نهاية اقترانات كسرية

ملاحظة: لايجاد نهاية الاقترانات النسبية يجب اولا التعويض المباشر

امثلة: جد النهايات التالية:

١) $\displaystyle \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢}{٥س + ٣} = \frac{(٢)^٢ + ٢}{٥(٢) + ٣} = \frac{٤ + ٢}{١٠ + ٣} = \boxed{\frac{٦}{١٣}}$

٢) $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{٧س + |س - ١|}{س^٢ + |س - ٢|} = \frac{٧ + ١}{١ + |١ - ١|} = \frac{٧ + ١}{١ + ١} = \frac{٨}{٢} = \boxed{٤}$

٣) $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ١}{\sqrt[٣]{٢س - ١} + ٢} = \frac{\sqrt{٣ + ١} - ١}{\sqrt[٣]{٢(١) - ١} + ٢} = \frac{\sqrt{٤} - ١}{\sqrt[٣]{١} + ٢} = \frac{٢ - ١}{١ + ٢} = \boxed{\frac{١}{٣}}$

٤) $\displaystyle \lim_{س \to ٥} \frac{س + ٣}{س - ٥} = \frac{٥ + ٣}{٥ - ٥} = \boxed{\frac{٨}{\text{صفر}}}$ غير معرفة.

٥) $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{س - ٣}{س^٢ + ٦} = \frac{١ - ٣}{(١)^٢ + ٦} = \boxed{\frac{-٢}{٧}}$

٦) $\displaystyle \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س + ٣} = \frac{٥ - ٥}{٥ + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٨} = \text{صفر}$

مثال: جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

(١) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٤س}$ ، (٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ٢}{س + ٢}$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{س^٢ + ٣س - ٢٨}{٤٩ - س^٢}$ ، (٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٣ - س^٢ - ٢س}$

الحل: (١) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{٣س - ١٢}{س^٢ - ٤س} = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٣\cancel{(س - ٤)}}{س\cancel{(س - ٤)}} = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٣}{س} = \boxed{\frac{٣}{٤}}$

(٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ٢}{س + ٢} = \lim\limits_{س \to -٢} \frac{(٢س - ١)\cancel{(س + ٢)}}{\cancel{س + ٢}} = \lim\limits_{س \to -٢} ٢س - ١ = ٢ \times -٢ - ١ = \boxed{-٥}$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{س^٢ + ٣س - ٢٨}{٤٩ - س^٢} = \lim\limits_{س \to ٧} \frac{(س - ٤)\cancel{(س + ٧)}}{(٧ - س)\cancel{(٧ + س)}} = \lim\limits_{س \to ٧} \frac{-(س - ٤)}{٧ - ٧}$

$= \lim\limits_{س \to ٧} \frac{-س - ٤}{-س - ٧} = \frac{-٧ - ٤}{-٧ - ٧} = \frac{-١١}{١٤}$

(٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٣ - س^٢ - ٢س} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤)}{س(س^٢ - س - ٢)} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)(س^٢ + ٤)}{س\cancel{(س - ٢)}(س + ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)(س^٢ + ٤)}{س(س + ١)} = \frac{(٢ + ٢)(٢^٢ + ٤)}{٢(٢ + ١)} = \frac{٤(٨)}{٦} = \frac{٣٢}{٦} = \boxed{\frac{١٦}{٣}}$

(٥) $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{س^٢ + س - ٦} = \lim\limits_{س \to -٣} \frac{\cancel{(س + ٣)}(س^٢ - ٣س + ٩)}{\cancel{(س + ٣)}(س - ٢)}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \frac{(س^٢ - ٣س + ٩)}{س - ٢} = \frac{(-٣)^٢ - ٣(-٣) + ٩}{-٣ - ٢} = \frac{٢٧}{-٥} = \frac{-٢٧}{٥}$

سؤال على حد النهايات :

(١) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}^2-1)^{10}}{(\text{س}^2-2\text{س}+1)^5}$

الحل :

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}-1)^{10}(\text{س}+1)^{10}}{(\text{س}-1)^5(\text{س}-1)^5} = \lim \dfrac{(\text{س}-1)^{10}(\text{س}+1)^{10}}{((\text{س}-1)^2)^5}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\cancel{(\text{س}-1)^{10}}(\text{س}+1)^{10}}{\cancel{(\text{س}-1)^{10}}} = \lim\limits_{\text{س}\to 1}(\text{س}+1)^{10} = (1+1)^{10} = 1024$

(٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{(3\text{س}-1)^2-25}{\text{س}^2-2\text{س}}$ ، $\dfrac{0}{0}$

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{(3\text{س}-1-5)(3\text{س}-1+5)}{\text{س}(\text{س}-2)} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{(3\text{س}-6)(3\text{س}+4)}{\text{س}(\text{س}-2)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{3\cancel{(\text{س}-2)}(3\text{س}+4)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{3(3\text{س}+4)}{\text{س}} = \dfrac{3(10)}{2} = \dfrac{30}{2} = \boxed{15}$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(2\text{س}+1)^3-27}{3\text{س}^2+2\text{س}-5}$

الحل :

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(2\text{س}+1-3)\left((2\text{س}+1)^2+3(2\text{س}+1)+9\right)}{3\text{س}^2+2\text{س}-5}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(2\text{س}-2)\left((2\text{س}+1)^2+3(2\text{س}+1)+9\right)}{(3\text{س}+5)(\text{س}-1)} = \lim \dfrac{2\cancel{(\text{س}-1)}\left((2\text{س}+1)^2+3(2\text{س}+1)+9\right)}{(3\text{س}+5)\cancel{(\text{س}-1)}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{2\left((2\text{س}+1)^2+3(2\text{س}+1)+9\right)}{3\text{س}+5} = \dfrac{2(9+9+9)}{8} = \dfrac{54}{8} = \dfrac{27}{4}$

٤) $\displaystyle نها_{س\to٠} \frac{(س+٢س^٢)^٤}{س^٤} = \frac{٠}{٠}$

الحل:

$\displaystyle = نها_{س\to٠} \frac{\left(س(١+٢س)\right)^٤}{س^٤} = نها_{س\to٠} \frac{\cancel{س^٤}(١+٢س)^٤}{\cancel{س^٤}}$

$\displaystyle = نها_{س\to٠} (١+٢س)^٤ = (١+٢(٠))^٤ = (١)^٤ = \boxed{١}$

ثانياً - جد: ١) $\displaystyle نها_{س\to١} \sqrt{\frac{س^٢-١}{س-١}}$

الحل:

$\displaystyle = نها_{س\to١} \sqrt{\frac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}}} = نها_{س\to١} \sqrt{س+١} = \sqrt{٢}$

٢) $\displaystyle نها_{س\to٣} \sqrt{\frac{٣س-٩}{٢س^٢-١٨}}$

الحل:

$\displaystyle = نها_{س\to٣} \sqrt{\frac{٣(س-٣)}{٢(س^٢-٩)}} = نها_{س\to٣} \sqrt{\frac{٣\cancel{(س-٣)}}{٢(س+٣)\cancel{(س-٣)}}}$

$\displaystyle = نها_{س\to٣} \sqrt{\frac{٣}{٢(س+٣)}} = \sqrt{\frac{٣}{٢(٣+٣)}}$

$\displaystyle = \sqrt{\frac{٣}{١٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}}$

٦

مهم جداً

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$ غير موجودة، جد أ؟

عند اصفار المقام

$$\Leftarrow \dfrac{\text{أ}}{\text{أ}^{٢} + ٥\text{أ} + ٦} = \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$$

نجد اصفار المقام لأنها تجعل النهاية غير موجودة

$$\Leftarrow \text{أ}^{٢} + ٥\text{أ} + ٦ = ٠$$

$$(\text{أ} + ٢)(\text{أ} + ٣) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{أ} = -٢ \ ، \ \text{أ} = -٣$$

$$\therefore \text{أ} = \{-٢ ، -٣\}$$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س}^{٤} - ١٦)(\text{س} + ١)}{٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل:

$$= \lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٤)(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ٢)(٢\text{س} - ١)} = \lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٢)}(\text{س}^{٢} + ٤)(\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} + ٢)}(٢\text{س} - ١)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٤)(\text{س} + ١)}{(٢\text{س} - ١)} = \dfrac{(-٢ - ٢)((-٢)^{٢} + ٤)(-٢ + ١)}{(٢(-٢) - ١)}$$

$$= \dfrac{-٤ \ (٨) \times -١}{-٥} = \dfrac{+٣٢}{-٥} = \dfrac{-٣٢}{٥}$$

مجموع مكعبين

مثال ٤: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(س+١)^{٣} + (س-١)^{٣}}{س^{٢} + س} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\left((س+١)+(س-١)\right)\left((س+١)^{٢} - (س+١)(س-١) + (س-١)^{٢}\right)}{س(س+١)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{٢س})\left((س+١)^{٢} - (س+١)(س-١) + (س-١)^{٢}\right)}{\cancel{س}(س+١)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\left((س+١)^{٢} - (س+١)(س-١) + (س-١)^{٢}\right)}{(س+١)}$

$= \dfrac{٢\left((١)^{٢} - (١)(-١) + (-١)^{٢}\right)}{(١)} = ٢(١+١+١) = \boxed{٦}$

مثال ٥: $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(٢س+١)^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} + ٢س - ٥} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل: $= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\left((٢س+١)-٣\right)\left((٢س+١)^{٢} + ٣(٢س+١) + ٩\right)}{(س-١)(٣س+٥)}$

ملاحظة: عند تحليل عبارة تربيعية لإيجاد النهايات فإن أحد العوامل هو (س − الذيل).

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(٢س-٢)\left((٢س+١)^{٢} + ٣(٢س+١) + ٩\right)}{(س-١)(٣س+٥)} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(س-١)}\left((٢س+١)^{٢} + ٣(٢س+١) + ٩\right)}{\cancel{(س-١)}(٣س+٥)}$

$= \dfrac{٢\left((٣)^{٢} + ٣(٣) + ٩\right)}{٨} = \dfrac{٥٤ \div ٢}{٨ \div ٢} = \boxed{\dfrac{٢٧}{٤}}$

مثال: جد $\lim_{س \to 2} \frac{2س^3 - 3س - 10}{س^3 - 8}$:

الحل:

$= \lim_{س \to 2} \frac{(\cancel{س-2})(2س^2+4س+5)}{(\cancel{س-2})(س^2+2س+4)} = \lim_{س \to 2} \frac{2س^2+4س+5}{س^2+2س+4}$

$= \frac{2(2)^2+4(2)+5}{(2)^2+2(2)+4} = \frac{21 \div 3}{12 \div 3} = \boxed{\frac{7}{4}}$

مثال: ق(س) $= \frac{5س}{|2س|} + \frac{3}{2}$ جد $\lim_{س \to 0^+}$ ق(س) ، $\lim_{س \to 0^-}$ ق(س) ، $\lim_{س \to 0}$ ق(س)

الحل:

اعادة تعريف $|2س| \Leftarrow 2س = 0 \Leftarrow س = 0$:

$-2س \quad - \quad - \quad | \quad + \quad + \quad 2س$

0

① $\Leftarrow \lim_{س \to 0^+}$ ق(س) $= \lim_{س \to 0^+} \frac{5س}{2س} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$

② $\lim_{س \to 0^-}$ ق(س) $= \lim_{س \to 0^-} \frac{5س}{-2س} + \frac{3}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

$\therefore \lim_{س \to 0}$ ق(س) غير موجودة.

مثال: جد النهايات:

① $\lim_{س \to 0^-} \frac{س}{|س| - س}$

الحل: اعادة تعريف $|س| \Leftarrow س = 0$:

$-س \quad - \quad - \quad | \quad + \quad + \quad س$

$\Leftarrow \lim_{س \to 0^-} \frac{س}{(-س) - س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{س}{-2س} = \boxed{\frac{1}{2}}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{س^2 - [س]}{س^2 - |س|}$

الحل: اعادة تعريف $[س] = 1$ عندما $س \to 1^+$ ، $|س| = س$ عندما $س \to 1^+$

$= \lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{س^2 - 1}{س^2 - س} = \lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{(س-1)(س+1)}{س(\cancel{س-1})}$

$= \lim\limits_{س \to 1^+} \dfrac{س+1}{س} = \dfrac{2}{1} = \boxed{2}$

٢) $\lim\limits_{س \to 2^+} \dfrac{س^2 - 3س + [س]}{س - 2}$

اعادة تعريف: $[س] = 2$ عندما $س \to 2^+$

$= \lim\limits_{س \to 2^+} \dfrac{س^2 - 3س + 2}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2^+} \dfrac{(\cancel{س-2})(س-1)}{(س-2)}$

$= \lim\limits_{س \to 2^+} س - 1 = 2 - 1 = \boxed{1}$

٣) $\lim\limits_{س \to 7} \dfrac{|س - 7|}{س - 7}$

الحل: اعادة تعريف $|س - 7| = 0 \Leftarrow \boxed{س = 7}$

$7 - س$: − − − − | $س - 7$: + + + (عند 7)

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to 7} \dfrac{|س - 7|}{س - 7}$

أ) $\lim\limits_{س \to 7^+} \dfrac{س - 7}{س - 7} = \boxed{1}$

ب) $\lim\limits_{س \to 7^-} \dfrac{7 - س}{س - 7} = \boxed{-1}$

$1 \neq -1 \Leftarrow \lim\limits_{س \to 7} \dfrac{|س - 7|}{س - 7}$ غير موجودة

(١٠)

القسمة التركيبية

مثال ①: استخدم القسمة التركيبية لقسمة س³ + ٤س² + س − ٦ على س + ١

س + ١ = ٠

⇐ $\boxed{س = -١}$

−٦	١	٤	١	
٢	−٣	−١		$\boxed{-١}$
$\boxed{-٤}$	−٢	٣	١	

⇐ س³ + ٤س² + س − ٦ = (س + ١)(س² + ٣س − ٢)

② ٢س³ − ٣س − ١٠ على س − ٢

الحل:

ثابت	س	س²	س³	
−١٠	−٣	٠	٢	
١٠	٨	٤		$\boxed{٢}$
٠	٥	٤	٢	

⇐ ٢س³ − ٣س − ١٠ = (س − ٢)(٢س² + ٤س + ٥).

③ س³ − س² − ١٨ على س − ٣

−١٨	٠	−١	١	
١٨	٦	٣		$\boxed{٣}$
٠	٦	٢	١	

⇐ س³ − س² − ١٨ = (س − ٣)(س² + ٢س + ٦).

(١١)

مثال: جد (٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{|\text{س}^2 + 2\text{س}|}{\text{س}}$

الحل: إعادة تعريف $|\text{س}^2 + 2\text{س}|$: $\text{س}^2 + 2\text{س} = 0$

$\Leftarrow \text{س}(\text{س}+2) = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 0 , -2$

$\text{س}(\text{س}+2)$: $+ + + +$ (-2) $- - - - -$ (0) $+ + + +$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \frac{|\text{س}^2 + 2\text{س}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+2)}{\cancel{\text{س}}} = \boxed{2}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \frac{-\cancel{\text{س}}(\text{س}+2)}{\cancel{\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0^-} -(\text{س}+2) = \boxed{-2}$

$2 \neq -2$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{|\text{س}^2 + 2\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س} + \sqrt{\text{س}^2}}{\text{س}}$

الحل: $\sqrt{\text{س}^2} = |\text{س}| \Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س} + |\text{س}|}{\text{س}}$

$\Leftarrow$ (١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \frac{5\text{س} + \text{س}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0^+} \frac{6\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = \boxed{6}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \frac{5\text{س} + (-\text{س})}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0^-} \frac{4\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = \boxed{4}$

$6 \neq 4$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س} + \sqrt{\text{س}^2}}{\text{س}}$ غير موجودة

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{|\text{س}^2 - 2\text{س}|}{|\text{س} - 2|}$

الحل: $= \lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{|\text{س}(\text{س} - 2)|}{|\text{س} - 2|} = \lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{|\text{س}|\,\cancel{|\text{س} - 2|}}{\cancel{|\text{س} - 2|}}$

خواص القيمة المطلقة

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2} |\text{س}| = |2| = \boxed{2}$

(٥) $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^2 - 4س + 4}}{س - 2}$

الحل: $\sqrt{س^2-4س+4} = \sqrt{(س-2)(س-2)} = \sqrt{(س-2)^2} = |س-2|$

$\Leftarrow |س-2| = 0 \Leftarrow س - 2 = 0 \Leftarrow \boxed{س = 2}$

$-(س-2)$: $- - - -$ | 2 | $س-2$: $+ + +$

$\Leftarrow \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^2-4س+4}}{س-2} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{|س-2|}{س-2}$

(١) $\underset{س \to 2^+}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س-2}}{\cancel{س-2}} = \boxed{1}$

(٢) $\underset{س \to 2^-}{\text{نها}} \dfrac{-\cancel{(س-2)}}{\cancel{س-2}} = \boxed{-1}$

$1 \neq -1 \Leftarrow \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^2-4س+4}}{س-2}$ غير موجودة.

(٦) $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^2 - 2س + 1}}{|2 - 2س|}$

الحل:

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(س-1)(س-1)}}{|2-2س|} = \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(س-1)^2}}{|2(1-س)|}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{|س-1|}}{2 \times \cancel{|1-س|}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

(٧) جد $\underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{|س-3|}{\sqrt{س-3}}$

إعادة تعريف $|س-3|$: $س - 3 = 0 \Leftarrow س = 3$ عندما $س \to 3^+ \Leftarrow \sqrt{س-3}$ معرف على يمين العدد 3

$3-س$: $- - - - -$ | 3 | $س-3$: $+ + +$

$\Leftarrow \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{|س-3|}{\sqrt{س-3}}$

$= \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{س-3}{\sqrt{س-3}} = \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س-3} \times \cancel{\sqrt{س-3}}}{\cancel{\sqrt{س-3}}}$

$= \underset{س \to 3^+}{\text{نها}} \sqrt{س-3} = \boxed{\text{صفر}}$

مثال: جد $\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\sqrt{\text{س} - ٣}}$.

الحل: إعادة تعريف $|\text{س} - ٣| = \text{س} - ٣$ عندما $\text{س} \to ٣^+$

$\leftarrow \sqrt{\text{س} - ٣}$ معرف عند $\text{س} \to ٣^+$

$$- - - \;|_{٣}\; + + +$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \frac{|\text{س} - ٣|}{\sqrt{\text{س} - ٣}} = \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س} - ٣}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} \times \cancel{\sqrt{\text{س} - ٣}}}{\cancel{\sqrt{\text{س} - ٣}}}$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - ٣} = \sqrt{٣ - ٣} = \text{صفر} .$$

مثال: جد:

ب) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{|٣\text{س} - ٥| - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}$

الحل: إعادة تعريف $|٣\text{س} - ٥| = ٣\text{س} - ٥$ عندما $\text{س} \to ٤$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{|٣\text{س} - ٥| - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - ٥ - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - ١٢}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(\text{س} - ٤)}}{(\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٤)}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{٣}{(\text{س} + ٣)} = \boxed{\frac{٣}{٧}}$$

ج) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ \times |\text{س} - ١| - ١٨}{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٩}$

الحل: إعادة تعريف $|\text{س} - ١| = \text{س} - ١$ عندما $\text{س} \to ٣$

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢(\text{س} - ١) - ١٨}{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٩} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ١٨}{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٩}$$

$$\begin{array}{c|cccc} ٣ & ١ & -١ & ٠ & -١٨ \\ & & ٣ & ٦ & ١٨ \\ \hline & ١ & ٢ & ٦ & ٠ \end{array}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٦)\cancel{(\text{س} - ٣)}}{(٢\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٣)}} = \frac{(٣)^٢ + ٢(٣) + ٦}{٢(٣) + ٣} = \frac{٩ + ٦ + ٦}{٩}$$

$$= \boxed{\frac{٢١}{٩}} = \boxed{\frac{٧}{٣}} .$$

مثال ٢: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}-3}{|\text{س}-3|} & , \text{س} < 3 \\ \text{أ}\,\text{س}^2 + 11 & , \text{س} > 3 \end{cases}$ جد أ إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 3}$ ق(س) موجودة.

الحل:
بما أن النهاية موجودة فإن $\lim\limits_{\text{س}\to 3^+} = \lim\limits_{\text{س}\to 3^-}$ أو

① $\lim\limits_{\text{س}\to 3^-} \dfrac{\text{س}-3}{|\text{س}-3|} = \lim\limits_{\text{س}\to 3^-} \dfrac{\cancel{\text{س}-3}}{-(\cancel{\text{س}-3})} = \boxed{-1}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 3^+} \text{أ}\,\text{س}^2 + 11 = \lim\limits_{\text{س}\to 3^+} 9\text{أ} + 11$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3^+} 9\text{أ} + 11 = -1 \Leftarrow 9\text{أ} + 11 = -1 - 11$

$\Leftarrow \dfrac{\cancel{9}\text{أ}}{\cancel{9}} = \dfrac{-12}{9} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \dfrac{-12}{9}}$

مثال ٣: ق(س) = $\begin{cases} [\text{س}+2] & , \text{س} \le 0 \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & , \text{س} > 0 \end{cases}$ جد $\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ ق(س)

الحل: إعادة تعريف $[\text{س}+2] = 1$ عندما $-1 \le \text{س} <$ صفر

[redacted] $= \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \dfrac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = 1$ عندما س > 0

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to 0^-} [\text{س}+2] = \boxed{1}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to 0}$ ق(س) $= 1$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = \boxed{1}$

مثال - جد $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{|\text{٢س}-\text{١}| - |\text{٤}-\text{٥س}|}{\text{س}-\text{١}}$

الحل - العلامة تقريب $|\text{٢س}-\text{١}| = \text{٢س}-\text{١}$ عندما س ← ١

$|\text{٤}-\text{٥س}| = \text{٥س}-\text{٤}$ عندما س ← ١

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{|\text{٢س}-\text{١}| - |\text{٤}-\text{٥س}|}{\text{س}-\text{١}} = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{٢س}-\text{١}) - (\text{٥س}-\text{٤})}{\text{س}-\text{١}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س}-\text{١}-\text{٥س}+\text{٤}}{\text{س}-\text{١}} = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{-\text{٣س}+\text{٣}}{\text{س}-\text{١}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{-\text{٣}\cancel{(\text{س}-\text{١})}}{\cancel{\text{س}-\text{١}}} = \boxed{-\text{٣}}$

مثال - إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^\text{٢}-\text{أ}^\text{٢}}{\text{س}-\text{أ}} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} (\text{س}+\text{٨})$ جد أ

الحل - $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^\text{٢}-\text{أ}^\text{٢}}{\text{س}-\text{أ}} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+\text{أ})\cancel{(\text{س}-\text{أ})}}{\cancel{\text{س}-\text{أ}}} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \text{س}+\text{أ} = \text{٢أ}$

$\Leftarrow \text{٢أ} = \text{٢}+\text{٨} \Leftarrow \dfrac{\text{٢أ}}{\text{٢}} = \dfrac{\text{١٠}}{\text{٢}}$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = \text{٥}}$

مثال - إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^\text{٣}-\text{١})^{\text{٢ن}}}{(\text{س}^\text{٢}-\text{٢س}+\text{١})^{\text{ن}}} = \text{٨١}$ جد قيمة ن

الحل - $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-\text{١})^{\text{٢ن}}(\text{س}^\text{٢}+\text{س}+\text{١})^{\text{٢ن}}}{(\text{س}-\text{١})^{\text{ن}}(\text{س}-\text{١})^{\text{ن}}} = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-\text{١})^{\text{٢ن}}}(\text{س}^\text{٢}+\text{س}+\text{١})^{\text{٢ن}}}{\cancel{(\text{س}-\text{١})^{\text{٢ن}}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} (\text{س}^\text{٢}+\text{س}+\text{١})^{\text{٢ن}} = ((\text{١})^\text{٢}+\text{١}+\text{١})^{\text{٢ن}}$

$= (\text{٣})^{\text{٢ن}} = \text{٨١} \Leftarrow (\text{٣})^{\text{٢ن}} = (\text{٣})^{\text{٤}}$

[redacted]

$\Leftarrow \text{٢ن} = \text{٤}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ن} = \text{٢}}$

سؤال ٥ - جد النهايات :-

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢٥)^{س} - ٥^{س}}{١ - ٥^{س}}$

الحل :- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٥^{٢})^{س} - ٥^{س}}{١ - ٥^{س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٥^{س}\cancel{(٥^{س} - ١)}}{\cancel{١ - ٥^{س}}} = -٥^{(٠)} = \boxed{-١}$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣^{س+١} - ٣}{٩^{س} - ١}$

الحل :- $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣(٣^{س} - ١)}{(٣^{٢})^{س} - ١} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣\cancel{(٣^{س} - ١)}}{(٣^{س} + ١)\cancel{(٣^{س} - ١)}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣}{(٣^{س} + ١)} = \boxed{\dfrac{٣}{٢}}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٤^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦}{٤^{س} - ١}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢^{٢})^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦}{٢^{٢س} - ١} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢^{س} - ١٦)\cancel{(٢^{س} - ١)}}{(٢^{س} + ١)\cancel{(٢^{س} - ١)}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢^{س} - ١٦)}{(٢^{س} + ١)} = \dfrac{(٢)^{٠} - ١٦}{(٢)^{٠} + ١} = \dfrac{١ - ١٦}{١ + ١} = \dfrac{-١٥}{٢}$

٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٩^{س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٣^{٢س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(٣^{س} - ٩)\cancel{(٣^{س} - ٣)}}{\cancel{٣^{س} - ٣}}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} (٣^{س} - ٩) = ٣^{(١)} - ٩ = ٣ - ٩ = \boxed{-٦}$

مثال٥ - جد النهايات

١) $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٧}\right)\left(\frac{١}{س-٧}\right)$ نوحد المقامات

الحل:

$= \underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\cancel{٧-س}^{\,-١}}{٧س} \times \frac{١}{\cancel{س-٧}} = \underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{-١}{٧س} = \frac{-١}{٧ \times ٧} = \frac{-١}{٤٩}$

٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \left(\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٢٥}\right)$ نوحد

الحل:

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{١٥-٣س}{٥س} \left(\frac{١}{(س+٥)(س-٥)}\right)$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{٣(\cancel{٥-س})^{\,-١}}{٥س} \times \frac{١}{(س+٥)(\cancel{س-٥})} = \underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{-٣}{٥س(س+٥)}$

$= \frac{-٣}{٥(٥)(٥+٥)} = \frac{-٣}{٢٥(١٠)} = \frac{-٣}{٢٥٠}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{س-٣} - \frac{١}{س+٣}\right)$

الحل:

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \left(\frac{(س+٣)-(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}\right) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \frac{س+٣-س+٣}{(س-٣)(س+٣)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\cancel{س}} \times \frac{-٢\cancel{س}}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{-٢}{(٠-٣)(٠+٣)} = \frac{-٢}{٩}$

مثال ٥- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{(-4+\text{س})}}{\text{س}}$

الحل :- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\frac{-4+\text{س}+4}{4(-4+\text{س})}}{\frac{\text{س}}{1}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\cancel{-4}+\text{س}+\cancel{4}}{4(-4+\text{س})} \times \dfrac{1}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\cancel{\text{س}}}{4(-4+\text{س})} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{4(\text{س}-4)} = \dfrac{1}{4(0-4)} = \boxed{-\dfrac{1}{16}}$

مثال ٦- $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \left(\dfrac{\text{س}^2+12}{\text{س}^2-4} - \dfrac{\text{س}+2}{\text{س}-2} \right)$

الحل :- نبدأ بتحليل المقام لأن الكسر الثاني يحتوي على عامل من عوامل مقام الكسر الأول

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \left(\dfrac{\text{س}^2+12}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} - \dfrac{(\text{س}+2)(\text{س}+2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2+12-(\text{س}+2)^2}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}^2+12-(\text{س}^2+4\text{س}+4)}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\cancel{\text{س}^2}+12-\cancel{\text{س}^2}-4\text{س}-4}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{8-4\text{س}}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{4\cancel{(2-\text{س})}^{-1}}{(\text{س}+2)\cancel{(\text{س}-2)}} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{-4}{(\text{س}+2)} = \dfrac{-4}{4} = \boxed{-1}$

(*) ملاحظة :- عند توحيد المقامات إذا كان في المقامين عامل مشترك لا نضرب به فقط نضرب بالعامل الآخر.

مثال ٣ :

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \left(\frac{1}{1-س} - \frac{3}{1-س^3} \right)$$

الحل :

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \left(\frac{1}{1-س} - \frac{3}{(1-س)(1+س+س^2)} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{1+س+س^2 - 3}{(1+س+س^2)(1-س)} = \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^2+س-2}{(1+س+س^2)(1-س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(2+س)\cancel{(1-س)}}{(1+س+س^2)\cancel{(1-س)}} = \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{(2+س)}{(1+س+س^2)} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

مثال ٤ :

$$\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^7 - 1}$$

ثابت	س	$س^2$	$س^3$	$س^4$	$س^5$
-1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1

الحل :

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{\cancel{(1-س)}(1+س+س^2+س^3+س^4)}{\cancel{(1-س)}(-س^6-س^5-س^4-س^3-س^2-س-1)}$$

ثابت	س	$س^2$	$س^3$	$س^4$	$س^5$	$س^6$	$س^7$
1	0	0	0	0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

$$= \text{نهـا}_{س \to 1} \frac{1+س+س^2+س^3+س^4}{-س^6-س^5-س^4-س^3-س^2-س-1}$$

$\boxed{1}$

$$= \frac{1+1+1+1+1}{-1-1-1-1-1-1-1} = \boxed{\frac{-5}{7}}$$

مثال ٥ :

$$\text{نهـا}_{س \to -2} \frac{س^5 + 32}{س^4 - 16}$$

ثابت	س	$س^2$	$س^3$	$س^4$	$س^5$
32	0	0	0	0	1
-32	16	-8	4	-2	
0	16	-8	4	-2	1

الحل :

$\boxed{-2}$

$$= \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{(س+2)(س^4-2س^3+4س^2-8س+16)}{(س^2+4)(س^2-4)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{(س^4-2س^3+4س^2-8س+16)\cancel{(س+2)}}{(س^2+4)(س-2)\cancel{(س+2)}}$$

$$= \frac{(-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16}{((-2)-2)((-2)^2+4)} = \frac{16-(-16)+16-(-16)+16}{-32} = \frac{80}{-32}$$

$$= \boxed{\frac{-5}{2}}$$

(٢٠)

مثال: $\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٦٤^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

نخرج عامل مشترك $٨^{\text{س}}$

الحل: $= \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{(٨^{٢})^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}} = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{(٨^{\text{س}})^{٢} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٨^{\text{س}}(٨^{\text{س}} - ١)}{١ - ٨^{\text{س}}} = ٨^{\text{س}}(-١) = ٨^{٠} \times -١ = ١ \times -١ = \boxed{-١}$

ملاحظة: اذا ورد المتغير في الأس:

١) نكتب جميع الأساسات بدلالة الأساس الأصغر

٢) نستبدل الأساس بعد توحيده.

حل المثال بطريقة الاستبدال:

ملاحظة: اذا ورد مقدار غير مرغوب به نحاول ان نستبدله وعند الاستبدال نعمل التالي:

١) نستبدل المقدار غير المرغوب به مثلا ص

٢) نستبدل جميع (س) في النهاية ان وجدت

٣) نستبدل ذيل النهاية

الحل: $\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{٦٤^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \dfrac{(٨^{\text{س}})^{٢} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}} = \text{نها}_{\text{ص}\to ١} \dfrac{\text{ص}^{٢} - \text{ص}}{١ - \text{ص}}$

استبدال:

١) $٨^{\text{س}} = \text{ص}$

٢) استبدال كل س بـ ص X

٣) نستبدل ذيل النهاية $\text{س}\to ٠ \Longleftarrow \text{ص}\to ١$

$= \text{نها}_{\text{ص}\to ١} \dfrac{\text{ص}(\text{ص} - ١)}{١ - \text{ص}}$

$= \text{نها}_{\text{ص}\to ١} -\text{ص} = \boxed{-١}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{4^{س} - 3 \times 2^{س} + 2}{2^{س} - 2}$

الحل:

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{(2^{س})^2 - 3(2^{س}) + 2}{2^{س} - 2} = \lim\limits_{ص \to 2} \dfrac{ص^2 - 3ص + 2}{ص - 2}$

استبدال: $ص = 2^{س}$

$س \to 1 \Leftarrow ص \to 2$

$= \lim\limits_{ص \to 2} \dfrac{\cancel{(ص - 2)}(ص - 1)}{\cancel{(ص - 2)}} = \lim\limits_{ص \to 2} ص - 1 = \boxed{1}$

$3^{س+1} = 3^{س} \times 3^1$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{9^{س} - 4 \times 3^{س+1} + 27}{3^{س} - 3}$

الحل:

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{(3^{س})^2 - 4 \times 3 \times 3^{س} + 27}{3^{س} - 3}$

استبدال:

$ص = 3^{س}$

$س \to 1 \Leftarrow ص \to 3$

$= \lim\limits_{ص \to 3} \dfrac{ص^2 - 12ص + 27}{ص - 3} = \lim\limits_{ص \to 3} \dfrac{\cancel{(ص - 3)}(ص - 9)}{\cancel{(ص - 3)}}$

$= \lim\limits_{ص \to 3} ص - 9 = 3 - 9 = \boxed{-6}$

الضرب بالعامل مرافق

المقدار	مرافقه التربيعي	ناتج الضرب
$\sqrt{٢س - ٣} + ٣$	$\sqrt{٢س - ٣} - ٣$	$٢س - ٣ - ٩ = ٢س - ١٢$
$٥ - \sqrt{٤ - س}$	$٥ + \sqrt{٤ - س}$	$٢٥ - (٤ - س)$
$\sqrt{س + ١} - \sqrt{س - ٤}$	$\sqrt{س + ١} + \sqrt{س - ٤}$	$س + ١ - (س - ٤)$

المقدار	مرافقه التكعيبي	ناتج الضرب
$\sqrt[٣]{س} - ٢$	$(\sqrt[٣]{س})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤$	$س - ٨$
$\sqrt[٣]{س} + أ$	$(\sqrt[٣]{س})^٢ - أ\sqrt[٣]{س} + أ^٢$	$س + أ^٣$
$\sqrt[٣]{س - ١} - \sqrt[٣]{س + ٦}$	$(\sqrt[٣]{س - ١})^٢ + \sqrt[٣]{س - ١} \times \sqrt[٣]{س + ٦} + (\sqrt[٣]{س + ٦})^٢$	$س - ١ - (س + ٦)$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س}+1 &, \text{س} \geq 3 \\ \text{س}^2 - 2 &, \text{س} < 3 \end{cases}$

$\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 9}$ جد $\lim\limits_{\text{س} \to 3} (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

الحل:

① $\lim\limits_{\text{س} \to 3^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{س}^2 - 2 = 9 - 2 = \boxed{7}$

② $\lim\limits_{\text{س} \to 3^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 3^-} 2\text{س}+1 = 2(3)+1 = \boxed{7}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{7}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{هـ}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{(\cancel{\text{س} - 3})(\text{س} - 2)}{(\cancel{\text{س} - 3})(\text{س} + 3)} = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س} - 2}{\text{س} + 3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 3} (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = 7 + \dfrac{1}{6} = 7\dfrac{1}{6}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 2\text{س} + 1$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{3}{(\text{س}-1)^2}$ جد $\lim\limits_{\text{س} \to 1} (\text{ق} \times \text{هـ})$

الحل:

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} (\text{س}^2 - 2\text{س} + 1) \times \dfrac{3}{(\text{س}-1)^2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} (\text{س}-1)(\text{س}-1) \times \dfrac{3}{(\text{س}-1)^2}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 1} \cancel{(\text{س}-1)^2} \times \dfrac{3}{\cancel{(\text{س}-1)^2}}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 1} 3 = \boxed{3}$

مثال: $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س} + \sqrt{6-\text{س}}}{\text{س}+3}$

الحل:

$$= \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س} + \sqrt{6-\text{س}}}{\text{س}+3} \times \frac{\text{س} - \sqrt{6-\text{س}}}{\text{س} - \sqrt{6-\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 - (6-\text{س})}{(\text{س}+3)(\text{س} - \sqrt{6-\text{س}})} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{(\text{س}+3)(\text{س} - \sqrt{6-\text{س}})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س}-2)\cancel{(\text{س}+3)}}{\cancel{(\text{س}+3)}(\text{س} - \sqrt{6-\text{س}})} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س}-2)}{(\text{س} - \sqrt{6-\text{س}})} = \frac{-5}{-3-\sqrt{9}} = \frac{-5}{-6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

مثال: $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 5} \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 10}{4 - \sqrt{3\text{س}+1}}$

الحل:

$$\lim_{\text{س} \to 5} \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 10}{4 - \sqrt{3\text{س}+1}} \times \frac{4 + \sqrt{3\text{س}+1}}{4 + \sqrt{3\text{س}+1}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{(\text{س}^2 - 3\text{س} - 10)(4 + \sqrt{3\text{س}+1})}{16 - (3\text{س}+1)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{(\text{س}-5)(\text{س}+2)(4 + \sqrt{3\text{س}+1})}{16 - 3\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to 5} \frac{(\text{س}-5)(\text{س}+2)(4 + \sqrt{3\text{س}+1})}{15 - 3\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{\cancel{(\text{س}-5)}^{-1}(\text{س}+2)(4 + \sqrt{3\text{س}+1})}{3\cancel{(5-\text{س})}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 5} \frac{-(\text{س}+2)(4 + \sqrt{3\text{س}+1})}{3} = \frac{-7(4+4)}{3} = \frac{-56}{3}$$

٢٥

مثال ٣:

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\sqrt{\text{س}^2+1}-\sqrt{1-2\text{س}^2}}{\text{س}^2}$$

الحل:

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\sqrt{\text{س}^2+1}-\sqrt{1-2\text{س}^2}}{\text{س}^2}\times\frac{\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}}{\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}^2+1-(1-2\text{س}^2)}{(\text{س}^2)\left(\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}\right)}=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}^2+\cancel{1}-\cancel{1}+2\text{س}^2}{(\text{س}^2)\left(\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}\right)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{3\cancel{\text{س}^2}}{(\cancel{\text{س}^2})\left(\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}\right)}=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{\text{س}^2+1}+\sqrt{1-2\text{س}^2}\right)}$$

$$=\frac{3}{(\sqrt{1}+\sqrt{1})}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

مثال ٤:

$$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}-1}{2-\sqrt{\text{س}+3}}$$

الحل:

للتخلص من الجذر ↓   للتخلص من الجذر ↓

$$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}-1}{2-\sqrt{\text{س}+3}}\times\frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}+1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+1}\times\frac{2+\sqrt{\text{س}+3}}{2+\sqrt{\text{س}+3}}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(\text{س}^2\times\text{س}-1)(2+\sqrt{\text{س}+3})}{(4-(\text{س}+3))(\text{س}\sqrt{\text{س}}+1)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(\text{س}^3-1)(2+\sqrt{\text{س}+3})}{(4-\text{س}-3)(\text{س}\sqrt{\text{س}}+1)}=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(\text{س}^3-1)(2+\sqrt{\text{س}+3})}{(1-\text{س})(\text{س}\sqrt{\text{س}}+1)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-1)}}(\text{س}^2+\text{س}+1)(2+\sqrt{\text{س}+3})}{\cancel{(1-\text{س})}(\text{س}\sqrt{\text{س}}+1)}=\lim\frac{-\left((1)^2+1+1\right)(2+\sqrt{1+3})}{(1\times\sqrt{1}+1)}$$

$$=\frac{-3(4)}{2}=\frac{-12}{2}=\boxed{-6}$$

(26)

مثال: $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}{\text{س} - 8} = $ ؟

الحل: طريقة التحليل

$$\lim\limits_{\text{س}\to 8} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}{\text{س} - 8} = \lim\limits_{\text{س}\to 8} \frac{\cancel{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}}{(\cancel{\sqrt[3]{\text{س}} - 2})\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4} = \frac{1}{12}$$

حل آخر:

للتخلص من الجذر

$$\lim\limits_{\text{س}\to 8} \frac{(\sqrt[3]{\text{س}} - 2)}{\text{س} - 8} \times \frac{\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)}{\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 8} \frac{\cancel{(\text{س} - 8)}}{\cancel{(\text{س} - 8)}\left((\sqrt[3]{\text{س}})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4\right)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4}$$

$$= \frac{1}{4+4+4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

مثال: $\lim\limits_{\text{س}\to 7} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}+1} - 2}{\text{س} - 7} = $ ؟ في حالة المرافق التكعيبي نأخذ المرافق القوس الأكبر

الحل:

$$\lim\limits_{\text{س}\to 7} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+1} - 2}{\text{س} - 7} \times \frac{\left((\sqrt[3]{\text{س}+1})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}{\left((\sqrt[3]{\text{س}+1})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 7} \frac{\text{س} + 1 \underbrace{- 8}_{-7}}{(\text{س} - 7)\left((\sqrt[3]{\text{س}+1})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 7} \frac{\cancel{(\text{س} - 7)}}{\cancel{(\text{س} - 7)}\left((\sqrt[3]{\text{س}+1})^2 + 2\sqrt[3]{\text{س}+1} + 4\right)}$$

$$= \frac{1}{4+4+4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

مثال ١: $\underset{س \to ١}{نها} \dfrac{٣ - \sqrt{س+٨}}{\sqrt[٣]{س+٧} - ٢} = ؟$

الحل:

للتعويض مباشر ← للتخلص من الجذر ← للتخلص من الجذر ← للتعويض مباشر

$$\underset{س \to ١}{نها} \frac{٣ - \sqrt{س+٨}}{\sqrt[٣]{س+٧} - ٢} \times \frac{٣ + \sqrt{س+٨}}{(٣ + \sqrt{س+٨})} \times \frac{((\sqrt[٣]{س+٧})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + ٤)}{((\sqrt[٣]{س+٧})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + ٤)}$$

$$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{(٩ - (س + ٨))((\sqrt[٣]{س+٧})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + ٤)}{(س + ٧ - ٨)(٣ + \sqrt{س+٨})}$$

$$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{(٩ - س - ٨)((\sqrt[٣]{س+٧})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + ٤)}{(س + ٧ - ٨)(٣ + \sqrt{س+٨})}$$

$$= \underset{س \to ١}{نها} \frac{(\cancel{١ - س})^{-١}(٤ + ٤ + ٤)}{(\cancel{س - ١})(٦)} = \frac{-١٢}{٦} = \boxed{-٢}$$

مثال ٢: $\underset{س \to -٢}{نها} \dfrac{س + \sqrt[٣]{س+١٠}}{س + ٢} = ؟$

الحل:

$$\underset{س \to -٢}{نها} \frac{س + \sqrt[٣]{س+١٠}}{س + ٢} \times \frac{(س^٢ - س\sqrt[٣]{س+١٠} + (\sqrt[٣]{س+١٠})^٢)}{(س^٢ - س\sqrt[٣]{س+١٠} + (\sqrt[٣]{س+١٠})^٢)}$$

$$= \underset{س \to -٢}{نها} \frac{س^٣ + س + ١٠}{(س + ٢)(س^٢ - س\sqrt[٣]{س+١٠} + (\sqrt[٣]{س+١٠})^٢)}$$

$$= \underset{س \to -٢}{نها} \frac{(\cancel{س+٢})(س^٢ - ٢س + ٥)}{(\cancel{س+٢})(س^٢ - س\sqrt[٣]{س+١٠} + (\sqrt[٣]{س+١٠})^٢)}$$

١	٠	١	١٠
	-٢	٤	-١٠
١	-٢	٥	صفر

$\boxed{-٢}$

$$= \underset{س \to -٢}{نها} \frac{(س^٢ - ٢س + ٥)}{(س^٢ - س\sqrt[٣]{س+١٠} + (\sqrt[٣]{س+١٠})^٢)}$$

$$= \frac{(-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٥}{٤ + ٤ + ٤} = \boxed{\frac{١٣}{١٢}}$$

٢٨

وزاري

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\text{س}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}+3}} - \frac{1}{2}\right) = ؟$$

الحل:

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\text{س}-1}\left(\frac{2-\sqrt{\text{س}+3}}{2\sqrt{\text{س}+3}}\right) \times \frac{2+\sqrt{\text{س}+3}}{2+\sqrt{\text{س}+3}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4-(\text{س}+3)}{(\text{س}-1)\left(2\sqrt{\text{س}+3}\right)\left(2+\sqrt{\text{س}+3}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{4-\text{س}-3}{(\text{س}-1)\left(2\sqrt{\text{س}+3}\right)\left(2+\sqrt{\text{س}+3}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{-\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{(\text{س}-1)}\left(2\sqrt{\text{س}+3}\right)\left(2+\sqrt{\text{س}+3}\right)} = \frac{-1}{2(2)\times(2+2)} = \boxed{\frac{-1}{16}}$$