُ الآلة الحاسبة

أفكّر

هل يُمكنني حلّ الفرع 3 من المثال بطريقة أخرى؟ أبرّر إجابتي.

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئةإن لزم الأمر:

a) $\log_2 89$ **b)** $\log_5 19$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}} 12$ **d)** $\log_8 e^2$

تعلّمتُ سابقًا مفهوم المعادلة الأُسّية وهي معادلة تتضمّن قوى أُسسها متغيّرات، ويتطلّب حلّها كتابة طرفَي المعادلة بصورة قوّة للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسّي الطرفين وفق القاعدة الآتية:

إذا كان $a^x = a^y$ فإنّ $x = y$ حيث $a > 0, a \neq 0$

فمثلًا، لحلّ المعادلة $2^{3x} = 64$ أتّبعُ الخطوات الآتية:

المعادلة الأصلية	$2^{3x} = 64$
الأساسان متساويان	$2^{3x} = 2^6$
بمساواة الأُسس	$3x = 6$
بحلّ المعادلة	$x = 2$

ولكن، في بعض المعادلات الأُسّية لا يُمكن كتابة طرفي المعادلة بصورة قوّة للأساس نفسه، مثل المعادلة: $4^x = 10$، وفي هذه الحالة يُمكن استعمال **خاصّية المساواة اللوغاريتمية** (property of logarithmic equality)

أتعلّم

نتجت خاصّية المساواة اللوغاريتمية من أنّ الاقتران اللوغاريتمي اقتران واحد لواحد؛ إذ يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله.

مفهوم أساسي **خاصّية المساواة اللوغاريتمية**

إذا كانَ $b > 1$ حيث $b \neq 1$ فإنّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

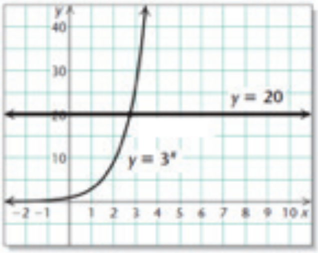
ونتيجةً للخاصّية أعلاه؛ يُمكن حلّ المعادلات الأُسّية التي لا يُمكن كتابتها بصورة قوّة للأساس نفسه؛ بأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفَي المعادلة، ثم استعمال قانون القوّة في اللوغاريتمات.

مثال 5

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

1 $3^x = 20$

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra)، لتمثيل المعادلتين $y = 3^x$، $y = 20$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



المعادلة الأصلية $3^x = 20$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين $\log 3^x = \log 20$

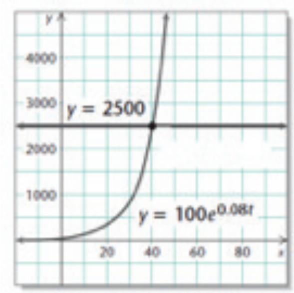
قانون القوّة في اللوغاريتمات $x \log 3 = \log 20$

بقسمة طرفَي المعادلة على log 3 $x = \frac{\log 20}{\log 3}$

باستعمال الآلة الحاسبة $x \approx 2.7268$

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 2.7268$

2 $\mathbf{100\, e^{0.08t} = 2500}$



أُمثّل المعادلتين $y = 100\, e^{0.08t}$ ، $y = 2500$ في المســتوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحــظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطــة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

المعادلة الأصلية $100\, e^{0.08t} = 2500$

بالقسمة على 100 $e^{0.08t} = 25$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين $\ln e^{0.08t} = \ln 25$

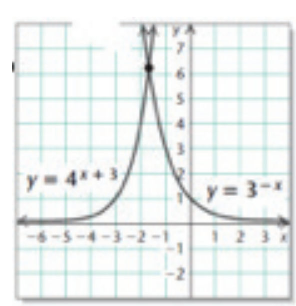
$\log_b b^x = x$ $0.08t = \ln 25$

بقسمة طرفَي المعادلة على 0.08 $t = \frac{\ln 25}{0.08}$

باستعمال الآلة الحاسبة $t \approx 40.2359$

إذن: حلّ المعادلة هو $t \approx 40.2359$

3 $\mathbf{4^{x+3} = 3^{-x}}$



أُمثّل المعادلتين $y = 4^{x+3}$، $y = 3^{-x}$ في المســتوى الإحداثي نفســه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

$4^{x+3} = 3^{-x}$ المعادلة الأصلية

$\log 4^{x+3} = \log 3^{-x}$ بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$(x+3)\log 4 = -x \log 3$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$x \log 4 + 3 \log 4 = -x \log 3$ خاصّية التوزيع

$x \log 4 + x \log 3 = -3 \log 4$ إعادة ترتيب المعادلة

$x(\log 4 + \log 3) = -3 \log 4$ بإخراج x عاملًا مشتركًا

$x = \dfrac{-3 \log 4}{\log 4 + \log 3}$ بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 4 + \log 3$

$x \approx -1.6737$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx -1.6737$

4 $\mathbf{4^x + 2^x - 12 = 0}$

أُمثّل المعادلة $y = 4^x + 2^x - 12$، في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنى المعادلة يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

$4^x + 2^x - 12 = 0$ المعادلة الأصلية

$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

$u^2 + u - 12 = 0$ بافتراض أنّ $2^x = u$

$(u+4)(u-3) = 0$ بالتحليل

$u = -4 \quad or \quad u = 3$ خاصّية الضرب الصفري

$2^x = -4 \; ✗ \qquad 2^x = 3$ باستبدال 2^x بـ u

$\log 2^x = \log 3$ بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$x \log 2^1 = \log 3$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ بقسمة طرفَي المعادلة على $\log 2$

$x \approx 1.5850$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: حلّ المعادلة هو $x \approx 1.5850$

أتحقق من فهمي

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $5^x = 8$

b) $4e^{2x} - 3 = 2$

c) $2^{x-1} = 3^{3x+2}$

d) $9^x + 3^x - 20 = 0$

تُسمّى المعادلات التي تحوي متغيّرًا داخل تعبير لوغاريتمي **معادلة لوغاريتمية** (logarithmic equations)، ومن أمثلتها:

$$\log_2 x = 4 \quad , \quad \log x + \log (x+3) = 1$$

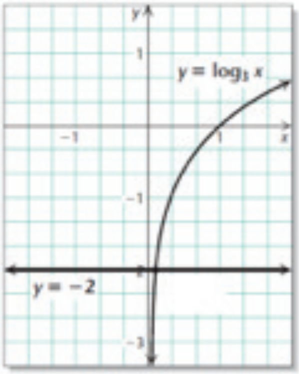
ولحلّ المعادلة اللوغاريتمية جبريًّا؛ أكتبها أولًا بدلالة لوغاريتم واحد في أحد طرفَي المعادلة، ثم أستعملُ خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

مثال 6

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

1 $\log_3 x = -2$

أُمثّل المعادلتين $y = \log_3 x$ ، $y = -2$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.



$\log_3 x = -2$ المعادلة الأصلية

$3^{-2} = x$ بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$\frac{1}{3^2} = x$ قانون الأُسس السالبة

$\frac{1}{9} = x$ بالتبسيط

للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

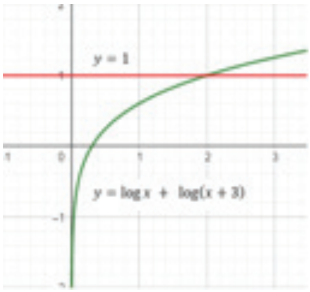
$$\log_3 \frac{1}{9} \stackrel{?}{=} -2$$

$$\log_3 3^{-2} \stackrel{?}{=} -2$$

$$-2 = -2 \quad ✓$$

إذن: حلّ المعادلة هو $x = \frac{1}{9}$

2 $\log x + \log(x+3) = 1$



أُمثّل المعادلتين $y = \log x + \log(x+3)$، $y = 1$ في المستوى الإحداثي نفسه، كما في التمثيل البياني المجاور. أُلاحظ أنّ منحنيَي المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحقّق من ذلك جبريًّا باستعمال خاصّية المساواة اللوغاريتمية.

$\log x + \log(x+3) = 1$ المعادلة الأصلية

$\log(x(x+3)) = 1$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$x(x+3) = 10^1$ بالتحويل إلى الصورة الأُسّية

$x^2 + 3x = 10$ خاصّية التوزيع

$x^2 + 3x - 10 = 0$ بإعادة ترتيب المعادلة

$(x-2)(x+5) = 0$ بالتحليل

$x - 2 = 0 \quad or \quad x + 5 = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$x = 2 \quad or \quad x = -5$ بحلّ المعادلة

للتحقّق؛ أُعوّض قيمة x في المعادلة الأصلية:

عندما $x = -5$

$\log(-5) + \log(-5+3) \stackrel{?}{=} 1$ ✗

عندما $x = 2$

$\log(2) + \log(2+3) \stackrel{?}{=} 1$

$\log(2) + \log(5) \stackrel{?}{=} 1$

$\log(2 \times 5) \stackrel{?}{=} 1$

$\log 10 = 1$ ✓

العدد -5 ليس حلًّا للمعادلة اللوغاريتمية؛ لأنّ ناتج تعويضه داخل اللوغاريتم عدد سالب،

إذن: حلّ المعادلة هو $x = 2$

أتحقق من فهمي

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

a) $5 + 2\ln x = 4$

b) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$

مثال 7 : من الحياة

كائنات حيـة: وجد العلمـاء أنّه يُمكـن معرفة عمر عيّنـة من كائن ميّـت؛ وفقًا لنسـبة الكربون 14 المتبقّيـة فيها عن طريـق الاقتران: $A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$، حيث $A(p)$ عمر العيّنة بالسنوات، P النسبة المئوية (بالصورة العشـرية) المتبقّية من الكربون 14 في العيّنة. أجد النسـبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في جمجمة إنسـان عمرها 2715 عامًا تقريبًا. أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$2715 = \frac{\ln p}{-0.000121} \quad \text{بتعويض } A(p) = 2715$$

$$-0.328515 = \ln p \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$p = e^{-0.328515} \quad \text{بالتحويل إلى الصورة الأُسّية}$$

$$p \approx 0.72$$

إذن: النسبة المئوية من الكربون المتبقّية في الجمجمة 72%

معلومة

تحتوي أنسجة الكائنات الحيـة علـى نوعين من الكربـون: الكربـون 14 والكربـون 12، وبعـد موتها فـإنّ كمّية الكربون 12 تبقـى ثابتـة، في ما تتناقص كمّية الكربون 14 بمقدار ثابت مع الزمن.

أتحقق من فهمي

كشفت دراسة أنّ المجموعة الأخيرة من حيوان الماموث الصوفي قد لقيت حتفها قبل 4000 سـنة تقريبًا في جزيرة نائية في المحيط القطبي الشـمالي. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في أحدها. أُقرّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كان $\log_a 7 \approx 0.845$ و $\log_a 11 \approx 1.041$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1) $\log_a \frac{7}{11}$
2) $\log_a 77$
3) $\frac{\log_a 11}{\log_a 7}$
4) $\log_b \frac{1}{7}$
5) $\log_a 539$
6) $\log_7 11$
7) $\log_a (11a^2)$
8) $\log_a \sqrt[3]{121}$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

9) $\log_a (\frac{xy}{x})$
10) $\log_a (xyz)$
11) $\ln \sqrt[3]{5x^2}$
12) $\log \sqrt{\frac{m^8 n^{12}}{a^3 b^5}}$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

14 $\log x + \log(x^2 - 1) - \log 7 - \log (x + 1)$

13 $\ln 75 + \ln 2$

16 $\frac{2}{3}(\ln(x^2 - 9) - \ln(x + 3) + \ln(x + y))$

15 $\log_a \frac{a}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{ax}$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

20 $\log_8 120$

19 $\log_9 (0.0006)$

18 $\log_4 (\frac{1}{100})$

17 $\log_4 17$

21 **فيزياء:** يُقاس الضغط الجوي P بوحدة الباسكال على ارتفاع مقداره H بالأمتار؛ باستعمال المعادلة $H = 15500(5 - \log(P))$. أجد الضغط الجوي بالباسكال على قمة إفرست؛ إذا علمتُ أنّ ارتفاعها 8850 m عن سطح الأرض.

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

25 $25^x - 3(5^x) + 2 = 0$

24 $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$

23 $e^x + e^{-x} - 6 = 0$

22 $5^{x+2} = 4^{1-x}$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

27 $\ln (x + 8) + \ln (x - 1) = 2 \ln x$

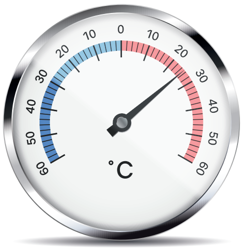
26 $\log (x + 5) - \log (x - 3) = \log 2$

30 $2 \log 50 = 3 \log 25 + \log (x - 2)$

29 $\ln x^2 = (\ln x)^2$

28 $\log_3 (\log_4 x) = 0$

31 **حرارة:** تُمثّل المعادلة $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن بالسليسيوس °C بعد t دقيقة من بدء تبريده. أجد الوقت اللازم لتبريد المعدن لدرجة حرارة 100 °C



مهارات التفكير العليا

تحدّ: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

33 $|2^{x^2} - 8| = 3$

32 $7e^{3k} - 7e^{-3k} - 48 = 0$

34 **تبرير:** إذا كانت $x > 0$, $\log_3 x = k \log_2 x$؛ فأجد قيمة k مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية، وأُبرّر إجابتي.

35 إذا كان $f(x) = e^x - e^{-x}$؛ فأجد $f^{-1}(x)$.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 معامل النمو للاقتران $f(x) = 4(3^x)$ يساوي:

a) 3 b) 4 c) 12 d) 64

2 حلّ المعادلة $\ln x = -1$، هو:

a) 1 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e

3 قيمة $\log(0.01)^2$ تساوي:

a) -2 b) 2 c) 4 d) -4

4 يُكتب التعبير $\log_a 9 - 2\log_a 3 + \log_a 2$ على صورة لوغاريتم واحد:

a) $\log_a 6$ b) $\log_a 2$

c) $\log_a 9$ d) $2\log_a 3$

5 أيّ المقادير الآتية يكافئ المقدار $\log_a \frac{3x^2}{y}$؟

a) $2\log_a 3x - \log_a y$

b) $3\log_a x^2 - \log_a y$

c) $6\log_a x - \log_a y$

d) $\log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y$

6 حلّ المعادلة $\log_2 x - \log_3(x+1) = \log_5(x-3)$، هو:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

إذا كان $\log_3 5 = c$؛ فأكتبُ قيمة كل ممّا يأتي بدلالة c:

7 $\log_3 15$

8 $\log_3 0.2$

9 $\log_3 125$

10 $\log_9 5$

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

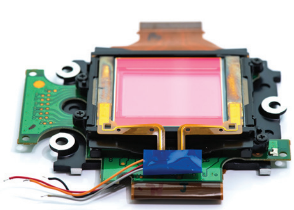
11 $\frac{1}{4}\log_6(x-3) = \log_3 6$

12 $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$

13 $e^x + e^{-x} = 5$

14 $27 = 3^{5x} \times 9^{x^2}$

حرارة: تُمثّل المعادلة $T = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة حساس جهاز إلكتروني بالسلسيوس $°C$ بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز.



15 أجد حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء التشغيل.

16 عندما تصل حرارة الحساس إلى $50°C$ يجب إطفاء الجهاز لتبريده. بعد كم ساعة من بدء تشغيل الجهاز يتم ذلك.

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية، وأجد مجالها ومداها:

17 $f(x) = 2^x + 1$

18 $g(x) = 5(3^{x+2})$

19 $h(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

20 $p(x) = 3 \ln x - 4$

صوت: تُمثّل المعادلة $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ شدة الصوت L بالديسيبل، حيث I_0 أقل قدرة صوت يُمكن للإنسان سماعها، و I الصوت المراد قياس شدته.

21 أجد شدّة صوت مقداره $5500\ I_0$

22 أجد صوتًا بدلالة I_0 مستوى شدته 32

كوالا: يتناقص عدد حيوانات الكوالا الموجود في غابة وفق المعادلة $N = 873e^{-0.078t}$ حيث N العدد المتبقّي من الكوالا في الغابة، و t الزمن بالسنوات.

23 أُمثّل اقتران الاضمحلال الأُسّي بيانيًّا.

24 أجد عدد حيوانات الكوالا المتبقّي في الحديقة بعد مرور 10 سنوات.

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المطوّلة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

25 $\log_a (\sqrt{xyz})$

26 $\ln \frac{2}{3x^3 y}$

27 $\ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28 $\log_a (x\sqrt{y})$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛ علمًا بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعدادًا حقيقية موجبة:

29 $2 \log x - \log (x + 1)$

30 $\log (x^2 - 5x - 14) - \log (x^2 - 4)$

31 $4 \log_b x - 2 \log_b 6 - \frac{1}{2} \log_b y$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

32 قيمة $\log 12$ تساوي:

a) $3 \log 4$

b) $\log 3 + \log 4$

c) $\log 3 \times \log 4$

d) $2 \log 6$

33 $\log_{\frac{1}{2}} x^2$ يساوي:

a) $-2 \log_2 x$

b) $2 \log_2 x$

c) $-2 \log_2 |x|$

d) $\frac{1}{2} \log_2 x$

34 النقطة التي تشترك فيها الاقترانات الأُسّية جميعها التي على الصورة $f(x) = b^x$، $b > 0$ هي:

a) $(1, 1)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$

d) $(0, 0)$

الوحدة 3 تحليل الاقترانات

ما أهمية هذه الوحدة؟

تستعمل الاقترانات في نمذجة كثير من المواقف الحياتية مثل تحديد مسار كرة في الهواء، وتمثيل معدلات النمو السكاني، والدخل المتوقع من معاملات صناعية أو تجارية وغير ذلك في كافة مجالات الحياة.

سأتعرف في هذه الوحدة على أساليب مختلفة للتعامل مع الاقترانات تعد أساسا لموضوعات الرياضيات التي سوف أدرسها لاحقًا.

تعلمت سابقًا:

- ✓ اقترانات كثيرات الحدود والاقترانات النسبية وتمثيلها بيانيًا.
- ✓ الاقترانات المتشعبة واقتران القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًا.
- ✓ تحليل العبارة التربيعية وفرق المكعبين ومجموعهما والتحليل بتجميع الحدود.
- ✓ حل أنظمة معادلات خطية وتربيعية.

سوف أتعلم في هذه الوحدة:

- إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود خطي باستعمال نظرية الباقي.
- تحليل كثيرات حدود باستعمال نظرية العوامل.
- حل معادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة باستعمال التحليل اعتمادًا على نظرية العوامل.
- كتابة مقادير نسبية بصورة مجموع كسور جزئية.
- تمثيل الاقترانات بيانيًا باستعمال تحويلات الإزاحة والتمدد والانعكاس.
- استعمال النهاية للتحقق من الاتصال عند نقطة.

الدرس 1: نظريتا الباقي والعوامل The Remainder and Factor Theorems

مسألة اليوم: : صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده بالأمتار هي $2\ ,\ 2x,\ \ 2x^2 - 26x - 256$

ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $480\ m^3$؟

https://www.shutterstock.com/image-photo/blue-cargo-delivery-truck-side-view-1678830934

فكرة الدرس: تعرف نظريتي الباقي والعوامل واستعمالهما لتحليل كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.

المصطلحات: طريقة الجدول، نظرية الباقي ، نظرية العوامل، أصفار الاقتران، نظرية الأصفار النسبية، معادلة كثير الحدود.

القسمة باستعمال الجدول

تعلمت سابقًا أن كثير الحدود بمتغير واحد يتكون من وحيد حد أو أكثر، وأن صورته العامة هي:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب، و $a_n,\ a_{n-1}, \ldots\ a_1,\ a_0$ أعداد حقيقية.

أتعلم: في الهامش مقابل السطر التالي

يسمى اقتران كثير الحدود أحياناً "كثير حدود" فقط وذلك للاختصار.

ويسمى الاقتران على الصورة $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **اقتران كثير حدود**، ومن أمثلته:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $\qquad$ $P(x) = 5$ $\qquad$ $P(x) = 2 - x$

وتعلمت أيضًا أنه يمكن قسمة كثير حدود على آخر باستعمال القسمة الطويلة، فمثلًا يمكن قسمة $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ على $x + 4$ كما يلي:

ناتج القسمة

المقسوم

المقسوم عليه

$$\begin{array}{rl} x^2 - 2x - 3 & \\ x+4\overline{)\,x^3 + 2x^2 - 11x - 12} & \\ \underline{x^3 + 4x^2} & \text{بالضرب في } x^2 \\ -2x^2 - 11x & \text{بالطرح} \\ \underline{-2x^2 - 8x} & \text{بالضرب في } -2x \\ -3x - 12 & \text{بالطرح} \\ \underline{-3x - 12} & \text{بالضرب في } -3 \\ 0 & \text{بالطرح} \end{array}$$

باقي القسمة

أتذكر : للمصمم أتذكر بموازاة فقرة تعلمت أيضًا.

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية.

أتذكر : للمصمم أتذكر بموازاة الصفر في آخر خطوة من الحل السابق.

تتوقف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

طريقة الجدول (grid method) هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود كعملية عكسية لعملية القسمة.

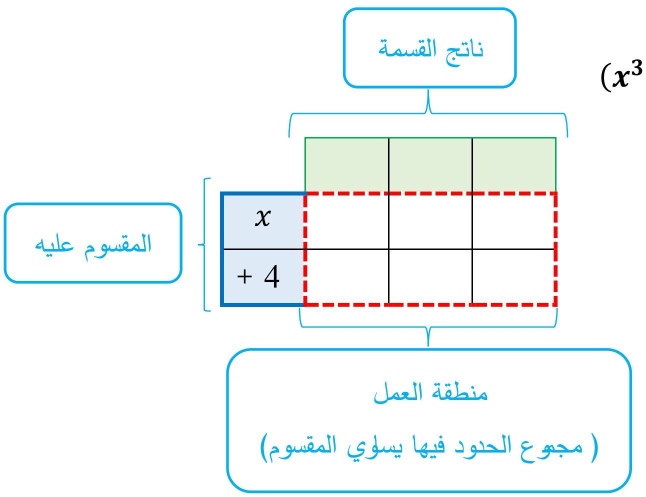
أتعلم: للمصمم في هامش الخطوة 1 في المثال في الأسفل

درجة كثير الحدود هي أكبر أس للمتغير في جميع حدوده، وعند قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر تكون درجة ناتج القسمة مساوية للفرق بين درجتي المقسوم والمقسوم عليه.

مثال1:

1) أستعمل طريقة الجدول لأجد ناتج: $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12) \div (x + 4)$

الخطوة1: أنشئ جدولًا من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة +1) و3 صفوف (درجة المقسوم عليه +1). أكتب كل حد من حدود المقسوم عليه في خانة منفصلة في العمود الأول من جهة اليسار كما في الجدول المجاور .



الخطوة 2: أكتب الحد الأكبر من المقسوم في الخانة اليسرى من الصف الأول في منطقة العمل.

x	x^3		
$+ 4$			

الخطوة 3: أبحث عن مقدار ناتج ضربه في الحد الأكبر من المقسوم عليه يساوي الحد الأكبر من المقسوم.

بما أن ناتج ضرب x^2 في x يساوي x^3، إذن يكون الحد الأول من ناتج القسمة x^2 .

أكتب x^2 أعلى الجدول كما الجدول المجاور .

	x^2		
x	x^3		
$+ 4$			

الخطوة 4: أضرب x^2 في 4، وأكتب الناتج $4x^2$ أسفل الحد الأكبر من المقسوم.

	x^2		
x	x^3		
$+ 4$	$4x^2$		

الخطوة 5: للحصول على الحد الثاني من المقسوم (وهو $+2x^2$)، يجب إضافة $-2x^2$ إلى $4x^2$ في منطقة العمل. إن إضافة $-2x^2$ يحدد الحد الثاني من ناتج القسمة وهو ($-2x$) لأن ناتج ضرب $-2x$ في x يساوي $-2x^2$

	x^2	$-2x$	
x	x^3	$-2x^2$	
$+4$	$4x^2$		

الخطوة 6: أضرب $-2x$ في 4، وأكتب الناتج $-8x$ في منطقة العمل. وللحصول على الحد الثالث من المقسوم (وهو $-11x$)، أحتاج إلى إضافة $-3x$ إلى $-8x$ في منطقة العمل. إن إضافة الحد $-3x$ يحدد الحد الأخير من ناتج القسمة وهو (-3) لأن ناتج ضرب -3 في x يساوي $-3x$

	x^2	$-2x$	-3
x	x^3	$-2x^2$	$-3x$
$+4$	$4x^2$	$-8x$	

الخطوة 7: أضرب -3 في 4، وأكتب الناتج -12 في الخانة المتبقية. وبما أنني حصلت على قيمة مساوية للحد الأخير (الثابت) في المقسوم فهذا يعني أن باقي القسمة يساوي صفر . أضيف خانة إلى منطقة العمل وأضع فيها 0 ليمثل باقي القسمة.

	x^2	$-2x$	-3	
x	x^3	$-2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$-8x$	-12	

الباقي

إذن، ناتج القسمة هو: $x^2 - 2x - 3$ و الباقي 0، ويمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}{x + 4} = x^2 - 2x - 3$$

أتعلم: للمصمم أتعلم بجانب الخطوة 7

بما أن المقسوم عليه كثير حدود درجته 1، فإن باقي القسمة من الدرجة 0، وناتج القسمة من الدرجة 2

أتحقق من صحة الحل:

يمكنني التحقق من صحة الحل بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل والتحقق من مساواتها للمقسوم.

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4x^2 - 8x - 12 = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$$

2) أستعمل طريقة الجدول لأجد ناتج: $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$

الخطوة 1: أنشئ جدولًا من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة 1+) و 3 صفوف (درجة المقسوم عليه 1+). أكتب كل حد من حدود المقسوم عليه في خانة منفصلة

$3x$	$9x^3$		
-2			

في العمود الأول من جهة اليسار كما في الجدول المجاور. أكتب الحد الأكبر من المقسوم في الخانة اليسرى العليا من الصف الأول في منطقة العمل.

الخطوة 3: أبحث عن مقدار ناتج ضربه في الحد الأكبر من المقسوم عليه يساوي الحد الأكبر من المقسوم.

بما أن ناتج ضرب $3x^2$ في 3x يساوي $9x^3$، إذن يكون فإن الحد الأول من ناتج القسمة يساوي $3x^2$.

أكتب $3x^2$ أعلى الجدول.

	$3x^2$		
$3x$	$9x^3$		
-2			

الخطوة 4: أضرب $3x^2$ في -2، وأكتب الناتج $-6x^2$ أسفل الحد الأكبر من المقسوم. وبما أن المقسوم لا يحتوي على حد من الدرجة أضيف $6x^2$ إلى $-6x^2$ في منطقة العمل. إن إضافة الحد $6x^2$ يحدد الحد الثاني من ناتج القسمة وهو $(2x)$ لأن ناتج ضرب $2x$ في 3x يساوي $6x^2$

	$3x^2$	$2x$	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	
-2	$-6x^2$		

الخطوة 5: أضرب $2x$ في -2، وأكتب الناتج $-4x$ منطقة العمل. وللحصول على الحد الثالث من المقسوم (وهو $-x$)، يجب إضافة $3x$ إلى $-4x$ في منطقة العمل. إن إضافة الحد $3x$ يحدد الحد الأخير من ناتج القسمة وهو (1) لأن ناتج ضرب 1 في 3x يساوي $3x$

	$3x^2$	$2x$	1
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$
-2	$-6x^2$	$-4x$	

الخطوة 6: أضرب 1 في -2، وأكتب الناتج -2 في الخانة المتبقية. وبما أنني لم أحصل على قيمة مساوية للحد الأخير (الثابت) في المقسوم، فهذا يعني أنني بحاجة إلى إضافة خانة إلى منطقة العمل أضع فيها العدد 5 الذي ناتج جمعه الى العدد -2 يساوي (3) وهو الحد الأخير (الثابت) في المقسوم، وعندئذ يكون باقي القسمة 5

	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

الباقي

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2+2x+1$ و الباقي 5، ويمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3-x+3}{3x-2}=3x^2+2x+1+\frac{5}{3x-2}$$

أتحقق من صحة الحل:

يمكنني التحقق من صحة الحل بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل والتحقق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3-6x^2+6x^2-4x+3x-2+5=9x^3-x+3$$

أتحقق من فهمي:

أستعمل طريقة الجدول لأجد ناتج كل مما يأتي:

a) $(x^3+6x^2-9x-14)\div(x+1)$

b) $(2x^3-x^2+3)\div(x-3)$

نظرية الباقي

ألاحظ مما سبق أنه يمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود مثل $P(x)= \mathbf{2x^3 - 7x^2 + 5}$ على كثير حدود من الدرجة 1 مثل **x − 3** بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x - 3 \\ x-3\overline{)2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \\ -x^2 + 0x \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ -3x + 5 \\ \underline{-3x + 9} \\ -4 \end{array}$$

الباقي

الطريقة 2: طريقة الجدول

	$2x^2$	$-x$	-3	
x	$2x^3$	$-x^2$	$-3x$	-4
-3	$-6x^2$	$3x$	9	

الباقي

ولكن هل يمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1 بطريقة أبسط؟

في المثال السابق أقارن بين باقي القسمة وهو 16، وقيمة $P(3)$

كثير الحدود المعطى $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$

بتعويض x = 3 $P(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 5$

أضرب $= 54 - 63 + 5$

بالتبسيط $= -4$

ألاحظ أن قيمة $P(3)$ تساوي باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على 3 −x، وهذا يقودنا إلى نظرية الباقي (remainder theorem).

مفهوم أساسي	**نظرية الباقي**
باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على (x − c) هو $P(c)$ وبصورة عامة فإن باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث $a \neq 0$.	

مثال(1):

أستعمل نظرية الباقي لأجد باقي قسمة $P(x)$ على h(x) في كل مما يأتي:

1) $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2,\ \ h(x) = x - 3$.

باقي قسمة $P(x)$ على $(x-3)$ هو $P(3)$

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$
بتعويض x=3	$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$
بالضرب	$= 27 + 63 - 18 + 2$
بالتبسيط	$= 74$

إذن باقي قسمة $P(x)$ على h(x) يساوي 74

2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$, $h(x) = x + 2$.

باقي قسمة $P(x)$ على $x-(-2)$ هو $P(-2)$

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$
بتعويض x=−2	$P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$
بالضرب	$= -16 - 20 + 8 + 9$
بالتبسيط	$= -19$

إذن باقي قسمة $P(x)$ على h(x) يساوي -19.

3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1,\ h(x) = 2x - 1$

لأجد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$، أكتب h(x) على الصورة $h(x) = 2(x - \frac{1}{2})$ ، ليكون الباقي $P(\frac{1}{2})$

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$
بتعويض $x = \frac{1}{2}$	$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) + 1$
بالضرب	$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1$
بالتبسيط	$= -\frac{3}{4}$

إذن باقي قسمة $P(x)$ على h(x) يساوي $-\frac{3}{4}$

أتحقق من فهمي

أستعمل نظرية الباقي لأجد باقي قسمة $P(x)$ على h(x) في كل مما يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2$, $h(x) = x - 1$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6$, $h(x) = x + 3$

c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9$, $h(x) = 2x + 8$

نظرية العوامل

	$2x^2$	$-x$	0	
x	$2x^3$	$-x^2$	0	0
-1	$-2x^2$	x	0	

ألاحظ في المثالين 1 و 2 بداية الدرس أنه عند قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1، يكون ناتج القسمة كثير حدود درجته أقل بواحد من درجة كثير الحدود الأصلي، فمثلًا عند قسمة كثير الحدود $2x^3 - 3x^2 + x$ على كثير الحدود $x-1$ ، ألاحظ أن درجة ناتج القسمة $(2x^2 - x)$ تساوي 2. وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $P(1) = 0$ ، وهذا يعني أن $x - 1$ عامل من عوامل كثير الحدود $2x^3 - 3x^2 + x$، وهذا يوضح نظرية العوامل (factor theorem)، التي تعد حالة خاصة من نظرية الباقي.

نظرية العوامل	مفهوم أساسي
يكون $(x - c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(c) = 0$ وبصورة عامة: يكون $(ax - b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(\frac{b}{a}) = 0$ حيث $a \neq 0$.	

إذا علم أحد عوامل كثير الحدود فإنه يمكن تحليله **تحليلا كاملًا**، وذلك بكتابته على صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لايمكن تحليلها (من الدرجة 1 أو من درجة زوجية وليس لها أصفار) .

مثال3:

إذا كان $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

1) أبين أن $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$

يكون $x + 4$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(-4) = 0$، لذا أجد $P(-4)$

كثير الحدود المعطى	$P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$
بتعويض $x = -4$	$= (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$
بالضرب	$= -64 + 96 - 20 - 12$
بالتبسيط	$= 0$

إذن، $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$

2) أحلل $P(x)$ تحليلًا كاملًا

بما أن x + 4 عامل من عوامل $P(x)$، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على x + 4 ثم تحليل كثير الحدود الناتج إن أمكن

	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

إذن، ناتج القسمة يساوي $x^2 + 2x - 3$ ، ومنه فإنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يلي:

كثير الحدود المعطى $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

التحليل باستعمال القسمة $= (x+4)(x^2 + 2x - 3)$

بتحليل ثلاثي الحدود $= (x+4)(x+3)(x-1)$

إذن: $P(x) = (x-4)(x+3)(x+1)$

أتحقق من فهمي

إذا كان $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

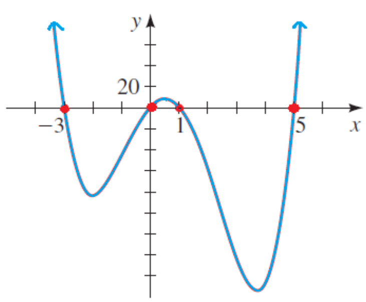
a) أبين أن x−5 عامل من عوامل $P(x)$

b) أحلل $P(x)$ تحليلًا كاملًا

الأصفار النسبية

أصفار كثير الحدود (zeros of a polynomial) هي قيم x التي يكون عندها $P(x) = 0$، وعند تمثيل كثير الحدود بيانيًّا فإن أصفاره هي إحداثيات x لنقاط تقاطع منحناه مع المحور x .

يمكن استعمال نظرية الأصفار النسبية (rational zero theorem) لإيجاد بعض الأصفار المحتملة لكثيرات الحدود لاختبارها.



لكثير الحدود $Q(x) = 2x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 30x$

أربع أصفار هي: $-3,0,1,5$ ويقطع عندها المنحنى المحور x

مفهوم أساسي	**نظرية الأصفار النسبية**

إذا كان $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة، فإن كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث p أحد عوامل الحد الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

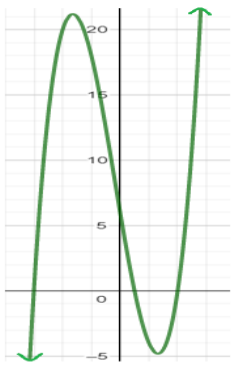
إذا كان $a_0 = 1$، فإن الصفر النسبي يكون أحد عوامل الحد الثابت.

عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنه يمكن إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.

أتعلم: في الهامش بجانب أول سطر

عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

مثال 4:



1) أجد جميع أصفار كثير الحدود $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

يمكن استعمال برمجية جيوجيبرا، لتمثيل $P(x)$ بيانيًّا وتحديد عدد أصفاره. ألاحظ أن منحنى كثير الحدود يقطع محور x في3 نقاط؛ ما يعني أن $P(x)$ له 3 أصفار. ويمكن التحقق من ذلك جبريًّا.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحد الثابت(6) : $\mp1, \mp2, \mp3, \mp6$

أجد عوامل المعامل الرئيس(2): $\mp1, \mp2$

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\mp1, \mp2, \mp 3, \mp6, \mp\frac{1}{2}, \mp \frac{3}{2}$$

أتذكر: للمصمم في هامش السطر السابق.

أكتب الأصفار النسبية المحتملة بأبسط صورة

الخطوة 2: أكون جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

$\frac{p}{q}$	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود؟
-1	$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	✗
1	$f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	✗
2	$f(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	✓

بما أن $P(2) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 2$ ، إذن $x-2$ عامل من عوامل $P(x)$.

أتعلم: للمصمم في هامش الجدول

أتوقف عن التعويض عندما أجد أول صفر لكثير الحدود.

الخطوة 3: أحلل كثير الحدود تحليلًا كاملاً

بما أن $x-2$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x-2$ ثم تحليل كثير الناتج إن أمكن:

	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $2x^2 + 5x - 3$ ، ومنه فإنه يمكن تحليل كثير الحدود كما يلي:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$ كثير الحدود المعطى

$$= (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$ التحليل باستعمال القسمة

$$= (x-2)(2x-1)(x+3)$$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن: $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+3)$

ومنه فإن أصفار $P(x)$ الناتجة عن تحليله هي: $2, \frac{1}{2}, -3$

أتعلم: للمصمم في هامش السطر السابق

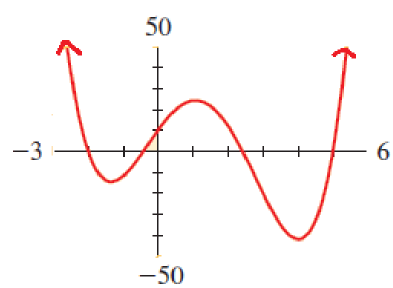
أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

2) أجد جميع أصفار كثير الحدود $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$



يمكنني استعمال برمجية جيوجيبرا، لتمثيل $P(x)$ بيانيًا وتحديد عدد أصفاره. ألاحظ أن منحنى كثير الحدود يقطع محور x في 4 نقاط؛ ما يعني أن $P(x)$ له 4 أصفار. ويمكن التحقق من ذلك جبريًا.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي(10).

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\mp 1, \mp 2, \mp 5, \mp 10$$

الخطوة 2: أكون جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
1	$P(1) = (1)^4 - \mathbf{5}(1)^3 - 5(1)^2 + 23(1) + 10 = 24$	✗
2	$P(2) = (2)^4 - \mathbf{5}(2)^3 - 5(2)^2 + 23(2) + 10 = 12$	✗
5	$P(5) = (5)^4 - \mathbf{5}(5)^3 - 5(5)^2 + 23(5) + 10 = 0$	✓

بما أن $P(5) = 0$ ، إذن فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 5$ ، إذن $x-5$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أحلل كثير الحدود تحليلًا كاملاً

بما أن $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x - 5$ ثم تحليل كثير الناتج إن أمكن:

	x^3	0	$-5x$	-2	
x	x^4	0	$-5x^2$	$-2x$	0
-5	$-5x^3$	0	$25x$	10	

ناتج القسمة يساوي $x^3 - 5x - 2$، وهو يحتاج إلى تحليل. الأصفار النسبية المحتملة لناتج القسمة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (2) وهي:

$$\mp 1, \mp 2$$

بالتجريب أجد أن -2 أحد أصفار $x^3 - 5x - 2$. إذن أقسم $x^3 - 5x - 2$ على $x + 2$

	x^2	$-2x$	-1	
x	x^3	$-2x^2$	$-x$	0
$+2$	$2x^2$	$-4x$	-2	

لذا يمكن تحليل كثير الحدود كما يلي:

$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$ كثير الحدود المعطى

$= (x - 5)(x^3 - 5x - 2)$ التحليل باستعمال القسمة

$= (x - 2)(2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ التحليل باستعمال القسمة

إذن، $P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

لإيجاد أصفار العبارة التربيعية الناتجة أستعمل القانون العام. أحدد قيم المعاملات ثم أعوضها في صيغة القانون العام:

$$a = 1, b = -2, c = -1$$

صيغة القانون العام

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتعويض

$$x = \frac{-(-2) \mp \sqrt{(-(-2))^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

بالتبسيط

$$x = 1 \mp \sqrt{2}$$

ومنه فإن أصفار $P(x)$ الناتجة عن تحليله هي: $5, -2, 1+\sqrt{2}\ , 1-\sqrt{2}$

أتعلم: للمصمم في هامش كلمة بالتجريب

بما أنني توصلت من التجريب السابق إلى أن 1 و 2 ليسا صفرين لكثير الحدود الأصلي $P(x)$، إذن لا أعيد اختبارهما مرة أخرى في ناتج القسمة، وأجرب العددان المتبقيان -1 و -2 ، ومنه:

$$(-2)^3 - 5(-1) - 2 = 0$$

أتحقق من فهمي:

أجد جميع أصفار كثيرات الحدود الآتية:

a) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 4$

b) $Q(x) = x^4 - 7x^3 + 14\,x^2 - 3x - 9$

حل معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود (polynomial equation) هي معادلة يمكن كتابتها على صورة $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثير حدود من أي رتبة ويسمى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة. يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرق التحليل البسيطة التي تعلمتها سابقاً مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، إلا أن بعض معادلات كثيرات الحدود لا يمكن حلها باستعمال هذه الطرق وعندئذن يمكن استعمال نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أصفار كثير الحدود المرتبط بالمعادلة وتحليها.

أتعلم في الهامش مقابل المصطلح المظلل بالاصفر في السطر السابق

المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية التي تعلمتها سابقاً هي حالات خاصة من معادلة كثير الحدود.

مثال 5:

أحل المعادلة $x^3 - x^2 - 14\,x + 24 = 0$

كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 - x^2 - 14\,x + 24$، وبما أنه لا توجد طريقة واضحة لتحليله مثل إخراج العامل المشترك أو التجميع، أجد أحد أصفاره النسبية ثم أحلله.

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أن معامل الحد الرئيس (1)، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي (24).

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\mp1, \mp2, \mp 3, \mp4, \mp6, \mp8, \mp12, \mp24$$

الخطوة 2: أكون جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
1	$f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	✗
2	$f(1) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	✓

بما أن $P(2) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عند x=2، إذن x−2 عامل من عوامل $P(x)$

الخطوة 3: أحلل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية ثم أحل المعادلة.

بما أن x −2 أحد عوامل كثير الحدود، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على x −2 ثم تحليل الناتج إن أمكن:

	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	-12 x	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $x^2 + x - 12$، ومنه فإنه يمكن تحليل كثير الحدود وحل المعادلة كما يلي:

المعادلة الأصلية	$x^3 - x^2 - 14\,x + 24 = 0$
التحليل باستعمال القسمة	$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$
بتحليل ثلاثي الحدود	$(x-2)(x+4)(x-3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x-2 = 0$ or $x + 4 = 0$ or $x - 3 = 0$
بحل كل معادلة	$x = 2$ or $x = -4$ or $x = 3$

إذن حلول المعادلة هي: $x = -2, x = -4 , x = 3$

أتحقق من فهمي:

a) $\boldsymbol{x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0}$

b) $\boldsymbol{x^3 + 9x^2 + 13\,x + 5 = 0}$

يمكن نمذجة الكثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال معادلات كثيرات حدود يتطلب حلها استعمال نظرية الأصفار النسبية.

مثال 5 من الحياة

هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجًا لبناية على هيئة هرم قاعدته مربعة باستعمال طابعة ثلاثة الأبعاد. فإذا كان ارتفاع النموذج يقل 2 dm عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ dm^3$، فما أبعاد النموذج؟

https://www.shutterstock.com/image-illustration/3d-abs-plastic-printing-technology-business-221669467

الخطوة 1: أستعمل قانون حجم الهرم لأكتب معادلة

بما أنه قاعدة الهرم مربعة أفرض أن طول ضلعها x dm، ومنه فإن مساحتها x^2 ، وبما أن ارتفاع الهرم يقل 2 dm عن طول ضلع القاعدة، فإنه ارتفاع الهرم $(x-2)$ dm.

حجم الهرم V = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة B × الارتفاع h

$$25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2)$$

بضرب طرفي المعادلة في 3 $\quad x^3 - 2x^2 = 75$

بطرح 75 من طرفي المعادلة $\quad x^3 - 2x^2 - 75 = 0$

أتذكر: للمصمم في الهامش مقابل أول عبارة شارحة.

حجم الهرم (V) يساوي ثلث مساحة قاعدته B في ارتفاعه (h)

الخطوة 2: أجد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة وهو $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي(75).

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\mp 1, \quad \mp 3, \quad \mp 5, \quad \mp 15, \quad \mp 25, \quad \mp 75$$

إرشاد: للمصمم الارشاد بجانب الفقرة السابقة.

بما أن الارتفاع $x-2$ ، فهذا يدل على أن $x > 2$ ، لذا أختبر الأصفار النسبية التي تزيد عن 2

الخطوة 3: أكون جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، إذن أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

p	$f(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
3	$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66$	✗
5	$f(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0$	✓

بما أن $P(5) = 0$ ، فإنه يوجد لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة صفر عند $x=5$، إذن $x-5$ عامل من عوامل $P(x)$

الخطوة 4: أحلل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية ثم أحلها.

بما أن $x-5$ أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $P(x)$ على $x-5$ ثم تحليل كثير الناتج إن أمكن:

	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$+3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

ناتج القسمة يساوي $x^2 + 3x + 15$، ومنه فإنه يمكن حل المعادلة كما يلي:

$x^3 - 2x^2 - 75 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x-5)(x^2 + 3x + 15) = 0$	التحليل باستعمال القسمة
$x - 5 = 0$ or $x^2 + 3x + 15 = 0$	خاصية الضرب الصفري

بما أن العامل التربيعي $x^2 + 3x + 15$ مميزه سالب فإنه لا يوجد له أصفار. ولذلك فإن $x-5$ هو العامل الوحيد للمعادلة ومنه فإن $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

إذن، طول قاعدة النموذج 5 dm، وارتفاعه 3 dm

أتذكر : في هامش العبارة الشارحة من الجدول السابق

مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو:

$\Delta = b^2 - 4ac$

أتحقق من فهمي

هرم قاعدته مربعة يقل طول ضلع قاعدته 3 cm عن ارتفاعه. إذا كان حجم الهرم $108\ cm^3$، فما ارتفاعه؟

معلومة: للمصمم المعلومة في هامش المثال

الطباعة ثلاثية الأبعاد هي عملية صنع نماذج صلبة ثلاثية الأبعاد تم رسمها على الحاسوب، عن طريق وضع طبقات متتالية من المادة الخام حتى يتم إنشاء النموذج.

أتدرب وأحل المسائل

أستعمل طريقة الجدول لأجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1) $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

2) $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

أستعمل نظرية الباقي لأجد باقي قسمة f(x) على h(x) في كل مما يأتي:

3) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6 \;,\; h(x) = x + 1$

4) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8 \;,\; h(x) = 3x + 4$

أبين أن h(x) عامل من عوامل f(x) في كل مما يأتي:

5) $f(x) = x^3 - 37x + 84 \;,\; h(x) = x + 7$

6) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \;,\; h(x) = 2x - 3$

أحلل كلّ اقتران مما يأتي تحليلًا كاملا:

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

8) $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

9) $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

10) $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

أحل كلًّا من المعادلات الآتية:

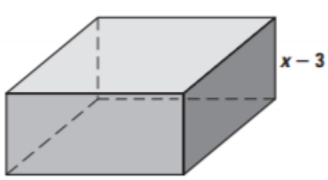
11) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

12) $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

13) $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

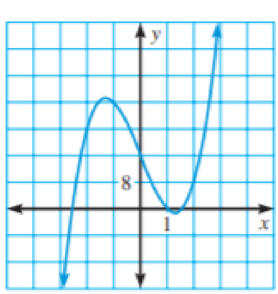
14) $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

15) يمثل الاقتران $V(x) = 2x^3 + 5x^2 + 19x - 42$ حجم متوازي المستطيلات المجاور. أكتب كثير حدود بالصورة القياسية يمثل المساحة الكلية للمتوازي.

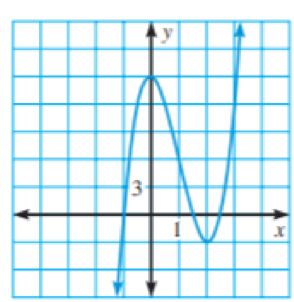


أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران مما يأتي، لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثم أجد جميع أصفار الاقتران:

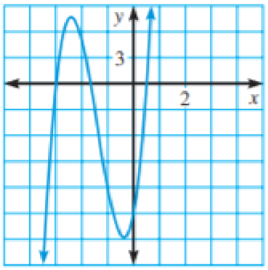
16) $f(x) = 4x^3 - 20x + 16$



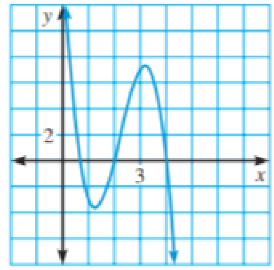
17) $f(x) = 4x^3 - 12x - x + 15$



18) $f(x) = 6x^3 + 25x^2 + 16x - 15$



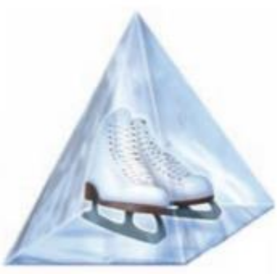
19) $f(x) = -3x^3 + 20x^2 - 36x + 16$



20) إذا كان للمعادلة $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ حلان هما: $x = 1$ ، وَ $x = 4$. أجد الحل الثالث للمعادلة.

21) إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x-1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a؟

22) إذا كان باقي قسمة المقدار $x^3 + ax^2 - 13x + b$ على $(x+5)$ يساوي صفرًا، وباقي قسمة $x^3 + bx^2 + ax + 10$ على $(x-1)$ يساوي -1، فما قيمة كل من a ، وَb؟



23) **منحوتات جليدية**: تصنع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق ملئ قالب بالماء ثم تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مربعة الشكل، ارتفاعها يزيد 1 m عن طول القاعدتها، أجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها $4\,m^3$

للمصمم : أرجو تصميم قالب مشابه للصورة دون حذاء التزلج.

24) أحل المعادلة $\frac{x^3 - 35}{11 - x} = 3x$

ليكن $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ ، حيث a, b ثوابت و $a, b \neq 0$.

25) إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل الاقتران $f(x)$ ، فأبين أن $3a + b = 4$

26) إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -15، فأبين أن $2a + b = 3$

27) أجد قيمة كل من a ، وَb.

28) يزيد ارتفاع اسطوانة 5 cm على طول نصف قطر قاعدتها. إذا كان حجم الاسطوانة $72\pi\ cm^3$، فما أبعادها؟

مهارات التفكير العليا

29) **مسألة مفتوحة**: أكتب اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله ويكون باقي قسمته على $(x+1)$ يساوي -8.

30) **أكتشف الخطأ**: أوجدت سهام الأصفار النسبية المحتملة للاقتران $f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$، وكان حلها كالآتي:

$$f(x) = -8x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 45x^3 - 1500x^2 + 16x$$

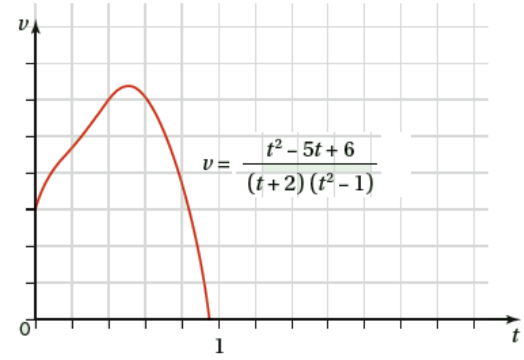
$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{8}$$

أبين الخطأ الذي وقعت فيه سهام وأصححه.

31) **تحد** :أجد ناتج قسمة $4x^3 + 8x^2 - 41x + 28$ على $x^2 + 3x - 4$ باستعمال طريقة الجدول.

32) **تحد:** أحلل المقدار $x^{13} - 15x^9 - 16x^5$

مسألة اليوم: يظهر في الشكل المجاور منحنى الاقتران $v = \frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}$ ، الذي يمثل العلاقة بين سرعة سيارة v بالكيلومتر لكل ساعة و الزمن t بالساعات. هل يمكن كتابة الاقتران v على صورة مجموع مقدارين نسبيين مقام أحدهما $(t+2)$ ومقام الآخر (t^2-1)؟



فكرة الدرس: كتابة الاقتران النسبي الذي يمكن تحليل مقامه بصورة مجموع اقترانات نسبية أبسط.

المصطلحات: تجزئة المقادير النسبية، كسراً جزئيًّا

تعلمت سابقًا أن المقدار الجبري النسبي هو كسر بسطه ومقامه كثيري حدود، وتعلمت – أيضًا – أنه عند جمع مقدارين نسبيين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب توحيد مقاميهما أولًا باستعمال المضاعف المشترك الأصغر(م. م. أ) للمقامين كما يأتي:

بتوحيد المقامين
$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

بطرح البسطين
$$= \frac{3x+6-2x+8}{(x-4)(x+2)}$$

بالتبسيط
$$= \frac{x+14}{(x-4)(x+2)}$$

تجزئة المقادير النسبية (decomposition of rational expression) هي عملية عكسية للعملية السابقة وتكون بكتابة المقدار النسبي على صورة مجموع مقادير نسبية أبسط كل منها على صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيري حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q، ويسمى كل من هذه المقادير النسبية كسراً جزئيًّا (partial fraction)

كسر جزئي   كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

تعتمد عملية تجزئة المقادير النسبية على عوامل المقام، وسأتعلم في هذا الدرس ثلاث حالات مختلفة من تجزئة الكسور بحسب نوع عوامل المقام وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطية أحدها مكرر.

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية وأحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مميزه سالب).

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة

إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطية فإنه ينتج عن كل منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطي على الصورة الآتية:

ثابت

$$\frac{A}{ax + b}$$

عامل خطي

مفهوم أساسي	تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يمكن تحليله تحليلًا كاملًا دون تكرار إي عامل على الصورة الآتية:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \ldots (a_nx + b_n)$$

فإنه يمكن تجزئة المقدار النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث درجة P أقل من درجة Q ، على الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \frac{A_3}{a_3x + b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

مثال 1:

أجزئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة 1: **أحلل المقام تحليلًا كاملًا.**

بتحليل ثلاثي الحدود

$$\frac{2x - 13}{x^2 - x - 2} = \frac{2x - 13}{(x-2)(x+1)}$$

الخطوة 2: **أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتب ثابتًا في بسط كل عامل خطي في المقام.**

$$\frac{2x - 13}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة 3: **أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.**

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $(x-2)(x+1)$:

$$(x-2)(x+1)\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=(x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على طرف الأيمن من المعادلة والاختصار:

$$\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}\frac{2x-13}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}}=\cancel{(x-2)}(x+1)\frac{A}{\cancel{(x-2)}}+(x-2)\cancel{(x+1)}\frac{B}{\cancel{(x+1)}}$$

المعادلة الناتجة هي:

$$2x-13=A(x+1)+B(x-2)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كل من الثابتين A و B باستعمال التعويض

- بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة

بتعويض $x=2$	$2(2)-13=A(2+1)+B(2-2)$
بالتبسيط	$-9=3A$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$A=-3$

أتعلم: للمصمم أتعلم في هامش النقطة السابقة.

تعويض $x=2$ يحذف المتغير B ويجعل المعادلة بمتغير واحد وهو A ؛ مما يجعل إيجاد قيمته أسهل.

- بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x=-1$	$2(-1)-13=A(-1+1)+B(-1-2)$
بالتبسيط	$-15=-3B$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$B=5$

أتعلم: للمصمم أتعلم في هامش النقطة السابقة.

تعويض $x=-1$ يحذف المتغير A ويجعل المعادلة بمتغير واحد وهو B ؛ مما يجعل إيجاد قيمته أسهل.

إذن، يمكن تجزئة المقدار النسبي يكون على الصورة الآتية:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{-3}{(x-2)}+\frac{5}{(x+1)}$$

أتحقق من فهمي:

أجزئ $\frac{x}{x^2-5x+6}$ إلى كسور جزئية.

ألاحظ أن مقام المقدار النسبي في المثال السابق كثير حدود من الدرجة الثانية (ثلاثي حدود)؛ لذا كان تحليله مباشرًا، أما إذا كان مقام المقدار النسبي كثير حدود من الدرجة الثالثة فتحليله يكون إما بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، أو استعمال نظرية الأصفار النسبية ونظرية العوامل.

مثال 2:

أجزئ $\frac{3x^2+2x-1}{x^3-6x^2+11x-6}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة1: **أحلل المقام تحليلًا كاملًا.**

بما أن المقام $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$) كثير حدود من الدرجة الثالثة ولا يمكن تحليله بإخراج العامل المشترك أو التجميع؛ إذن أستعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المقام، ثم إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.

أولًا: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود في المقام.

بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت والذي يساوي(-6).

إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\mp1, \mp2, \mp 3, \mp6$$

ثانيًا: أكون جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

p	$Q(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
-1	$Q(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -24$	✗
1	$Q(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 0$	✓

بما أن $Q(1) = 0$ ، إذن فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عند $x = 1$ ، إذن $x-1$ عامل من عوامل $Q(x)$.

ثالثًا: أحلل كثير الحدود في المقام تحليلًا كاملاً

بما أن $x - 1$ عامل من عوامل $Q(x)$، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة $Q(x)$ على $x - 1$ ثم تحليل كثير الناتج إن أمكن:

	x^2	$-5x$	6	
x	x^3	$-5x^2$	$6x$	0
-1	$-x^2$	$5x$	-6	

ناتج القسمة يساوي $x^2 - 5x + 6$، ومنه فإنه يمكن تحليل كثير الحدود Q(x) كما يلي:

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$ كثير الحدود في المقام
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$ التحليل باستعمال القسمة
$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن، تحليل كثير الحدود في المقام $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

ومنه فإنه يمكن كتابة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

الخطوة 2: **أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتب ثابتًا في بسط كل عامل خطي في المقام.**

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

الخطوة 3: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $(x-1)(x-2)(x-3)$:

$$(x-1)(x-2)(x-3)\frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = (x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على طرف الأيمن من المعادلة والاختصار، فإن **المعادلة الناتجة هي:**

$$3x^2 + 2x - 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كل من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض

- بتعويض x = 1 في المعادلة الناتجة

$$3(1)^2 + 2(1) - 1 = A(1-2)(1-3) + B(1-1)(1-3) + C(1-1)(1-2)$$ بتعويض x = 1
$$4 = 2A$$ بالتبسيط
$$A = 2$$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x = 2$ $\quad 3(2)^2 + 2(2) - 1 = A(2-2)(2-3\ ) + B(2-1)(2-3\ ) + C(2-1)(2-2\ )$

بالتبسيط $\quad B = -15$

- بتعويض $x = 3$ في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x = 3$ $\quad 3(3)^2 + 2(3) - 1 = A(3-2)(3-3\ ) + B(3-1)(3-3\ ) + C(3-1)(3-2\ )$

بالتبسيط $\quad 32 = 2C$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\quad C = 16$

إذن، يمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)(x-2)(x-3\ )} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{-15}{(x-2)} + \frac{16}{(x-3)}$$

أتحقق من فهمي

أجزئ $\boldsymbol{\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية أحدها مكرر.

في بعض الحالات ينتج عن التحليل الكامل لمقام المقدار النسبي، بعض العوامل الخطية المكررة.

مفهوم أساسي	تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية بعضها مكرر
يمكن تجزئة المقدار النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث يحوي التحليل الكامل لـ $Q(x)$ عوامل خطية مكررة n من المرات، ودرجة P أقل من درجة Q على الصورة الآتية: $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$	

مثال 3:

أجزئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ إلى كسور جزئية.

الخطوة1: أحلل المقام تحليلًا كاملًا.

بإخراج x عاملًا مشتركًا

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x^2-4x+4)}$$

بتحليل ثلاثي الحدود

$$=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)(x-2)}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتب ثابتًا في بسط كل عامل خطي في المقام.

ألاحظ أن تحليل المقام $x(x-2)^2$، وأن العامل $(x-2)$ مكرر مرتين؛ لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاث مقامات وهي:
$x, (x-2), (x-2)^2$

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة 3: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $x(x-2)^2$:

$$x(x-2)^2\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=x(x-2)^2\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على طرف الأيمن من المعادلة والاختصار ، فإن **المعادلة الناتجة هي:**

$$-x^2+2x+4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

الخطوة 4: أجد قيمة كل من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض

- بتعويض $x = 0$ في المعادلة الناتجة

بتعويض $x = 0$

$$-(0)^2+2(0)+4=A(0-2)^2+B(0)(0-2)+C(0)$$

بالتبسيط

$$4=4A$$

بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$A=1$$

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة.

بتعويض $x = 0$
$$-(2)^2 + 2(2) + 4 = A(2-2)^2 + B(2)(2-2) + C(2)$$
بالتبسيط
$$4 = 2C$$
بقسمة طرفي المعادلة على 2
$$C = 2$$

- بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x (مثلًا $x = 1$) في المعادلة الناتجة إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين.

بتعويض $x = 0$, $A= 1, C= 2$
$$-(1)^2 + 2(1) + 4 = (1)(1-2)^2 + B(1)(1-2) + (2)(1)$$
بالتبسيط
$$5 = 3 - B$$
بطرح 3− من طرفي المعادلة
$$2 = -B$$
بقسمة طرفي المعادلة على 1−
$$B = -2$$

إذن، يمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

أتعلم: للمصمم في هامش الخطوة 2

أتجنب الخطأ الشائع الآتي:

$$\cancel{\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-2}}$$

تكرار العامل الخطي دون استعمال القوة لا يعطي تجزئة صحيحة للمقدار النسبي

أتحقق من فهمي:

أجزئ $\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي أحد عوامل مقامه كثير حدود تربيعي غير مكرر وغير قابل للتحليل.

تعلمت في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية جميع عوامل مقاماتها خطية، ولكن في بعض الحالات قد ينتج عن تحليل المقام عامل تربيعي لا يمكن تحليله، في هذه الحالة ينتج عن العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطي على الصورة $Ax + B$ ومقامه العامل التربيعي.

تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية بعضها مكرر	مفهوم أساسي
يمكن تجزئة المقدار النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث يحوي التحليل الكامل لـ $Q(x)$ عاملاً تربيعيًّا غير مكرر لا يمكن تحليله، ودرجة P أقل من درجة Q على الصورة الآتية: $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+\ b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+\ b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+\ b_nx+c_n}$$	

مثال 4:

أجزئ $\frac{\boldsymbol{x^2-3x+16}}{\boldsymbol{(x+1)(x^2+9)}}$ **إلى كسور جزئية.**

بما أن المقدار النسبي يحتوي عاملًا تربيعيًّا لا يمكن تحليله في مقامه، إذن سيكون بسط أحد الكسور الجزئية ثابتًا، والآخر مقدارًا خطيًّا.

الخطوة 1: **أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتب ثابتًا في بسط العامل الخطي ومقدارًا خطيًّا في بسط العامل التربيعي.**

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}$$

الخطوة 2: **أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.**

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $(x+1)(x^2+9)$:

$$(x+1)(x^2+9)\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=(x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+9}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على طرف الأيمن من المعادلة والاختصار، فإن **المعادلة الناتجة هي:**

$$x^2-3x+16=\ A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)$$

الخطوة 3: **أجد قيمة كل من الثوابت A و B و C باستعمال التعويض**

- بتعويض $x=-1$ في المعادلة الناتجة

$$(-1)^2-3(-1)+16=\ A((-1)^2+9)+(B(-1)+C)(-1+1)$$ بتعويض $x=-1$

$$20=10A$$ بالتبسيط

$$A=2$$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

- بتعويض $x = 0$ و قيمة A في المعادلة الناتجة.

$$(0)^2 - 3(0) + 16 = 2((0)^2 + 9) + (B(0) + C)(0 + 1)$$ بتعويض $x = 0, A = 2$

$$16 = 18 + C$$ بالتبسيط

$$C = -2$$ بطرح 18 من طرفي المعادلة

- بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x (مثلًا $x = 1$) في المعادلة الناتجة إضافة إلى تعويض قيمتي A و C الناتجتين.

$$(1)^2 - 3(1) + 16 = 2((1)^2 + 9) + (B(1) + (-2))(1 + 1)$$ بتعويض $x = 0, A = 2, C = -2$

$$14 = 2B + 16$$ بالتبسيط

$$-2 = 2B$$ بطرح 16 من طرفي المعادلة

$$B = -1$$ بقسمة طرفي المعادلة على -1

إذن، يمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{x^2 - 3x + 16}{(x + 1)(x^2 + 9)} = \frac{2}{x + 1} + \frac{-x - 1}{(x^2 + 9)}$$

أتحقق من فهمي:

أجزئ $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

تجزئة مقدار نسبي درجة كثير الحدود في بسطه مساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها.

تعلمت في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة، على صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيري حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q، ولكن إذا كانت درجة P مساوية لدرجة Q أو أكبر منها ، فيجب أولًا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة بقسمة P على Q

مثال 5:

أجزئ $\frac{x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ إلى كسور جزئية

بما أن درجة البسط مساوية لدرجة المقام، إذن أقسم البسط على المقام أولًا، ثم أجزئ.

الخطوة 1: أقسم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثم أكتب الكسر الناتج بصورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يمثل باقي القسمة.

$$\begin{array}{r}
2 \\
x^2+6x-16\overline{\smash{\big)}\,2x^2+13x+6} \\
\underline{(-)\;2x^2+12x-32} \\
x+38
\end{array}$$

إذن ناتج القسمة 2 والباقي $x + 38$ ومنه:

$$\frac{x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة 2: أحلل مقام باقي القسمة تحليلًا كاملًا، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، بحيث أكتب ثابتًا في بسط كل عامل خطي في المقام.

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}$$

الخطوة 3: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام وهو $(x+8)(x-2)$:

$$(x+8)(x-2)\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = (x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع على طرف الأيمن من المعادلة والاختصار، فإن **المعادلة الناتجة هي:**

$$x + 38 = A(x-2) + B(x+8)$$

الخطوة 4: أجد قيمة كل من الثابتين A و B باستعمال التعويض

- بتعويض $x = -8$ في المعادلة الناتجة

بتعويض $x = -8$
$$-8 + 38 = A(-8-2) + B(-8+8)$$

بالتبسيط
$$30 = -10A$$

بقسمة طرفي المعادلة على 10
$$A = -3$$

- بتعويض x = 2 في المعادلة الناتجة

بتعويض x = 2	$2 + 38 = A(2-2) + B(2+8)$
بالتبسيط	$40 = 10B$
بقسمة طرفي المعادلة على 10	$B = 4$

إذن، يمكن تجزئة المقدار النسبي على الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$$

أتحقق من فهمي:

أجزئ $\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$ إلى كسور جزئية.

أتدرب وأحل المسائل

أجزئ كلًا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$ 2) $\frac{6x-12}{(x-1)(x+5)}$ 3) $\frac{3-5x}{(x-3)(x-7)}$

4) أبين أن المقدار $\frac{11-2x}{(x-2)(x+5)}$ يكتب بالصورة $\frac{B}{x+5}+\frac{A}{x-2}$، وأجد قيمة كل من A، وَ B.

أجزئ كلًا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

5) $\frac{2-3x}{(2x+1)(3-x)}$ 6) $\frac{2x+22}{x^2+2x}$ 7) $\frac{4x-30}{x^2-8x+15}$

8) أكتب كلًا من $\frac{1}{x^2-9}$، وَ $\frac{1}{x^2-16}$ بصورة كسور جزئية. ماذا ألاحظ؟

أجزئ كلًا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

9) $\frac{2x^2-4x+8}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 10) $\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$ 11) $\frac{6-6x-5x^2}{(x-1)(x-2)(x+4)}$

12) أبين أنه يمكن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ بالصورة $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ حيث a عدد حقيقي.

13) أجزئ $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+5x^2+4x-12}$ إلى كسور جزئية، شارحًا ومبرّرًا جميع خطوات الحل.

14) أبين أنه لا يمكن كتابة $\dfrac{5}{x^2-x+10}$ بصورة كسور جزئية مبرّرًا إجالتي.

15) أبين أنه يمكن كتابة $\dfrac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$ بصورة كسور جزئية.

16) أجد معامل $\dfrac{1}{2x+1}$ عند تجزئة $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$ إلى كسور جزئية.

17) أبين أنه يمكن كتابة $\dfrac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}$ بالصورة $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-2}$ ، وأجد قيمة كل من **A**، وَ**B**، وَ**C**.

18) إذا كان $\dfrac{5x}{(x+3)^2}\equiv\dfrac{p}{x+3}-\dfrac{3p}{(x+3)^2}$ ، فما قيمة p ؟

أكتب كلًّا مما يأتي بصورة كمسور جزئية:

19) $\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16}$

20) $\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

21) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}$

22) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}$

23) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

24) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

25) أجد معامل $\dfrac{1}{(x+5)^2}$ عند تجزئة $\dfrac{x^2+7x-1}{(x+5)^3}$ إلى كسور جزئية.

26) أبين أنه يمكن كتابة $\dfrac{x^2-5x+6}{(x+2)(x^2+1)}$ بالصورة $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x+2}$ ، وأجد قيمة كل من **A**، وَ**B**، وَ**C**.

27) إذا كان $\dfrac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}\equiv\dfrac{px-37}{9(x^2+2)}-\dfrac{p}{9(x-1)}+\dfrac{8p}{3(x-1)^2}$ ، فما قيمة p ؟

28) أجد معامل $\dfrac{1}{x^2+2}$ عند تجزئة $\dfrac{1}{(x^2+2)(2x-1)}$ إلى كسور جزئية.

اكتب كلًّا مما يأتي بصورة كسور جزئية:

29) $\dfrac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

30) $\dfrac{x^2+3x-5}{(x-1)(x^2+3)}$

31) $\dfrac{(x-3)^2}{x(x^2-6)}$

32) $\dfrac{3x-1}{(x+5)(x^2-1)}$ **33)** $\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$ **34)** $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

35) هل يمكن كتابة $\dfrac{x^2-5}{x(x^2-3)}$ بصورة كسور جزئية؟ أبرر إجابتي.

36) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

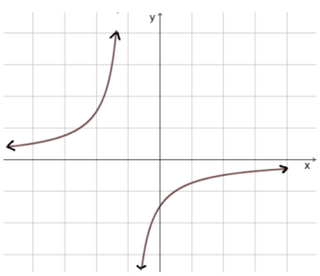
مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير أحدد إن كانت العبارات الآتية صحيحة أم غير صحيحة مبرّرًا إجابتي:

37) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{-3}{x}+\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}$

38) $\dfrac{x^2-7x+6}{(x+3)(x^2+1)}=\dfrac{18}{5(x+3)}+\dfrac{4-13x}{5(x^2+1)}$

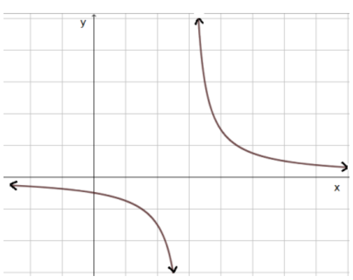
39) **مسألة مفتوحة** أكتب اقترانًا نسبيًا بالصورة $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطية غير مكررة.



40) **تحد** أي الاقترانات الآتية ينتج من تفكيكه إلى كسور جزئية الاقترانين الممثلين بالرسمين المجاورين؟

a) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-2x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+3}$ d) $f(x)=\dfrac{6}{x^2+4x+3}$



الدرس 3 التحويلات الهندسية للاقترانات

Transformations of Functions

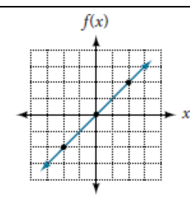
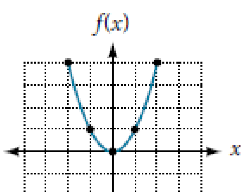
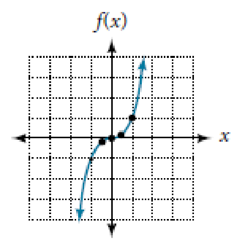
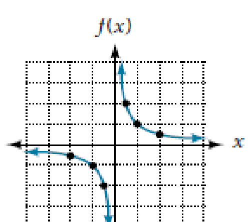
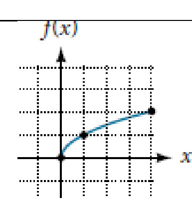
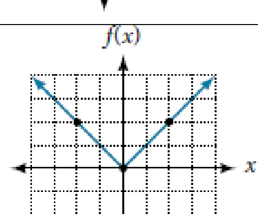
فكرة الدرس: رسم منحنيات اقترانات باستعمال التحويلات الهندسية، وكتابة معادلة التحويل لمنحنى معطى.

المصطلحات: الاقتران الرئيس، تحويل قياسي، تحويل غبر قياسي، الإزاحة، الانعكاس، التمدد، توسع رأسي، تضيق رأسي، توسع أفقي، تضيق أفقي

مسألة اليوم: أسقطت كرة من ارتفاع 145 m عن سطح الأرض، وكان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يعطى بالاقتران $h(t) = -4.9\ t^2 + 145$. أصف التحويلات التي تمت على الاقتران $f(t) = t^2$ للحصول على $h(t)$.

مجموعة الاقترانات التي تتشابه منحنياتها في صفة واحدة أو أكثر تسمى عائلة اقترانات، ويسمى أبسط اقترانات هذه العائلة الاقتران الرئيس parent function. فمثلًا الاقترانات $f(x) = x + 3,\ g(x) = 5x,\ h(x) = 5x - 4,\ j(x) = -7x - 1,$ جميعها اقترانات خطية فهي من عائلة الاقترانات الخطية، والاقتران الرئيس لها هو الاقتران $f(x) = x$ الذي يسمى الاقتران المحايد.

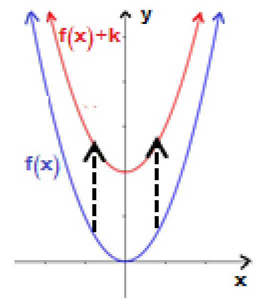
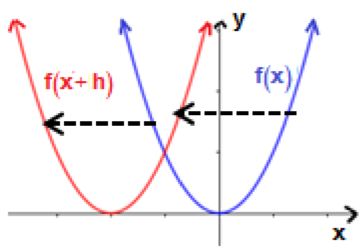
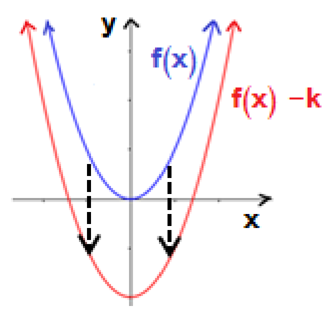
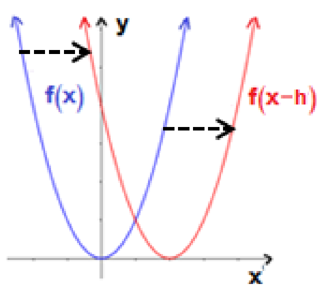
وبالمثل فإن الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعية هو $f(x) = x^2$، وللاقترانات التكعيبية $f(x) = x^3$. يبين الجدول الآتي بعض الاقترانات الرئيسة التي تعرفتها سابقًا ومنحنياتها.

الاقتران المحايد $f(x) = x$  	الاقتران التربيعي $f(x) = x^2$ 
الاقتران التكعيبي $f(x) = x^3$  	اقتران المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ 
اقتران الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$  	اقتران القيمة المطلقة $f(x) = \|x\|$ 

سأتعرف في هذا الدرس على عدد من التحويلات الهندسية التي تساعدني في رسم منحنيات اقترانات أكثر تعقيدًا اعتمادًا على منحنى الاقتران الرئيس للعائلة.

تؤثر هذه التحويلات في شكل منحنى الاقتران الرئيس، فبعضها يغير موقع المنحنى فقط ولا يغير في شكله وأبعاده وتسمى تحويلات قياسية rigid، وبعضها يغير شكل المنحنى بحيث يبدو أوسع من منحنى الاقتران الرئيس أو أضيق منه. وتسمى التحويلات التي تغير الشكل تحويلات غير قياسية nonrigid.

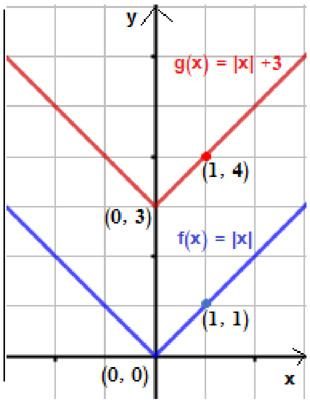
أحد التحويلات القياسية هو الإزاحة translation التي تنقل المنحنى من موقع إلى آخر. فالإزاحة الرأسية تنقل المنحنى إلى أعلى أو إلى أسفل، في حين تنقل الإزاحة الأفقية المنحنى يمينًا أو يسارًا.

الإزاحة الرأسية(إضافة عدد حقيقي للإحداثيy)	**الإزاحة الأفقية(إضافة عدد حقيقي للإحداثيx)**
في الإزاحة الرأسية $g(x) = f(x) + k$ تتحرك كل نقطة من منحنى $f(x)$ بمقدار k وحدة إلى أعلى. 	في الإزاحة الأفقية $g(x) = f(x + h)$ تتحرك كل نقطة من منحنى $f(x)$ بمقدار h وحدة إلى اليسار. 
وفي الإزاحة الرأسية $g(x) = f(x) - k$ تتحرك كل نقطة من منحنى $f(x)$ بمقدار k وحدة إلى أسفل. 	وفي الإزاحة الأفقية $g(x) = f(x - h)$ تتحرك كل نقطة من منحنى $f(x)$ بمقدار h وحدة إلى اليمين. 

مثال1

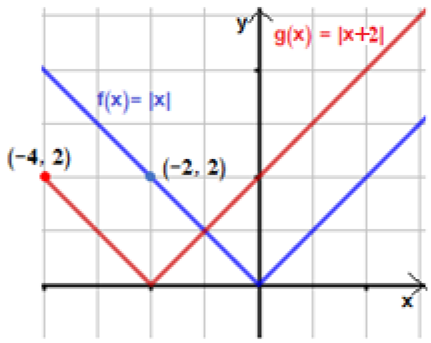
أستعمل منحنى الاقتران الرئيس $f(x)= |x|$ لأمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًا:

1) $g(x) = |x| + 3$



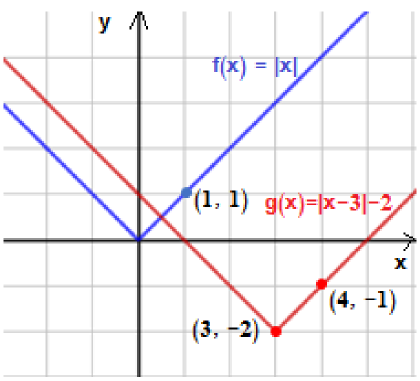
هذا الاقتران على الصورة $g(x) = f(x) + k$، ولذلك فإن منحناه يمثل إزاحة لمنحنى $f(x) = |x|$ بمقدار 3 وحدات إلى أعلى، فسوف يزيد الإحداثي y لكل نقطة بمقدار 3، فالنقطة (0, 0) ستنتقل إلى (0, 3)، والنقطة (1, 1) ستنتقل إلى (1, 4) ، وهكذا...

2) $g(x) = |x+2|$



هذا الاقتران على الصورة $g(x) = f(x+k)$، ولذلك فإن منحناه يمثل إزاحة لمنحنى $f(x) = |x|$ بمقدار وحدتين إلى اليسار، فسوف ينقص الإحداثي x لكل نقطة بمقدار 2، فالنقطة (0, 0) ستنتقل إلى (−2, 0)، والنقطة (−2, 2) ستنتقل إلى (−4, 2) ، وهكذا...

3) $g(x) = |x-3| -2$



هذا الاقتران على الصورة $g(x) = f(x-h)- k$، ولذلك فإن منحناه يمثل إزاحة لمنحنى $f(x) = |x|$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، ثم وحدتين إلى أسفل، فسوف يزيد الإحداثي x لكل نقطة بمقدار 3 وينقص الإحداثي y لها بمقدار 2، فالنقطة (0, 0) ستنتقل إلى (3, −2)، والنقطة (1, 1) ستنتقل إلى (4, −1) ، وهكذا...

أتحقق من فهمي

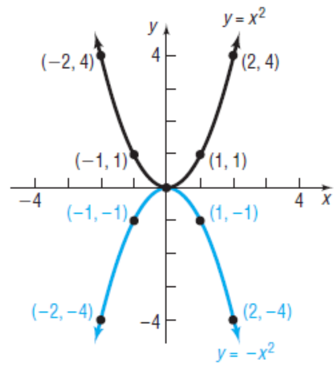
أستعمل منحنى الاقتران الرئيس $f(x)= x^2$ لأمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًا:

a) $g(x) = x^2 + 2$ b) $g(x) = (x- 2)^2$ c) $g(x) = (x+1)^2 -3$

هناك تحويل قياسي آخر هو الانعكاس الذي يكوّن لمنحنى الاقتران صورة مرآة بالنسبة إلى مستقيم معلوم.

الانعكاس حول المحور x

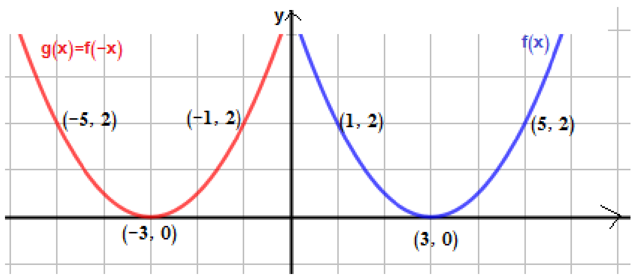
يحول النقطة (x, y) إلى $(x, -y)$



منحنى $g(x) = -f(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس حول المحور x .

الانعكاس حول المحور y

يحول النقطة (x, y) إلى $(-x, y)$

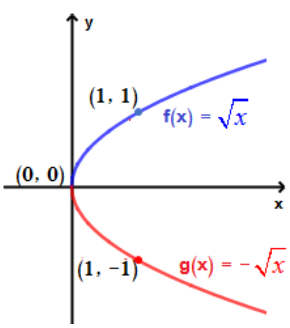


منحنى $g(x) = f(-x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس حول المحور y.

مثال 2

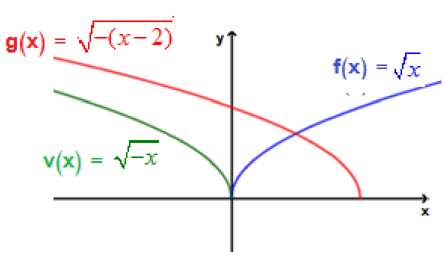
أستعمل منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = \sqrt{x}$ لأمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًا:

1) $g(x) = -\sqrt{x}$



هذا الاقتران على الصورة $g(x) = -f(x)$ فمنحناه صورة منحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بالانعكاس حول المحور x.

2) $g(x) = \sqrt{2-x}$



أكتب الاقتران على الصورة $g(x) = \sqrt{-(x-2)}$ فيصبح على الصورة $g(x) = f(-(x-h))$ فمنحناه صورة منحنى $f(x) = \sqrt{x}$ بالانعكاس حول المحور y متبوعًا بإزاحة بمقدار وحدتين يمينًا.

أتحقق من فهمي

أستعمل منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ لأمثل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًا:

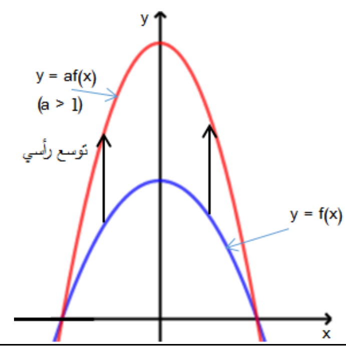
a) $g(x) = -(x+2)^3$

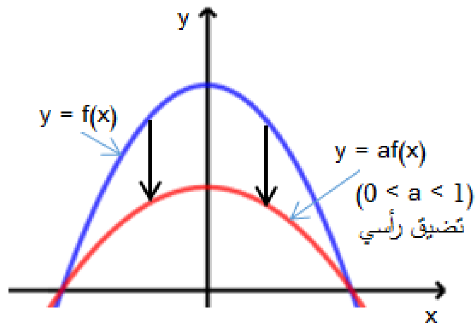
b) $g(x) = (3-x)^3 + 2$

والتمدد تحويل هندسي غير قياسي يغير الشكل حيث يؤدي إلى توسعه (تكبيره) أو تضيقه (انكماشه).

التمدد الرأسي

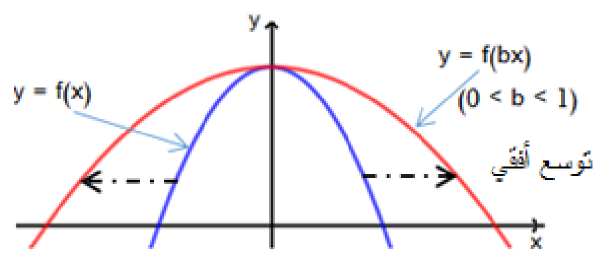
إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا فإن منحنى الاقتران $g(x) = af(x)$ الناتج من ضرب الإحداثي y لكل نقطة على منحنى $f(x)$ بالعدد a هو توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ معامله a إذا كان $a > 1$، وهو تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ معامله a إذا كان $0 < a < 1$، وإذا كان $a < 0$ فإن هناك انعكاس حول المحور x مع تمدد.

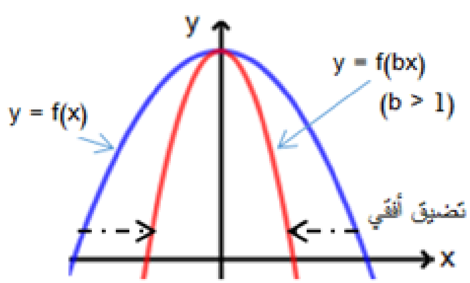




التمدد الأفقي

إذا كان b عددًا حقيقيًا موجبًا فإن منحنى الاقتران $g(x) = f(bx)$ الناتج من ضرب الإحداثي x لكل نقطة على منحنى $f(x)$ بالعدد $\frac{1}{b}$ هو تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$ معامله $\frac{1}{b}$ إذا كان $b > 1$، وهو توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ معامله $\frac{1}{b}$ إذا كان $0 < b < 1$، وإذا كان $b < 0$ فإن هناك انعكاس حول المحور y مع تمدد.





مثال 3

أستعمل منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$ لأمثل الاقتران $g(x) = \sqrt{2x-6}$ بيانيًا.

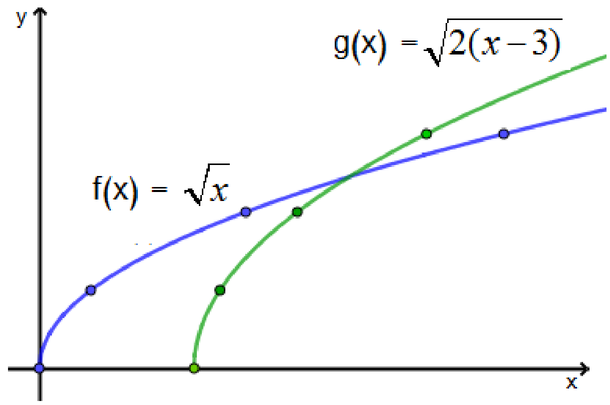
أكتب $g(x)$ بالصورة $g(x) = \sqrt{2(x-3)}$. ألاحظ أن التغير هنا هو على الإحداثي x فقط من طرح 3 وضرب في 2 ،
إذن هذا الاقتران يتضمن تحويلين هما تضيق أفقي معامله $\frac{1}{2}$ وإزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.

أكون جدول $f(x) = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	2	3

سوف تتغير الإحداثيات x لهذا الجدول بضربها في $\frac{1}{2}$ وإضافة 3 لكل منها، فتصبح الإحداثيات x الجديدة $3, 3.5, 5, 7.5$ وستبقى الإحداثيات y كما هي

أعين النقاط $(3, 0), (3.5, 1), (5, 2), (7.5, 3)$ ، وأرسم المنحنى الذي يمر بها وهو منحنى $\sqrt{2(x-3)}$.



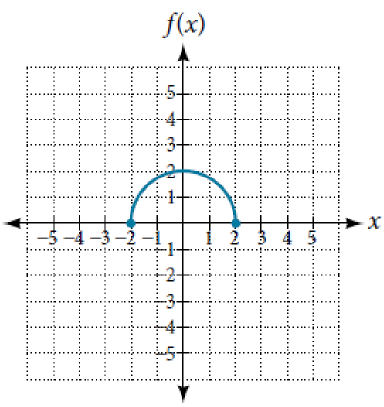
إرشاد

في حال وجود سلسلة تحويلات للاقتران يتم تنفيذها بالترتيب الآتي: الانعكاس، فالتمدد، فالإزاحة.

أتحقق من فهمي

أستعمل منحنى الاقتران f(x) المجاور لأمثل كلًّا من الاقترانين الآتيين بيانيًا:

a) $g(x) = 2f(x) - 1$ b) $g(x) = -f(\frac{1}{2}x+2)$

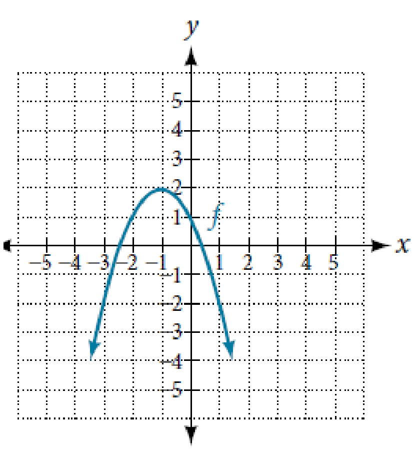


فقرة شرح جديدة

يمكن كتابة معادلة الاقتران من تمثيله البياني بالتعرف على الاقتران الرئيس للمنحنى والتحويلات التي أجريت عليه.

مثال 4

أكتب معادلة المنحنى الذي له التمثيل المجاور.



هذا منحنى اقتران تربيعي، فالاقتران الرئيس له هو $g(x) = x^2$،

وألاحظ أنه مقلوب ما يدل على انعكاس للمنحنى الرئيس حول المحور x، وهناك إزاحة أفقية لليسار وإزاحة رأسية إلى أعلى. وبذلك تكون معادلة f(x) على الصورة $f(x) = -a(x+h)^2 + k$

وبما أن رأس القطع كان في الأصل عند $(0, 0)$ وأصبح عند $(-1, 2)$ فإن $h = 1$, $k = 2$

ولإيجاد قيمة a أعوض إحداثيات نقطة واقعة على المنحنى مثل $(0, 1)$ في معادلته.

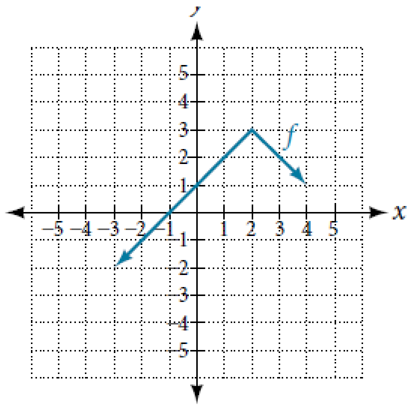
$$f(0) = -a(0+1)^2+2$$

$$1 = -a + 2 \Rightarrow a = 1$$

إذن، معادلة هذا المنحنى هي: $f(x) = -(x+1)^2 + 2$

أتحقق من فهمي

أكتب معادلة المنحنى الذي له التمثيل المجاور.



فقرة شرح جديدة

تستعمل تحويلات الاقترانات في مواقف حياتية يمكن نمذجتها باقترانات ويمكن وصف التحويلات التي نفذت على الاقتران الرئيس للحصول على الاقتران النهائي.

مثال 5 من الحياة

رياضة الجولف ضرب لاعب كرة جولف فاتخذت المسار المعطى بالاقتران $g(x) = 0.176x - 0.0004x^2$ حيث $g(x)$ هو ارتفاع الكرة عن الأرض بالأقدام، و x المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة بالأقدام حيث $x=0$ يشير إلى نقطة البداية. أصف التحويلات التي تمت على الاقتران $f(x) = x^2$ للحصول على الاقتران $g(x)$.

الخطوة 1

أعيد كتابة الاقتران $g(x)$ على الصورة $g(x) = af(x-h) + k$ بإكمال المربع

الاقتران الأصلي	$g(x) = 0.176x - 0.0004x^2$
بإخراج -0.0004 عاملًا مشتركًا	$= -0.0004(x^2 - 440x)$
بإضافة $(\frac{440}{2})^2$ وطرحها	$= -0.0004(x^2 - 440x + (220)^2 - (220)^2)$
بفك القوسين وتحليل المربع الكامل	$= -0.0004(x-220)^2 + 0.0004(220)^2$
بالتبسيط	$g(x) = -0.0004(x-220)^2 + 19.36$

إذن، $g(x) = -0.0004f(x-220) + 19.36$

الخطوة 2 أصف التحويلات.

بما أن العامل المضروب بالاقتران سالب، فذلك يعني انعكاس للاقتران $f(x)$ حول المحور x مع تضيق رأسي معامله 0.0004 ، وطرح 220 من x يدل على إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار 220 وحدة، وإضافة 19.36 إلى $f(x)$ يدل على إزاحة رأسية إلى أعلى بمقدار 19.36 وحدة.

أتحقق من فهمي

تجارة وجدت شركة تبيع الآلات الحاسبة أن دخلها بالدنانير من بيع x آلة حاسبة يعطى بالاقتران $R(x) = -\frac{1}{150}x^2 + 140x$ أصف التحويلات التي تمت على الاقتران $f(x) = x^2$ للحصول على R(x).

ملخص المفهوم لرسم التحويل:	التحويلات الهندسية أرسم f(x) وأنفذ الإجراء الآتي:	التغيير على المعادلة
الإزاحة الرأسية		
$y= f(x) +k, \quad k > 0$	إزاحة منحنى f(x) بمقدار k وحدة إلى أعلى	إضافة k إلى f(x)
$y= f(x) - k, \quad k > 0$	إزاحة منحنى f(x) بمقدار k وحدة إلى أسفل	طرح k من f(x)
الإزاحة الأفقية		
$y= f(x+h), h > 0$	إزاحة منحنى f(x) بمقدار h وحدة إلى اليسار	استبدال x بِ x+h
$y= f(x-h), h > 0$	إزاحة منحنى f(x) بمقدار h وحدة إلى اليمين	استبدال x بِ x− h
التوسع والتضيق		
$y= af(x), a > 0$	ضرب الإحداثي y من $y = f(x)$ في a توسع رأسي إذا كانت $a > 1$ تضيق رأسي إذا كانت $0 < a < 1$	ضرب f(x) في a
$y = f(ax), a > 0$	ضرب الإحداثي x من $y = f(x)$ في $\frac{1}{a}$ توسع أفقي إذا كانت $0 < a < 1$ تضيق أفقي إذا كانت $a > 1$	استبدال x بِ ax
الانعكاس حول المحور x		
$y = -f(x)$	انعكاس المنحنى حول المحور x	ضرب f(x) في −1
الانعكاس حول المحور y		
$y = f(-x)$	انعكاس المنحنى حول المحور y	استبدال x بِ −x

أتدرب وأحل المسائل

1) كيف يمكن التمييز بين الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية من معادلة الاقتران الناتج من عدة تحويلات؟

2) أكتب معادلة المنحنى الناتج من إجراء إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى وإزاحة أفقية إلى اليسار بمقدار 3 وحدات لمنحنى $f(x)=|x|$.

أستعمل منحنى $f(x) = \sqrt{x}$ لأمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًا:

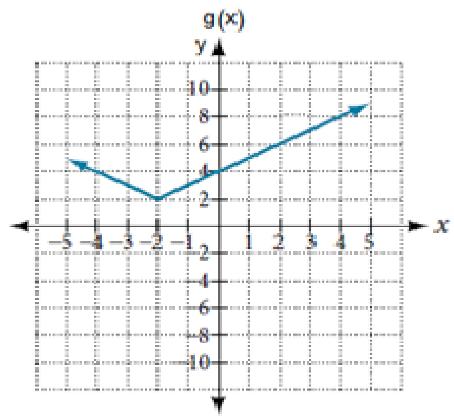
3) $f(x) = \sqrt{x-3}$ 4) $f(x) = \sqrt{x+4}$ 5) $f(x) = \sqrt{x-2}+5$

أستعمل منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ لأمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًا:

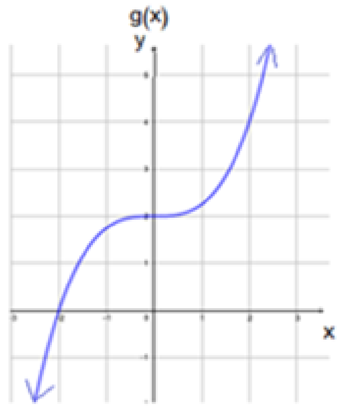
6) $f(x) = \frac{1}{x} + 5$　　7) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$　　8) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$

أكتب معادلة منحنى g(x) الذي له التمثيل البياني التالي:

9)



10)



أصف التحويلات التي تمت على f(x) للحصول على g(x) في كل مما يأتي:

11) $g(x) = -f(x) + 8$　　12) $g(x) = 3f(x-2) - 5$

13) $g(x) = 2f(-x) + 3$　　14) $g(x) = f(\frac{1}{5}x) - 10$

15) $g(x) = f(2(x-4)) + 6$　　16) $g(x) = -3f(4x) + 8$

أكتب معادلة g(x) الناتج من إجراء التحويلات المذكورة في كلٍّ مما يأتي على f(x):

17) انعكاس حول المحور y ، وتضيق أفقي معامله $\frac{1}{4}$ على منحنى $f(x) = |x|$.

18) انعكاس حول المحور x، وتوسع أفقي معامله 2 على منحنى $f(x) = \sqrt{x}$.

19) توسع رأسي معامله 8، وإزاحة إلى اليمين بمقدار 4 وحدات، وإزاحة إلى أعلى بمقدار وحدتين على منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$.

20) تضيق رأسي معامله $\frac{1}{2}$، وإزاحة إلى اليسار بمقدار 3 وحدات، وإزاحة إلى أسفل بمقدار 3 وحدات على منحنى $f(x) = x^2$.

أصف التحويلات التي تمت على الاقتران الرئيس وأمثل كلًّا مما يأتي بيانيًا:

21) $g(x) = 4(x+1)^2 - 5$　　22) $h(x) = -2|x - 4| + 3$

23) $q(x) = (\frac{1}{4}x)^3 + 1$　　24) $m(x) = \sqrt{-x+4}$

25) $k(x) = 4\sqrt{2-x} + 3$　　26) $n(x) = \frac{3}{x-2} + 1$

27) أعمال وجدت شركة لبيع الساعات أن ربحها الشهري بالدنانير من بيع x ساعة يعطى بالاقتران $P(x) = 0.2x^2 + 42x - 1750$. أصف التحويلات التي تمت على $f(x) = x^2$ للحصول على P(x).

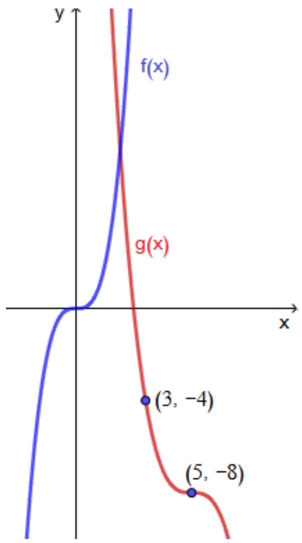
28) أحل المسالة الواردة في بداية الدرس.

مسائل مهارات التفكير العليا

29) اكتشف الخطأ وصف كلٌّ من أحمد ومنصور التحويل الهندسي الذي تم للحصول على $g(x)= (\frac{1}{3}x)^3$، فقال أحمد أنه تم تضيق رأسي معامله $\frac{1}{27}$ لمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$، وقال منصور أنه تم توسع أفقي معامله 3 لمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^3$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ أبرر إجابتي.

30) أكتب أشرح أهمية الترتيب عند إجراء تحويلي الانعكاس والإزاحة.

31) تحد أصف التحويلات التي تمت على الاقتران $f(x) = x^3$ للحصول على الاقتران g(x) الممثل بالرسم المجاور.



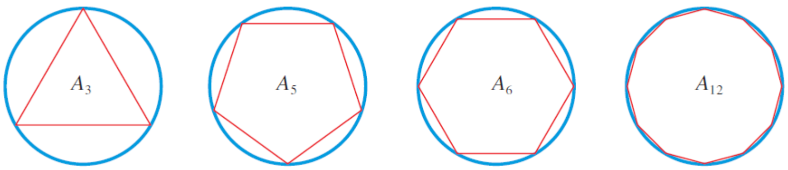
فكرة الدرس:

- إيجاد نهاية اقتران عند نقطة بيانيًا وعدديًا وجبريًا
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

المصطلحات: النهاية، الصيغة غير المحددة، النهاية.

مسألة اليوم:

ما العلاقة بين مساحة الدائرة ومساحة المضلع المنتظم (A_n) حيث n عدد أضلاع المضلع، عندما تزداد قيمة n بشكل كبير؟

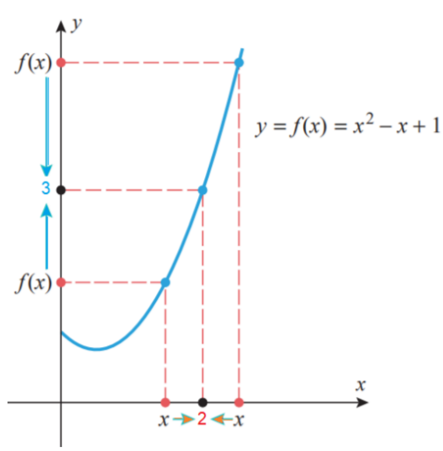


إيجاد النهايات بيانيًا وعدديًا

تعلمت سابقًا الكثير من خواص الاقترانات مثل المجال والمدى والتزايد والتناقص وشكل المنحنى، وذلك من خلال تحليل تمثيلاتها البيانية أو دراسة جدول قيم يمثل الاقتران، وسأتعلم في هذا الدرس تحليل سلوك اقتران معطى مثل f ، وتحديد ما إذا كانت قيم الاقتران (المخرجات) تقترب أكثر فأكثر من عدد ما، عندما تقترب قيم x (المدخلات) أكثر فأكثر من عدد محدد مثل (c)، عندها يسمى العدد الذي تقترب منه قيم الاقتران النهاية (limit).

إذا كان $f(x) = x^2 - x + 1$ وأخترت قيمًا لـ x تقترب أكثر فأكثر من العدد 2، عندها يمكنني الملاحظة من جدول القيم والتمثيل البياني أدناه أنه عندما تقترب قيم x من العدد (2) من جهة اليسار فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد (3)، وعندما تقترب قيم x من 2 من جهة اليمين فإن قيم الاقتران تقترب من العدد (3)، عندها يمكنني القول أن: نهاية $(x^2 - x + 1)$ عندما تقترب x من العدد 2 من جهتي اليمين واليسار هي 3، وتكتب على الصورة:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 1) = 3$$



2

x	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999		2.001	2.005	2.01	2.05	2.1
$f(x)$	2.710000	2.852500	2.970100	2.985025	2.997001		3.003001	3.015025	3.030100	3.152500	3.310000

3

جهة اليسار جهة اليمين

أتعلم: في الهامش بجانب فقرة الشرح السابقة.

تعلمت سابقًا أن السرعة اللحظة هي السرعة التي يمكن إيجادها بتقليص الفترة الزمنية للسرعة المتوسطة حتى تصبح نقطة (لحظة)؛ مما يعني أن السرعة اللحظية هي ***نهاية*** السرعة المتوسطة.

مفهوم أساسي	**النهاية عند نقطة**
بالكلمات: إذا كانت قيمة الاقتران $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L بالرموز: $$\lim_{x\to c} f(x) = L$$ وتقرأ : نهاية الاقتران $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L	

لغة الرياضيات: للمصمم في الهامش بجانب آخر سطر من الصندوق المجاور.

تقرأ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ أيضًا على الصورة:

يقترب f(x) من L عندما تقترب x من c

عند كتابة $\lim_{x\to c} f(x)$، فهذا يشير إلى أن x تقترب من c من جهتي اليمين واليسار، وإذا أردنا أن نكون أكثر تحديدًا حول الجهة التي تقترب منها قيم x من القيمة c ، فإننا نستعمل التعبيرين الآتيين:

- أستعمل التعبير $\lim_{x\to c^-} f(x)$ لدلالة على النهاية من جهة اليسار حيث x < c، وتقرأ: نهاية f(x) عندما تقترب x من c من اليسار.
- أستعمل التعبير $\lim_{x\to c^+} f(x)$ لدلالة على النهاية من جهة اليمين حيث x > c ، وتقرأ: نهاية f(x) عندما تقترب x من c من اليمين.

وتكون النهاية موجودة إذا كانت النهايتين من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.

إرشاد: للمصمم بجانب الفقرة السابقة

للبحث في النهاية من يسار الاقتران عند c يجب أن يكون الاقتران معرفًا على يسار c على الفترة (a, c)، وللبحث في النهاية من يمين اقتران عند c يجب أن يكون الاقتران معرفًا على يمين c على الفترة (a, c)

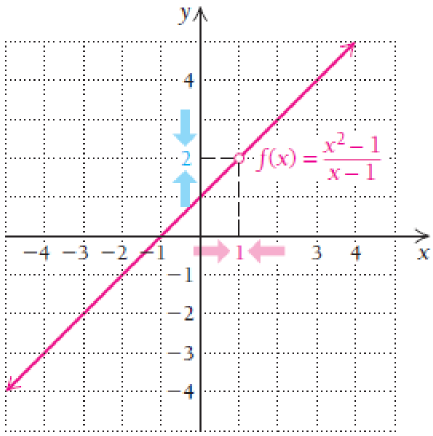
مفهوم أساسي	النهاية من الجهتين
بالكلمات: تكون النهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين. بالرموز: $$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$	

مثال 1:

1) **إذا كان** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$**، فأجد** $\lim_{x\to1} f(x)$

يمكن إيجاد $\lim_{x\to1} f(x)$ بطريقتين: بيانيًّا و عدديًّا.

الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًّا.



إن مجال الاقتران $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 1 $(R-\{1\})$، وبما أن :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

لذا فإن التمثيل البياني لـ $f(x)$ هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم $y=x+1$ مع دائرة صغيرة مفرغة عند $x=1$ كما في الشكل المجاور.

أفكر : في الهامش مقابل الطريقة 1

لماذا مجال f(x) هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 1 ؟

ألاحظ من التمثيل البياني لـ f(x) أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من الجهتين، فإن قيم f(x) المقابلة لها تقترب من العدد (2) من الجهتين ، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

إرشاد: للمصمم في هامش السطر السابق

ألاحظ أن الاقتران f(x) غير معرف عند $x=1$ ، إلا أن النهاية موجودة عندما $x\to1$

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًّا

أنشئ جدول قيم، باختيار قيم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم f(x) المقابلة لها.

→ 1 ←

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

→ 2 ←

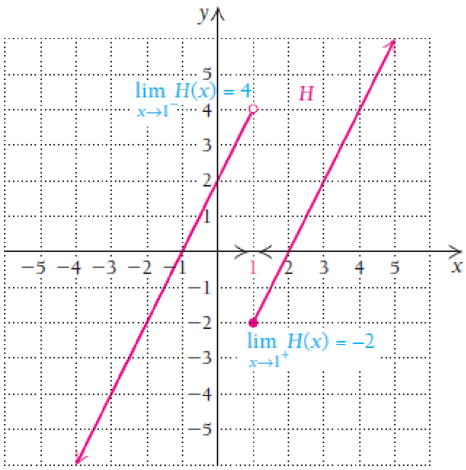
جهة اليسار — جهة اليمين

ألاحظ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من الجهتين، فإن قيمة f(x) المقابلة لها تقترب من العدد (2) ، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

ألاحظ مما سبق أن قيمة النهاية متساوية من الطريقتين.

2) إذا كان $H(x) = \begin{cases} 2x+2, x<1 \\ 2x-4, x \geq 1 \end{cases}$ ، فأجد $\lim\limits_{x\to1} H(x)$



الطريقة 1: إيجاد النهاية بيانيًا.

إن الاقتران H(x)، اقتران متشعب، وتمثيله البياني كما يظهر في الشكل المجاور.

ألاحظ من التمثيل البياني أنه

ألاحظ من التمثيل البياني لـ H(x) أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من جهة اليسار، فإن قيم H(x) المقابلة لها تقترب من العدد (4) ، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to1^-} H(x) = 4$$

ولكن كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من جهة اليمين، فإن قيم H(x) المقابلة لها تقترب من العدد (-2) ، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to1^+} H(x) = -2$$

وبما أن النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x\to1} H(x)$ غير موجودة.

إرشاد: للمصمم في هامش السطر السابق

ألاحظ أن H(1) = -2، مما يعني أن الاقتران معرف عند x = 1 ، ولكن النهاية عندما تقترب x من العدد (1) غير موجودة.

الطريقة 2: إيجاد النهاية عدديًا

أنشئ جدول جدول قيم، باختيار قيم x القريبة من العدد 1 من كلا الجهتين، وإيجاد قيم f(x) المقابلة لها.

1

x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		-1.998	-1.98	-1.8

جهة اليسار 4 -2 جهة اليمين

ألاحظ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من جهة اليسار ، فإن قيم H(x) المقابلة لها تقترب من العدد (4)، وأنه كلما اقتربت قيم x من العدد (1) من جهة اليمين، فإن قيم H(x) المقابلة لها تقترب من العدد (-2) ، وبما أن النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x\to1} H(x)$ غير موجودة.

أفكر: للمصمم في الهامش بجانب الفقرة السابقة.

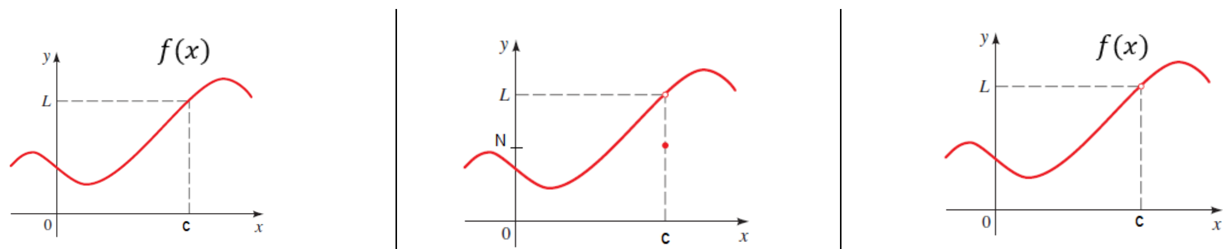
أجد $\lim\limits_{x\to -3} H(x)$

أتحقق من فهمي:

a) إذا كان $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$، فأجد $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

b) إذا كان $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ ، فأجد $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ألاحظ من المثال السابق أن نهاية f(x) عندما تقترب x من العدد c لا علاقة لها بقيمة f(c) (صورة الاقتران عند النقطة)، فمثلًا $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ لجميع الحالات الثلاث الآتية:



$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$
$f(c)$ غير معرفة	$f(c) = N$	$f(c) = L$

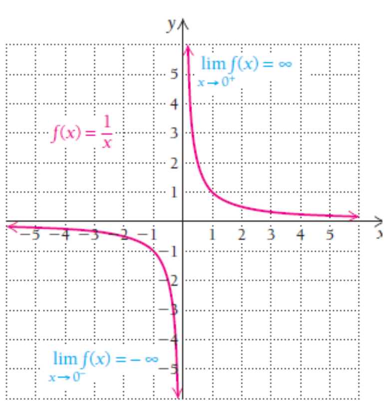
نهايات تتضمن المالانهاية

في بعض الأحيان تكون قيمة النهاية غير موجودة في إحدى جهتي النهاية أو كلتيهما وذلك لأن قيم الاقتران تزداد بشكل غير محدود وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞ ، أو تتناقص بشكل غير محدود فنشير عندها إلى النهاية بالرمز $-\infty$

مثال 2:

أجد كلًا من النهايات الآتية بيانيًا:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$



ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (0) من جهة اليسار، فإن قيم f(x) المقابلة لها تقل بشكل غير محدود، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

وأنه كلما اقتربت قيم x من العدد (0) من جهة اليمين، فإن قيم f(x) المقابلة لها تزداد بشكل غير محدود، وهذا يعني أن:

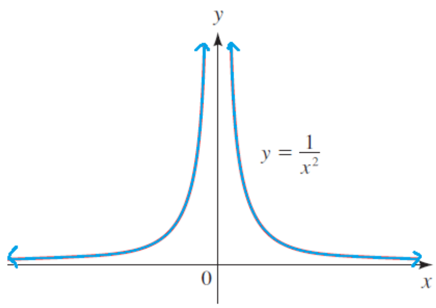
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

وبما أن النهاية من جهة اليمين لا تطابق النهاية من جهة اليسار، فإن $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة.

أتذكر: للمصمم في هامش الفقرة السابقة

تعلمت سابقًا أن الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ عو من أبسط الاقترانات النسبية ويسمى اقتران المقلوب.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$



ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد (0) من جهة اليسار ، فإن قيم f(x) المقابلة لها تزداد بشكل غير محدود، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

وأنه كلما اقتربت قيم x من العدد (0) من جهة اليمين، فإن قيم f(x) المقابلة لها تزداد بشكل غير محدود، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

وبما أن كلتا النهايتين ∞، فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

أتعلم: في هامش الفقرة السابقة.

الرمزان ∞، $-\infty$ ليسا عددان حقيقيان، ولكنهما يصفان بعض الحالات التي لا يوجد لها نهاية، ومنها الاقترانات التي لها خطوط تقارب رأسي.

أتحقق من فهمي:

أجد كلًا من النهايات الآتية بيانيًّا:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2}$

إيجاد النهايات جبريًّا

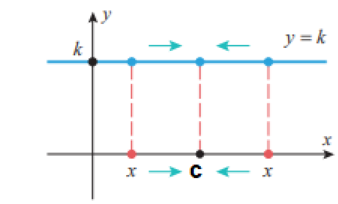
تعلمت في الأمثلة السابقة كيفية إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا، وسأتعلم الآن الطرائق الجبرية لإيجاد النهايات.

مفهوم أساسي	نهايات الاقترانات

نهاية الاقتران الثابت

بالكلمات: نهاية الاقتران الثابت عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للاقتران.

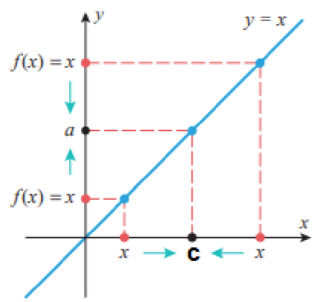
بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهاية الاقتران المحايد

بالكلمات: نهاية الاقتران $f(x) = x$ عند النقطة c هي c

بالرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



وتعد الخواص الآتية للنهايات، الأدوات الأساسية لإيجاد النهايات جبريًّا:

مفهوم أساسي	خصائص النهايات

إذا كان k, c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x \to c} f(x) , \lim\limits_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $1)\ \lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $2)\ \lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $3)\ \lim\limits_{x \to c} (kf(x)) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $4)\ \lim\limits_{x \to c} (f(x) \times g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \times \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $5)\ \lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} \quad , \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $6)\ \lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to c} f(x))^n$

خاصية الجذر النوني: $7)\ \lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ ، $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ فإن إذا كان n عدد زوجي

مثال 3:

أستعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 6)$

$\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 6) = \lim\limits_{x\to -1} x^3 - \lim\limits_{x\to -1} 4\,x + \lim\limits_{x\to -1} 6$ خاصيتا المجموع والفرق

$= (\lim\limits_{x\to -1} x)^3 - 4 \lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 6$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$= (-1)^3 - 4(-1) + 6$ نهايتا الضرب في ثابت و الاقتران المحايد

$= 9$ بالتبسيط

2) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2}{x-1}}$ خاصية الجذر النوني

$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2}{\lim\limits_{x\to 5}(x-1)}}$ خاصية القسمة

$= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x\to 5} x)^2}{\lim\limits_{x\to 5} x - \lim\limits_{x\to 5} 1}}$ خاصية القوة والفرق

$= \sqrt{\frac{(5)^2}{5-1}}$ نهايتا الضرب في ثابت و الاقتران المحايد

$= \frac{5}{2}$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي:

أستعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to -1} (2x^3 + 3x^2 - 4)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}$

أتذكر: في هامش الفرع 3

في الفرع 3 من المثال 3 ، يجب التحقق أن $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ لأن دليل الجذر عدد زوجي.

في المثال السابق إذا أوجدت f(c) لكل النهايات المطلوبة، سأجد أن نهاية كل اقتران عندما تقترب x من c تساوي f(c) ، وبكلمات أخرى فإنه يمكن إيجاد النهاية **بالتعويض المباشر**، ولكن هذا لا ينطبق على جميع الاقترانات، إلا أنه ينطبق على كثيرات الحدود والاقترانات النسبية التي مقاماتها لا تساوي صفرًا عندما x = c .

مفهوم أساسي	النهايات بالتعويض المباشر
إذا كان $f(x)$ **كثير حدود** أو **اقترانًا نسبيًا**، و c عدد حقيقي ينتمي إلى مجال الاقتران $f(x)$ فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$	

مثال 4:

أجد كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فأذكر السبب:

$$1)\ \lim_{x\to 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$$

بما أنها نهاية كثير حدود، إذن يمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 0} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) = (2)^4 - 5(2)^3 + (2)^2 - 7$$ بالتعويض المباشر

$$= -27$$ بالتبسيط

$$2)\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

بما أن ما داخل الجذر موجب عند $x = 0$، إذن يمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(0)^2 - 3(0) + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= \sqrt{2}$$ بالتبسيط

$$3)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2}$$

بما أنها نهاية اقتران نسبي مقامه لايساوي صفرًا عند $x = -1$، إذن يمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2}$$ بالتعويض المباشر

$$= -\frac{4}{3}$$ بالتبسيط

4) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

بما أنها نهاية اقتران نسبي مقامه يساوي صفر ، إذن لا يمكن ايجادها بالتعويض المباشر .

أتحقق من فهمي:

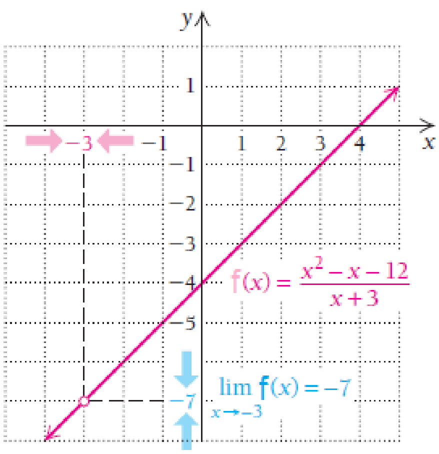
أجد كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فأذكر السبب:

a) $\lim_{x\to 2} (3x^2-5x+4)$

b) $\lim_{x\to -1} \sqrt{1-4x^2}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x-6}{x^2-2}$

d) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$



إن ناتج التعويض المباشر للنهاية في الفرع 4 من المثال الرابع ($\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$) يعطي الناتج $\frac{0}{0}$ ، وتسمى هذه النتيجة الصيغة غير المحددة (indeterminate form)، ولكن هذا لا يعني أن النهاية غير موجودة، فالتمثيل البياني المجاور للاقتران $f(x)=\frac{x^2-x-12}{x+3}$ يظهر أن النهاية موجود عند x= −3 وتساوي −7

في مثل الحالة (ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$) فإننا نحتاج إلى البحث عن صيغة مكافئة للاقتران، وتبسيطه جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة، أو انطاق البسط أو المقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 5:

أجد كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3}$

بما أن ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، لذا أحلل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{x+3}$$ بتحليل ثلاثي الحدود

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}$$ باختصار العامل المشترك بين البسط والمقام

$$= \lim_{x\to -3} (x-4)$$ بالتبسيط

$$= -3 - 4 = -7$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

بما أن ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، لذا أنطق البسط أولًا، ثم أختصر العوامل المشتركة.

أضرب كلا من البسط والمقام بمرافق $\sqrt{x+1}+1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

بالتعويض المباشر

$$= \frac{1}{2}$$

أتعلم: للمصمم في الهامش

بشكل عام، إذا كان ناتج التعويض المباشر يساوي $\frac{0}{0}$، فإنه يجب تبسيط المقادير جبريًّا، لإيجاد عوامل مشتركة واختصارها.

3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

بما أن ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، لذا أحتاج إلى إعادة التعريف أولًا ، ثم أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

أتذكر: للمصمم في هامش خطوة 1

إعادة التعريف هي إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة على صورة اقتران متشعب، من دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

الخطوة 1: أعيد تعريف الاقتران

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, & x > 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2}, & x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد نهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار

ألاحظ أنه يوجد قاعدتين مختلفتين عن يمين وعن يسار العدد 2، لذا يجب إيجاد نهاية اليمين واليسار.

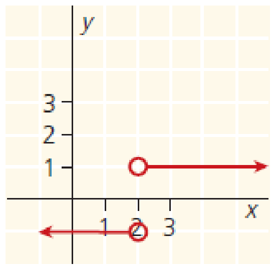
النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-1) = -1$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (1) = 1$

وبما أن النهايتين من اليمين ومن اليسار غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ غير موجودة.

إرشاد: للمصمم في هامش الفقرة الأخيرة

ألاحظ من التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ أن النهاية غير موجودة.



أتحقق من فهمي:

أجد كل نهاية مما يأتي:

c) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$

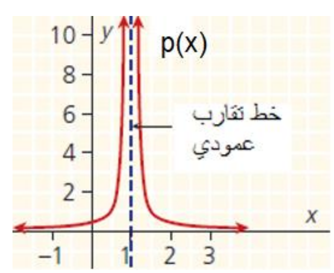
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x-x^2}{x}$

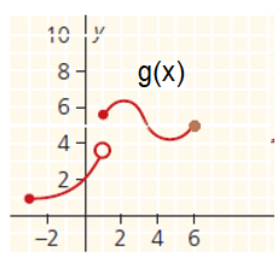
الاتصال

يكون الاقتران متصلًا (continuous function) إذا لم يكن في تمثيله البياني أي انقطاع أو قفزة أو فجوة. ويكون الاقتران متصلًا عند نقطة إذا كان منحناه يمر عبر هذه النقطة دون انقاطع.

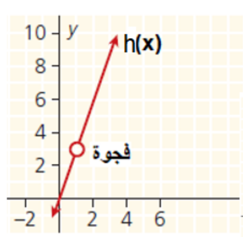
توضح التمثيلات البيانية الآتية الحالات المختلفة للاتصال:



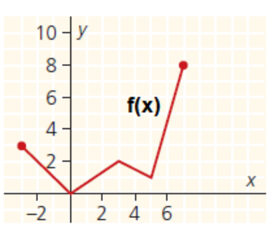
f(x) غير متصل عند x=1



g(x) غير متصل عند x=1



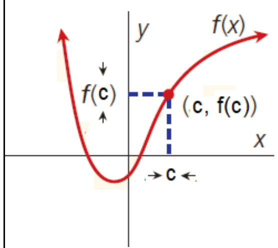
h(x) غير متصل عند x=1



f(x) متصل على مجاله

ألاحظ أن منحنيي الاقترانين p(x) و h(x) غير متصلين عند $x = 1$ لأن كل من الاقترانين غير معرف عند $x = 1$ (بالرغم من أن النهاية موجودة في الشكل b). أما الاقتران g(x) فإنه غير متصل عند $x = 1$ بسبب وجود قفزة (مما يعني أن النهاية غيرة موجودة).

مما سبق يمكن التوصل إلى أن الاقتران يكون متصلًا عند نقطة إذا كانت النهاية تساوي صورة الاقتران عند تلك النقطة.

مفهوم أساسي	الاتصال عند نقطة
يكون الاقتران f(x) متصلًا عند النقطة $x = c$ إذا حقق جميع الشروط الآتية: • f(c) موجودة. • $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة. • $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$	

أتعلم: للمصمم فقرة أتعلم مقابل فقرة الشرح قبل الجدول

يمكن اختبار اتصال اقتران بتمرير قلم على منحنى الاقتران دون الحاجة إلى رفع القلم عن الورقة.

أتذكر: للمصمم أتذكر مقابل صندوق المفهوم الأساسي.

النهاية موجودة تعني أن نهايتي اليمين واليسار متساويتين، ووجود النهاية عند نقطة لا يتأثر بوجود الاقتران عند تلك النقطة أم لا.

مثال 6:

أحدد ما إذا كان كل اقتران مما يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مبررًا إجابتي:

1) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x \quad , x = 3}$

الاقتران f متصل عند $x = 3$ لأن $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 24$

2) $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \quad x = 2}$

الاقتران g غير متصل عند $x = 2$ لأنه غير معرف عن هذه النقطة (صفر مقام).

أتعلم: للمصمم في هامش الفرع 1

- كثيرات الحدود متصلة عند جميع قيم x التي تنتمي إلى مجالها.
- الاقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام.

3) $\boldsymbol{h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \leq -1 \\ x - 1 & , x > -1 \end{cases} \quad , x = -1}$

لتحديد ما إذا كان الاقتران المتشعب h متصلًا عند $x = -1$ ، علي إثبات أن $\lim_{x \to -1} h(x) = h(-1)$

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+3}$$ بتحليل الفرق بين مربعين

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$$ باختصار العامل المشترك بين البسط والمقام

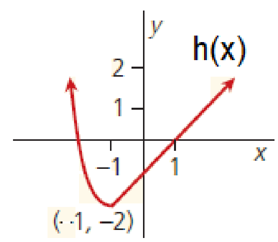
$$=\lim_{x\to4}(x+4)$$ بالتبسيط

$$=4+4=8$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

- $h(-1)=-2$
- $\lim_{x\to-1^-}h(x)=\lim_{x\to-1^-}x^2-3=-2$
- $\lim_{x\to-1^+}h(x)=\lim_{x\to-1^+}x^2-3=-2$

بما أن $\lim_{x\to-1^+}h(x)=\lim_{x\to-1^-}h(x)=-2$ ، فإن $\lim_{x\to-1}h(x)=-2$

وبما أن $\lim_{x\to-1}h(x)=h(-1)=-2$ ، إذن h(x) متصل عند $x=-1$. ويوضح التمثيل البياني المجاور للاقتران h(x) أنه متصل عند $x=-1$



$$4)\ \boldsymbol{p(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & ,x\neq 4\\ 7 & ,x=4\end{cases}\qquad ,\ x=4$$

لتحديد ما إذا كان الاقتران المتشعب p متصلًا عند x = 4 ، علي إثبات أن $\lim_{x\to4}p(x)=p(4)$

- p(4) = 7
- $\lim_{x\to4}p(x)=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$$ بتحليل الفرق بين مربعين

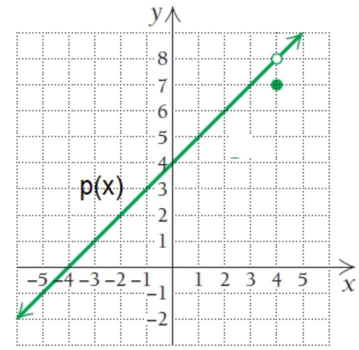
$$=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}$$ باختصار العامل المشترك بين البسط والمقام

$$=\lim_{x\to4}(x+4)$$ بالتبسيط

$$=4+4=8$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

أتذكر : للمصمم في هامش الجدول

بما أن ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$، لذا أحلل المقدار جبريًّا وأختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.



بما أن $\lim_{x\to -1} p(x) \neq p(4)$ ، إذن p(x) غير متصل عند $x = 4$. ويوضح التمثيل البياني المجاور للاقتران p(x) عدم اتصاله عند x =4

أتحقق من فهمي:

أحدد ما إذا كان كل اقتران مما يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مبررًا إجابتي:

a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x \quad , x = 1$

b) $g(x) = \frac{x^2+16}{x-5}$, x=5

c) $h(x) = \begin{cases} x-1 & ,x < 3 \\ 5-x & ,x \geq 3 \end{cases} \quad , x = 3$

d) $p(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & ,x \neq 5 \\ 10 & ,x = 5 \end{cases} \quad , x = 5$

أتدرب وأحل المسائل

أجد كلًا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

1) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 3}(x+7)$

أجد كلًا من النهايات الآتية بيانيًّا:

4) $\lim_{x\to 0}|x|$

5) $\lim_{x\to -1}(x^2 - 5)$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - 2$

7) $\lim_{x\to -2}(4 - x^2)$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

9) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$

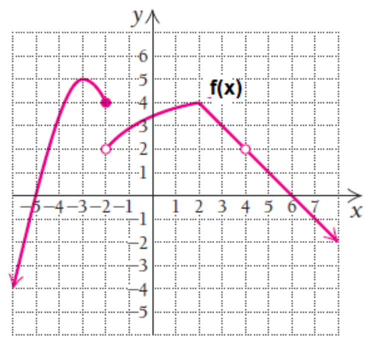
10) $\lim_{x\to 3} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} -1 & ,x \neq 3 \\ 1 & ,x = 3 \end{cases}$

11) $\lim_{x\to 2} h(x)$, $h(x) = \begin{cases} 2x & ,x < 2 \\ x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ، $g(x) = \begin{cases} x & ,x \le 0 \\ \sqrt{x} & , x > 0 \end{cases}$

12) $\lim\limits_{x\to -2} p(x)$ ، $p(x) = \begin{cases} x+6 & ,x < -2 \\ -\frac{1}{2}x+1 & , x > -2 \end{cases}$

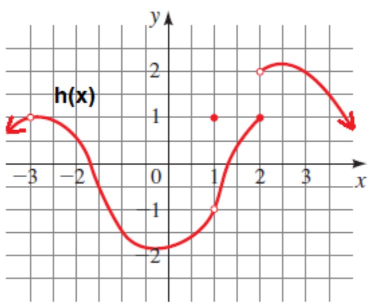
أستعمل التمثيل البياني الآتي لأجد كل نهاية مما يأتي:



13) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

14) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

أستعمل التمثيل البياني الآتي لأجد كل نهاية مما يأتي:



15) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

16) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

17) $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$

18) إذا كان $a \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$، وكان f(0) = 0، $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$ ، $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 8$ ، فأجد قيم الثوابت a و b و c.

أجد كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 4x + 7)$

20) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x-4}$

21) $\lim\limits_{x\to 9} (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

22) $\lim\limits_{x\to 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3)$

23) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{\frac{x-3}{2x+4}}$

24) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2+11}$

25) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

26) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{x+1}$

27) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

28) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{|x-2|}$

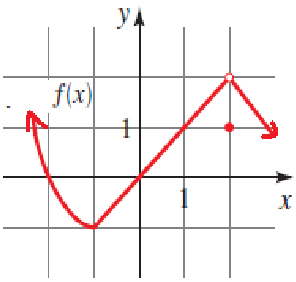
29) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-3}$

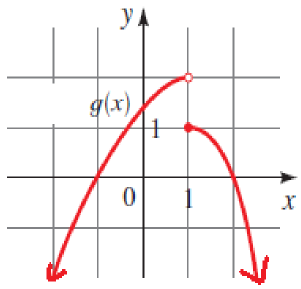
30) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$

31) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} x-1 & ,x < 3 \\ 3x-7 & , x > 3 \end{cases}$

32) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4}$

أستعمل التمثيل البياني المجاور، لأجد كل نهاية مما يأتي:





33) $\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x))$

34) $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

35) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

36) $\lim_{x \to 0}(f(x) \times g(x))$

أحدد ما إذا كان كل اقتران مما يأتي متصلًا عند قيمة x المعطاة، مبررًا إجابتي:

37) $f(x) = \pi x^2 4.2x + 7$, $x = -5$

38) $g(x) = \frac{16}{x^2+25}$, $x = -5$

39) $h(x) = \begin{cases} x^2 & ,x < 0 \\ 3 & ,x \geq 0 \end{cases}$, $x = 0$

40) إذا كان **$f(x) = \begin{cases} x + 3 & ,x \neq 3 \\ 2 + \sqrt{k} & ,x = 3 \end{cases}$ ، متصلًا عند $x = 3$ ، فأجد قيمة الثابت k.**

أفران: يتحكم فني مختبر في درجة الحرارة T داخل فرن (القمين) لتزداد بمقدار 2°C لكل دقيقة بدءًا بالدرجة $0C$ خلال الدقائق الستين الأولى، وبعد ذلك يبدأ بخفض درجة حرارة الفرن بمقدار 3°C لكل دقيقة. ويمثل الاقتران الآتي العلاقة بين درجة T والزمن t بالدقائق:

$$T(t) = \begin{cases} 2t & ,t \leq 60 \\ k - 3t & ,t > 60 \end{cases}$$

41) أجد قيمة **k** التي تجعل الاقتران **T** متصلًا عند $t = 60$

42) أبين لماذا يجب أن يكون الاقتران **T** متصلًا عند $t = 60$

https://www.shutterstock.com/image-photo/vacuum-oven-on-white-background-226596490

معلومة: للمصمم المعلومة أسفل الصور بخط صغير مائل.

فرن القمين (Kiln) هو فرن على شكل حجرات معزولة توقد النار داخلها ويستعمل في عمليات التجفيف وبعض التجارب الكيميائية، واستعمل هذا النوع من الأفران منذ القدم لتحضير الفخار ولبنات البناء (الأجر).

مهارات التفكير العليا

43) تحد: أجد $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ بيانيًا و جبريًا.

44) تبرير: أجد قيمة m الثابت التي تجعل $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{mx+b}-3}{x}$ ، حيث m ينتمي للأعداد الحقيقية . أبرر إجابتي.

45) تبرير: أجد قيمة الثابت a التي تجعل $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{a}{x^2-1}\right)$ موجودة.

اختبار نهاية الوحدة

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1) ما التحويل الذي يتم على منحنى f(x) للحصول على منحنى الاقتران $g(x) = 2f(x)$؟

a) تضيق أفقي b) توسع رأسي c) إزاحة رأسية d) إزاحة أفقية

2) ما معادلة الاقتران g(x) الناتج من انعكاس منحنى f(x) حول المحور x، ثم إزاحته 3 وحدات لليمين؟

a) $g(x) = -f(x) +3$ b) $g(x) = -f(x+3)$

b) $g(x) = -f(x-3)$ d) $g(x) = f(3-x)$

3) ما إحداثيي صورة النقطة $A(-1, 3)$ بتوسع رأسي معامله 2 ، وإزاحة بمقدار وحدتين إلى اليسار؟

a) $A'(-2, 1)$ b) $A'(1, 6)$ c) $A'(-3, 6)$ d) $A'(-4, 2)$

4) ما باقي قسمة $f(x) = x^3 -2x^2 -5x +9$ على $(x+2)$؟

a) 3 b) −1 c) 9 d) 27

5) إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل $g(x) = 2x^3 + x^2 + px -6$، فما قيمة p ؟

a) −17 b) −3 c) 10 d) 19

6) إذا كان $x^3 + 6x^2 +11x + 6=(x^2 + Ax +38)(x - 3) + 120$ ، فإن A =

a) −39 b) 9 c) 11 d) 17

7) إذا كان $\frac{5x-12}{x^2-3x-4} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$ ، فما قيمة $A+B$ ؟

a) −12 b) −7 c) 3 d) 5

8) ما معامل $\frac{1}{x+2}$ عند تجزئة $\frac{15}{(x+2)(x^2+1)}$ إلى كسور جزئية؟

a) 3 b) 5 c) 6 d) 10

9) **أستعمل منحنى** $f(x) = \sqrt{x}$ **لأمثل** $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(x-6)} + 2$ **بيانيًا.**

أصف التحويلات التي تمت على f(x) للحصول على g(x) في كل مما يأتي:

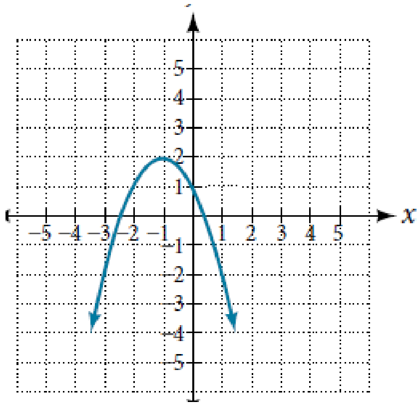
10) $g(x) = -2f(x+4)-5$

11) $g(x) = \frac{1}{2}f(-x) + 3$

12) أكتب معادلة $g(x)$ الناتج من إجراء التحويلات التالية على منحنى $f(x)= x^2$:

تضيق رأسي معامله $\frac{1}{4}$ وإزاحة لليسار مقدارها 4 وحدات وإزاحة إلى أعلى مقدارها 5 وحدات.

13) أكتب معادلة $g(x)$ الذي له التمثيل البياني التالي.



14) أبين أن $(2x+1)$ ليس أحد عوامل المقدار $3x^3 - 4x^2 +1$

أحلل كلًّا مما يأتي تحليلًا كاملًا:

15) $3x^3 -13x^2 - 10x + 21$

15) $8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x -6$

أحل كلًّا من المعادلات الآتية:

16) $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x -18 = 0$

17) $x^3 + 16x^2 - 3x = 5x^2 -18x + 27$

18) إذا كان $(x-d)$ أحد عوامل المقدار $2x^2 - dx+ (14 -d^2)x + 6$، فما قيمة العدد الصحيح d؟

19) عند قسمة كل من المقدارين $mx^3 + x^2 -10x -6$، وَ $2x^3 - 4x^2+ mx + 8$ على $(x-2)$، يكون لهما الباقي نفسه، فما قيمة m؟

أجزئ كلًا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

20) $\frac{6}{(x+3)(x+1)}$

21) $\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}$

22) $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$

23) يريد حداد أن يصنع حاوية على هيئة متوازي مستطيلات بحيث يزيد طولها 1 m على مثلي عرضها، ويزيد ارتفاعها 1 m على عرضها، ويكون حجمها $30\ m^3$، فكم مترًا مربعًا من الحديد يلزمه لصنعها؟

أجد كلا من النهايات التالية:

24) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+3}{x-5}$

25) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x^2+1}$

26) $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x}$

27) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-x^2-x-9}{x^2-9}$

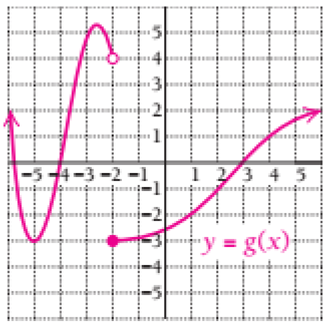
28) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2-4}$

أبين أن الاقترانات التالية متصلة أم غير متصلة عند قيمة *x* المبينة بجانب كل منها

20) $\lim_{x\to 3} f(x)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-4} & , x \geq 3 \\ x-6 & , x < 3 \end{cases}$

21) $\lim_{x\to 1} h(x)$ $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1} & , x > 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \\ \frac{x^2+2}{3x-1} & , x < 1 \end{cases}$

أجيب عن الأسئلة الآتية معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران *g(x)*:



22) $\lim_{x\to -3} g(x)$

32) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$

33) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$

34) $\lim_{x\to -2} g(x)$

35) هل الاقتران *g(x)* متصل عند $x = -2$ ؟ أبرر إجابتي

الوحدةُ 4

المشتقّات
The Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمل الاشتقاق في الكثير من التطبيقات الحياتية. ومن ذلك؛ إيجاد معدّلات التغيّر بالنسبة إلى الزمن، مثل السرعة والتكاثر والتغيّر في درجات الحرارة، إضافة إلى أهمّيته في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى، في الكثير من المواقف، مثل تحديد أعلى ربح وأقل تكلفة.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد المشتقّة الأولى لكثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ✓ حل مسائل حياتية عن القِيَم العظمى والصغرى.

سأَتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.
- ◄ استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة تركيب اقترانين.
- ◄ رسم منحنى كثيرات الحدود؛ باستعمال المشتقّة.
- ◄ حل مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

الدرسُ

1

اشتقاق اقتران القوّة

The derivative of power function

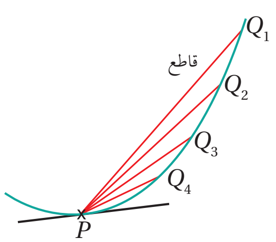
فكرةُ الدرسِ إيجاد مشتقّة اقترانات القوّة.

المصطلحاتُ التعريف العام للمشتقّة، العمودي على المماس.

مسألةُ اليومِ يُمثّل الاقتران $s(t) = 100 + 5t^2$ المسافة التي يقطعها قمر صناعي في أثناء سقوطه عائدًا إلى الأرض، بعد t ثانية من بدء حركته. أجد سرعة القمر الصناعي بعد 12 ثانية من سقوطه.

تعلّمتُ سابقًا أنّ المشتقّة هي طريقة لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة، وذلك بإيجاد ميل المماس عند تلك النقطة.

يُبيّن الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى اقتران عند النقطة P.



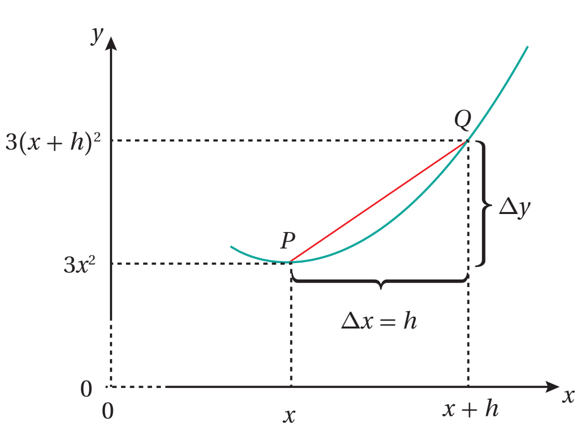
أُلاحظ أنّه في أثناء حركة النقطة Q_1 على منحنى الاقتران نحو النقطة P فإنّها تمر بالنقاط Q_2 وQ_3 و Q_4، وأُلاحظ كذلك أنّ ميل كلّ من القواطع PQ_2 و PQ_3 و PQ_4 يقترب شيئًا فشيئًا من ميل المماس عند النقطة P.

يُمكنني بالاعتماد على هذه الملاحظة، إيجاد مشتقّة اقتران قاعدته معلومة مثل $y = 3x^2$

فإذا علمتُ أنّ النقطة Q تبعد مسافة أفقية صغيرة مقدارها h عن النقطة $P(x, 3x^2)$، فإنّ إحداثيَي النقطة Q هما:

$$(x + h, 3(x + h)^2)$$

إذن: ميل القاطع PQ يساوي:



$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{(x+h) - x} \\ &= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h} \\ &= \frac{6hx + 3h^2}{h} \\ &= 6x + 3h \end{aligned}$$

أُفكّر

لماذا يجب علينا تجنّب أن تكون قيمة $h = 0$؟

وعندما تقترب Q من P؛ فإنّ h تصبح أصغر فأصغر، وعندها يُمكنني القول إنّ (h تقترب من الصفر) وتُكتب على الصورة $h \to 0$

ومنه: يكون ميل المماس عند النقطة P يساوي نهاية $6x + 3h$ عندما $h \to 0$

$$m = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

تُسمى $6x$ مشتقّة الاقتران $y=3x^2$ ، ويُرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$.

إذن: إذا كان $y = 3x^2$ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 6x$

تُسمّى هذه الطريقة في إيجاد مشتقّة اقتران عند نقطة **التعريف العام للمشتقّة** (the definition of the derivative).

رموز رياضية

يُرمز لمشتقّة $y = f(x)$ بالرموز $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, f'(x)$

مفهومٌ أساسيٌّ

التعريف العام للمشتقّة

بالكلمات: مشتقّة الاقتران $f(x)$ عند النقطة $P\ (x, f(x))$ تساوي نهاية ميل القاطع الذي يمر بالنقطة P عندما $h \to 0$، لكلّ x تنتمي لمجال الاقتران، وبشرط وجود النهاية.

بالرموز: $\frac{dy}{dx} = m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$

مثال 1

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عندما $x = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$ التعريف العام للمشتقّة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(3+h) - f(3))}{h}$$ بالتعويض: $x=3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$$ بالتعويض: $f(3+h)=(3+h)^2, f(3) = (3)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h}$$ بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h)$$ بالقسمة على h:

$$= 6$$ بالتعويض: $h = 0$

أتحقق من فهمي

a) أجد مشتقّة الاقتران $y = 3x - 2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = 2$.

b) أجد مشتقّة الاقتران $y = 4x^2 + 1$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة؛ عندما $x = -1$.

يُمكنني اســتعمال التعريف العام للمشتقّة؛ لإيجاد اقتران جديد يُمثّل مشتقّة الاقتران الأصلي عند أيّ من قِيَم مجاله.

مثال 2

أجد مشتقّة الاقتران $y = x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

التعريف العام للمشتقّة

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$

بالتعويض: $f(x+h) = (x+h)^3, f(x) = x^3$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h}$$

بإخراج h عاملًا مشتركًا من البسط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h}$$

بالقسمة على h

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2$$

بالتعويض: $h = 0$

$$= 3x^2$$

أتحقق من فهمي

a) أجد مشتقّة الاقتران $y = 8 - x^2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

b) أجد مشتقّة الاقتران $y = \frac{3}{x+2}, x \neq -2$ باستعمال التعريف العام للمشتقّة.

إنّ إيجاد المشــتقّة من التعريف ليس ســهلًا، ويتطلّب في كثير من الأحيان وقتًا كبيرًا؛ ولكن توجد بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد المشتقّة، ومنها مشتقّة اقتران القوّة.

مشتقّة اقتران القوّة

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: عند اشــتقاق الاقتران $y = x^n$؛ فإنّ قوّة x في المشــتقّة تكون أقل بواحد من قوّة x في الاقتران الأصلي، ويكون معامل x في المشــتقّة مســاويًا لقــوّة x في الاقتران الأصلي.

بالرموز: إذا كان $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = \frac{1}{x} \ , x \neq 0$

$= x^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية:

$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1}$ قاعدة مشتقّة القوّة:

$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب:

2 $y = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة القوّة:

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ بالتبسيط:

3 $y = \sqrt{x} \ , x \geq 0$

$= x^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ قاعدة مشتقّة القوّة

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ تعريف الأُسّ السالب

أتذكّر

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

أتحقق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = x^{-11} \ , x > 0$

b) $y = \frac{1}{x^5} \ , x > 0$

c) $y = \sqrt[3]{x^5}$

توجد أيضًا بعض القواعد التي تُسهّل عملية إيجاد مشتقّة الاقترانات، التي تحتوي على أكثر من حدّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

قواعد أخرى للمشتقّة

مشـــتقّة الثابت: إذا كان $y = c$ حيث c عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = 0$، أي إنّ مشـــتقّة الثابت تساوي صفرًا.

مشتقّة مضاعفات القوة: إذا كان $y = ax^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$

مشـــتقّة المجموع أو الفرق: إذا كان $y = u \pm v$، حيث u و v اقترانان قابلان للاشتقاق عند قِيَم x جميعها؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

مثال 4

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = x + 2\sqrt[3]{x}$

$= x + 2x^{\frac{3}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \times \frac{1}{3} x^{-\frac{3}{2}}$ قاعدتا مشتقتَي مضاعفات القوى، والمجموع

$= 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ تعريف الأُسّ السالب

2 $y = \frac{5 - 7x}{x}, x \neq 0$

$= \frac{5}{x} - \frac{7x}{x}$ بقسمة كلّ حد في البسط على x

$= 5x^{-1} - 7$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{-2} - 0$ قواعد مشتقّات الثابت، ومضاعفات القوّة، والفرق

$= -\frac{5}{x^2}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}, x > 0$

b) $y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}, x \neq 0$

تعرّفتُ سابقًا أنّ السرعة اللحظية، تساوي مشتقّة اقتران المسافة عند لحظة، ويُمكنني الآن استعمال قواعد المشتقّة التي تعرّفتُ إليها في هذا الدرس في إيجاد السرعة اللحظية.

مثال 5 : من الحياة

إذا كانت المسافة التي قطعها عدّاء في 5 ثوانٍ تُعطى بالاقتران $s = 10t^{\frac{3}{2}} - 3t^2, 0 \leq t \leq 5$، حيث s المسافة التي يقطعها العدّاء بالأمتار، وt الزمن بالثانية. أجد سرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

السرعة هي مشتقّة اقتران المسافة، والمطلوب إيجاد السرعة عندما $t = 3$

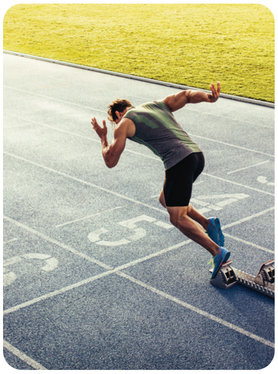
مشتقّة اقتران المسافة: $\frac{ds}{dt} = 10 \times \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}} - 3 \times 2t$

بالتبسيط: $= 10 \times \sqrt{t} - 6t$

بتعويض: $t = 3$: $= 15 \times \sqrt{3} - 6(3)$

باستعمال الآلة الحاسبة: ≈ 7.98

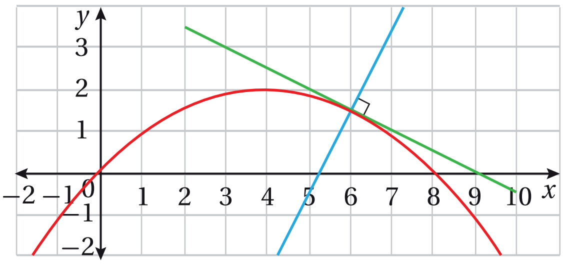
إذن: سرعة العدّاء بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته هي $7.98\ m/s$ تقريبًا.



من أنواع سباقات الجري الطويل سباق 400 m؛ إذ يجري العدّاء 400 m في الملعب في المسار نفسه، دورة واحدة بقوّة، وسرعة كبيرة.

أتحقق من فهمي

يُمثّل الاقتران $s = t^3 - \sqrt{t}$ المسافة التي يقطعها جسم متحرّك بالأمتار، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجسم بعد 4 ثوانٍ من بدء حركته.



يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$. أُلاحظ وجود مستقيمين يمرّان بالنقطة $(6, 1.5)$. يُمثّل المستقيم الأخضر مماسًّا للاقتران y عند النقطة $(6, 1.5)$، والمستقيم الأزرق عمودًا على المماس.

يُسمّى المستقيم الأزرق **العمودي على المماس** (the normal) عند النقطة $(6, 1.5)$.
ويُمكنني استعمال المشتقّة في إيجاد معادلة المماس والعمودي على المماس عند نقطة.

مثال 6

إذا كان الاقتران $y = x - \frac{1}{8}x^2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

مشتقّة اقتران المسافة: $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{4}x$

بتعويض: $x = 6$ $= 1 - \frac{1}{4}(x)$

بالتبسيط: $= -0.5$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض: $x_1 = 6$, $y_1 = 1.5$, $m = -0.5$ $y - 1.5 = -0.5(x - 6)$

بالتبسيط: $y = -0.5x + 4.5$

إذن: معادلة المماس هي: $y = -0.5x + 4.5$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$.

ميل العمودي على المماس يســاوي 2، ومنه: فإنّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(6, 1.5)$ هي:

$$y - 1.5 = 2(x - 6)$$

$$y = 2x - 13.5$$

أتذكّر

إذا تعامد مستقيمان؛ فإنّ حاصل ضــرب ميليهما يساوي -1

أتحقق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = 8x - \frac{1}{x}$؛ فأســتعمل المشتقّة لإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عن النقطة $(0.25, -2)$.

أتدرب وأحل المسائل

أجد مشتقّة كلّ من الاقترانات الآتية؛ باستعمال التعريف العام للمشتقّة عند النقطة المعطاة:

1) $y = x^2 + 3x + 1, x = 3$

2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, x = 2$

3) $y = (2x + 3)^2, x = -1$

أجد مشتقّة كلّ من الاقترانات الآتية؛ باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

4) $y = \frac{x - 3}{x^2}, x \neq 0$

5) $y = x(x + 2)$

6) $y = \frac{1}{x - 1}, x \neq 1$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

7) $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}, x > 0$

8) $y = x^8 - x^{-8}, x \neq 0$

9) $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}, x > 0$

10) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{x}, x > 0$

11) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3, x \neq 0$

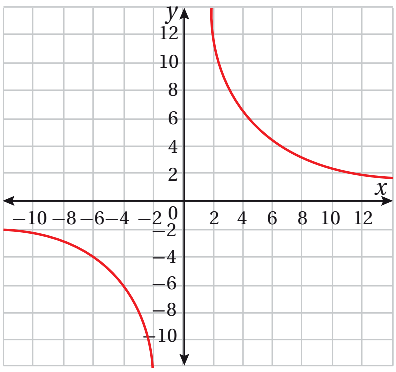
12) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

إذا كان الاقتران $y = x^2 - x$ ؛ فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

13) معادلة المماس عندما $x = 4$

14) معادلة العمودي عندما $x = 4$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{24}{x}, x \neq 0$.



15) أجد $f'(x)$.

16) أُبيّن أنّ ميل المماس سالب دائمًا عند أيّ نقطة.

17) أقلعت طائرة من دون طيار عموديًّا في رحلة مدتها 20 ثانية. فإذا كان ارتفاع الطائرة يُعطى بالاقتران $h = 2t^2 - t^3, 0 \leq t \leq 20$، حيث h ارتفاع الطائرة بالامتار، و t الزمن بالثواني؛ فأجد سرعة الطائرة بعد 10 ثوانٍ من إقلاعها.

معلومة

لا توجّه الطائرات من دون طيّار نفسها بنفسها بشكل كامل، بل تحتاج إلى طيّار يجلس في محطة توجيه على الأرض، يُحدّد لنظامها الآلي مسار الرحلة، ويتحكّم بها عبر الأقمار الصناعية.

18 أجد معادلة المماس للاقتران $y = (x-3)(x-5)$، عند نقطة تقاطعه مع محور x.

19 يُمثّل الاقتران $s = 10\sqrt{t} + t + \pi, 0 \leq t \leq 4$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جُسيم متحرّك، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجُسيم بعد ثانية واحدة من بدء حركته.

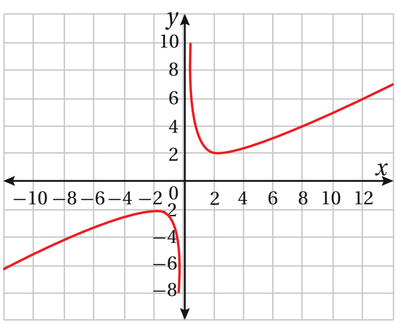
إذا كان منحنى الاقتران C يُعطى بالمعادلة $y = \sqrt[3]{8x}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

20 أجد مشتقّة الاقتران عند النقطة $P(125, 10)$.

21 إذا كان الاقتران D الاقتران العكسي للاقتران C، وكانت النقطة Q انعكاسًا للنقطة P؛ فأُبيّن أنّ مشتقّة الاقتران D عند النقطة Q تساوي مقلوب مشتقّة الاقتران C عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$



22 أُبيّن أنّ ميل المماس عند النقطتين $(2, 2)$ و $(-2, -2)$ يساوي صفرًا.

23 أثبت أنّه إذا كانت x عددًا كبيرًا جدًّا؛ فإنّ ميل المماس يساوي 0.5 تقريبًا.

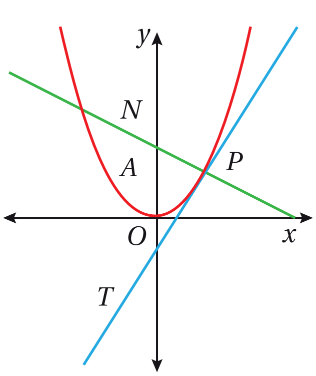
تبرير: إذا كان الاقتران $y = x^2 + 4x$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

24 أُثبت أنّ معادلة المماس عند النقطة $x = k$ هي $y-(2k+4)x - k^2 = 0$

25 أجد قيمة k التي يكون عندها معادلة العمودي على المماس، هي $4y + x = 0$

تحدّ: يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^2$، وكانت $P(a, a^2)$ نقطة تقع على منحناه. إذا علمت ما يأتي:

- يقطع مماس الاقتران عند النقطة P المحور y في النقطة T.
- يقطع العمودي على المماس عند النقطة P المحور y في النقطة N.
- تقع النقطة A المحور الإحداثي y، إذ إنّ AP يوازي المحور x.



26 أُثبت أنّ $\overline{OA} = \overline{OT}$

27 أُثبت أنّ $\overline{AN} = \frac{1}{2}$

الدرسُ 2

قاعدة السلسلة
the Chain Rule

فكرةُ الدرسِ استعمال قاعدة السلسلة؛ لإيجاد مشتقّة تركيب اقترانين.

المصطلحاتُ قاعدة السلسلة.

مسألةُ اليومِ يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مِساحة سطح الفقاعة؛ عندما يكون نصف قطرها 2.8 cm

تعلّمتُ في الدرس السابق، قاعدة اشتقاق اقتران القوّة على صورة $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، وسأتعلّم في هذا الدرس كيفية اشتقاق اقترانات القوّة على صورة $y = (ax+b)^n$

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقّة اقتران القوّة على صورة $y = (ax+b)^n$

إذا كان $y = (ax+b)^n$، حيث a و b و n أعداد حقيقية؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = n(ax+b)^{n-1} \times a$

مثال 1

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $y = (3x+1)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(3x+1)^4 \times 3$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= 15(3x+1)^4$ بالتبسيط

2 $y = \sqrt{1-7x}\,,\ x < \frac{1}{7}$

$= (1-7x)^{\frac{1}{2}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-7x)^{-\frac{1}{2}} \times -7$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{-7}{2\sqrt{1-7x}}$ تعريف الأُسّ السالب

3 $y = \frac{1}{8x+11}, x \neq -\frac{11}{8}$

$= (8x+11)^{-1}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$\frac{dy}{dx} = -1\,(8x+11)^{-2} \times 8$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{8}{8x+11}$ تعريف الأُسّ السالب

أتحقق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (4x+9)^7$ b) $y = \sqrt[3]{1-10x}$ c) $y = \frac{1}{2x-7}$

تعلّمتُ سابقًا مفهوم الاقتران المُركّب، ومن أمثلته $h(x) = (3x^3+2)^5$ الذي مُركّبتاه

$g(x) = 3x^3 + 2$ و $f(x) = x^5$، حيث $h(x) = (fog)(x)$

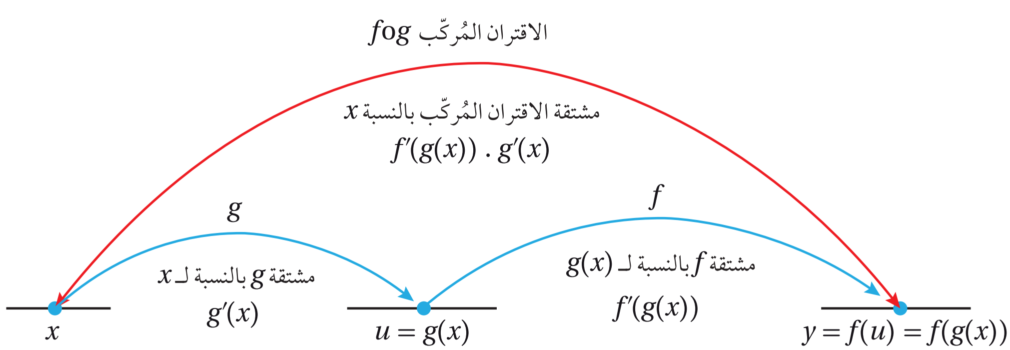
$$h(x) = \underbrace{(\overbrace{3x^3+2}^{\text{الداخلي}})^5}_{\text{الخارجي}}$$

وسأتعلّم في هذا الدرس كيفية اشتقاق هذا النوع من الاقترانات.

لغة الرياضيّات

يُسمّى $g(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركّب، ويُسمّى $f(x)$ اقترانًا خارجيًّا له.

إذا أردتُ اشتقاق الاقتران المُركّب $h(x) = (3x^3+2)^5$؛ فيُمكنني فكّ الأقواس، واشتقاق كلّ حدّ من حدود كثير الحدود الناتج، ولكنّ هذا ليس بالأمر السهل. يُمكن أيضًا إيجاد مشتقّة الاقتران المُركّب بطريقة أبسط؛ عن طريق اشتقاق الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقّة الاقتران الداخلي، وهذا يُسمّى: **قاعدة السلسلة** (chain rule).



أتذكّر

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين؛ فإنّ الاقتران الناتج من تركيب f, g هو:

$(fog)(x) = f(g(x))$

قاعدة السلسلة

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كان الاقتران f قابلًا للاشتقاق عند النقطة $u = g(x)$ والاقتران g قابلًا للاشتقاق عند x؛ فإنّ الاقتران المُركّب:

$(fog)(x) = f(g(x))$ قابل للاشتقاق عند x، ويُعطى بالقاعدة:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فإنّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

حيث تُحسب قيمة $\frac{dy}{du}$ عند $u = g(x)$

مثال 2

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي والاقتران الخارجي للاقتران المُركّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركّب $u = 5x^3 - 2x$ والاقتران الخارجي $y = u^4$

$\frac{dy}{du} = 15x^2 - 2$ مشتقّة الاقتران الداخلي

$\frac{dy}{du} = 4u^3$ مشتقّة الاقتران الخارجي

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركّب؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ قاعدة السلسلة

$= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$ بالتعويض $\frac{dy}{du} = 4u^3$ ، $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2$

$= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$ بتعويض $u = 5x^3 - 2x$

2 $y=\frac{1}{(1-4x^2)^3}$, $x \neq \mp\frac{1}{2}$

$$= (1-4x^2)^{-3}$$

الخطوة 1: أجد مشتقّة الاقتران الداخلي والاقتران الخارجي للاقتران المُركّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركّب $u = 1 - 4x^2$ والاقتران الخارجي $y = u^{-3}$

مشتقّة الاقتران الداخلي $\frac{dy}{dx} = -8x$

مشتقّة الاقتران الخارجي $\frac{dy}{du} = -3u^{-3}$

الخطوة 2: أجد مشتقّة الاقتران المُركّب؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بالتعويض $\frac{du}{dx} = -8x$ ، $\frac{dy}{du} = -3u^{-4}$ $= -3u^{-4} \times -8x$

بتعويض $u = 1 - 4x^2$ $= 24(1-4x^2)^{-4}$

تعريفُ الأُسِّ السالبِ $= \frac{24}{(1-4x^2)^4}$

أتحقق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (2x^4 - 8)^{\frac{5}{3}}$

b) $y = \frac{13}{(x^2-8)^7}$, $x \neq \mp\sqrt{8}$

تعلّمتُ في المثال السابق إحدى حالات قاعدة السلسلة، وفيها يكون الاقتران الخارجي اقتران قوّة على صورة $y = (g(x))^n$ ، وهذا يقود إلى التعميم الآتي:

مفهومٌ أساسيٌّ

قاعدة السلسلة لاقترانات القوة

إذا كان $y = (g(x))^n$، حيث n عدد حقيقي؛ فإنّ $\frac{dy}{dx} = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

مثال 3

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

1 $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 1}\ ,\ x = 1$

$= (2x^3 - 1)^{\frac{1}{5}}$ بكتابة الاقتران على الصورة الأُسّية

$f'(x) = \frac{1}{5}(2x^3 - 1)^{-\frac{4}{5}} \times (6x^2)$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3-1)^4}}$ تعريف الأُسّ السالب

$= \frac{6}{5}$ بتعويض $x = 1$

2 $y = (1 - x^3)^{\frac{4}{7}}\ , x = -2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{7}(1-x^3)^{-\frac{3}{7}} \times (-3x^2)$ قاعدة مشتقّة اقتران القوّة

$= \frac{-12x^2}{7\sqrt[7]{(1-x^3)^3}}$ تعريف الأُسّ السالب

$= \frac{6}{5}$ بتعويض $x = -2$

أتحقق من فهمي

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4 + 1}\ ,\ x = -1$

b) $y = (2x-5)^{\frac{2}{3}}\ , x = 0$

تعلّمتُ سابقًا أنّ المشتقّة هي نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$، وبما أنّ ميل القاطع هو معدّل تغيّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x؛ فإنّ المشتقّة هي معدّل تغيّر أيضًا، ولكن عند لحظة (نقطة) معيّنة. فعند إيجاد $\frac{dy}{dx}$ فهذا يعني إيجاد معدّل تغيّر y بالنسبة إلى x.

تتغيّر الأشياء من حولنا في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن، فمثلًا إذا كانت r كمّية معيّنة؛ فإنّ معدّل تغيّرها بالنسبة إلى الزمن t هو $\frac{dr}{dt}$، ولكن إذا افترضتُ أنّ r هو نصف قطر بالون كروي الشكل، وكان معدّل تغيّر حجم البالون بالنسبة إلى الزمن معلومًا؛ فكيف أجد معدل تغيّر نصف القطر بالنسبة إلى الزمن؟ بكلمات أُخرى، كيف أجد $\frac{dr}{dt}$ إذا علمتُ قيمة $\frac{dv}{dt}$؟ يُمكن الإجابة عن مثل هذا النوع من الأسئلة عن طريق قاعدة السلسلة.

مثال 4 : من الحياة

تسـرّب نفط من ناقلة بحرية، مكوّنًا بقعة دائرية الشـكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدل $50\ m^2/min$. أجد سـرعة تزايد نصف قطر بقعة النفـط، عندما يكون نصف قطرها $20\ m$.

إذا كان نصف قطر بقعة النفط الدائرية الشكل r مترًا، ومساحتها $A\ m^2$؛ فإنّ $\frac{dA}{dr} = 50$.

الخطوة 1 : أجد مشتقّة مِساحة الدائرة بالنسبة إلى نصف القطر.

قانون مِساحة الدائرة $A = \pi r^2$

مشتقّة المِساحة بالنسبة إلى نصف القطر $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

الخطوة 2 : أجد معدّل تغيّر نصف القطر بالنسبة إلى الزمن؛ باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \frac{dA}{dt}$

بالتعويض $\frac{dA}{dr} = 2\pi r, \frac{dA}{dr} = 50$ $2\pi r \times \frac{dr}{dt} = 50$

بقسمة طرفي المعادلة على $2\pi r$ $\frac{dr}{dt} = \frac{25}{\pi r}$

بتعويض $r = 20$ $= \frac{25}{\pi \times 20}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 0.398

إذن: معدّل تغيّر نصف القطر بالنسبة إلى الزمن $0.398\ m/min$ تقريبًا.

أتحقق من فهمي

يُنفخ بالون على شكل كرة؛ بحيث يزداد حجمه بمعدل $30\ cm^3/s$. أجد معدّل زيادة نصف قطر البالون؛ عندما يكون:

a) نصف القطر 4 cm

b) نصف القطر 8 cm

معلومة

تُلوّث السفن المجاري المائية والمحيطات بعدّة طرائق، مثل تسرّب النفط أو المواد الكيميائية من الناقلات، ما يُشكّل تهديدًا متزايدًا للحياة البحرية.

لغة الرياضيّات

تُعدّ كلمة السرعة من المصطلحات التي تدلّ على معدّل التغيّر بالنسبة إلى الزمن، فالسرعة معدّل تغيّر المسافة بالنسبة إلى الزمن.

أتعلّم

أستعمل الإشارة الموجبة للدلالة على معدّلات التغيّر المتزايدة، أمّا معدّلات التغيّر المتناقصة فأُعبّر عنها باستعمال الإشارة السالبة.

أتدرب وأحل المسائل

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = (4x+2)^2$

2 $y = (8-x)^{10}$

3 $g(x) = (1+3x^2)^5$

4 $y = (6x-5x^2)^{-8}$

5 $y = (\pi - x^2)^3$

6 $h(x) = \sqrt{6x-1}\ ,\ x > \frac{1}{6}$

7 $y = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 ,\ x > 0$

8 $h(x) = (\sqrt{x} + x)^{-2} ,\ x > 0$

أجد مشتقّة كلّ اقتران ممّا يأتي، عند النقطة المعطاة:

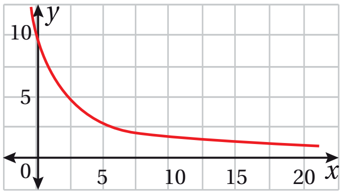
9 $h(x) = \sqrt{(2-x)^5} + 16 ,\ x = -4$

10 $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1} ,\ x = \frac{1}{4}$

11 $y = \frac{2}{(x^2-13)^{\frac{4}{7}}} ,\ x = 1$

12 $h(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}} ,\ x = \frac{1}{4}$

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $x > -2$, $y = \frac{20}{2+x}$



13 أجد ميل المماس عند النقطة $(2, 5)$.

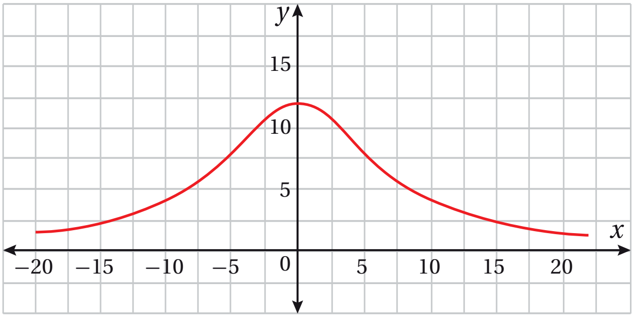
14 أجد أحداثيّات النقطة التي يكون عندها ميل المماس يساوي -0.2

إذا كان الاقتران $y = \sqrt{2x+5}$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

15 أُثبت أنّ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}$

16 أجد النقطة التي يقطع عندها مماس الاقتران عند النقطة $(2, 3)$ المحور x.

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = \frac{600}{x^2+50}$.



17 أجد $\frac{dy}{dx}$.

18 أجد معادلة المماس عند النقطة $(10, 4)$.

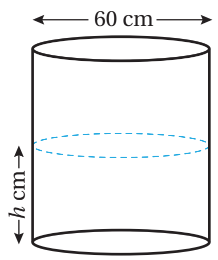
إذا كان الاقتران $f(x) = \sqrt{100-x^2} , x \in [-10, 10]$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

19 أجد مشتقّة الاقتران عند النقطة $P(-6, 8)$.

20 أُثبت أنّ المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة P عموديٌّ على مماس الاقتران عند النقطة P.

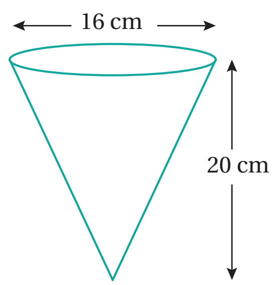
21 إذا كان الاقتران $y = (2x^2-3x+1)^5$؛ فأُثبت أنّ: $\frac{dy}{dt} = 5(4x-3)(4x-1)^4\,(x-1)^4$

22 إذا كان الاقتران $y = \sqrt{a + bx^2}$ حيث $a, b > 0$؛ فأُثبت أنّ: $\frac{x}{y} = c\,\frac{dy}{dx}$، حيث a, b, c ثوابت. أُبرّر إجابتي.



23 يُبيّن الشكل المجاور خزّان ماء أسطواني الشكل، إذا كانت كمّية الماء في الخزان تزداد بمعدل 0.4 L/s؛ فأجد معدّل تغيّر عمق الماء في الخزان h cm.

24 يزداد حجم مكعّب بمعدّل $50\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد معدّل زيادة مِساحة سطح المكعّب؛ عندما يكون طول ضلع المكعّب 5 cm

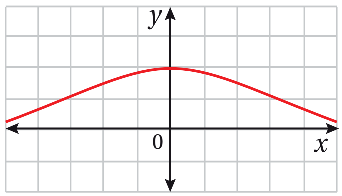


25 يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا مجوّفًا مقلوبًا، ارتفاعه 20 cm وقطر قاعدته 16 cm، يُملأ بالماء بمعدّل $25\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد معدل زيادة ارتفاع الماء؛ عندما يكون ارتفاعه 12 cm

26 إذا كان المتغيّران u و w مرتبطين بالعلاقة $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المتغيّر w تزداد مع الزمن t وفقًا للعلاقة $w = 0.05t + 8$؛ فأجد معدّل تغيّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$.

27 يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدّل ثابت مقداره $0.6\ \text{cm}^3/\text{s}$ محافظًا على شكله الكروي. أجد معدّل تناقص نصف قطر المنطاد، عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر 2.5 m

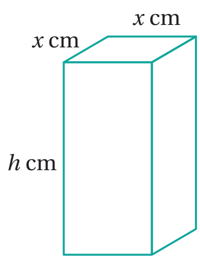
مهارات التفكير العليا



28 **تبرير: يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $a > 0$, $y = \frac{a}{1+x^2}$. أُبيّن أنّ مماس الاقتران عند $x = 1$ ومنحنى الاقتران يقطعان المحور y عند النقطة نفسها. أُبرّر إجابتي.**

29 تحدّ: أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$، عندما $x = -1$

30 تحدّ: أُثبت أنّ مماس الاقتران $y = (x^2 + x-2)^3 + 3$ عند النقطة $(1, 3)$، هو أيضًا مماس للاقتران عند نقطة أُخرى.



31 تحدّ: يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات قاعدته مربّعة الشكل وحجمه $1000\ \text{cm}^3$. إذا كان طول ضلع قاعدة المتوازي تزداد بمعدل 0.2 cm/s؛ فأجد معدل تغيّر الارتفاع عندما يصبح الشكل مكعّبًا.

الدرسُ 3

رسم منحنى الاقتران باستعمال المشتقّة

sketch a graph of the function using the derivative

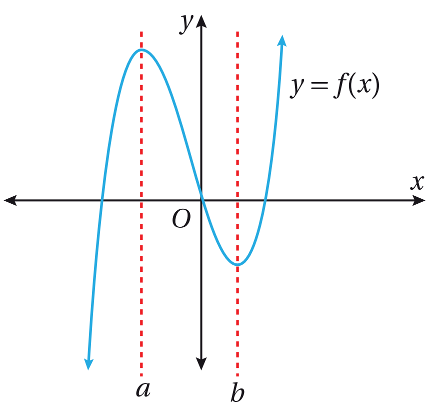
فكرةُ الدرسِ رسم منحنى كثيرات الحدود؛ باستعمال المشتقّة.

المصطلحاتُ متزايـد، متناقص، نقطة حرجة، قيمة حرجة، نقطة صغرى محلّية، نقطة عظمى محلّية، نقطة انعطاف أفقي، المشتقّة الثانية.

مسألةُ اليوم يُمثّل الاقتران $h(t) = -5t^2 + 10t$، ارتفاع الدلفين (بالمتر) فوق سطح الماء بعد t ثانية من ظهوره فوق سطح الماء.

- ما أقصى ارتفاع يصل إليه الدلفين؟
- أصف حركة الدلفين خارج الماء.
- هل يُمكنني تمثيل منحنى حركة الدلفين من دون إنشاء جدول؟

يُمثّل الشكل المجاور منحنى كثير الحدود $y = f(x)$



أُلاحظ أنّ قِيَم y تزداد في الفترة $-\infty < x < a$، والفتـرة $b < x < \infty$، ويرتفـع المنحنى من اليسار إلى اليمين في هاتين الفترتين؛ لذا، يكون الاقتـران $f(x)$ **متزايـدًا** (increasing) فـي هاتيـن الفترتين. أُلاحظ –أيضًـا– أنّ قِيَمَ y تقل فـي الفترة $a < x < b$، وينخفض منحنى الاقتـران من اليســار إلى اليميـن؛ لذا، يكون الاقتران $f(x)$ **متناقصًا** (decreasing) في هذه الفترة.

أتعلّم

تكتب فتـرات التزايد على صـورة الفتـرة المفتوحة (a, b)، لأن التزايـد يبدأ من يميـن النقطة a وينتهي عند يسار النقطة b، وكذلك الأمـر بالنسـبة لفتـرات التناقص.

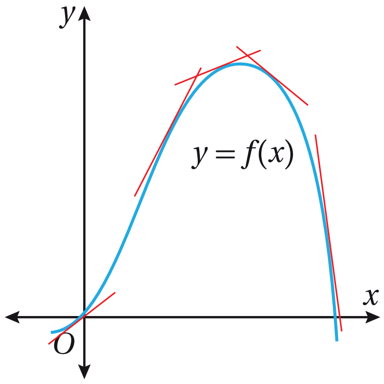
مفهومٌ أساسيٌّ **تزايد وتناقص الاقتران**

- يكون الاقتران f متناقصًا في الفترة I، إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة.
- يكون الاقتران f متزايدًا في الفترة I، إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكلّ $x_1 < x_2$ في الفترة.

تعلّمتُ سابقًا أنّ مشتقّة الاقتران عند نقطة، تساوي ميل المماس عند تلك النقطة. ولكن، كيف يُمكن استعمال المشتقّة في دراسة تزايد الاقتران وتناقصه على مجاله؟

يُبيّن الشكل المجاور بعض مماسات منحنى الاقتران $f(x)$. ألاحظ أنّ:

- المماسات ذات الميل الموجب، مرتبطة بالجزء المتزايد من منحنى الاقتران.
- المماسات ذات الميل السالب، مرتبطة بالجزء المتناقص من منحنى الاقتران.



وهذا يقود إلى الاستفادة من إشارة المشتقّة، في تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران.

نظرية

- إذا كان $f'(x) > 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I؛ فإنّ f يكون متزايدًا على الفترة I.
- إذا كان $f'(x) < 0$ لقِيَم x جميعها في الفترة I؛ فإنّ f يكون متناقصًا على الفترة I.

مثال 1

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 2x - 3$

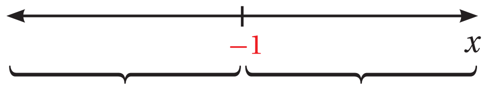
الخطوة 1: أجد مشتقّة مِساحة الدائرة بالنسبة إلى نصف القطر.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 2x + 2$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$2x + 2 = 0$
بجمع -2 للطرفين	$2x = -2$
بقسمة الطرفين على 2	$x = -1$

إذن: صفر المشتقّة $x = -1$

الخطوة 2 : أبحث في إشارة المشتقّة.

يكون الاقتران متزايدًا؛ عندما تكون $f'(x) > 0$، ومتناقصًا عندما $f'(x) < 0$.



	$x < -1$	$x > -1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
سلوك الاقتران	متناقص ▼	متزايد ▲

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty,-1)$، ومتزايد في الفترة $(-1,\infty)$.

2 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x$

الخطوة 1 : أجد مشتقّة الاقتران، ثم أجد أصفار المشتقّة.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 36$ مشتقّة الاقتران

$-6x^2 + 6x + 36 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$-6(x^2 - x - 6) = 0$ بإخراج -6 عاملًا مشتركًا

$x^2 - x - 6 = 0$ بقسمة الطرفين على -6

$(x + 2)(x - 3) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

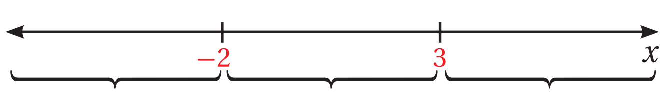
$(x + 2) = 0, (x - 3) = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$x = -2, x = 3$ بحلّ المعادلتين الناتجتين

إذن: أصفار المشتقّة $x = -2, x = 3$

الخطوة 2 : أبحث في إشارة المشتقّة.

يكون الاقتران متزايدًا عندما تكون $f'(x) > 0$، ومتناقصًا عندما $f'(x)<0$.



	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$ $(-)$	$f'(0) > 0$ $(+)$	$f'(4) > 0$ $(-)$
سلوك الاقتران	متناقص ▼	متزايد ▲	متناقص ▼

إذن: $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(3,\infty)$، ومتزايد في الفترة $(-2, 3)$.

أتذكّر

إذا كان $a \times b = 0$، فإنّه: إمّا $a = 0$ وإمّا $b = 0$ وإمّا كلاهما يساوي صفرًا.

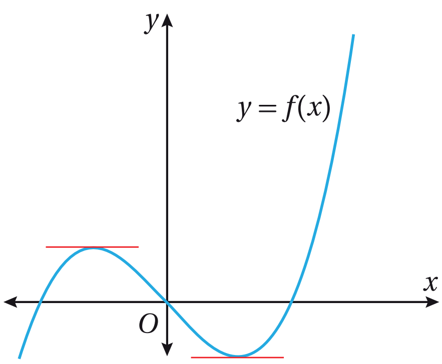
أتحقق من فهمي

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

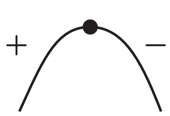
يُمثّل الشكل المجاور منحنى كثير الحدود $y = f(x)$.



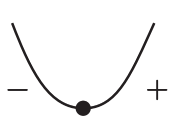
تُسمّى النقطة التي يُمكنني رسم مماس أفقي عندها **نقطة حرجة** (critical point)، وهذا يعني أنّ مشتقّة الاقتران عندها تساوي صفرًا $(f'(x) = 0)$، ويُسمّى الإحداثي x في النقطة الحرجة **القيمة الحرجة** (critical value).

يُمكن استعمال المشتقّة؛ لتصنيف النقط الحرجة لكثيرات الحدود:

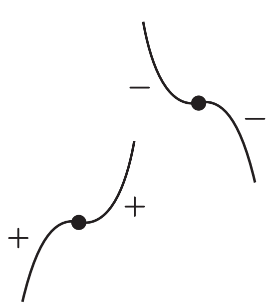
- **نقطة عظمى محلّية** (local maximum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متزايدًا وعن يمينها متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تتغيّر من الموجب إلى السالب.



- **نقطة صغرى محلّية** (local minimum point): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران عن يسارها متناقصًا وعن يمينها متزايدًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تتغيّر من السالب إلى الموجب.



- **نقطة انعطاف أفقي** (horizontal point of inflection): النقطة الحرجة التي يكون منحنى الاقتران حولها إمّا متزايدًا وإمّا متناقصًا، ما يعني أنّ إشارة المشتقّة عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها، تكون إمّا موجبة وإمّا سالبة.



أتعلّم

- يُسمّى الاقتران $f(x) = x^3$ اقترانًا متزايدًا؛ لأنّ $f'(x) \geq 0$ لقِيَم x جميعها.
- يُسمّى الاقتران $f(x) = 10 - x^3$ اقترانًا متناقصًا؛ لأنّ $f'(x) \leq 0$ لقِيَم x جميعها.

أتعلّم

- القيمة العظمى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة العظمى المحلّية، وتُسمى ذلك لأنّها أكبر من القِيَم المجاورة لها.
- القيمة الصغرى المحلّية هي الإحداثي y للنقطة الصغرى المحلّية، وتُسمّى ذلك لأنّها أصغر من القِيَم المجاورة لها.

مثال 2

إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - 6x - 2$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

1 النقط الحرجة للاقتران f.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^2 + 10x - 6$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^2 + 10x - 6 = 0$
بإخراج 2 عاملًا مشتركًا	$2(2x^2 + 5x - 3) = 0$
بالقسمة على 2	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(2x - 1)(x + 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$(2x-1) = 0, (x + 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{1}{2}, x = -3$

عندما $x = \frac{1}{2}$ فإنّ $y = \frac{-43}{12}$.

عندما $x = -3$ فإنّ $y = 25$.

إذن: النقط الحرجة هي: $(\frac{1}{2}, \frac{-43}{12})$ و $(-3, 25)$.

2 أُصنّف النقط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.

	$x < -3$	$-3 < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$ $(+)$	$f'(0) < 0$ $(-)$	$f'(4) > 0$ $(+)$
سلوك الاقتران	متزايد ▲	متناقص ▼	متزايد ▲

إذن: النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-43}{12})$ صغرى محلّية، والنقطة $(-3, 25)$ عظمى محلّية.

أتعلّم

النقطة الصغرى المحلّية ليست أقل نقطة على المنحنى، وإنّما هي فقط أقل من النقط التي حولها، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقطة العظمى المحلّية؛ فهي ليست أعلى نقطة على المنحنى، إنّما هي فقط أعلى من النقط التي حولها.

أتحقق من فهمي

إذا كان الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ ممّا يأتي:

a) النقط الحرجة للاقتران f.

b) أُصنّف النقط الحرجة إلى: عظمى محلّية، أو صغرى محلّية، أو انعطاف أفقي.

تعلّمتُ سابقًا أنّ اقتران المشتقّة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنّه يُمكنني اشتقاقه.

يُسمّى الاقتران الذي نحصل عليه من اشتقاق الاقتران مرّتين **المشتقّة الثانية** (second derivative) أو اقتران المشتقّة الثانية، ويُرمز له بالرمز $f''(x)$. على سبيل المثال، إذا كان $f(x) = x^4$؛ فإنّ مشتقّة الاقتران هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقّة الثانية للاقتران هي:

$$f''(x) = 12x^2$$

رموز رياضية

تُستعمل الرموز $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, y''$ للتعبير عن المشتقّة الثانية.

تُعدّ المشتقّة الثانية للاقتران طريقة أكثر فاعلية في تحديد إذا كانت النقطة الحرجة عظمى محلّية أم صغرى محلّية وهو ما يسمى **باختبار المشتقة الثانية** (the second−derivative test)، فإذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة موجبة؛ فإنّ النقطة الحرجة هي صغرى محلّية، أمّا إذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة سالبة؛ فإنّ النقطة الحرجة هي عظمى محلّية.

أتعلّم

إذا كانت المشتقّة الثانية عند القيمة الحرجة تساوي صفرًا؛ عندها يفشل اختبار المشتقة الثانية.

مثال 3

إذا كان الاقتران $y = 1000 + 300x - x^3$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1 النقط الحرجة للاقتران.

مشتقّة الاقتران	$\frac{dy}{dx} = 300 - 3x^2$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$300 - 3x^2 = 0$
بإخراج 3 عاملًا مشتركًا	$3(100 - x^2) = 0$
بقسمة الطرفين على 3	$100 - x^2 = 0$
بإضافة -100 للطرفين	$-x^2 = -100$
بقسمة الطرفين على -1	$x^2 = 100$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = \mp 10$

عندما $x = 10$ فإنّ $y = 3000$.

عندما $x = -10$ فإنّ $y = -1000$.

إذن: النقط الحرجة هي: $(10, 3000)$ و $(-10, -1000)$.

2 أُصنّف النقط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.

- أجد المشتقّة الثانية للاقتران. $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$
- أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية.

- القيمة الحرجة الأولى: إذا كانت $x = 10$ فإنّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -60 < 0$$

إذن: $(10, 3000)$ نقطة عظمى محلّية.

- القيمة الحرجة الثانية: إذا كانت $x = -10$ فإنّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60 > 0$$

إذن: $(-10, -1000)$ نقطة صغرى محلّية.

أتحقق من فهمي

إذا كان الاقتران $y = x^3 - 3x^2 + 1$؛ فأُجيب عمّا يأتي:

a) أجد النقط الحرجة للاقتران.

b) أُصنّف النقط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.

يُساعد إيجاد النقاط الحرجة للاقتران وتحديد نوعها، عند تمثيل كثيرات الحدود بيانيًا؛ فهو يُعطي تصوّرًا لشكل منحنى الاقتران.

أتعلّم

في بعض الاقترانات يُفضّل تحديد مقطع المحور x ومقطع المحور y للحصول على تمثيل أكثر دقّة للاقتران.

مثال 4

أمثل الاقتران $f(x) = x^4 - 2x^3$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أجد النقط الحرجة للاقتران.

مشتقّة الاقتران	$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$4x^3 - 6x^2 = 0$
بإخراج $2x^2$ عاملًا مشتركًا	$2x^2(2x - 3) = 0$
خاصّية الضرب الصفري	$2x^2 = 0, (2x - 3) = 0$
بحلّ المعادلتين الناتجتين	$x = \frac{3}{2}, x = 0$

عندما $x = \frac{3}{2}$ فإنّ $f(\frac{3}{2}) = \frac{-27}{16}$.

عندما $x = 0$ فإنّ $f(0) = 0$.

إذن: النقط الحرجة هي: $(0, 0)$, $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$.

الخطوة 2 : أُصنّف النقاط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.

- أجد المشتقّة الثانية للاقتران. $f''(x) = 12x^2 - 12x$

- أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية.

  - القيمة الحرجة الأولى: إذا كانت $x = \frac{3}{2}$ فإنّ:

$$f''(\frac{3}{2}) = 9 > 0$$

إذن: $(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16})$ نقطة صغرى محلّية.

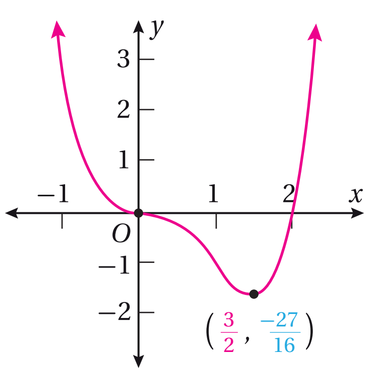
  - القيمة الحرجة الثانية: إذا كانت $x = 0$ فإنّ:

$$f''(0) = 0$$

بما أنّ $f''(0) = 0$، فإنّه لا يُمكنني تحديد نوع النقطة الحرجة باستعمال المشتقّة الثانية؛ لذا، ألجأ إلى دراسة إشارة المشتقّة الأولى حول النقطة لتحديد نوعها.

إذن: $(0, 0)$ نقطة انعطاف أفقي.

الخطوة 3 : أُحدّد النقاط الحرجة على المستوى الإحداثي، وأصل بينها مراعيًا في ذلك طبيعة كل نقطة وسلوك الاقتران حولها.



أتحقق من فهمي

أُمثّل الاقتران $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بيانيًّا.

أتذكّر

يكون منحنى الاقتران متناقصًا على يسار القيمة الصغرى، ومتزايدًا على يمينها.

أُفكّر

لماذا رُسِم منحنى الاقتران متناقصًا حول نقطة الانعطاف $(0, 0)$؟

أتعلّم

يُمكن اختيار نقط أخرى لتمثيل الاقتران إضافة إلى النقط الحرجة؛ للحصول على تمثيل بياني أكثر دقّة للاقتران.

يُمكن اســتعمال التمثيل البياني لكثيرات الحدود في الكثير من المواقف الحياتية، منها رسم منحنى الأفعوانيات في مدن الألعاب.

مثال 5 : من الحياة

يُمثّل الاقتران $f(t) = t^3 - 3t^2 + 10, t \geq 0$ ارتفاع أفعوانية بالأمتار؛ حيث t الزمن بالثواني. أُمثّل بيانيًّا مسار الأفعوانية في الثواني الأربع الأولى من حركتها.

بما أنّ منحنى الاقتران $f(t)$ يُمثّل مسار الأفعوانية؛ إذن: أُمثّل الاقتران f في الفترة $0 \leq t \leq 4$.

الخطوة 1 : أجد إحداثيّات نقطتَي طرفَي الفترة:

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 10 = 10$$
$$f(4) = 4^3 - 3(4)^2 + 10 = 26$$

إذن: نقطتا طرفَي الفترة $(0, 10)$ ، $(4, 26)$.

الخطوة 2 : أجد النقط الحرجة للاقتران في الفترة $0 < t < 4$

$f'(t) = 3t^2 - 6t$ مشتقّة الاقتران

$3t^2 - 6t = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$3t(t-2) = 0$ بإخراج $3t$ عاملًا مشتركًا

$3t = 0, (t-2) = 0$ خاصّية الضرب الصفري

$t = 0 , t = 2$ بحلّ المعادلتين الناتجتين

عندما $t = 0$ فإنّ $f(0) = 10$.

عندما $t = 2$ فإنّ $f(2) = 6$.

إذن: النقط الحرجة هي: $(2, 6)$، $(0, 10)$.

الخطوة 3 : أُصنّف النقط الحرجة إلى صغرى محلّية أو عظمى محلّية؛ باستعمال المشتقّة الثانية.

- أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$f''(x) = 6t - 6$$

- أُعوّض القِيَم الحرجة في المشتقّة الثانية.

- القيمة الحرجة الأولى: لا يُمكنني تصنيف النقطة الحرجة $(0, 10)$ عظمى محلّية أو صغرى محلّية.

إنّ المسار الذي تسلكه العربة الدوارة في الأفعوانية، قد يرتفع لدرجة كافية لتقلب راكبيها رأسًا على عقب، ولكنّ قوة التسارع التي تدفع العربة إلى الأمام تتغلّب على قوة الجاذبية. ومن ثمّ، تُكمل مسارها.

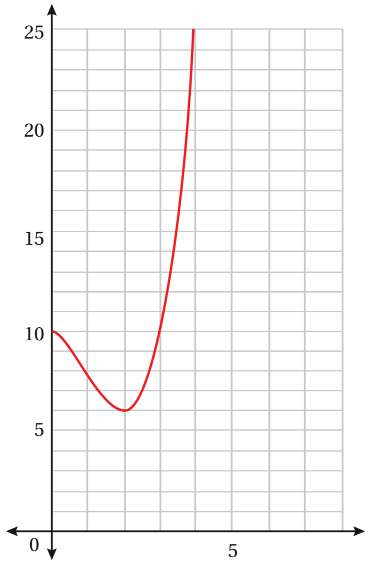
أفكّر

لماذا لا يُمكن تحديد نوع النقطة الحرجة $(0, 10)$؟

- القيمة الحرجة الثانية: إذا كانت $x = 2$ فإنّ: $f''(2) = 6 > 0$

إذن: $(2, 6)$ نقطة صغرى محلّية.

الخطوة 4: أُحدّد النقاط الحرجة على المستوى الإحداثي، وأصل بينها مراعيًّا في ذلك طبيعة كلّ نقطة وسلوك الاقتران حولها، إضافة إلى تحديد النقطتين $(0, 0), (4, 26)$.



أتحقق من فهمي

يُمثّل الاقتران $f(t) = 0.001t^3 - 0.12t^2 + 3.6t + 10, t \geq 0$، ارتفاع الأفعوانية بالأمتار، حيث t الزمن بالثواني. أُمثّل بيانيًّا مسار الأفعوانية في الفترة $0 \leq t \leq 70$.

أتعلّم

أقلّ ارتفاع للأفعوانية في الفترة المعطاة 6 m

أُفكّر

ماذا تُمثّل كلّ من النقطتين $(0, 0), (4, 26)$ بالنسبة إلى التمثيل البياني؟

أتدرب وأحل المسائل

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$

2) $f(x) = (x^2 + 4)^3$

3) $f(x) = (x-2)^9$

4) $y = x^4 - 8x^2$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة:

5) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

6) $y = -(x-2)^3 + 1$

7) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x$

8) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة الثانية:

9) $y = x^4 - 2x^2$

10) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

11) $y = x^2 (x-4)$

12) $f(x) = x^5 - 5x^3$

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

13 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

14 $y = x^2 - 12x - 20$

15 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$

16 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8$

17 إذا كانت مشتقّة الاقتران f تُعطى بالاقتران $f'(x) = (x-1)^2 (x-3)$؛ فأجد قِيَم x التي يكون عندها نقط حرجة للاقتران f، ثمّ أُحدّد نوعها.

إذا كان الاقتران $y = x(6-x^2)$؛ فأُجيب عما يأتي:

18 أُمثّل منحنى كلّ من الاقترانات: y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

19 أصف العلاقة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة، موظّفًا في ذلك مفهوم المشتقّة.

يُمثّل الاقتران $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t ,\ t > 0$، المسافة (بالمتر) التي يقطعها فهد بعد t ثانية من البدء بمطاردة فريسته.

20 أجد أقصى سرعة للفهد بعد 8 ثوانٍ من بدء حركته.

21 أُمثّل منحنى الاقتران s بيانيًّا.

لوحظ أنّ عدد الضفادع في بحيرة ينمو وفق الاقتران $P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$، حيث P عدد الضفادع، وt الزمن بالأشهر منذ بدء ملاحظة الضفادع في البحيرة.

22 أجد أكبر عدد يُمكن أن تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

23 بعد كم شهرًا ستختفي الضفادع من البحيرة؟

24 أُمثّل الاقتران P بيانيًّا.

معلومة

يُمكن لأنثى الضفدع وضع عدد يتراوح بين بيضتين إلى 50,000 بيضة في المرة الواحدة، حسب نوعها.

أقلعت طائرة من دون طيّار عموديًّا من الأرض، ثم عادت لتهبط رأسيًّا على الأرض في رحلة مدّتها 20 ثانية. فإذا كان الاقتران $h(t) = 0.2t^2 - 0.01t^3,\ 0 \leq t \leq 20$ يُمثّل ارتفاع الطائرة بعد t ثانية من انطلاقها؛ فأُجيب عمّا يأتي:

25 أُمثّل الاقتران $h(t)$ بيانيًّا.

26 أُثبت أنّ الزمن اللازم لصعود الطائرة، يساوي مثلَي الزمن اللازم لهبوطها.

27 إذا كان الاقتـــران $y = ax^2 + bx + c$، يمرّ بالنقطتيـــن $(0, -48)$ ، و $(6, 0)$، وله قيمة عظمى عندما $x = 7$؛ فأجد قِيَم الثوابت a وb وc.

مهارات التفكير العليا

معلومة

تُعـدّ أفضل زاوية للوجـه الأمامي لمضرب كرة التنس 50 درجةً تقريبًا بالنسبة إلى سطح الأرض، ما يجعل ضرب الكرة أسهل.

تبريـر: يُمثّل الاقتـــران $y = 23t - 5t^2 \ , 0 \leq t \leq 4$ ارتفـــاع كرة مضرب (بالمتر) بعد t ثانية من ارتطامها بالمضرب.

28 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

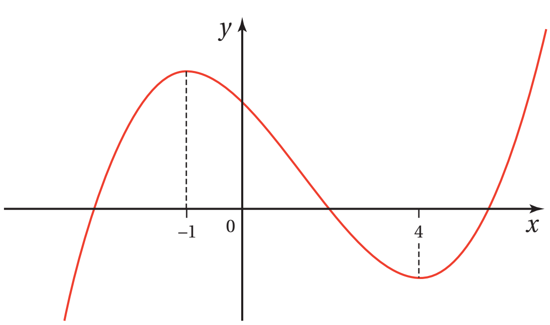
29 إذا كانت مقاومة الهواء قد أُهملت في الاقتران y؛ فكيف من المحتمل أن تؤثّر مقاومة الهواء في أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ أُبرّر إجابتي.

تحدّ: إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + b$، حيث a و b ثوابت؛ فأُجيب عمّا يأتي:

30 أُثبت أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

31 أُثبتّ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a > 0$.

32 **تحدّ:** يُمثّل الشـــكل المجاور منحنـــى الاقتران $f(x)$.
أُمثل بيانيًّا منحنى الاقتران $f'(x)$.



33 **تحـــدّ:** إذا كان الاقتـــران $y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$ ، حيـــث $p > 0$؛ فأجد مجموعة قِيَـــم p التي يكون عندها للاقتران نقطتان حرجتان.

الدرسُ 4

تطبيقات عملية على الاشتقاق

Applications of differentiation

فكرةُ الدرسِ حلّ مسائل وتطبيقات حياتية على المشتقّات.

مسألةُ اليوم وجد باحث زراعي أنّ عدد حبّات البرتقال التي تنتجها كلّ شجرة في أحد بساتين غور الأردن، يعتمد على كثافة الأشجار المزروعة. إذا علمتُ أنّ عدد الأشجار في البستان n، وأنّ كلّ شجرة تنتج $900-9n$ برتقالة؛ فأجد أكبر عدد من أشجار البرتقال التي يُمكن زراعتها في البستان للحصول على أكبر عائد.

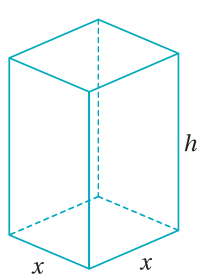
تعلّمتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد النقاط الحرجة للاقتران، وتصنيفها عن طريق المشتقّة. وأستطيع الآن توظيف هذه المفاهيم في تطبيقات حياتية متنوّعة، مثل: تحديد أكبر ربح ممكن، أو إيجاد أقل كمّية من المواد اللازمة لصنع الأشياء. ويُمكن تلخيص الإجراءات العامّة التي نحتاج إليها لحلّ مسائل عملية تتطلّب إيجاد قيمة عظمى أو صغرى في الخطوات الآتية:

- أرسم مخطّطًا يُمثّل المسألة.
- أكتب اقترانًا يُمثّل الكمّية المراد تصغيرها أو تكبيرها، بحيث يربط الاقتران المتغيّرات ببعضها.
- أستعمل الشروط الواردة في المسألة لكتابة الاقتران بدلالة متغيّر واحد.
- أجد القيمة الحرجة باستعمال الاشتقاق، وأُحدّد نوعها.
- أجد المطلوب من المسألة.

مثال 1

يُصمّم مهندس سلّة بلاستيكية على شكل متوازي مستطيلات، قاعدتها مربّعة الشكل ومفتوحة من الأعلى وسماكتها قليلة. إذا كان حجم السلّة $40000\ cm^3$؛ فأجد أبعادها التي تجعل كمّية البلاستيك المستعملة في تصنيعها أقلّ ما يُمكن.

الخطوة 1: أرسم مخطّطًا لمتوازي أضلاع قاعدته مربعة الشكل، ثم أكتب اقترانًا يُمثّل المِساحة الكلّية لسطح السلّة.



أفرض أنّ طول ضلع القاعدة المربّعة x وارتفاع السلّة h، إذن: الاقتران الذي يُمثّل المِساحة الكلّية لسطح السلّة مستثنيًا مِساحة القاعدة العلوية:

$$A = x^2 + 4xh$$

الخطوة 2 : أكتب الاقتران الذي يُمثّل المِساحة الكلّية؛ بدلالة متغيّر واحد.

قانون حجم متوازي المستطيلات	$V = x^2 h$
بتعويض $V = 40000$	$40000 = x^2 h$
بكتابة h موضوعًا للقانون	$h = \frac{40000}{x^2}$

إذن: العلاقة بين الارتفاع وطول ضلع القاعدة:

$$h = \frac{40000}{x^2}$$

ولكتابة الاقتران الذي يُمثّل مِساحة السطح الكلّية بدلالة x، أُعوّض $h = \frac{40000}{x^2}$ بالاقتران.

اقتران المِساحة السطحية للسلّة	$A = x^2 + 4xh$
بتعويض $h = \frac{40000}{x^2}$	$= x^2 + 4x\left(\frac{40000}{x^2}\right)$
بالتبسيط	$= x^2 + \frac{160000}{x}$

إذن: الاقتران الذي يُمثّل مِساحة السطح الكلّية بدلالة المتغيّر x :

$$A = x^2 + \frac{160000}{x}$$

الخطوة 3 : أشتقّ الاقتران، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

مشتقّة اقتران المِساحة	$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{160000}{x^2}$
بمساواة المشتقّة بالصفر	$2x - \frac{160000}{x^2} = 0$
بضرب طرفَي المعادلة بـ x^2	$2x^3 = 160000$
بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين	$x = \sqrt[3]{80000}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x = 43.1$

إذن: القيمة الحرجة لاقتران المِساحة $x = 43.1$. ولتحديد نوعها؛ أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{320000}{x^3}$$

أُفكّر

ما علاقة المِساحة الكلّية لسطح السلة، بكمّية المواد المستعملة في تصنيعها؟

أتعلّم

يُمكن كتابة معادلة المِساحة الكلّية للسطحِ؛ بدلالة المتغيّر h أيضًا.

وبما أنّ المشــتقّة الثانية لاقتران المِســاحة موجبة لِقِيَم x جميعها حيــث $x > 0$، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة صغرى.

الخطوة 4 : أجد المطلوب من المسألة.

أُعوّض قيمة x في الارتفاع وطول ضلع القاعدة:

$$h = \frac{40000}{x^2}$$ الارتفاع وطول ضلع القاعدة

$$= \frac{40000}{(43.1)^2}$$ بتعويض $x = 43.1$

$$= 21.5$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: أقل كمّية من البلاســتك يُمكن اســتعمالها في تصنيع الســلّة، تنتج عندما يكون طول ضلع قاعدتها 43.1 cm، وارتفاعها 21.5 cm

أتحقق من فهمي

يُريد مصنع تصميم علب كرتونية؛ لتغليف البضائع على شــكل متوازي مســتطيلات قاعدتها مربّعة الشكل وحجمها $1000\ cm^3$. أجد أبعاد العلبة بحيث تكون كمّية المواد المستعملة في صنعها أقلّ ما يُمكن.

من التطبيقات الحياتية على الاشــتقاق، تحديد الســرعة الأمثل للســيارة والأكثر اقتصادًا في الوقود في أثناء السفر.

مثال 2

تُمثّل المعادلة $R = 30 + \frac{x^2}{14400}$ تكلفة تشــغيل ســيّارة بالدينار في الساعة، حيث x سرعة السيارة km/h.

1 **أجد الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة السيارة مسافة 200 km بدلالة x.**

أجد الزمن اللازم لقطع مسافة 200 km بدلالة x.

$$t = \frac{d}{v}$$ قانون السرعة

$$= \frac{200}{x}$$ بتعويض $d = 200,\ v = x$

أُفكّر

كيـف حُكِـم علـى أنّ المشــتقّة الثانية لاقتران المِســاحة موجبة عندما $x > 0$، مــن دون اللجوء إلــى التعويــض لتحديد الإشارة؟

تُفضّل شركات الشحن تغليـف المنتجـات في صناديـق علـى شـكل متوازي مستطيلات؛ لأنّ تكلفتها منخفضة، وتأخذ مِساحة أقلّ في التخزين.

أُفكّر

t : time, d : distance, v : velocity

أفرض أنّ C التكلفة الكلّية للرحلة؛ لذا، فإنّ $C = R \times t$، ثمّ أُعوّض $t = \frac{200}{x}$ في الاقتران.

معادلة التكلفة الكلّية للرحلة $C = R \times t$

بتعويض $t = \frac{200}{x}$, $R = 30 + \frac{x^2}{14400}$: $= (30 + \frac{x^2}{14400}) \times \frac{200}{x}$

بالتبسيط $= \frac{6000}{x} + \frac{x}{72}$

إذن: الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة السيّارة مسافة 200 km بدلالة x:

$$C = \frac{6000}{x} + \frac{x}{72}$$

2 أجد سرعة السيّارة الأكثر اقتصادًا للوقود في أثناء الرحلة.

أشتقّ الاقتران، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

مشتقّة اقتران التكلفة $\frac{dC}{dx} = \frac{-6000}{x^2} + \frac{x}{36}$

بمساواة المشتقّة بالصفر $\frac{-6000}{x^2} + \frac{x}{36} = 0$

بإعادة ترتيب المعادلة $\frac{6000}{x^2} = \frac{x}{36}$

خاصّية الضرب التبادلي $x^3 = 216000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = \sqrt[3]{216000}$

بالتبسيط $x = 60$

إذن: القيمة الحرجة لاقتران التكلفة $x = 60$ ، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{12000}{x^3} + \frac{1}{36}$$

وبما أنّ المشتقّة الثانية لاقتران التكلفة موجبة لقِيَم x جميعها حيث $x > 0$، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة صغرى.

إذن: سرعة السيّارة الأكثر اقتصادًا للوقود في أثناء الرحلة 60 km/h

تزداد نسبة استهلاك البنزين بزيادة سرعة السيّارة عن 100km في الساعة، فكلّما زادت سرعة السيارة على تلك السرعة 10 km تزداد نسبة استهلاك الوقود بمعدل 10%؛ بسبب مقاومة السيّارة للهواء.

أتحقق من فهمي

تُمثّل المعادلة $R = 8 + \frac{x^2}{2000}$ تكلفة تشغيل درّاجة نارية بالدينار في الساعة، حيث x سرعة الدرّاجة km/h.

a) أجد الاقتران الذي يُمثّل تكلفة قيادة الدرّاجة مسافة 100 km بدلالة x.

b) أجد سرعة الدرّاجة الأكثر اقتصادًا في الوقود في أثناء الرحلة.

يُعدّ المثالان السابقان تطبيقًا حياتيًّا على القيمة الصغرى، وسأتعرّف في هذا المثال أحد تطبيقات القيمة العظمى.

مثال 3

حدّدت إحدى شركات تصنيع الحواسيب سعر بيع جهاز الحاسوب الواحد (بالدينار) باستعمال الاقتران $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من الأجهزة تُعطى بالاقتران $C(x) = 3000 + 20x$؛ فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.

كان الهدف الأساسي لاختراع الحواسيب حلّ المعادلات الرياضية المعقّدة، وكانت النسخ الأوّلية منها باتّساع غرفة كاملة.

الخطوة 1: أكتب اقترانًا يُمثّل ربح الشركة عند بيع x من الأجهزة.

$R(x) = x \cdot s(x)$ اقتران سعر بيع x من الأجهزة

$= x(1000 - x)$ بتعويض $s(x) = 1000 - x$

$= 1000x - x^2$ بالتبسيط

لإيجاد اقتران الربح لبيع x من الأجهزة، أطرح اقتران التكلفة من اقتران سعر البيع.

$P(x) = R(x) - C(x)$ اقتران الربح

$= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$ بتعويض $R(x) = 1000x - x^2$، $C(x) = 3000 + 20x$

$= -x^2 + 980x - 3000$ بالتبسيط

الخطوة 2: أشتقّ اقتران الربح، ثم أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

$P'(x) = -2x + 980$ مشتقّة اقتران الربح

$-2x + 980 = 0$ بمساواة المشتقّة بالصفر

$-2x = -980$ بطرح 980 من الطرفين

$x = 490$ بقسمة الطرفين على -2

إذن: القيمة الحرجة لاقتران الربح $x = 490$، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$P''(x) = -2$$

وبما أنّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x جميعها حيث $x > 0$، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة عظمى.

إذن: أكبر ربح يُمكن أن تحصل عليه الشركة، هو عند إنتاج 490 جهاز حاسوب وبيعها.

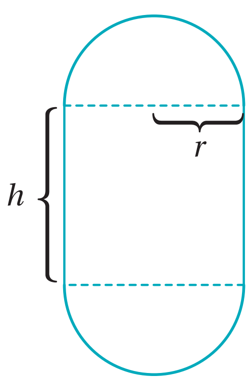
أتحقق من فهمي

حدّدت إحدى شركات تصنيع الثلاجات سعر بيع الثلاجة الواحدة (بالدينار) باستعمال الاقتران $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الثلاجات المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من الثلاجات تُعطى بالاقتران $C(x) = 2250 + 18x$؛ فأجد عدد الثلاجات التي يجب إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.

يُمكن توظيف المشتقّات؛ لإيجاد أكبر مساحة ممكنة لمنطقة ما، وذلك بإيجاد القيمة العظمى لاقتران المِساحة الذي يُمثّل المنطقة.

مثال 4

سلك طوله 100 cm يُراد ثنيه لإحاطة الشكل المجاور، المكوّن من مستطيل طوله h cm وعرضه $2r$ cm، ونصفَي دائرة نصف قطر كل منهما r cm في أعلى المستطيل وأسفله. أجد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها.



الخطوة 1: أكتب اقترانًا يُمثّل مِساحة المنطقة المغلقة.

بما أنّ المنطقة مكوّنة من نصفَي دائرة ومستطيل؛ فإنّ الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المنطقة:

$$A = \pi r^2 + 2rh$$

الخطوة 2: أكتب الاقتران بدلالة متغيّر واحد.

محيط المنطقة	$100 = 2\pi r + 2h$
بكتابة h موضوعًا للقانون	$h = 50 - \pi r$

ولكتابة الاقتران الذي يُمثّل المِساحة بدلالة x، أُعوّض $h=50-\pi r$ بالاقتران.

اقتران مِساحة المنطقة	$A = \pi r^2 + 2rh$
بتعويض $h = 50 - \pi r$	$= \pi r^2 + 2r(50-\pi r)$
بالتبسيط	$= 100r - \pi r^2$

أتذكّر

مِساحة الدائرة: $A = \pi r^2$، حيث r نصف قطر الدائرة.

مِساحة المستطيل: $A = l \times w$؛ حيث l: طول المستطيل، و w: عرض المستطيل.

أُفكّر

لماذا استُثنيَ عرض المنطقة المستطيلة من المحيط؟

الخطوة 3 : أشتقّ اقتران المِساحة، ثمّ أجد القيمة الحرجة وأُحدّد نوعها.

مشتقّة اقتران المساحة
$$\frac{dA}{dr} = 100 - 2\pi r$$

بمساواة المشتقّة بالصفر
$$100 - 2\pi r = 0$$

بطرح 100 من الطرفين
$$-2\pi r = -100$$

بقسمة الطرفين على -2π
$$r = \frac{50}{\pi}$$

إذن: القيمة الحرجة لاقتران المساحة $r = \frac{50}{\pi}$، ولتحديد نوعها أجد المشتقّة الثانية للاقتران.

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -2\pi$$

وبما أنّ المشتقّة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x جميعها حيث $x > 0$، إذن: القيمة الحرجة هي قيمة عظمى.

ولإيجاد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها؛ أُعوّض $r = \frac{50}{\pi}$ باقتران المِساحة:

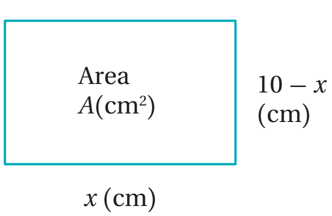
اقتران المساحة بدلالة r
$$A = 100r - \pi r^2$$

بتعويض $r = 50/\pi$
$$= 100\left(\frac{50}{\pi}\right) - \pi\left(\frac{50}{\pi}\right)$$

بالتبسيط
$$= \frac{5000}{\pi} - 50$$

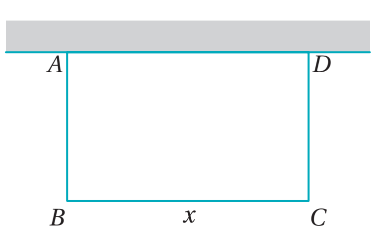
إذن: أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها $\frac{5000}{\pi} - 50\ \text{cm}^2$

أتحقق من فهمي



سلك طوله 20 cm يُراد ثنيه لإحاطة المستطيل المجاور. أجد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها.

أتدرب وأحل المسائل



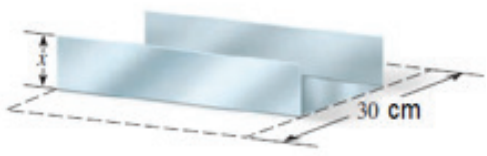
يُمثّل الشكل المجاور مخطّطًا لحديقة منزلية بُنيت مقابل جدار حجري، إذا كان محيط الحديقة دون الجدار يساوي 300 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:

1. أجد المقدار الجبري الذي يُمثّل طول الضلع AB بدلالة x.
2. أجد اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
3. أجد أبعاد الحديقة بحيث تكون مِساحة الحديقة أكبر ما يُمكن.

4 يُريد مصنع للمشروبات الغازية تصميم علبة على شكل أسطوانة سَعتها نصف لتر.

أجد أقلّ كمّية من المواد اللازمة لتصنيع العلبة.

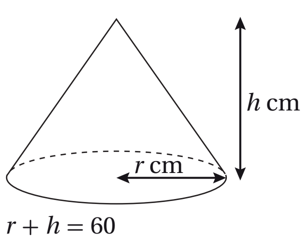
5 يُريد نجّار بناء سقف خشبي لحظيرة حيوانات. إذا كان سقف الحظيرة على شكل مستطيل محيطه $54\ m$؛ فأجد أكبر مِساحة ممكنة لسطح الحظيرة.



مزارب ماء شُكّل من صفيحة معدنية عرضها 30 cm كما في الشكل المجاور.

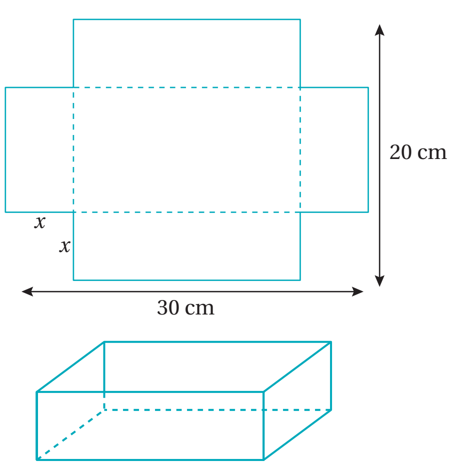
6 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة المقطع العرضي للمزراب بدلالة x.

7 أجد قيمة x التي تجعل مِساحة المقطع العرضي للمزراب أكبر ما يُمكن.



8 يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته $r\ cm$، وارتفاعه $h\ cm$، حيث: $r + h = 60$.

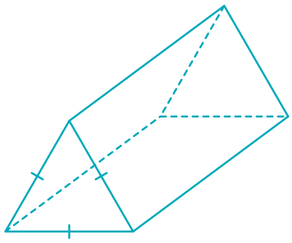
أجد قيمتَي r و h اللتين يكون عندهما حجم المخروط أكبر ما يُمكن.



قطعة ورق مستطيلة الشكل طولها 30 cm، وعرضها 20 cm. قُصّ من جوانبها الأربعة مربّعات متطابقة طول ضلع كل منها x cm كما في الشكل المجاور، ثم ثُنيت الورقة لتشكيل علبة.

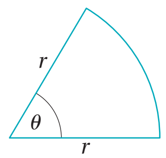
9 أجد الاقتران الذي يُمثّل حجم العلبة بدلالة x.

10 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكن.



11 قالب لصنع الكعك حجمه $500\ cm^3$ على شكل منشور قاعدته مثلّث متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد المنشور بحيث تكون المواد المستعملة في تصنيعه أقلّ ما يُمكن.

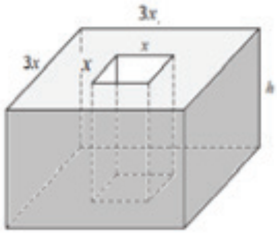
يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه 200 cm



12 أجد الاقتران الذي يُمثّل مِساحة القطاع الدائري بدلالة r.

13 أجد أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

تُريد إحدى شركات الشوكولاته إطلاق منتج جديد في علب من الورق المقوى. إذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات وفي داخلها فراغ على شكل متوازي مستطيلات أيضًا كما في الشكل المجاور، وكان حجمها $2000\ cm^3$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

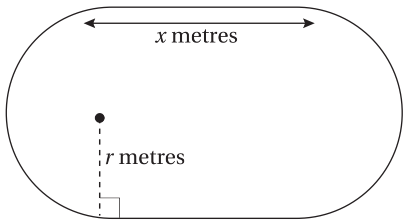


14 الاقتران الممثّل للمِساحة الكلّية لسطح العلبة.

15 قيمة x التي تجعل المِساحة الكلّية لسطح االعلبة أقلّ ما يُمكن.

مهارات التفكير العليا

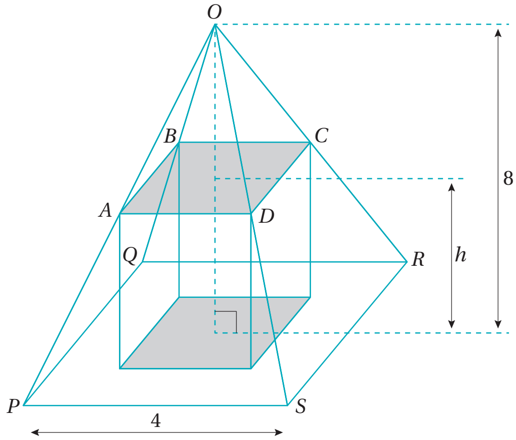
تبرير: مضمار سباق مكوّن من جزأين مستقيمين طول كل منهما x m، وجزأين على شكل نصف دائرة طول نصف قطر كل منهما r m كما في الشكل المجاور. إذا كانت الأجزاء المستقيمة من المضمار عمودية على أقطار الأجزاء، التي على شكل نصف دائرة، وكان محيط المضمار 400 m؛ فأُجيب عمّا يأتي:



16 أجد الاقتران الممثّل لمِساحة المنطقة المغلقة داخل المضمار بدلالة r.

17 أُثبت أنّه عندما يكون لمِساحة المنطقة المغلقة داخل المضمار قيمة حرجة؛ فإنّ المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، ثم أُبيّن نوع القيمة الحرجة. أُبرّر إجابتي.

تحدّ: يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات ارتفاعه h وحدة، موضوعًا داخل هرم رباعي منتظم ارتفاعه 8 وحدات، وطول ضلع قاعدته 4 cm بحيث تنطبق قاعدة المتوازي على قاعدة الهرم، وتقع رؤوس المتوازي A,B,C,D على أحرف الهرم OP, OQ, OR, OS على التوالي. إذا علمتُ أنّ الهرم $OPQRS$ والهرم $OABCD$ متشابهان، فأجد كلًّا ممّا يأتي:



18 طول AD بدلالة h.

19 الاقتران الممثّل لحجم متوازي المستطيلات بدلالة h.

20 قيمة h التي تجعل حجم متوازي المستطيلات أكبر ما يُمكن.

أختار رمز الإجابة الصحيحة، لكل ممّا يأتي:

1 إذا كان $y = 2x^4 - 5x^3 + 2$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $y = 8x^3 - 5x^2 + 2$ b) $y = 4x^4 - 15x^2 + 2$

c) $y = 8x^3 - 15x + 2$ d) $y = 8x^3 - 15x^2$

2 إذا كان $f(x) = (x-3)^2$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $x - 3$ b) $x - 6$

c) $2x - 6$ d) $2x + 9$

3 إذا كان $y = \frac{2x^4 + 9x^2}{3x}$؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{2x^4}{3} + 6x$ b) $2x^2 + 3$

c) $2x + 3$ d) $8x^3 + 18x$

4 إذا كان $f(x) = 12x^{\frac{2}{3}}$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ b) $8x^{\frac{-1}{3}}$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ d) $4x^{\frac{-1}{3}}$

5 إذا كان $f(x) = (1-x)^3$؛ فإنّ $f''(x)$ تساوي:

a) $-3(1-x)^2$ b) $3(1-x)^2$

c) $-6(1-x)$ d) $-3(1-x)$

إذا كان الاقتران $f(x) = (x + \frac{4}{x})^2, x \neq 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

6 $f'(x)$.

7 معادلة المماس عند النقطة $(4, 25)$.

إذا كان الاقتران $y = 2x + \frac{8}{x}, x \neq 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

8 $\frac{dy}{dx}$.

9 ميل مماس المنحنى عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = 10$.

10 إذا كان الاقتران $y = (3x + a)(x - 1)$، حيث a ثابت؛ فأجد إحداثيّات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي a بدلالة a.

إذا كان الاقتران $y = x^2(x^2 - p)$، حيث $p > 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

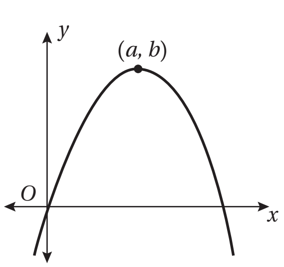
11 مشتقّة الاقتران بدلالة p.

12 النقاط الحرجة للاقتران؛ إذا كانت $p = 8$، ثمّ أُحدّد نوعها.

13 أُمثّل الاقتران بيانيًّا عندما $p = 8$.

14 إذا كان الاقتران $y = x^3 + ax^2 + bx + c$، حيث a و b و c ثوابت؛ فأُثبت أنّه توجد نقطتان حرجتان للاقتران، إذا كانت $a^2 > 3b$. أُبرّر إجابتي.

15 يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي $f(x)$. إذا كان للاقتران نقطة عظمى محلّية عند (a, b):



أُمثّل منحنى الاقتران $f'(x)$ بيانيًّا.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أجد القيم الحرجة لكل من الاقترانات الآتية، ثمّ أُحدّد نوعها:

16 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 58$

17 $f(x) = x^3 - 12x^2$

18 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - 5$

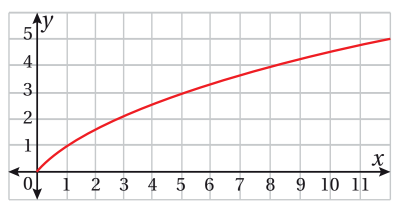
19 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 45x + 8$

إذا كان الاقتران $y = 12\sqrt{x}, x > 0$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

20 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(4, 24)$.

21 معادلة المماس عند النقطة $(100, 120)$.

يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^{\frac{3}{2}}, x > 0$



22 أجد معادلة المماس عند النقطة $(8, 4)$.

23 أجد معادلة المماس عن النقطة التي يكون عندها ميل المنحنى يساوي $\frac{1}{6}$.

إذا كان الاقتران $y = 10 - x^2$؛ فأجد كلًّا ممّا يأتي:

24 معادلة المماس عند النقطة $(2, 6)$.

25 مِساحة المثلث المكوّن من المماس والمحورين الإحداثيّين.

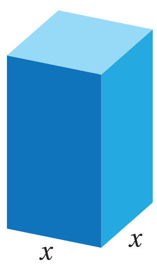
26 يُمثّل المستقيم $x = 2y + 3$ العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $y = x(x + 4)$ عند النقطة P. أجد أحداثيّات النقطة P.

27 إذا كان الضغط والحجم لغاز مُعيّن يرتبطان بالعلاقة: $pV = 1200$، حيث p الضغط وV الحجم، ويزداد الضغط مع الزمن، وبعد t ثانية وفقًا للعلاقة $p = 10 + 0.4\sqrt{t}$. أجد معدّل تغيّر حجم الغاز بالنسبة إلى الزمن عندما $t = 100$

28 بالون كروي الشكل يزداد حجمه بمعدّل $36\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد معدّل تغيّر مِساحة سطح البالون عندما يكون حجمه $2000\ \text{cm}^3$.

29 يُمثّل الاقتران $s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2, 0 \leq t \leq 10$ المسافة (بالمتر)، التي تقطعها سيّارة بعد t ثانية من انطلاقها. أجد أقصى سرعة للسيارة بعد $10\ s$ من حركتها.

30 صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها $x\ cm$ كما في الشكل المجاور.



إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي $144\ \text{cm}$؛ فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

31 إذا كان $f(x) = x^{\pi}$؛ فإنّ $f'(x)$ تساوي:

a) $\frac{22}{7}$ b) $\frac{7}{22}$

c) $\frac{22}{7}x^{\frac{15}{7}}$ d) $\frac{7}{22}x^{\frac{15}{7}}$

32 يوجد للاقتران $y = 4x^2 + 6x + 3$ قيمة حرجة عندما x تساوي:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{-3}{2}$ d) $\frac{-4}{3}$

33 يوجد للاقتران $y = -5x^2 + 7x + 4$ قيمة عظمى محلّية عندما x تساوي:

a) 0.7 b) 1 c) 0 d) −0.7